

Фигуры Плутона и Харона и их относительное движение*

К. В. Холшевников, Д. В. Микрюков¹, М. С. Джазмати²

¹ Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

² Университет Кассим,
Саудовская Аравия, Бураида, Р. О. Вох 6644 — Buraidah 51452

Для цитирования: Холшевников К. В., Микрюков Д. В., Джазмати М. С. Фигуры Плутона и Харона и их относительное движение // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 3. С. 533–546.
<https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.314>

Исследовано сравнительное влияние двух факторов на поступательное движение центров масс тел системы Плутон — Харон. Первый по важности фактор представляет собой несферичность формы и гравитационного поля тел системы; второй — притяжение Солнца. В качестве меры влияния обоих факторов выбрано отношение соответствующего возмущающего ускорения к основному, обусловленному ньютоновским притяжением Плутона и Харона друг к другу. Установлено, что для первого фактора эта мера имеет порядок 10^{-6} , тогда как для второго она на два порядка меньше. Это объясняет, почему эффект Лидова — Кодзай (несмотря на большой взаимный наклон в 96° плоскостей орбит спутника вокруг планеты и центра масс системы вокруг Солнца) не проявляется. Ситуация аналогична случаю со спутниками Урана. В результате система Плутон — Харон сохраняет устойчивость по меньшей мере на шкале времени в миллионы лет. Оценено также приливное воздействие Солнца на форму поверхности исследуемых тел. За меру воздействия принято отношение приливного потенциала от Солнца в точке на поверхности тела к гравитационному потенциалу тела в этой точке. Оно оказалось порядка $3 \cdot 10^{-12}$, что несопоставимо меньше влияния вращения и взаимного притяжения Плутона и Харона, мера которого имеет порядок $\sim 10^{-2}$. Фактически Солнце не влияет на фигуры тел системы.

Ключевые слова: планеты, спутники, Плутон, Харон, фигуры равновесия, координаты Якоби, эффект Лидова — Кодзай.

1. Введение. Возобновление интереса к системе Плутон — Харон вызвано результатами, полученными в 2015 г. космическим аппаратом New Horizons (NASA) и опубликованными в многочисленных статьях: см., например, [1–3]. Тем не менее не все характеристики системы удалось измерить. В отличие от масс и размеров, несферичность тел и их гравитационных полей осталась неизвестной. В статье [4] мы получили для Плутона и Харона теоретические двусторонние оценки четырех величин: полярного и экваториального сжатия, коэффициентов при второй зональной и второй секториальной гармониках. Оба тела предполагались уровнями трехосными эллипсоидами, каждый из которых вращается синхронно с орбитальным обращением. В настоящей статье мы исследуем влияние формы тел системы на их

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-02-00552).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2021

поступательное движение, т. е. движение их центров масс. Точнее, мы оцениваем отношение ν соответствующего возмущающего ускорения к основному ускорению, вызванному ньютоновским притяжением тел, принимаемых за тела сферической структуры. Как известно, такое движение устойчиво. Далее мы исследуем влияние Солнца на движение Харона относительно Плутона. Точнее, мы оцениваем отношение μ соответствующего возмущающего ускорения к основному ускорению. Наклонение плоскости орбиты Харона вокруг Плутона к плоскости орбиты центра масс системы вокруг Солнца составляет 96° [5]. Это могло бы привести к падению Харона на Плутон благодаря эффекту Лидова — Кодзаи [6–8], но величина μ оказалась на два порядка меньше ν . Это объясняет, почему эффект Лидова — Кодзаи не проявляется. Ситуация аналогична случаю со спутниками Урана, рассмотренному в хорошо известной статье М. Л. Лидова [6]. Таким образом, действие Солнца не нарушает устойчивости системы Плутон — Харон, по крайней мере, на шкале времени в миллионы лет.

2. Оценка возмущающего воздействия несферичности главных тел системы Плутон — Харон на их поступательное движение. Пусть Плутон T_1 массы m_1 и Харон T_2 массы m_2 являются твердыми телами конечных размеров, слабо отличающимися от тел сферической структуры.

Обозначим через O_1, O_2, O центры масс T_1, T_2 и их барицентр; $OO_1 = \mathbf{r}_1$, $OO_2 = \mathbf{r}_2$, $O_1O_2 = \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Нас интересует поступательное движение системы, т. е. движение точек O_1, O_2 и выводимое из него движение O_2 относительно O_1 . Уравнения движения индуцируются заданием кинетической и потенциальной энергий.

Кинетическая энергия \mathcal{E}_1 по теореме Кёнига [9, глава 2, § 4; 10, § 2.10] определяется соотношением

$$2\mathcal{E}_1 = m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2 + \mathcal{E}'_1.$$

Член \mathcal{E}'_1 описывает вращательное движение. Он не зависит от $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ и потому может быть опущен.

Введем переменные точки Q_1, Q_2 , пробегающие состоящее из двух частей тело $T = T_1 \cup T_2$, и вектор $\mathbf{r}' = Q_1Q_2$. (Модуль вектора обозначаем той же буквой, но курсивом.) Гравитационная потенциальная энергия \mathcal{E}_2 системы определяется шестикратным интегралом [11, § 11; 12, § 2.21] по декартову произведению $T \times T$:

$$-\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{G}} = \frac{1}{2} \iint_{T \times T} \frac{dm_1 dm_2}{r'} = \frac{1}{2} \iint_{T_1 \times T_1} \frac{dm_1 dm_2}{r'} + \iint_{T_1 \times T_2} \frac{dm_1 dm_2}{r'} + \frac{1}{2} \iint_{T_2 \times T_2} \frac{dm_1 dm_2}{r'},$$

где \mathcal{G} — постоянная тяготения. Поскольку тела недеформируемы, интегралы по $T_1 \times T_1$ и $T_2 \times T_2$ постоянны и не влияют на уравнения движения. В результате для \mathcal{E}_2 с точностью до аддитивной постоянной получаем

$$-\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{G}} = \int_{T_1} \int_{T_2} \frac{dm_1 dm_2}{r'}. \quad (1)$$

В (1) можно считать $Q_s \in T_s$. Нам понадобятся векторы $\mathbf{r}'_s = O_sQ_s$, $\mathbf{r}' = Q_1Q_2 = \mathbf{r} - (\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2)$, $s = 1, 2$ (см. рис. 1).

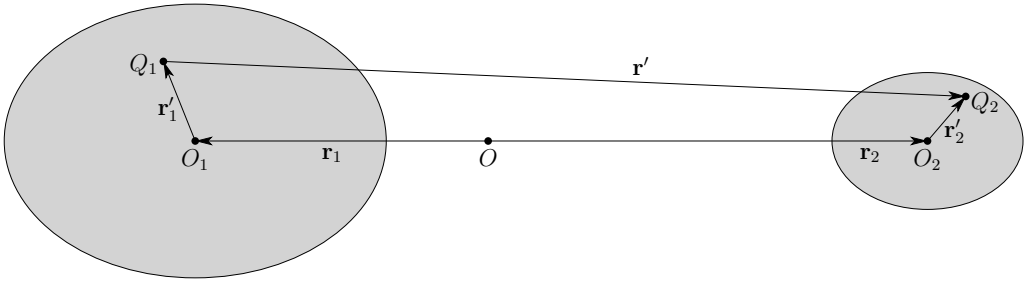


Рис. 1. К выводу потенциальной гравитационной энергии пары планета — спутник.

Представим подынтегральное выражение (1) в виде

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} \left[1 - 2 \frac{|\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2|}{r} \cos H + \frac{(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2)^2}{r^2} \right]^{-1/2}, \quad (2)$$

где H — угол между векторами \mathbf{r} и $\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2$. Мы встретились с производящей функцией многочленов Лежандра. Используя классическое разложение [13, 14] и пренебрегая членами третьего порядка, получим $1/r' = K_0 + K_1 + K_2$ при

$$K_0 = \frac{1}{r}, \quad K_1 = \frac{|\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2|}{r^2} P_1(\cos H), \quad K_2 = \frac{(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2)^2}{r^3} P_2(\cos H).$$

Интеграл (1) от K_0 равен $m_0 m_1 / r$. Интеграл от K_1 исчезает. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \int_{T_1} \int_{T_2} K_1 dm_1 dm_2 &= \frac{1}{r^3} \int_{T_1} \int_{T_2} \mathbf{r} (\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2) dm_1 dm_2 = \\ &= \frac{\mathbf{r}}{r^3} \left(m_2 \int_{T_1} \mathbf{r}'_1 dm_1 - m_1 \int_{T_2} \mathbf{r}'_2 dm_2 \right) = 0 \end{aligned}$$

по определению центров масс. Пользуясь равенством $P_2(\cos H) = (3/2) \cos^2 H - 1/2$, представим K_2 суммой $K_2 = K_3 + K_4$ при

$$K_3 = \frac{3}{2r^5} [\mathbf{r} (\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2)]^2 = \frac{3}{2r^5} [(\mathbf{r}\mathbf{r}'_1)^2 - 2(\mathbf{r}\mathbf{r}'_1)(\mathbf{r}\mathbf{r}'_2) + (\mathbf{r}\mathbf{r}'_2)^2],$$

$$K_4 = -\frac{1}{2r^3} (\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2)^2 = -\frac{1}{2r^3} (\mathbf{r}'_1{}^2 - 2\mathbf{r}'_1 \mathbf{r}'_2 + \mathbf{r}'_2{}^2).$$

Интегралы от $(\mathbf{r}\mathbf{r}'_1)(\mathbf{r}\mathbf{r}'_2)$ и $\mathbf{r}'_1 \mathbf{r}'_2$ обращаются в нуль. В результате получаем

$$\int_{T_1} \int_{T_2} K_2 dm_1 dm_2 = \frac{3m_2}{2r^5} \int_{T_1} (\mathbf{r}\mathbf{r}'_1)^2 dm_1 - \frac{m_2}{2r^3} \int_{T_1} \mathbf{r}'_1{}^2 dm_1 \quad (3)$$

плюс симметричное выражение с перестановкой индексов 1 и 2. Правая часть (3) представима в форме

$$\frac{m_2}{r^3} \int_{T_1} r_1'^2 P_2(\cos H_1) dm_1,$$

где H_1 — угол между векторами \mathbf{r} и \mathbf{r}'_1 . Окончательно,

$$\mathcal{E}_2 = -\mathcal{G} m_1 m_2 (V_0 + V_1 + V_2), \quad (4)$$

$$V_0 = \frac{1}{r}, \quad V_1 = \frac{a_1^2}{r^3} Y_1\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right), \quad V_2 = \frac{a_2^2}{r^3} Y_2\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right),$$

где a_s — радиус объемлющей T_s сферы, Y_s — безразмерная *вторая* гармоника разложения потенциала T_s в ряд Лапласа по сферическим функциям. Обратим внимание, что вторая гармоника инвариантна относительно замены $\mathbf{r}/r \mapsto -\mathbf{r}/r$. Поэтому можно считать, что в (4) складываются шаровая функция Плутона V_1 в точке, в которой из центра масс Плутона виден Харон, и шаровая функция Харона V_2 в точке, в которой из центра масс Харона виден Плутон.

Для наших целей можно считать поверхности T_s трехосными эллипсоидами, тогда a_s станут наибольшими полуосями эллипсоидов, вытянутых по направлению друг к другу. Числовые значения, взятые из работ [2, 15, 16], соберем в табл. 1 (числовые значения всех рассматриваемых в работе величин приводим в системе СИ).

Таблица 1. Основные параметры Плутона и Харона

| $10^{-6}a_1$ | $10^{-6}a_2$ | $10^{-6}r_1$ | $10^{-6}r_2$ | $10^{-6}r$ | $10^{-11}\mathcal{G}m_1$ | $10^{-11}\mathcal{G}m_2$ |
|--------------|--------------|--------------|--------------|------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 1.188 м | 0.606 м | 2.127 м | 17.469 м | 19.596 м | 8.696 м ³ /с ² | 1.059 м ³ /с ² |

Уравнения движения точек O_s имеют вид

$$m_s \ddot{\mathbf{r}}_s = -\text{grad}_s \mathcal{E}_2.$$

Здесь и ниже grad_s обозначает градиент, соответствующий вектору \mathbf{r}_s , а grad — вектору \mathbf{r} . Поскольку V_s зависят от $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ только посредством $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, справедливо

$$\text{grad}_1 \mathcal{E}_2 = -\text{grad} \mathcal{E}_2, \quad \text{grad}_2 \mathcal{E}_2 = \text{grad} \mathcal{E}_2.$$

Отсюда получаем

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -\mathcal{G}m_1 m_2 \text{grad}(V_0 + V_1 + V_2), \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathcal{G}m_1 m_2 \text{grad}(V_0 + V_1 + V_2),$$

так что

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathcal{G}(m_1 + m_2) \text{grad}(V_0 + V_1 + V_2). \quad (5)$$

Оценим вклад каждого слагаемого (5) в сумму. Обозначим $W_s = \max |\text{grad} V_s|$, где наибольшее значение берется по всем углам при фиксированном r . Прежде всего запишем $W_0 = 1/r^2$. Воспользуемся далее соотношением (6.4.11) из [14] (см. также [17])

$$\max \left| \text{grad} \frac{\tilde{Y}_n}{r^{n+1}} \right| = \frac{n+1}{r^{n+2}} \langle \tilde{Y}_n \rangle. \quad (6)$$

Здесь \tilde{Y}_n — сферическая функция степени n , $\langle \tilde{Y}_n \rangle = \max |\tilde{Y}_n|$. В частности, имеем

$$W_s = \frac{3a_s^2}{r^4} \langle Y_s \rangle, \quad s = 1, 2.$$

Величина $\langle Y_s \rangle$ выражена через коэффициенты I при *второй зональной* и J при *второй секториальной* гармониках (см. формулу (27) Приложения).

Мы получили оценку влияния несферичности тел T_s на уравнения движения O_s :

$$\nu := \frac{W_1 + W_2}{W_0} = \frac{3}{r^2} (a_1^2 \langle Y_1 \rangle + a_2^2 \langle Y_2 \rangle). \quad (7)$$

Величины a_s, r приведены в табл. 1. Но I_s, J_s нам пока неизвестны. В [4] получены их верхние границы

$$I_s < I_s^+, \quad J_s < J_s^+,$$

где

$$I_1^+ = 1.45 \cdot 10^{-4}, \quad J_1^+ = 0.102 \cdot 10^{-4}, \quad I_2^+ = 3.18 \cdot 10^{-4}, \quad J_2^+ = 0.910 \cdot 10^{-4}. \quad (8)$$

Числовые значения в (8) отвечают однородным телам. Для максимально неоднородных фигур (сосредоточенная в центре масса, окруженная невесомой атмосферой) имеем $I = J = 0$. Степень концентрации масс к центру для Плутона и Харона неизвестна.

Для ориентировки рассмотрим несколько тел Солнечной системы с известными параметрами Стокса и размерами, сравнимыми с размерами Плутона и Харона [18–24]. С принятой в этой статье точностью каждое из этих тел можно рассматривать как трехосный эллипсоид с полуосями $a > b > c$. Если бы он был однородным, то коэффициенты Стокса приняли бы значения

$$I^+ = \frac{a^2 + b^2 - 2c^2}{10a^2}, \quad J^+ = \frac{a^2 - b^2}{20a^2}$$

согласно [14, 25, 26].

Значения отношений $I/I^+, J/J^+$ собраны в табл. 2.

Таблица 2. Отношения $I/I^+, J/J^+$ для некоторых тел Солнечной системы

| Тело | Луна | Церера | S2 Энцелад | S4 Диона | S5 Рея |
|---------|------|--------|------------|----------|--------|
| I/I^+ | 0.27 | 0.92 | 0.62 | 0.77 | 0.92 |
| J/J^+ | 0.23 | 0.37 | 0.77 | 0.98 | 0.95 |

Замечание. Мы используем нормализацию сферических функций согласно формуле (24) Приложения. Сейчас чаще используется другая нормализация (среднее квадратическое значение элементарной сферической функции равно единице). Гармонические коэффициенты I, J линейно связаны с нормализованными коэффициентами \bar{I}, \bar{J} :

$$I = \bar{I}\sqrt{5}, \quad J = \bar{J}\sqrt{5/12}.$$

Как ожидалось, наибольшие (следовательно, наименее однородные) тела обладают наименьшими значениями этих отношений. Для Плутона и Харона они больше. Примем для них $I/I^+ = J/J^+ = 0.4$, что позволяет вывести из (8)

$$\begin{aligned} I_1 &= 5.800 \cdot 10^{-5}, & J_1 &= 0.408 \cdot 10^{-5}, \\ I_2 &= 1.272 \cdot 10^{-4}, & J_2 &= 3.640 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

Это приводит к равенствам

$$\begin{aligned} \langle Y_1 \rangle &= I_1 = 5.800 \cdot 10^{-5}, \\ \langle Y_2 \rangle &= \frac{1}{2}I_2 + 3J_2 = 1.728 \cdot 10^{-4} \end{aligned} \quad (9)$$

согласно формуле (27) Приложения. Подставляя (9) в (7), получим

$$\nu = 1.136 \cdot 10^{-6}. \quad (10)$$

3. Оценка возмущающего воздействия Солнца на поступательное движение главных тел системы Плуто́н — Ха́рон. Изменим постановку задачи начала предыдущего параграфа. Тела T_s заменим материальными точками O_s , добавив к ним точечное Солнце O_3 массой m_3 (см. рис. 2).

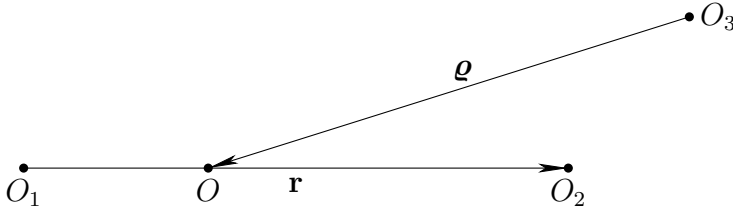


Рис. 2. Основные векторы в системе координат Якоби.

Относительное движение в системе координат Якоби описывается векторами $\mathbf{r} = O_1O_2$, $\boldsymbol{\rho} = O_3O$ и определяется заданием кинетической энергии относительного движения \mathcal{E}_1 и гравитационной потенциальной энергии \mathcal{E}_2 [27, 28]:

$$2\mathcal{E}_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} m_2 \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} m_3 \dot{\boldsymbol{\rho}}^2, \quad (11)$$

$$-\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{G}} = \frac{m_1 m_2}{r} + m_1 m_3 \left| \boldsymbol{\rho} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \right|^{-1} + m_2 m_3 \left| \boldsymbol{\rho} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \right|^{-1}. \quad (12)$$

Введем три безразмерные величины, характеризующие степень влияния различных сил на движение пары Плуто́н — Ха́рон:

$$\mu_1 = \frac{r}{\rho}, \quad \mu_2 = \frac{3m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \left(\frac{r}{\rho} \right)^2, \quad \mu_3 = \frac{2m_3}{m_1 + m_2} \left(\frac{r}{\rho} \right)^3.$$

Смысл μ_1 прозрачен. Смысл μ_2 и μ_3 выяснится чуть позже.

Величины μ_s переменны на некруговых орбитах. Для ориентировки дадим их наибольшее и среднее значения по средним аномалиям:

$$\langle \mu_s \rangle := \max \mu_s, \quad \|\mu_s\| := \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu_s dM dM'.$$

Очевидно, имеем

$$\langle \mu_1 \rangle = \frac{a(1+e)}{a'(1-e')}, \quad \langle \mu_2 \rangle = \frac{3m_1 m_2 a^2 (1+e)^2}{(m_1 + m_2)^2 a'^2 (1-e')^2}, \quad \langle \mu_3 \rangle = \frac{2m_3 a^3 (1+e)^3}{(m_1 + m_2) a'^3 (1-e')^3}, \quad (13)$$

$$\|\mu_1\| = \frac{a}{a'} X_0^{1,0}(e) X_0^{-1,0}(e'), \quad \|\mu_2\| = \frac{3m_1 m_2 a^2}{(m_1 + m_2)^2 a'^2} X_0^{2,0}(e) X_0^{-2,0}(e'),$$

$$\|\mu_3\| = \frac{2m_3 a^3}{(m_1 + m_2) a'^3} X_0^{3,0}(e) X_0^{-3,0}(e'). \quad (14)$$

Здесь a, e, M — оскулирующие большая полуось, эксцентриситет и средняя аномалия орбиты спутника относительно планеты; элементы орбиты барицентра O отно-

нительно Солнца снабжены штрихами; $X_0^{n,m}$ — коэффициенты Ганзена. Нам понадобятся восемь таких коэффициентов [29, 30]:

$$\begin{aligned} X_0^{1,0}(e) &= 1 + \frac{1}{2}e^2, & X_0^{2,0}(e) &= 1 + \frac{3}{2}e^2, \\ X_0^{3,0}(e) &= 1 + 3e^2 + \frac{3}{8}e^4, & X_0^{2,2}(e) &= \frac{5}{2}e^2, \\ X_0^{-1,0}(e) &= 1, & X_0^{-2,0}(e) &= (1 - e^2)^{-1/2}, \\ X_0^{-3,0}(e) &= (1 - e^2)^{-3/2}, & X_0^{-3,2}(e) &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

В частности, из (14), (15) следует

$$\begin{aligned} \|\mu_1\| &= \frac{a}{a'} \left(1 + \frac{1}{2}e^2 \right), & \|\mu_2\| &= \frac{3m_1m_2a^2}{(m_1 + m_2)^2a'^2\sqrt{1 - e^2}} \left(1 + \frac{3}{2}e^2 \right), \\ \|\mu_3\| &= \frac{2m_3a^3}{(m_1 + m_2)(a'\sqrt{1 - e^2})^3} \left(1 + 3e^2 + \frac{3}{8}e^4 \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Значения масс Плутона и Харона приведены в табл. 1. Там же содержится значение большой полуоси планетоцентрической орбиты Харона: $r = a$, поскольку $e = 0$. Остаются параметры $\mathcal{G}m_3 = 1.3271 \cdot 10^{20} \text{ м}^3/\text{с}^2$, $a' = 5.956 \cdot 10^{12} \text{ м}$, $e' = 0.2538$, взятые из [31]. Подставляя эти значения в (13), (16), найдем

$$\begin{aligned} \langle \mu_1 \rangle &= 4.409 \cdot 10^{-6}, & \langle \mu_2 \rangle &= 5.644 \cdot 10^{-12}, & \langle \mu_3 \rangle &= 2.332 \cdot 10^{-8}, \\ \|\mu_1\| &= 3.290 \cdot 10^{-6}, & \|\mu_2\| &= 3.249 \cdot 10^{-12}, & \|\mu_3\| &= 1.071 \cdot 10^{-8}. \end{aligned} \quad (17)$$

Второе и третье слагаемые (12) раскладываются в ряд по степеням r/ϱ с коэффициентами, пропорциональными многочленам Лежандра $P_n(\cos H)$. Здесь H — угол между векторами \mathbf{r} и $\boldsymbol{\varrho}$ или, что то же, угол между направлениями из барицентра системы Плутон — Харон на Солнце и на Плутон. Сохраняя члены до $n = 2$ включительно (приближение Хилла), получим

$$-\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{G}} = \frac{m_1m_2}{r} + \frac{(m_1 + m_2)m_3}{\varrho} + \frac{m_1m_2m_3}{m_1 + m_2} \frac{r^2}{\varrho^3} P_2(\cos H). \quad (18)$$

Согласно (6) наибольшее по всем углам H значение отношения модулей градиентов (по компонентам вектора $\boldsymbol{\varrho}$) третьего и второго слагаемых правой части (18) равно μ_2 . Аналогично, наибольшее значение отношения модулей градиентов (по компонентам вектора \mathbf{r}) третьего и первого слагаемых правой части (18) равно μ_3 .

Величина μ_2 описывает влияние Харона на движение центра масс O относительно Солнца. С помощью (17) заключаем, что она настолько мала, что можно этим влиянием пренебречь и положить $\mu_2 = 0$. Иными словами, при описании движения вектора $\boldsymbol{\varrho}$ можно в (18) опустить последнее слагаемое справа. Первое слагаемое справа также излишне, как не зависящее от $\boldsymbol{\varrho}$. Точно так же излишне первое слагаемое справа в (11).

Итак, движение $\boldsymbol{\varrho}$ определяется энергиями

$$2\mathcal{E}_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} m_3 \dot{\boldsymbol{\varrho}}^2, \quad -\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{G}} = \frac{(m_1 + m_2)m_3}{\varrho}.$$

Далее, уравнения Лагранжа второго рода не изменятся, если мы умножим $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ на любую отличную от нуля постоянную. Заменяя функции $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ на $\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4$, где

$$\mathcal{E}_3 = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\rho}}^2, \quad -\frac{\mathcal{E}_4}{\mathcal{G}} = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{\rho},$$

убедимся, что вектор $\boldsymbol{\rho}$ описывает кеплеров эллипс. Последний отвечает задаче одного притягивающего центра массы $m_1 + m_2 + m_3$.

Перейдем к движению вектора \mathbf{r} . Теперь вторые слагаемые справа в (11) и (18) можно опустить как не зависящие от координат векторов $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$. Далее, умножая $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ на подходящую постоянную, заменим их на $\mathcal{E}_5, \mathcal{E}_6$:

$$\mathcal{E}_5 = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2, \quad -\mathcal{E}_6 = \frac{\mathcal{G}(m_1 + m_2)}{r} + \frac{\mathcal{G}(m_1 + m_2)m_3}{m_1 + m_2} \frac{r^2}{\rho^3} P_2(\cos H).$$

Наибольшее по всем углам H значение отношения модулей градиентов (по компонентам вектора \mathbf{r}) второго и первого слагаемых \mathcal{E}_6 равно μ_3 , так что степень влияния Солнца на движение Харона относительно Плутона характеризует величина μ_3 . Сравним ее с введенной в (7) величиной ν . Согласно (10), (17) получаем

$$\frac{\nu}{\langle \mu_3 \rangle} = 49, \quad \frac{\nu}{\|\mu_3\|} = 106.$$

Это показывает, почему эффект Лидова — Кодзай не имеет места в системе Плутон — Харон (так же как и в системе спутников Урана), несмотря на большой взаимный наклон в 96° планетоцентрической орбиты Харона и гелиоцентрической орбиты Плутона. Эффект подавляется влиянием несферичности планеты и спутника. Хотя оба сжатия малы, удаленность Солнца умягчает его воздействие еще сильнее.

Таким образом, влияние Солнца на эволюцию двойной карликовой планеты оказывается чрезвычайно слабым и не нарушает ее устойчивости. Скорее всего, устойчивость сохраняется по меньшей мере на шкале времени в миллионы лет. Вопрос о более точной оценке продолжительности этой шкалы требует дополнительного исследования.

4. Оценка влияния Солнца на форму Плутона и Харона. В статье [4] исследована форма Плутона и Харона в рамках классической теории фигур равновесия небесных тел. Влиянием Солнца пренебрегалось. Покажем, что это допустимо.

Пусть точка Q лежит на поверхности S_1 тела T_1 , предполагаемой урвонной для суммы потенциалов

$$U_1(Q) + U_2(Q) + U_3(Q) + U_4(Q) = \text{const.}$$

Здесь U_1, U_2 — гравитационные потенциалы Плутона и Харона, рассматриваемых как трехмерные тела (так что так называемый приливный потенциал, вызванный взаимодействием Плутона и Харона, включен в U_1, U_2); U_3 — приливный гравитационный потенциал Солнца; U_4 — центробежный потенциал. Оценим отношения U_k/U_1 . Для наших целей достаточно использовать значения с тремя значащими цифрами. В результате будем иметь

$$U_1 = \frac{\mathcal{G}m_1}{a_1}, \quad \min U_2 = \frac{\mathcal{G}m_2}{r_1 + r_2 + a_1}, \quad \min U_4 = \frac{\omega^2}{2}(r_1 - a_1)^2, \quad (19)$$

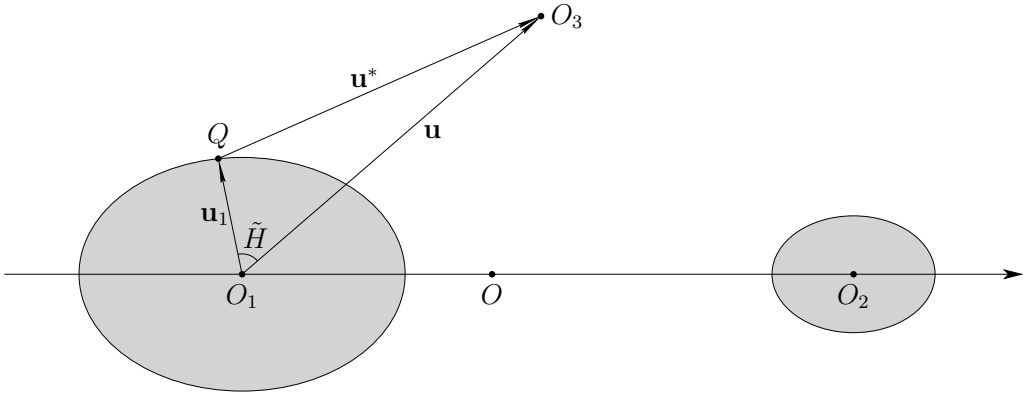


Рис. 3. К оценке приливного воздействия Солнца.

здесь ω — угловая скорость вращения Плутона и Харона (см. табл. 1 в работе [4]). Наименьшие значения взяты по всем положениям Q на S_1 . Подставляя значения параметров, получим

$$U_1 = 7.32 \cdot 10^5 \text{ м}^2/\text{с}^2, \quad U_2 \geq 5.10 \cdot 10^3 \text{ м}^2/\text{с}^2, \quad U_4 \geq 57.2 \text{ м}^2/\text{с}^2,$$

$$U_2/U_1 \geq 6.96 \cdot 10^{-3}, \quad U_4/U_1 \geq 7.81 \cdot 10^{-5}.$$

Перейдем к оценке U_3 . Введем векторы $O_1Q = \mathbf{u}_1$, $O_1O = \mathbf{u}$, $QO = \mathbf{u}^*$ (см. рис. 3). Гравитационный потенциал Солнца \tilde{U}_3 в точке Q определяется формулой

$$\tilde{U}_3 = \frac{\mathcal{G}m_3}{u^*} = \frac{\mathcal{G}m_3}{u} \left(1 - 2\frac{u_1}{u} \cos \tilde{H} + \frac{u_1^2}{u^2} \right)^{-1/2},$$

где \tilde{H} — угол между \mathbf{u} и \mathbf{u}_1 .

Действуя, как при преобразовании (2), представим \tilde{U}_3 в виде $\tilde{U}_3 = L_0 + L_1 + L_2$ при

$$L_0 = \frac{\mathcal{G}m_3}{u}, \quad L_1 = \frac{\mathcal{G}m_3 u_1}{u^2} P_1(\cos \tilde{H}), \quad L_2 = \frac{\mathcal{G}m_3 u_1^2}{u^3} P_2(\cos \tilde{H}).$$

Величина L_0 не зависит от \mathbf{u}_1 и не влияет на движение точки Q . Вычислим градиент (по компонентам вектора \mathbf{u}_1) величины L_1 :

$$\text{grad}L_1 = \frac{\mathcal{G}m_3}{u^3} \text{grad}(\mathbf{u}\mathbf{u}_1) = \frac{\mathcal{G}m_3}{u^3} \mathbf{u},$$

что совпадает с ускорением точки O_1 , вызванным притяжением Солнца. Чтобы получить приливный потенциал Солнца, нужно вычесть L_1 из \tilde{U}_3 . В результате будем иметь

$$U_3 = L_2 = \frac{\mathcal{G}m_3 u_1^2}{u^3} P_2(\cos \tilde{H}). \quad (20)$$

Из (19), (20) следует

$$\frac{U_3(Q)}{U_1(Q)} \leq \frac{m_3}{m_1} \left(\frac{a_1}{q} \right)^3 = 2.9 \cdot 10^{-12}, \quad (21)$$

где q — перигельное расстояние Плутона.

Если Q — точка на поверхности Харона, то формула (21) переходит в

$$\frac{U_3(Q)}{U_2(Q)} \leq \frac{m_3}{m_2} \left(\frac{a_2}{q} \right)^3 = 3.2 \cdot 10^{-12}. \quad (22)$$

Оценки (21), (22) показывают, что приливное воздействие Солнца на форму Плутона и Харона более чем на 6 порядков слабее их взаимодействия.

5. Выводы. В настоящей работе исследованы факторы, влияющие на долговременную орбитальную динамику модельной системы Плутон — Харон и на форму ее главных тел. Именно, учитываются возмущения со стороны Солнца, а также несферичность формы и гравитационного поля Плутона и Харона. Получены необходимые численные оценки и показано, что данная система сохраняет свою динамическую конфигурацию по меньшей мере на шкале времени в миллионы лет. Показано, что приливные возмущения со стороны Солнца фактически не оказывают влияния на форму поверхности Плутона и Харона.

6. Приложение. Нормы второй сферической гармонике. Рассмотрим тело T массы m в системе его главных центральных осей инерции. Ось x направим по оси наименьшего момента инерции A , z — по оси наибольшего момента инерции C , так что

$$0 < A < B < C. \quad (23)$$

Вторая гармоника гравитационного потенциала тела T имеет вид

$$Y(\theta, \lambda) = -IP_2(\cos \theta) + JP_2^2(\cos \theta) \cos 2\lambda = -I \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) + 3J \sin^2 \theta \cos 2\lambda. \quad (24)$$

Коэффициенты Стокса I, J связаны с моментами инерции формулами [14, 25, 26]:

$$I = \frac{2C - A - B}{2ma^2}, \quad J = \frac{B - A}{4ma^2}, \quad (25)$$

где a — радиус охватывающей тело T сферы. Для трехосного эллипсоида он совпадает с наибольшей из его полуосей, соответствующей *наименьшему* моменту инерции A . Из (23), (25) вытекает неравенство

$$I > 2J > 0. \quad (26)$$

Вычислим равномерную (чебышёвскую) норму $\langle Y \rangle = \max_{\theta, \lambda} |Y(\theta, \lambda)|$. Производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial \theta} &= 3 \cos \theta \sin \theta (I + 2J \cos 2\lambda), \\ \frac{\partial Y}{\partial \lambda} &= -6J \sin^2 \theta \sin 2\lambda \end{aligned}$$

исчезают в трех случаях:

- 1) $\sin \theta = 0, \cos \theta = \pm 1, Y = -I$;
- 2) $\cos \theta = 0, \sin \theta = \pm 1, \sin 2\lambda = 0, \cos 2\lambda = \pm 1, Y = \frac{1}{2}I \pm 3J$;
- 3) $\cos \theta \sin \theta \neq 0, \sin 2\lambda = 0, \cos 2\lambda = \pm 1, I \pm 2J = 0$.

Третий случай невозможен в силу неравенства (26).

В первом случае локальный максимум $|Y|$ равен I , во втором он равен $(1/2)I + 3J$. Их разность

$$\xi := I - \left(\frac{1}{2}I + 3J \right) = \frac{1}{2}I - 3J = \frac{C + A - 2B}{2ma^2}$$

в зависимости от значений моментов инерции может принимать значения любого знака. Например, $2ma^2\xi = -1, 0, +1$ при $(A, B, C) = (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 3, 6)$ соответственно.

Окончательно имеем

$$\langle Y \rangle = \max \left\{ I, \frac{1}{2}I + 3J \right\}. \quad (27)$$

Среднеквадратичная же по сфере норма хорошо известна [13, 14]:

$$\|Y\| = \sqrt{\bar{I}^2 + \bar{J}^2} = \sqrt{\frac{I^2 + 12J^2}{5}},$$

где \bar{I}, \bar{J} — нормализованные коэффициенты Стокса.

Мы искренне признательны доктору Будхадитье Пайну и профессорам Н. В. Емельянову и Б. П. Кондратьеву за полезное обсуждение. Мы также благодарим рецензентов за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания, способствовавшие ее улучшению.

Литература

1. Weaver H. A., et al. The small satellites of Pluto as observed by New Horizons. *Science* **351** (6279), aae0030 (2016). <https://doi.org/10.1126/science.aae0030>
2. Nimmo F., Uurhan O., Lisse C. V., Bierson C. J., Lauer T. R., Buie M. W., Throop H. B., Kammer J. A., Roberts J. H., Mckinnon W. B., Zangari A. M., Moore J. M., Stern S. A., Young L. A., Weaver H. A., Olkin C. B., Ennico K. Mean radius and shape of Pluto and Charon from New Horizons images. *Icarus* **287**, 12–29 (2017).
3. Stern S. A., Grundy W. M., McKinnon W. B., Weaver H. A., Young L. A. The Pluto System after New Horizons. *ARA&A* **56**, 357–392 (2018).
4. Kholshchevnikov K. V., Borukha M. A., Eskin B. B., Mikryukov D. V. On the asphericity of the figures of Pluto and Charon. *Planet. Space Sci.* **181**, 10477 (2020).
5. Buie M. W., Grundy W. M., Young E. F., Young L. A., Stern S. A. Orbits and photometry of Pluto's satellites: Charon, S/2005 P1 and S/2005 P2. *The Astronomical Journal* **132**, 290–298 (2006).
6. Lidov M. L. The Evolution of Orbits of Artificial Satellites of Planets under the Action of Gravitational Perturbations of External Bodies. *Planet. Space Sci.* **9**, 719–759 (1962).
7. Kozai Y. Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity. *Astron. J.* **67**, 591 (1962).
8. Shevchenko I. I. *The Lidov — Kozai Effect — Applications in Exoplanet Research and Dynamical Astronomy*. In: Astrophysics and Space Science Library, vol. 441. Switzerland, Springer (2017).
9. Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П. *Теоретическая механика. Раздел второй. Динамика*. Москва, Юрайт (2015).
10. Cline D. *Variational principles in classical mechanics*. Rochester, New York, University of Rochester Press (2017).
11. Appell P. *Figures d'équilibre d'une masse liquide homogène en rotation*. Paris, Gauthier-Villars (1932).
12. Кондратьев Б. П. *Теория потенциала и фигуры равновесия*. Москва, Ижевск, ИКИ (2003).
13. Гобсон Е. В. *Теория сферических и эллипсоидальных функций*, пер. с англ. Москва, ИЛ (1952).

14. Антонов В. А., Тимошкова Е. И., Холшевников К. В. *Введение в теорию ньютоновского потенциала*. Москва, Наука (1988).
15. Brozović M., Showalter M. R., Jacobson R. A., Buie M. W. The orbits and masses of satellites of Pluto. *Icarus* **246**, 317–329 (2015).
16. Cheng W. H., Lee M. H., Peale S. J. Complete tidal evolution of Pluto — Charon. *Icarus* **233**, 242–258 (2014).
17. Antonov V. A., Kholchevnikov K. V. Die multidimensionale Ungleichung von Bernstein und die Abschätzung der Ableitungen des Gravitationspotentials. *Astronomische Nachrichten* **299** (3), 131–135 (1978).
18. Goossens S., Lemoine F. G., Sabaka T. J., Nicholas J. B., Mazarico E., Rowlands D. D., Loomis B. D., Chinn D. S., Neumann G. A., Smith D. E., Zuber M. T. A global degree and order 1200 model of the Lunar gravity field using GRAIL mission data. *47th Lunar and Planetary Science Conference* (2016). Доступно на: <https://www.hou.usra.edu/meetings/lpsc2016/pdf/1484.pdf> (дата обращения: 26.05.2021).
19. Konopliv A. S., Park R. S., Vaughan A. T., Bills B. G., Asmar S. W., Ermakov A. I., Rambaux N., Raymond C. A., Castillo-Rogez J. C., Russell C. T., Smith D. E., Zuber M. T. The Ceres gravity field, spin pole, rotation period and orbit from the Dawn radiometric tracking and optical data. *Icarus* **299**, 411–429 (2018).
20. Park R. S., Konopliv A. S., Bills B. G., Rambaux N., Castillo-Rogez J. C., Raymond C. A., Vaughan A. T., Ermakov A. I., Zuber M. T., Fu R. R., Toplis M. J., Russell C. T., Nathues A., Preusker F. A partially differentiated interior for (1) Ceres deduced from its gravity field and shape. *Nature* **537**, 515–517 (2016). <https://doi.org/10.1038/nature18955>
21. Iess L., Stevenson D. J., Parisi M., Hemingway D., Jacobson R. A., Lunine J. I., Nimmo F., Armstrong J. W., Asmar S. W., Ducci M., Tortora P. The Gravity Field and Interior Structure of Enceladus. *Science* **344**, 78–80 (2014). <https://doi.org/10.1126/science.1250551>
22. Thomas P. C. Sizes, shapes, and derived properties of the saturnian satellites after the Cassini nominal mission. *Icarus* **208**, 395–401 (2010).
23. Zannoni M., Hemingway D., Casajus L. G., Tortora P. The gravity field and interior structure of Dione. *Icarus* **345**, 113713 (2020).
24. Iess L., Rappaport N. J., Tortora P., Lunine J. Gravity field and interior of Rhea from Cassini data analysis. *Icarus* **190**, 585–593 (2007). <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2007.03.027>
25. Caputo M. *The Gravity Field of the Earth from Classical and Modern Methods*. New York, Academic Press (1967).
26. Heiskanen W. A., Moritz H. *Physical Geodesy*. London, Freeman and Company (1967).
27. Субботин М. Ф. *Введение в теоретическую астрономию*. Москва, Наука (1968).
28. Холшевников К. В., Греб А. В., Кузнецов Э. Д. Разложение гамилтониана планетной задачи в ряд Пуассона по всем элементам (теория). *Астрон. вестн.* **35**, вып. 3, 267–272 (2001).
29. Sadov S. Yu. Analytic properties of Hansen coefficients. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **100** (4), 287–300 (2008). <https://doi.org/10.1007/s10569-008-9123-z>
30. Fominov A. M. Алгоритмы вычисления коэффициентов Ганзена, функций эксцентриситета и их производных. *Transactions of IAA RAS*. Iss. 5, 313–335 (2000).
31. Железнов Н. Б., Кочегова О. М., Кузнецов В. Б., Медведев Ю. Д., Чернетенко Ю. А., Шор В. А. *Эфемериды малых планет на 2018 год*. Санкт-Петербург, Изд-во ИПА (2017).

Статья поступила в редакцию 17 октября 2020 г.;
 после доработки 29 января 2021 г.;
 рекомендована в печать 19 марта 2021 г.

Контактная информация:

Холшевников Константин Владиславович — д-р физ.-мат. наук, проф. (1939–2021)
Микрюков Денис Викторович — мл. науч. сотр.; d.mikryukov@spbu.ru
Джазмат Мухаммад Салахович — канд. физ.-мат. наук, проф.; jazmati@yahoo.com

Figures of Pluto and Charon and their relative motion*

K. V. Kholshchevnikov[†], *D. V. Mikryukov*¹, *M. S. Jazmati*²

¹ St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation
² Qassim University, P. O. Box 6644, Buraidah 51452, Saudi Arabia

*This work is supported by Russian Foundation for Basic Research (grant No. 18-02-00552).

For citation: Kholoshevnikov K. V., Mikryukov D. V., Jazmati M. S. Figures of Pluto and Charon and their relative motion. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 3, pp. 533–546. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.314> (In Russian)

The comparative effect of two factors on the translatory motion of the centres of mass of the Pluto – Charon system is investigated. The first important factor is the non-sphericity of the shape and gravitational field of the bodies in the system. The second is the gravitation of the Sun. As a measure of the influence of both factors we use the ratio of the corresponding perturbing acceleration to the main one. The main acceleration is caused by the mutual Newtonian attraction of Pluto and Charon. It has been established that for the first factor this measure is of the order of 10^{-6} , while for the second factor it is two orders of magnitude smaller. This explains why the Lidov – Kozai effect (despite a large mutual slope of 96° between the planes of the satellite's orbit around the planet, and the barycentre of the system around the Sun) does not appear. The situation is similar to the case with the satellites of Uranus. As a result, the Pluto – Charon system remains stable at least on a timescale of millions of years. The tidal effect of the Sun on the surface shape of the bodies under study is also estimated. The ratio of the tidal potential of the Sun at a point on the surface of the body to the gravitational potential of the body itself at this point is taken as a measure of impact. It turned out to be of the order of $3 \cdot 10^{-12}$, which is more than six orders less than the influence of rotation and mutual attraction of Pluto and Charon. In fact, the Sun does not affect the figures of the bodies of the system.

Keywords: planets, satellites, Pluto, Charon, equilibrium figures, Jacobi coordinates, Lidov – Kozai effect.

References

1. Weaver H. A., et al. The small satellites of Pluto as observed by New Horizons. *Science* **351** (6279), aae0030 (2016). <https://doi.org/10.1126/science.aae0030>
2. Nimmo F., Uurhan O., Lisse C. V., Bierson C. J., Lauer T. R., Buie M. W., Throop H. B., Kammer J. A., Roberts J. H., Mckinnon W. B., Zangari A. M., Moore J. M., Stern S. A., Young L. A., Weaver H. A., Olkin C. B., Ennico K. Mean radius and shape of Pluto and Charon from New Horizons images. *Icarus* **287**, 12–29 (2017).
3. Stern S. A., Grundy W. M., McKinnon W. B., Weaver H. A., Young L. A. The Pluto System after New Horizons. *ARA&A* **56**, 357–392 (2018).
4. Kholoshevnikov K. V., Borukha M. A., Eskin B. B., Mikryukov D. V. On the asphericity of the figures of Pluto and Charon. *Planet. Space Sci.* **181**, 10477 (2020).
5. Buie M. W., Grundy W. M., Young E. F., Young L. A., Stern S. A. Orbits and photometry of Pluto's satellites: Charon, S/2005 P1 and S/2005 P2. *The Astronomical Journal* **132**, 290–298 (2006).
6. Lidov M. L. The Evolution of Orbits of Artificial Satellites of Planets under the Action of Gravitational Perturbations of External Bodies. *Planet. Space Sci.* **9**, 719–759 (1962).
7. Kozai Y. Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity. *Astron. J.* **67**, 591 (1962).
8. Shevchenko I. I. *The Lidov – Kozai Effect – Applications in Exoplanet Research and Dynamical Astronomy*. In: Astrophysics and Space Science Library, vol. 441. Switzerland, Springer (2017).
9. Polyakhov N. N., Zegzhda S. A., Yushkov M. P. *Theoretical Mechanics. Section two. Dynamics*. Moscow, Urait Publ. (2015). (In Russian)
10. Cline D. *Variational principles in classical mechanics*. Rochester, New York, University of Rochester Press (2017).
11. Appell P. *Figures d'équilibre d'une masse liquide homogène en rotation*. Paris, Gauthier-Villars (1932).
12. Kondratiev B. P. *Potential Theory, and Figures of Equilibrium*. Moscow, Ijevsk, IKI Publ. (2003). (In Russian)
13. Hobson E. W. *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*. Cambridge, Cambridge Univ. Press (1931). [Russ. ed.: *Teoriya sfericheskikh i jellipsoidal'nyh funktsij*, Moscow, IL Publ. (1952)].

14. Antonov V. A., Timoshkova E. I., Kholshevnikov K. V. *Introduction to the Theory of Newtonian Potential*. Moscow, Nauka Publ. (1988). (In Russian)
15. Brozović M., Showalter M. R., Jacobson R. A., Buie M. W. The orbits and masses of satellites of Pluto. *Icarus* **246**, 317–329 (2015).
16. Cheng W. H., Lee M. H., Peale S. J. Complete tidal evolution of Pluto — Charon. *Icarus* **233**, 242–258 (2014).
17. Antonov V. A., Kholchevnikov K. V. Die multidimensionale Ungleichung von Bernstein und die Abschätzung der Ableitungen des Gravitationspotentials. *Astronomische Nachrichten* **299** (3), 131–135 (1978).
18. Goossens S., Lemoine F. G., Sabaka T. J., Nicholas J. B., Mazarico E., Rowlands D. D., Loomis B. D., Chinn D. S., Neumann G. A., Smith D. E., Zuber M. T. A global degree and order 1200 model of the Lunar gravity field using GRAIL mission data. *47th Lunar and Planetary Science Conference* (2016). Available at: <https://www.hou.usra.edu/meetings/lpsc2016/pdf/1484.pdf> (accessed: May 26, 2021).
19. Konopliv A. S., Park R. S., Vaughan A. T., Bills B. G., Asmar S. W., Ermakov A. I., Rambaux N., Raymond C. A., Castillo-Rogez J. C., Russell C. T., Smith D. E., Zuber M. T. The Ceres gravity field, spin pole, rotation period and orbit from the Dawn radiometric tracking and optical data. *Icarus* **299**, 411–429 (2018).
20. Park R. S., Konopliv A. S., Bills B. G., Rambaux N., Castillo-Rogez J. C., Raymond C. A., Vaughan A. T., Ermakov A. I., Zuber M. T., Fu R. R., Toplis M. J., Russell C. T., Nathues A., Preusker F. A partially differentiated interior for (1) Ceres deduced from its gravity field and shape. *Nature* **537**, 515–517 (2016). <https://doi.org/10.1038/nature18955>
21. Iess L., Stevenson D. J., Parisi M., Hemingway D., Jacobson R. A., Lunine J. I., Nimmo F., Armstrong J. W., Asmar S. W., Ducci M., Tortora P. The Gravity Field and Interior Structure of Enceladus. *Science* **344**, 78–80 (2014). <https://doi.org/10.1126/science.1250551>
22. Thomas P. C. Sizes, shapes, and derived properties of the saturnian satellites after the Cassini nominal mission. *Icarus* **208**, 395–401 (2010).
23. Zannoni M., Hemingway D., Casajus L. G., Tortora P. The gravity field and interior structure of Dione. *Icarus* **345**, 113713 (2020).
24. Iess L., Rappaport N. J., Tortora P., Lunine J. Gravity field and interior of Rhea from Cassini data analysis. *Icarus* **190**, 585–593 (2007). <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2007.03.027>
25. Caputo M. *The Gravity Field of the Earth from Classical and Modern Methods*. New York, Academic Press (1967).
26. Heiskanen W. A., Moritz H. *Physical Geodesy*. London, Freeman and Company (1967).
27. Subbotin M. F. *Introduction to Theoretical Astronomy*. Moscow, Nauka Publ. (1968). (In Russian)
28. Kholshevnikov K. V., Greb A. V., Kuznetsov E. D. The Expansion of the Hamiltonian of the Planetary Problem into the Poisson Series in All Keplerian Elements (Theory). *Astronomicheskii vestnik* **35**, iss. 3, 267–272 (2001). (In Russian) [Engl. transl.: *Solar System Research* **35**, 243–248 (2001). <https://doi.org/10.1023/A:1010487107989>].
29. Sadvov S. Yu. Analytic properties of Hansen coefficients. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **100** (4), 287–300 (2008). <https://doi.org/10.1007/s10569-008-9123-z>
30. Fominov A. M. Algorithms of calculations of Hansen coefficients, eccentricity functions, and their derivatives. *Transactions of IAA RAS*, iss. 5, 313–335 (2000). (In Russian)
31. Zheleznov N. B., Kochetova O. M., Kuznetsov V. B., Medvedev Yu. D., Chernetenko Yu. A., Shor V. A. *Ephemerides of minor planets for 2018*. St. Petersburg, Inst. Appl. Astron. Press (2017). (In Russian)

Received: October 17, 2020

Revised: January 29, 2021

Accepted: March 19, 2021

Authors' information:

Konstantin V. Kholshevnikov (1939–2021)

Denis V. Mikryukov — d.mikryukov@spbu.ru

Mohammad S. Jazmati — jazmati@yahoo.com