

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ЭКОНОМИКИ

JEL: C11; E32; E37
УДК: 330.33

Использование байесовских методов для макроэкономического моделирования фаз бизнес-цикла

М. Е. Гусева, А. М. Силаев

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Российская Федерация, 603155, Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12

Для цитирования: Гусева М. Е., Силаев А. М. (2021) Использование байесовских методов для макроэкономического моделирования фаз бизнес-цикла. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Экономика*. Т. 37. Вып. 2. С. 298–317. <https://doi.org/10.21638/spbu05.2021.205>

В данной статье рассматриваются особенности применения двух моделей для оценки макроэкономической динамики в США: байесовской векторной авторегрессии (BVAR) и байесовской векторной авторегрессии с марковскими переключениями (MSBVAR). Целью исследования является выявление наиболее адекватной модели на основе минимизации среднеквадратической ошибки прогноза для макроэкономических переменных: реальный ВВП США и занятость. Для эффективного прогнозирования спадов и подъемов требуется использовать модели с переменной структурой, позволяющие учитывать случайный характер макроэкономических факторов. Модели с марковскими цепями включают в себя множество уравнений (структур). Механизмы переключения между этими структурами контролируются ненаблюдаемой переменной, которая следует марковскому процессу первого порядка. Период оценивания моделей — с I квартала 1953 г. по III квартал 2015 г. Оценка параметров моделей произведена на основе априорного независимого нормального — обратного распределения Уишарта. На основе результатов оценивания двумерной модели с марковскими переключениями вычислены средние темпы роста ВВП и ожидаемая продолжительность нахождения в каждом режиме. Для получения прогноза применяется рекурсивная схема регрессии. Точечные прогнозы сравниваются с фактическими значениями интересующих временных рядов. На основе среднесрочных прогнозов рассчитываются среднеквадратические ошибки. Точность полученных прогнозов MSBVAR-модели сравнивается с прогнозами стандартной модели векторной авторегрессии BVAR, и делается вывод

о наиболее подходящей модели. В рамках данной работы строятся импульсные функции отклика, позволяющие оценить, как реагируют переменные в модели на изменения, шоки.

Ключевые слова: модели с марковскими переключениями, байесовские оценки, бизнес-циклы.

Введение

Среди главных задач макроэкономической науки выделяются понимание причин экономических колебаний (подъемов и спадов), а также применение модельного аппарата для их прогнозирования. Нестабильность на международных финансовых и валютных рынках, волатильность цен на энергоресурсы оказывают серьезное воздействие на экономическую динамику во многих странах по всему миру. Движение экономики через чередующиеся периоды подъема и спада известно как бизнес-цикл. Выделяют четыре фазы бизнес-цикла: подъем, пик, спад, дно. Одним из последних событий, доказывающих цикличность экономики, является нестабильность в США в 2014–2015 гг., на которую повлиял ипотечный кризис в США и мировой финансовый кризис 2008–2009 гг.

Существует множество теоретических обоснований причин экономической цикличности, а также методов ее прогнозирования. Однако моделирование экономических процессов осложняется тем, что большинство количественных переменных являются неоднородными и зависят от некоторых наблюдаемых и ненаблюдаемых качественных признаков. Для более эффективного прогнозирования спадов и подъемов требуется использовать модель, которая могла бы отражать сложность исследуемого экономического явления при помощи адаптации структуры модели к изменяющимся характеристикам наблюдений. Таким образом, необходимо подобрать инструментарий, позволяющий с высокой точностью выявить динамику взаимосвязанных макроэкономических процессов и периодичность их колебаний, а также провести сценарный анализ последствий использования разнообразных инструментов экономической политики регулирующими органами.

В связи с тем, что резкие «выбросы» возникают по причине финансовых кризисов или внезапных изменений в государственной экономической политике, в настоящее время стремительно развиваются неструктурные методы макроэкономического прогнозирования. Традиционным подходом во многих современных исследованиях является использование моделей векторной авторегрессии (Vector Autoregression, далее — VAR). Они стали активно применяться в макроэкономике благодаря работам Т. Сарджента и К. Симса (лауреатов Нобелевской премии по экономике в 2011 г.) [Sargent, Sims, 2011], но более ранние векторные обобщения авторегрессионных процессов можно найти в работах Г. Оркутта [Orcutt, 1948] и Х. Вольда [Wold, 1960]. Ключевой работой К. Симса по VAR-моделям является «Макроэкономика и реальность» [Sims, 1980]. В этом исследовании он доказывает, что данная модель позволяет рассматривать в динамике множество переменных и учитывать их взаимодействия.

Модели VAR широко используются для анализа макроэкономических переменных различных стран. В частности, можно отметить работы Дж. Гамильтона [Hamilton, 1989; 2005; 2016], Х. Кролзига [Krolzig, 1997], К. Симса и соавторов [Sims,

Zha, 2006; Sims, Waggoner, Zha, 2008], К. Хюбрика и Р. Тетлоу [Hubrich, Tetlow, 2012], Дж. Стока и М. Уотсон [Stock, Watson, 2016], Д. Теодоридиса и др. [Theodoridis et al., 2017], в которых модели VAR применяются для анализа экономики США после Второй мировой войны. Основным недостатком VAR-моделей является «проклятие размерности», то есть необходимость оценивать большое число коэффициентов, что затруднительно при малом числе наблюдений. В модели с n -переменными и p -лагами оценивается $n(1+np)$ коэффициентов. Помочь решить эту проблему может идея сжатия коэффициентов пространства. Она реализуется за счет применения байесовского анализа. Использование априорной информации позволяет уменьшить неопределенность при оценке коэффициентов. В работе Т. Доана, Р. Литтермана, К. Симса [Doan, Litterman, Sims, 1984] показано, что байесовская VAR (далее — BVAR) на исследуемой выборке производит прогнозы точнее, чем одномерные и статичные VAR-модели. Согласно их анализу, байесовский подход позволяет преодолеть численные трудности, связанные с максимизацией функции правдоподобия. В моделях, содержащих большое число параметров или оцениваемых на коротких выборках, функция правдоподобия может содержать несколько локальных максимумов или, наоборот, быть достаточно плоской. Байесовский подход, благодаря численной процедуре генерирования реализаций случайных величин, позволяет решить эту проблему.

Макроэкономические связи изменяются в период перехода между фазами бизнес-цикла. Модели с марковскими переключениями являются представителями широкого класса моделей, называемых моделями с ненаблюдаемыми компонентами. Они включают в себя уравнения (структуры), описывающие поведение временных рядов в различных режимах. При помощи переключения между этими структурами улавливаются сложные динамические закономерности. В каждой такой модели присутствует, помимо латентного процесса, дополнительное уравнение, связывающее наблюдаемые переменные с латентными. Механизмы переключения в модели контролируются ненаблюдаемой переменной, которая следует марковскому процессу первого порядка. Марковское свойство означает, что текущее состояние переменной зависит от предыдущего ее значения. То есть одна структура, превалирующая в модели определенный период времени, переключается другой структурой при смене режима. В исследовании С. Кослета и Л. Ли выписана функция правдоподобия для моделей с переключениями [Cosslett, Lee, 1985]. Для процессов с марковскими переключениями выписаны моментные условия и общие условия стационарности в ряде работ [Tjøstheim, 1986; Yang, 2000; Francq, Zakoian, 2001].

Оригинальная модель с переключениями создана для описания поведения среднего. Эта авторегрессионная модель с марковскими переключениями (MSAR) широко применялась для описания экономических и финансовых временных рядов в работах Дж. Гамильтона (см., например: [Hamilton, 1989]). К настоящему времени сконструированы также векторные авторегрессионные модели с марковскими переключениями (MSBVAR) [Fruhwirth-Schnatter, 2008]. В работе Ч. Кима и Ш. Нельсона развит байесовский подход к оцениванию векторных авторегрессионных моделей с марковскими переключениями [Kim, Nelson, 1999], а в статьях К. Симса и др. предложены способы подбора гиперпараметров [Sims, Zha, 1998; Sims, Waggoner, Zha, 2008]. В одном из последних исследований М. Боньянни и Е. Хербста доказана эффективность алгоритмов последовательного Монте-Карло (SMC) при

оценке результатов MSVAR [Bognanni, Herbst, 2014]. Относительно многошаговых процедур МСМС преимущества алгоритмов SMC заключаются в том, что они проще в реализации, легко распараллеливаются и не ограничиваются использованием удобных отношений между априорным распределением и функцией максимально правдоподобия.

Целью настоящего исследования является построение байесовских моделей векторной авторегрессии MSBVAR и BVAR для временных рядов реального ВВП США и занятости в США на основе критерия минимизации среднеквадратической ошибки прогноза. Наша гипотеза заключается в том, что долгосрочная взаимосвязь между ВВП и занятостью США описывается нелинейным процессом, а именно марковским процессом с двумя режимами: подъемом и спадом. Статья имеет следующую структуру: в первом разделе дается обзор моделей векторных авторегрессий, описывается байесовский метод оценки и выбор априорного распределения; во втором разделе описываются используемые в модели данные, результаты первичной обработки временных рядов, а также процедура выбора параметров и верификации моделей; в третьем разделе проводятся анализ и интерпретация полученных результатов и строятся среднесрочные прогнозы, а также делаются выводы о наиболее подходящей модели для прогнозирования.

1. Описание моделей байесовской векторной авторегрессии

В этой части статьи содержится общая идея и принципы оценивания двух моделей векторной авторегрессии BVAR и MSBVAR. Модель векторной авторегрессии (BVAR) без ограничений может быть записана следующим образом:

$$Y_t = c + A_1 Y_{t-1} + \dots + A_p Y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (1)$$

где $Y_t = (y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{nt})'$ — вектор исходных переменных модели; p — число лагов; c — вектор постоянных коэффициентов; $A_1 \dots A_p$ — матрица оцененных параметров, $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2 I_{n \times n})$. Каждая матрица A_p содержит коэффициенты перед всеми эндогенными переменными Y_p , взятыми с лагом k , ($k = 1, \dots, p$), и имеет размерность $n \times n$. Каждое из n уравнений содержит $k = 1 + np$ неизвестных параметров, подлежащих оценке, так что общее количество оцениваемых параметров составляет $n(1 + np)$. Перегруппировав переменные из уравнения (1) таким образом, что $A = (c', A'_1, A'_2, \dots, A'_p)$ и $X_t = (1, Y'_{t-1}, Y'_{t-2}, \dots, Y'_{t-p})$, получаем:

$$Y = XA + E. \quad (2)$$

Здесь Y — матрица размера $T \times n$; X — матрица размерностью $T \times (1 + np)$; A — матрица коэффициентов модели размера $(1 + np) \times n$; E — матрица ошибок размера $T \times n$.

В статье К. Симса и др. [Sims, Waggoner, Zha, 2008] модель векторных авторегрессий обобщена на более сложные динамические паттерны, то есть векторные авторегрессионные модели с марковскими переключениями (MSBVAR):

$$Y'_t A_0(s_t) = \sum_{i=1}^p Y'_{t-i} A_i(s_t) + z'_t C(s_t) + \varepsilon'_t \Xi^{-1}(s_t), \quad t = 1, \dots, T \quad (3)$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, In),$$

где Y_t — n -мерный вектор-столбец эндогенных переменных в момент времени t ; z_t — m -мерный вектор-столбец экзогенных и детерминированных переменных в момент времени t ; ε_t — n -мерный вектор-столбец ненаблюдаемых случайных ошибок в момент времени t ; $A_i(s_t)$ — обратимая матрица размерностью $n \times n$; $C(s_t)$ — матрица $m \times n$; $\Xi(s_t)$ — диагональная матрица $n \times n$; s_t — марковская цепь первого порядка с матрицей переходных вероятностей Q , где s_{1t} и s_{2t} — две независимые переменные режима.

Так как s_t — ненаблюдаемая переменная состояния, принимающая значение s_{1t} и s_{2t} , модель переключений состоит из двух спецификаций типа VAR:

$$\begin{cases} Y_t' A_0(s_{1t}) = \sum_{i=1}^p Y_{t-i}' A_i(s_{1t}) + z_t' C(s_{1t}) + \varepsilon_t' \Xi^{-1}(s_{1t}), s_t = s_{1t} \\ Y_t' A_0(s_{2t}) = \sum_{i=1}^p Y_{t-i}' A_i(s_{2t}) + z_t' C(s_{2t}) + \varepsilon_t' \Xi^{-1}(s_{2t}), s_t = s_{2t}. \end{cases} \quad (4)$$

Матрица переходных вероятностей Q :

$$Q = \begin{pmatrix} p(s_t = 0 | s_{t-1} = 0) & p(s_t = 1 | s_{t-1} = 0) \\ p(s_t = 0 | s_{t-1} = 1) & p(s_t = 1 | s_{t-1} = 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где p_{ij} при $(i, j = 1, 2)$ обозначает вероятность перехода в состояние $s_t = j$ из состояния $s_{t-1} = i$, а сумма по столбцам равна 1. Матрица перехода управляет случайным поведением переменной состояния и зависит от параметров (p_{11}, p_{22}) . Таким образом, марковская переменная состояния приводит к случайным и частым сменам режима, а вероятности перехода определяют персистентность каждого из режимов.

Для оценивания параметров модели векторной авторегрессии существует, помимо метода наименьших квадратов, альтернативный алгоритм на основе байесовского подхода. Этот подход имеет множество преимуществ. Одним из его достоинств является то, что введение априорных вероятностей позволяет понизить неопределенность в распределении параметров модели. Благодаря добавлению априорной информации, которая в явном виде учитывает представления исследователя, можно сделать прогноз более точным. По отношению к методу максимального правдоподобия или методу наименьших квадратов байесовский подход признается менее субъективным, и его оценки являются более общими. Вместе с тем за счет развития информационных технологий и программного обеспечения сняты ограничения на использование только сопряженных распределений (т.е. распределений, при которых функция правдоподобия, априорное распределение и апостериорное распределение принадлежат одному классу) [Karlsson, 2013]. Учитывая перечисленные достоинства байесовского подхода, уравнения (1) и (3) оцениваются этим методом.

Формула Байеса позволяет с учетом имеющихся наблюдений получить апостериорное распределение (условное распределение параметров модели). Согласно этой формуле, апостериорная плотность распределения равна произведению функции правдоподобия и априорной плотности:

$$p(A, \Sigma | Y) \propto p(Y | A, \Sigma) p(A, \Sigma), \quad (6)$$

где $p(A, \Sigma | Y)$ — апостериорная плотность параметров модели при условии имеющихся данных Y ; $p(Y | A, \Sigma)$ — функция правдоподобия; $p(A, \Sigma)$ — априорная плотность распределения параметров; A — матрица коэффициентов; Σ — ковариационная матрица шумов. Модель описывается функцией правдоподобия $p(Y | A, \Sigma)$, параметры модели A, Σ являются случайными величинами, для которых вводится априорное распределение с гиперпараметрами. Априорное распределение отражает ожидание исследователя относительно истинной величины параметра. Для оценки модели использована параметризация, предложенная К. Симсом и Т. Жа [Sims, Zha, 1998], называемая Симс — Жа приор (Sims — Zha prior). Относительно гиперпараметров также делаются предположения об их априорном распределении, называемом гиперприоры (hyperpriors). Апостериорное распределение параметров модели, таким образом, будет определяться параметрами гиперприоров.

Для априорных распределений параметров модели (гиперприоров) — $p(A, \Sigma)$ — в качестве априорного распределения коэффициентов и шумов модели используется комбинация многомерного нормального распределения и обратного распределения Уишарта:

$$p(A, \Sigma) = p(A | \Sigma) p(\Sigma), \quad (7)$$

где $p(A | \Sigma)$ — многомерное нормальное распределение для матрицы A ; $p(\Sigma)$ — обратное распределение Уишарта для матрицы Σ . Распределение Уишарта — это многомерное обобщение гамма-распределения, порождающее положительно определенную матрицу.

Для получения апостериорного распределения используется комбинация многомерного нормального распределения $A | \Sigma N(\bar{A}, \bar{\Psi})$ и обратного распределения Уишарта $\Sigma \sim IW(\bar{S}, \nu)$, уравнение (6) получает следующий вид:

$$p(A, \Sigma) = p(A | \Sigma) p(\Sigma) = N\left(\bar{A}, \bar{\Psi}\right) IW(\bar{S}, \nu), \quad (8)$$

Здесь \bar{S} — масштабирующая матрица; ν — число степеней свободы. Параметры $\bar{A}, \bar{\Psi}, \bar{S}, \nu$ определяют характеристики априорного распределения, а (\cdot) — функция векторизации. Чтобы определить априорное распределение, необходимо задать параметры $\bar{A}, \bar{\Psi}, \bar{S}, \nu$.

Априорное распределение Миннесота (Minnesota prior) является наиболее распространенным подходом, позволяющим задать коэффициенты в уравнении (8). Согласно идее Р. Литтермана, лежащей в основе этой параметризации, макроэкономические переменные следуют процессу случайного блуждания [Litterman, 1986]. Предложенная параметризация позволяет избежать трудоемкой задачи определения всех коэффициентов матриц A_0, Ψ_0 , путем определения только элементов на главной диагонали этих матриц. В данной статье для моделей BVAR и MSBVAR будет использоваться несколько видоизмененная параметризация Миннесота, предложенная в работе Симса и Т. Жа [Sims, Zha, 1998].

Рассмотрим параметризацию подробнее. Для практического применения VAR модель переписывается в векторной форме следующим образом:

$$\sum_{l=0}^p y_{t-l} A_l = d + \varepsilon_t, t = 1, 2, \dots, T. \quad (9)$$

Здесь y_t — вектор переменных $1 \times n$; A_l — матрица коэффициентов размерностью $1 \times n$ с лагом l ; p — максимальное число лагов; c — вектор констант; $\varepsilon_t \sim N(0, I_{n \times n})$.

Эта структурная модель может быть преобразована в многомерную регрессию путем определения A_0 как корреляция между переменными за один и тот же период времени и A_+ как матрица коэффициентов для лагированных переменных

$$YA_0 + XA_+ = E, \quad (10)$$

где Y — матрица размерности $T \times n$; A_0 — матрица размерности $n \times n$; X — матрица размерности $T \times (np + 1)$; A_+ — матрица размерности $(np + 1) \times n$; E — константа размерности $T \times n$.

Следующие обозначения будут использованы для записи VAR-модели в более компактном виде:

$$a_0 = \text{vec}(A_0), \quad a_+ = \text{vec} \begin{pmatrix} -A_1 \\ \dots \\ -A_p \\ d \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_+ \end{pmatrix}, \quad a = \text{vec}(A), \quad (11)$$

где A состоит из двух матриц, а vec — оператор векторизации, который преобразует матрицу в вектор.

Модель VAR из уравнения (10) можем записать как линейную модель остатков, обозначив $Z = [YX]$ и $A = [A_0|A_+]$:

$$ZA = E. \quad (12)$$

Функцию правдоподобия для многомерного нормального распределения модели векторной авторегрессии можно представить в следующем виде, где tr — след матрицы:

$$L(Y|A) \propto |A_0|^T \exp \left[-0,5 \text{tr} (ZA)' (ZA) \right] \propto |A_0|^T \exp \left[-0,5 a' (I \otimes ZZ') a \right]. \quad (13)$$

Априорное распределение для A или матрицы коэффициентов a следующее:

$$\pi(a) = \pi(a_+ | a_0) \pi(a_0), \quad (14)$$

$$\pi(a) = \pi(a_0) \phi(\tilde{a}_+, \psi), \quad (15)$$

где \tilde{a}_+ и ψ — среднее значение и ковариационная матрица параметров априорного распределения a_+ , $\phi(\cdot)$ — многомерное нормальное распределение.

Апостериорное распределение коэффициентов имеет вид

$$q(A) \propto L(Y|A) \pi(a_0) \phi(\tilde{a}_+, \psi) \propto \pi(a_0) |A_0|^T |\psi|^{-0,5} \times \exp \left[-0,5 (a_0' (I \otimes Y'Y) a_0 - 2a_+' (I \otimes X'Y) a_0 + a_+' (I \otimes X'X) a_+ + \tilde{a}_+' \psi \tilde{a}_+) \right], \quad (16)$$

Симс — Жа приор определяется путем установления условного среднего для $a_+ | a_0$. Основным предположением об априорном распределении параметров модели является то, что поведение переменных подобно случайному блужданию:

$$E(A_0|A_+) = \begin{bmatrix} A_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

К. Симс и Т. Жа используют серию гиперпараметров, определяющих масштаб вариации переменных и дающих эффект «сжатия» для коэффициентов модели. Чтобы применить гиперпараметры для A_+ , необходимо помнить, что $V(A_+|A_0) = \psi$ — априорная ковариационная матрица \tilde{a}_+ . Априорные значения матрицы ковариаций коэффициентов модели VAR задаются диагональной матрицей, где элементы на главной диагонали определяются как

$$\psi'_{l,j,i} = \left(\frac{\lambda_0 \lambda_1}{\sigma_j l^{\lambda_3}} \right)^2. \quad (18)$$

Более подробно данная методология изложена в работах К. Симса и др. [Sims, Zha, 1998; Sims, Waggoner, Zha, 2008], М. Банбура и др. [Bańbura, Giannone, Lenza, 2010]. В табл. 1 приведены сводные данные о гиперпараметрах в модели.

Таблица 1. Гиперпараметры Симс — Жа априорного распределения

Параметр	Допустимые значения	Название гиперпараметра	Описание гиперпараметра
λ_0	[0,1]	Overall tightness of the hyperparameter	Параметр, контролирующий жесткость априорного распределения в целом
λ_1	>0	Standard deviation or tightness of the prior around the AR(1) parameters	Параметр дисперсии остатков AR(1) модели для j -й переменной
λ_3	>0	Lag decay	Параметр скорости убывания влияния каждого последующего лага данной переменной в ее собственном уравнении
λ_4	≥ 0	Scale of standard deviation of intercept	Параметр, контролирующий относительную жесткость распределения константы
λ_5	≥ 0	Scale of standard deviation of exogenous variable coefficients	Параметр, отвечающий за коэффициенты экзогенных переменных в модели
μ_5	≥ 0	Sum of coefficients / Cointegration (long-term trends)	Параметр, используемый для реализации предположения о наличии единичного корня в уравнениях модели
μ_6	≥ 0	Initial observations / dummy observation (impacts of initial conditions)	Параметр, используемый для реализации предположения о наличии коинтеграции
N	>0	Prior degrees of freedom	Число степеней свободы

Составлено по: [Sims, Zha, 1998; Sims, Waggoner, Zha, 2008].

Гиперпараметры для BVAR- и MSBVAR-моделей идентичны. Отличие MSBVAR-модели состоит в необходимости использовать дополнительное априорное распределение для вектора вероятностей (режимов). Согласно исследо-

ванию Симса и др. [Sims, Waggoner, Zha, 2008], априорным распределением для марковской цепи является распределение Дирихле, которое было выбрано для оценки модели.

Оценка коэффициентов и ковариаций шумов требует извлечений из апостериорного распределения. Для этого используются процедуры численного интегрирования — МСМС-методы, среди которых в BVAR наибольшее распространение получил алгоритм сэмплирования по Гиббсу (Gibbs sampling) [Albert, Chib, 1993]. Сэмплирование по Гиббсу — алгоритм для генерации выборки совместной плотности множества случайных величин в условиях, когда совместное распределение неизвестно, но условные плотности известны. На каждом шаге значение случайной величины извлекается при фиксированных остальных. Последовательность получаемых значений сходится к маргинальной (предельной) плотности [Karlsson, 2013].

Описанная методология позволяет оперировать большими массивами данных и строить прогноз на среднесрочном и долгосрочном временном горизонте.

2. Оценка моделей на исторических данных

2.1. Описание данных

Для оценки моделей BVAR и MSBVAR выбрано два показателя: реальный ВВП США и занятость США. Выбор данных показателей обусловлен двумя причинами. Во-первых, существуют эмпирические исследования, где оценивание VAR- и MSVAR-моделей проводится именно по этим двум показателям (например, в работе Ш. Хсу и Ч. Куана [Hsu, Kuan, 2001]). Во-вторых, работа не имеет целью построение структурной экономической модели. Простая модель векторной авторегрессии рассматривается как эталонная модель.

Рецессия — это снижение экономической активности на протяжении времени, то есть снижение выпуска промышленной продукции, объемов торговли, реального дохода людей и занятости. Таким образом, использование занятости в модели обусловлено тем, что ее уровень является одним из самых важных показателей для определения уровня экономической активности страны. Реальный ВВП отражает общее благосостояние государства и имеет определяющее значение для формирования понимания будущих условий ведения экономической деятельности.

Анализируемые данные взяты из базы данных United States Census Bureau¹. База содержит 251 наблюдение с I квартала 1953 г. до III квартала 2015 г. Оценка осуществлялась в статистической среде R. Анализ на наличие единичного корня выявил нестационарность переменных. Для оценки моделей оба исходных ряда данных рассмотрены в разностях логарифмов. Ряды данных ВВП США и занятости нормализованы таким образом, чтобы среднее равнялось нулю, дисперсия — единице. Так как ряды могут испытывать сезонные колебания, проводилась их корректировка программой X13-ARIMA-SEATS.

¹ United States Census Bureau. URL: <http://www.census.gov/> (дата обращения: 25.05.2020).

2.2. Оценка модели

Проведена оценка двух моделей:

- 1) двумерная векторная авторегрессионная модель с лагом первого порядка

$$Y_t = c + A_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t; \quad (19)$$

- 2) двумерная векторная авторегрессионная модель с лагом первого порядка и с двумя марковскими переключениями

$$Y_t' A_0(s_t) = Y_{t-1}' A_1(s_t) + z_t' C(s_t) + \varepsilon_t' \Xi^{-1}(s_t). \quad (20)$$

Выбор количества режимов в модели происходил на основе экономической теории. Так как бизнес-цикл включает в себя четыре фазы, режим 1 соответствует фазе спада, режим 2 соответствует фазе роста, момент марковского переключения между двумя режимами интерпретируется как пик или дно.

Так как в байесовском подходе от априорных распределений сильно зависят результаты модели, их подбор является одним из основных вопросов. В данном исследовании оптимальные гиперпараметры выбраны согласно рекомендациям из статьи К. Симса и др. [Sims, Waggoner, Zha, 2008], подходящим для квартальных данных. Значения параметров, выбранных для построения модели, представлены в табл. 2.

Таблица 2. Значения гиперпараметров для моделей BVAR и MSBVAR

Параметр	λ_0	λ_1	λ_3	λ_4	λ_5	μ_5	μ_6	N
Значение	0,8	0,15	1	0,25	1	0	0	4

Для выявления прогнозирующих свойств вышеизложенных моделей BVAR и MSBVAR проведено вневыборочное сравнение двух моделей. Для получения прогноза применяется рекурсивная процедура [Schumacher, 2007]. С этой целью исходная выборка делится на две части. Первая подвыборка включает в себя 231 наблюдение для каждого временного ряда с I квартала 1953 г. по III квартал 2010 г., вторая подвыборка включает в себя 20 наблюдений с IV квартала 2010 г. по III квартал 2015 г.

Рекурсивная процедура предполагает следующие шаги. Основываясь на фактических временных рядах с 1953Q1 по 2010Q3, осуществляем оценивание модели. Затем производим прогнозы для 1–4 временных тактов вперед (2010Q4, 2011Q1, 2011Q2, 2011Q3). Затем увеличиваем длину выборки на одно наблюдение, то есть с 1953Q1 по 2012Q4, и заново оцениваем параметры и прогнозируем модель для 1–4 временных тактов вперед (2011Q1, 2011Q2, 2011Q3, 2011Q4). И так продолжается, пока выборка не достигнет периода 2014Q4–2015Q3. Далее строится прогноз для 1–3 временных тактов вперед (2010Q4, 2011Q1, 2011Q2). Затем строится прогноз для 1–2 временных тактов вперед и одного такта. Действуя таким образом, получаем 20 точечных прогнозов для одного временного такта вперед, 19 точечных прогнозов для двух временных тактов вперед, 18 для трех временных тактов вперед и 17 для четырех временных тактов вперед.

В рамках данной работы предпочтение отдано применению рекурсивной регрессии, так как при ее применении размер выборки постоянно увеличивается и модель может быть оценена по максимально возможной выборке. Для коротких временных рядов это является важным преимуществом.

Полученные по рекурсивной схеме регрессионного эксперимента точечные прогнозы мы сравниваем с фактическими величинами интересующих нас временных рядов. Так, например, для 4-го временного такта берутся прогнозные значения модели с 2012Q4 по 2013Q3 и сравниваются с фактическими величинами для этого же временного промежутка. В результате сравнений рассчитывается показатель среднеквадратического отклонения:

$$RMSE_{i,h} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\widehat{y}_{i,t} - y_{i,t})^2}, \quad (21)$$

где $RMSE_{i,h}$ — корень из среднеквадратического отклонения для i -го временного ряда в момент времени t , $t = 1, 2, \dots, T$, $\widehat{y}_{i,t}$ — прогнозные значения для i -го временного ряда, $y_{i,t}$ — фактические значения для i -го временного ряда.

Помимо точности прогноза, также обращалось внимание на экономическую интерпретацию полученных результатов оценки. Оценка адекватности модели проводилась на основе анализа функций импульсных откликов, так как коэффициенты байесовских векторных авторегрессий не могут служить источниками информации о взаимосвязях между переменными по причине их большого числа, частой смены знаков при различных лагах и незначимости. Функция импульсных откликов — это траектория, которую описывает y_{t+i} , будучи инициирован единичной инновацией $\varepsilon_t = 1$. Эта функция полезна по двум причинам. Во-первых, потому что она характеризует поведение модели. Во-вторых, при ее помощи можно выявить взаимосвязи между переменными.

Но функции импульсных откликов будут информативны, только если инновации (шоки) в уравнениях будут ортогональны друг другу. Иначе функции отражают только влияние смеси скоррелированных шоков. Для ортогонализации остатков уравнения векторной авторегрессии использован метод рекурсивной идентификации, или разложение Холецкого. Под разложением Холецкого подразумевается ряд преобразований исходных инноваций (остатков) векторной авторегрессионной модели:

$$\varepsilon_t = F v_t, \quad (22)$$

где ковариационная матрица преобразования остатков — единичная: $E(v_t v_t') = I$. Связь между первоначальной ковариационной матрицей Σ и матрицей факторизации F описывается соотношением $FF' = \Sigma$, где F — нижетреугольная матрица. Разложение Холецкого подразумевает следующую интерпретацию обнуления элементов выше главной диагонали матрицы F : шок 1-й переменной одновременно воздействует только на нее саму, шок 2-й переменной — на первую и на вторую, шок 3-й — на все три и т. д.

3. Результаты оценки

Как уже было отмечено в начале статьи, целью настоящего исследования является построение байесовских моделей векторной авторегрессии для макроэкономического моделирования фаз бизнес-цикла. Для этого был предложен метод оценки и выбраны оптимальные параметры моделей. Результаты оценивания, содержащиеся в табл. 3, получены применением двумерной модели с марковскими переключениями ко всей выборке. В таблице столбцы под названием «Апостериорное распределение» содержат оценки параметров и стандартные ошибки, полученные сэмплированием Гиббса.

На основе результатов оценивания реального ВВП США и занятости США вычислено, что средние темпы роста ВВП: 2,1 % в режиме 1 и 4,75 % в режиме 2. Так как модель состоит из двух режимов, то назовем состояние 1 «режим спада», и состояние 2 — «режим роста». Полученные оценки существенно выше, чем в других исследованиях. Например, в работе Гамильтона [Hamilton, 1989], используя данные по реальному ВВП с 1952Q2 до 1984Q4, модель с двумя режимами привела к оценкам средних темпов роста $-0,4\%$ в режиме спада и $+1,2\%$ в режиме роста.

Согласно табл. 3, оцененные значения переходных вероятностей равны 0,769 в режиме спада и 0,764 в режиме роста, что указывает на достаточную устойчивость обоих режимов. Ожидаемая средняя продолжительность нахождения в одном состоянии примерно равна $1/(1 - 0,7694) = 4,34$ квартала для режима спада и $1/(1 - 0,7642) = 4,24$ квартала для режима роста. Эти значения меньше фактических величин продолжительности спадов и подъемов. Согласно данным National Bureau of Economic Research² (далее — NBER), средняя продолжительность экономических рецессий составляет 4,7 квартала, а средняя продолжительность стремительного экономического роста составляет 14,3 квартала для послевоенной экономики США. Оцененные продолжительности также значительно отличаются от полученных в работе Гамильтона [Hamilton, 1989], где они равны 4,1 квартала в режиме спада и 10,5 в режиме роста.

Гипотеза о долгосрочной взаимосвязи между ВВП и занятостью США, описываемая двумя режимами, проверяется путем сравнения BVAR-модели с одним режимом и MSBVAR-модели с двумя режимами. Для сопоставления моделей в данной работе мы используем значения предельных логарифмических функций правдоподобия (marginal log-likelihood posterior), которые рассчитывают апостериорную вероятность того, как модель сгенерировала истинные данные. Согласно статьям [Chib, 1995; Fruhwirth-Schnatter, 2001], этот показатель является наиболее предпочтительным для сравнения моделей, оцененных на основе байесовского подхода. Функции предельных логарифмических правдоподобий рассчитывались с использованием подхода, предложенного в работе [Chib, 1995]. Для модели BVAR этот показатель равен 477,68, для MSBVAR — 482,57. Так как предельный логарифм функции правдоподобия достигает своего большего значения для MSBVAR-модели, наша гипотеза о предпочтительности модели MSBVAR подтверждается.

Фактические значения темпов роста представлены на рис. 1. Оцененная сглаживающая вероятность события при $s_t = 0$ (то есть вероятность нахождения в режиме спада), полученная моделью MSBVAR, представлена на рис. 2. По вертикаль-

² National Bureau of Economic Research. URL: <https://www.nber.org/> (дата обращения: 25.05.2020).

Таблица 3. Результаты оценивания двумерной модели с марковскими переключениями

Параметры	Апостериорное распределение			
	Среднее	Стандартное отклонение	t-статистика	Значимость
α_{11}	0,205	-0,069	-2,978	0,003
α_{12}	-0,039	-0,038	1,017	0,310
α_{21}	0,214	-0,072	-2,974	0,003
α_{22}	-0,041	-0,037	1,106	0,270
β_{11}	0,622	2,405	0,259	0,796
β_{12}	-0,068	-0,017	3,987	0,000
β_{13}	0,067	0,337	0,198	0,843
β_{14}	0,636	0,933	0,681	0,496
β_{21}	0,616	2,410	0,256	0,799
β_{22}	-0,061	-0,017	3,643	0,000
β_{23}	0,074	0,315	0,234	0,815
β_{24}	0,634	0,924	0,687	0,493
σ_{11}	1,498	1,144	1,309	0,192
σ_{12}	0,163	0,540	0,301	0,763
σ_{13}	0,315	1,235	0,255	0,799
σ_{21}	1,458	1,237	1,179	0,240
σ_{22}	0,147	0,517	0,284	0,776
σ_{23}	0,307	1,334	0,230	0,818
ρ_{11}	0,769	0,051	14,867	0,000
ρ_{22}	0,764	0,052	14,751	0,000

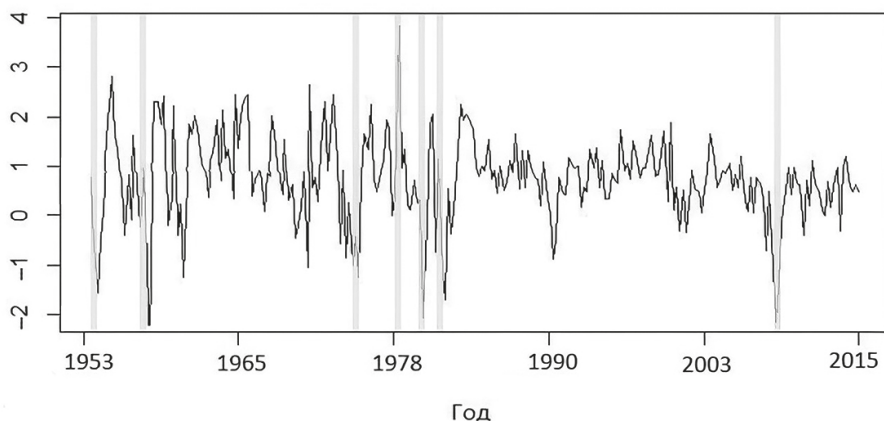


Рис. 1. Фактические значения темпов роста ВВП США

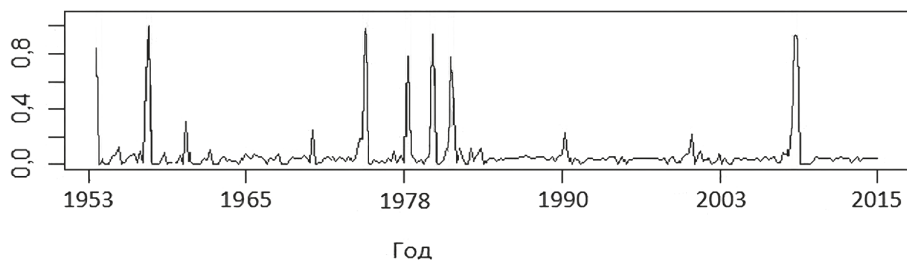


Рис. 2. Оцененные сглаживающие вероятности нахождения в режиме спада, полученные двумерной моделью с марковскими переключениями

ной оси отложена вероятность нахождения в режиме спада (режиме 1). Пороговое значение для оцененных сглаживающих вероятностей в режиме спада ($s_t = 0$) составляет 0,5. Таким образом, для $s_t = 0$ периоды больше, чем 0,5, с большей вероятностью являются режимами спада, чем роста. Вертикальными серыми линиями на рис. 1 и 2 выделены те периоды, в которых оцененная вероятность спада (согласно MSBVAR-модели) больше 0,5.

Табл. 4 объединяет в себе данные рис. 1 и 2, то есть фактические данные о периодах подъема и спада из баз NBER и данные по оцененным сглаживающим вероятностям двумерной модели с марковскими переключениями. Первый существенный спад уровня ВВП и занятости в экономике США произошел в период 1953Q3–1954Q2, вероятность нахождения в режиме 2 в период 1953Q2–1954Q2 примерно равна 0,82, то есть данный кризис выявлен с опережением на один квартал. Следующий период спада наблюдается в 1957Q3–1958Q2, вероятность нахождения в режиме 1 примерно равна 0,91, но, как и предыдущий кризис, он выявлен с опережением в один квартал. Модель идентифицировала кризисы 1973Q4–1975Q1, 1980Q1–1980Q3, 1981Q1–1982Q4, 2008Q1–2009Q3.

Таблица 4. Фактические данные NBER и данные по оцененным сглаживающим вероятностям двумерной модели с марковскими переключениями

NBER		Периоды нахождения в режиме спада для оцененных вероятностей $P[s_t = 0] > 0,5$
Пик	Дно	Режим спада
1953Q3	1954Q2	1953Q2–1954Q2
1957Q3	1958Q2	1957Q2–1958Q1
1960Q2	1961Q1	—
1969Q4	1970Q4	—
1973Q4	1975Q1	1973Q4–1975Q1
1980Q1	1980Q3	1980Q1–1980Q3
1981Q1	1982Q4	1981Q1–1982Q4
1990Q3	1991Q2	—
2001Q2	2001Q4	—
2008Q1	2009Q3	2008Q1–2009Q3

Двумерная модель с марковскими переключениями идентифицировала не все бизнес-циклы, в сравнении с данными NBER. Для рецессий в 1960Q2–1961Q1, 1969Q4–1970Q4, 1990Q3–1991Q2, 2001Q2–2001Q4 значения $P[S_t = 0]$ оказались ниже пороговых 0,5. Измененное правило о пороговом значении оцененных сглаживающих вероятностей на $P[S_t = 0] > 0,2$ могло привести к более убедительным выводам о нахождении экономики в состоянии рецессии, то есть выявить все пропущенные кризисы. С другой стороны, модель не сгенерировала ложных периодов спада (т.е. периодов кризиса, не соответствующих фактическим данным NBER), что доказывает стабильность работы модели. Незначительные всплески на гистограмме в кризисные периоды, опережение или запаздывание кризисов на один квартал свидетельствуют о том, что для анализа экономических процессов необходимо доработать алгоритм таким образом, чтобы он учитывал длительность фаз.

Схема регрессионного эксперимента, изложенная в предыдущем разделе, осуществляется для построения прогнозов по следующим конкурирующим моделям: BVAR и MSBVAR. Точечные прогнозы сравниваются с фактическими значениями интересующих временных рядов, и рассчитываются показатели среднеквадратических отклонений.

В табл. 5 показаны расчеты RMSE для рекурсивной схемы регрессионного эксперимента.

Таблица 5. RMSE для моделей байесовской векторной авторегрессии

Модель прогнозирования	Горизонт прогнозирования				Средняя величина RMSE
	4	3	2	1	
MSBVAR	0,406	0,377	0,361	0,350	0,374
BVAR	0,401	0,376	0,379	0,349	0,376

Согласно табл. 5, величина RMSE достигает своего минимального значения при прогнозировании моделью MSBVAR, то есть она дает более точные прогнозы по сравнению с BVAR. Таким образом, на основе вышеизложенного анализа можно сделать вывод, что более предпочтительной моделью для краткосрочного прогнозирования динамики основных макроэкономических показателей в США являются прогнозы модели с марковскими переключениями. Но незначительные различия величины RMSE для краткосрочных прогнозов BVAR и MSBVAR можно объяснить отсутствием перехода из одного режима в другой на всем прогнозном горизонте с 2010Q3 по 2015Q3 (что соответствует фактическим данным об отсутствии кризиса на заданном промежутке времени, см. табл. 4). То есть на заданном прогнозном промежутке модель не спрогнозировала ложных переключений.

Анализ направления и степени влияния показателя ВВП на занятость США проведен на основе функций импульсных откликов для MSBVAR-модели. Функции подразумевают следующую интерпретацию: шок 1-й переменной одновременно воздействует на нее саму и на 2-ю переменную. Отклики на эти шоки анализировались на горизонте четырех кварталов.

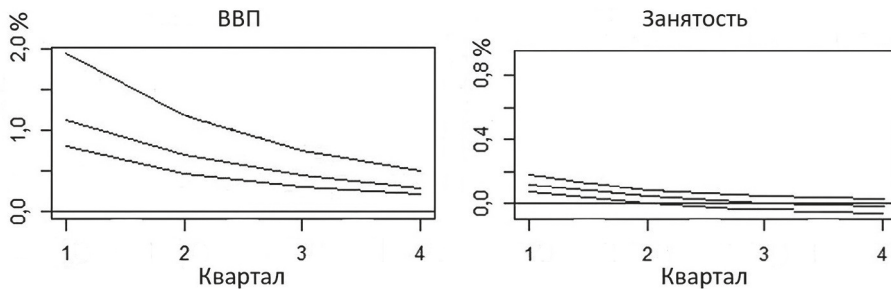


Рис. 3. Импульсные отклики на шок от изменения ВВП США модели MSBVAR для режима спада (медиана, а также 16 и 84 перцентили распределения)

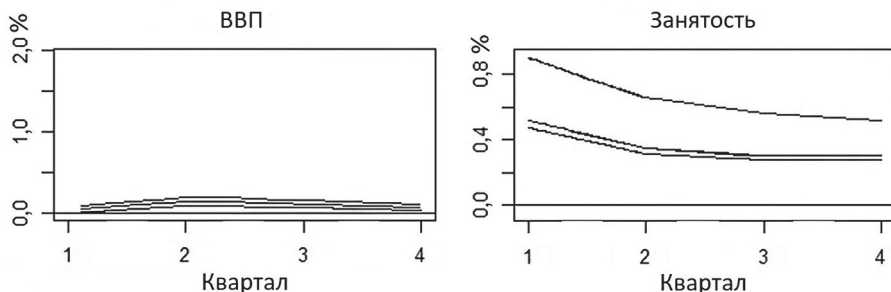


Рис. 4. Импульсные отклики на шок от изменения занятости США модели MSBVAR для режима спада (медиана, а также 16 и 84 перцентили распределения)

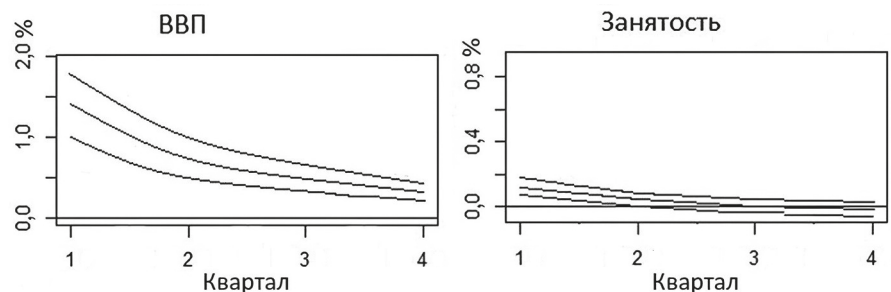


Рис. 5. Импульсные отклики на шок от изменения ВВП США модели MSBVAR для режима роста (медиана, а также 16 и 84 перцентили распределения)

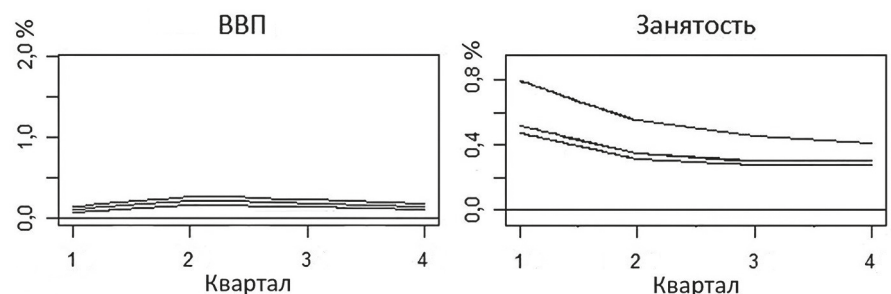


Рис. 6. Импульсные отклики на шок от изменения занятости США модели MSBVAR для режима роста (медиана, а также 16 и 84 перцентили распределения)

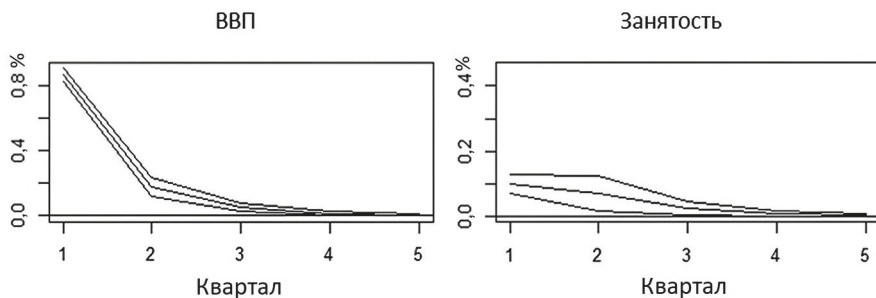


Рис. 7. Импульсные отклики на шок от изменения ВВП США модели BVAR для режима роста (медиана, а также 16 и 84 перцентили распределения)

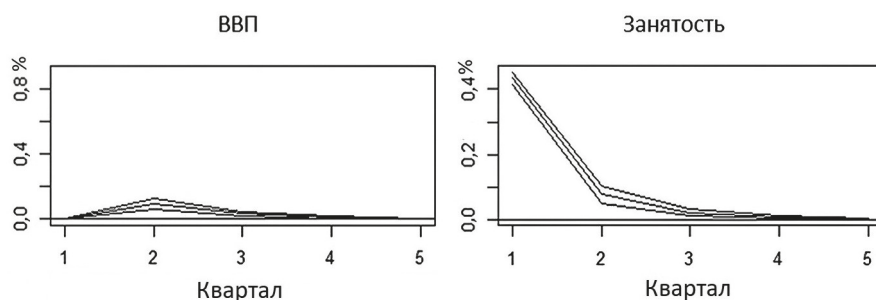


Рис. 8. Импульсные отклики на шок от изменения занятости США модели BVAR для режима роста (медиана, а также 16 и 84 перцентили распределения)

Рассмотрим динамику экономических индикаторов: ВВП и занятости США. На рис. 3 и 4 представлены результаты оценки функций импульсного отклика для режима спада. Графики для режима роста представлены на рис. 5 и 6.

Шок ВВП США оказывает положительную динамику как на ВВП, так и на занятость США. В краткосрочном периоде этот шок приводит к резкому скачку ВВП, но и в долгосрочном аспекте шок ВВП США оказывает положительное влияние, однако его воздействие на ВВП спадает с течением времени (рис. 3 и 5). Что касается занятости, то в краткосрочном периоде шок ВВП оказывает положительное воздействие, а в долгосрочном периоде его влияние спадает до нуля (рис. 4 и 6). Шок занятости оказывает статистически значимое воздействие на оба экономических показателя, но меньшее, чем шок ВВП. Шок ведет к положительному импульсу занятости на протяжении четырех кварталов. Более того, влияние этого шока не снижается до нуля, то есть этот шок является персистентным. Его влияние на ВВП минимально.

На следующем этапе проведен анализ модели BVAR с помощью функций импульсных откликов.

Отметим, что импульсные отклики для модели MSBVAR имеют вид, близкий к поведению импульсных откликов для модели BVAR на рис. 7 и 8. В результате анализа функций импульсных откликов можно сделать вывод, что при помощи инструментария моделей MSBVAR и BVAR удастся выяснить основные направления взаимодействия переменных модели и интерпретировать результаты.

Заключение

Байесовские модели векторных авторегрессий являются достаточно гибкими инструментами для оценки макроэкономической динамики в США. В данной статье рассмотрены особенности применения двух моделей для оценки макроэкономической динамики в США: байесовской векторной авторегрессии (BVAR) и байесовской векторной авторегрессии с марковскими переключениями (MSBVAR). В результате анализа выявлена структура колебаний экономических циклов и основные направления взаимодействия между макроэкономическими переменными. Для оценивания модели векторных авторегрессий применен метод сэмплирования по Гиббсу (частный случай алгоритма Метрополиса).

Оцененные сглаживающие вероятности нахождения в режиме спада для двумерной модели с марковскими переключениями сравнены с фактическими данными NBER. К примеру, модель идентифицировала кризисы 1973Q4–1975Q1, 1980Q1–1980Q3, 1981Q1–1982Q4, 2008Q1–2009Q3. На основе полученных результатов сделан вывод, что модель применима для анализа американской экономики и приемлемо описывает вероятность нахождения в режиме спада или роста в разные периоды времени. Превосходство модели с двумя режимами было доказано как на основе значения предельной логарифмической функции правдоподобия, так и на основе оцененных сглаживающих вероятностей, где модель идентифицировала большинство кризисов, не сгенерировав ни одного ложного периода спада. Выявлены прогнозирующие свойства вышеизложенных авторегрессионных моделей, проведено вневыборочное сравнение двух моделей. Для получения прогноза применена рекурсивная схема регрессионного эксперимента. По результатам проведенных экспериментов рассчитаны значения показателей RMSE. На основе этих величин сделан вывод, что незначительные различия величины RMSE для двух моделей можно интерпретировать в пользу MSBVAR-модели, так как на всем прогнозном периоде она находилась в одном режиме, что соответствовало фактическим данным. На последнем этапе был проведен анализ импульсных функций отклика, позволяющий оценить степень влияния переменных ВВП и занятость в США. Так, например, шок ВВП США оказывает положительную динамику, как на ВВП, так и на занятость США.

Примененный в исследовании байесовский метод может быть использован для широкого круга задач, в том числе для более детальной оценки монетарной и фискальной политики, для определения влияния банковского кредитования на экономику страны и т. д. Он позволяет решить проблему недостаточности данных при оценке моделей с большим числом переменных.

Литература/References

- Albert J., Chib S. (1993) Bayes Inference via Gibbs Sampling of Autoregressive Time Series Subject to Markov Mean and Variance Shifts. *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 11, no. 1, pp. 1–15.
- Bañbura M., Giannone D., Lenza M. (2014) Conditional forecasts and scenario analysis with vector autoregressions for large cross-sections. *ECARES working paper*, no. 15.
- Bognanni M., Herbst E. (2014) Estimating (Markov-Switching) VAR Models Without Gibbs Sampling: A Sequential Monte Carlo Approach. *FRB of Cleveland Working Paper*, vol. 14–27.
- Chib S. (1995) Marginal likelihood from the Gibbs output. *Journal of the American Statistical Association*, vol. 90, no. 432, pp. 1313–1321.

- Cosslett S. R., Lee L. F. (1985) Serial correlation in latent discrete variable models. *Journal of Econometrics*, vol. 27, no. 1, pp. 79–97.
- Doan T., Litterman R., Sims C. (1984) Forecasting and Conditional Projection Using Realistic Prior Distributions. *Econometric Reviews*, vol. 3, no. 1, pp. 1–100.
- Franco C., Zakoian J.M. (2001) Stationarity of Multivariate Markov-Switching ARMA Models. *Journal of Econometrics*, vol. 102, pp. 339–364.
- Fruhwirth-Schnatter S. (2001) Markov Chain Monte Carlo Estimation of Classical and Dynamic Switching and Mixture Models. *Journal of the American Statistical Association*, vol. 96, no. 153, pp. 194–209.
- Fruhwirth-Schnatter S. (2008) *Finite Mixture and Markov Switching Models*. Springer Series in Statistics. 511 p.
- Hamilton J. (1989) A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle. *Econometrica*, vol. 57, no. 2, pp. 357–384.
- Hamilton J. (2005) What's real about the business cycle? *Federal Reserve Bank of St. Louis Review*, vol. 87, pp. 435–452.
- Hamilton J. (2016) Macroeconomic Regimes and Regime Shifts. *NBER Working Papers*, vol. 21863.
- Hsu S. H., Kuan C. M. (2001) Identifying Taiwan's business cycles in 1990s: An application of the bivariate Markov switching model and Gibbs sampling. *Journal of Social Sciences and Philosophy*, vol. 13, pp. 515–540. (In Chinese)
- Hubrich K., Tetlow R. J. (2012) Financial Stress and Economic Dynamics: The Transmission of Crises. *FEDS Working Paper*, vol. 82.
- Karlsson S. (2013) *Forecasting with Bayesian Vector Autoregressions*. *Handbook of economic forecasting*. Elsevier. 897 p.
- Kim C. J., Nelson C. R. (1999) *State-Space Models with Regime Switching: Classical and Gibbs-Sampling Approaches with Applications*. MIT Press. 250 p.
- Krolzig H. (1997) *Markov-switching vector autoregressions: Modelling, statistical inference, and application to business cycle analysis*. Springer. 371 p.
- Litterman R. B. (1986) Forecasting with Bayesian vector autoregressions (1986 5 years of experience). *Journal of Business and Economic Statistics*, vol. 4, pp. 25–38.
- Orcutt G. A. (1948) Study of the autoregressive nature of the time series used for Tinbergen's model of the economic system of the United States 1919–1932. *Journal of the Royal Statistical Society Series*, vol. 10, pp. 1–45.
- Sargent T. J., Sims C. A. (2011) *Empirical Macroeconomics*. *Nobel Prize in Economics documents*, vol. 2. Stockholm: The Royal Swedish Academy of Sciences.
- Schumacher C. (2007) Forecasting German GDP using alternative factor models based on large datasets. *Journal of forecasting*, vol. 26, no. 4, pp. 271–302.
- Sims C. (1980) Macroeconomics and Reality. *Econometrica*, vol. 48, no. 1, pp. 1–48.
- Sims C., Zha T. (1998) Bayesian methods for dynamic multivariate models. *International Economic Review*, vol. 39, no. 4, pp. 949–968.
- Sims C., Zha T. (2006) Were there regimes shifts in U.S. monetary policy? *American Economic Review*, vol. 96, pp. 54–81.
- Sims C., Waggoner D., Zha T. (2008) Methods for inference in large multiple-equation Markov-switching models. *Journal of Econometrics*, vol. 146, no. 2, pp. 255–274.
- Stock J. H., Watson M. W. (2016) Factor Models and Structural Vector Autoregressions in Macroeconomics. *Handbook of Macroeconomics*, vol. 2, pp. 415–525.
- Theodoridis K., Zanetti F., Liu P., Mumtaz H. (2017) Changing Macroeconomic Dynamics at the Zero Lower Bound. *Economics Series Working Papers*, vol. 824.
- Tjøstheim D. (1986) Some Doubly Stochastic Time Series Models. *Journal of Time Series Analysis*, vol. 7, pp. 51–72.
- Wold H. (1960) A generalization of causal chain models. *Econometrica*, vol. 28, pp. 443–463.
- Yang M. X. (2000) Some Properties of Vector Autoregressive Processes with Markov Switching Coefficients. *Econometric Theory*, vol. 16, pp. 23–43.

Статья поступила в редакцию: 06.06.2019

Статья рекомендована в печать: 28.12.2020

Контактная информация:

Гусева Мария Евгеньевна — аспирант; mguseva@hse.ru

Силаев Андрей Михайлович — д-р физ.-мат. наук, проф., asilaev@hse.ru

Applying Bayesian methods for macroeconomic modeling of business cycle phases

M. E. Guseva, A. M. Silaev

National Research University “Higher School of Economics”,
25/12, Bolshaya Pecherskaya ul., Nizhny Novgorod, 603155, Russian Federation

For citation: Guseva M.E., Silaev A.M. (2021) Applying Bayesian methods for macroeconomic modeling of business cycle phases. *St Petersburg University Journal of Economic Studies*, vol. 37, iss. 2, pp. 298–317. <https://doi.org/10.21638/spbu05.2021.205>

In the present research, the features of applying two models for estimating macroeconomic dynamic in the USA are investigated: Bayesian vector autoregression and Bayesian vector autoregression with Markov switching. The research goal is to identify periods, structure of fluctuations and the main directions of interaction of the variables (real US GDP and employment) using Bayesian vector autoregression models. Models with Markov chains include many equations (structures). The switching mechanisms between these structures are controlled by an unobservable variable that follows a first-order Markov process. The analyzed variables were taken from the first quarter of 1953 to the third quarter of 2015. The model parameters were estimated on the basis of a prior for the multivariate normal distribution — the inverse Wishart distribution (a generalization of the Minnesota a priori distribution). Basing on the results of the estimation of the two-dimensional model with Markov Switching the average GDP growth rate and expected duration of phases was calculated. The estimated model is acceptable for describing the US economy and with high accuracy describes the probability of being in a particular phase in different periods of time. On the basis of medium-term forecasts, root mean squared errors of the forecast are calculated and a conclusion is made about the most appropriate model. Within the framework of this paper, impulse response functions are built allowing to evaluate how variables in the model react on fluctuations, shocks.

Keywords: Markov models, Bayesian estimation, business cycles.

Received: 06.06.2019

Accepted: 28.12.2020

Authors' information:

Maria E. Guseva — Postgraduate Student; mguseva@hse.ru

Andrey M. Silaev — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; asilaev@hse.ru