Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 3
УДК 519.213 + 517.3
MSC 60E15, 60D05; 26B15

# Влияние симметризации распределений на их остроконечность

*М. И. Ревяков*

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Российская Федерация, 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27

**Для цитирования:** *Ревяков М. И.* Влияние симметризации распределений на их остроконечность // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 3. С. 442–454. https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.306

Предлагаются косвенные преобразования одномерной, двумерной и многомерной случайных величин посредством разного рода симметризаций функции плотности. Основное внимание уделяется изменению при этом остроконечности соответствующей случайной величины относительно начала.

*Ключевые слова*: остроконечность распределений, перестановка функций, непрерывная симметризация, мажоризация, лог-вогнутость, статистические выводы.

**1. Введение.** Мы рассматриваем некоторые виды симметризации случайных величин (с. в.)[1]. Исследуется их влияние на остроконечность с. в. относительно начала, под которым мы понимаем начало координат. В основном (за исключением раздела 5) симметризация осуществляется за счет надлежащего преобразования функции плотности распределения.

В разделе 2 нас интересует симметризация по Штейнеру одномерной случайной величины. Здесь дополнительно показано, что она уменьшает абсолютные центральные моменты распределения.

В разделе 3 для двумерного случая вводится одна разновидность известной радиальной симметризации Сегё [1]. Для того чтобы показать ее влияние на остроконечность, предварительно пришлось осуществить переход (теорема 2) от центрально симметричных выпуклых множеств в $\Re^n$ к симметричным отрезкам прямых, проходящих через начало. По существу, это означает редукцию размерности до 1.

Раздел 4 посвящен процессам непрерывной симметризации плотности (по аналогии с Приложением B3 в [2]). В п. 4.1 показано, что непрерывная радиальная симметризация монотонно увеличивает остроконечность. В п. 4.2 выявлено, что симметризация $f_\lambda(\mathbf{x}) = ((1+\lambda)g(\mathbf{x}) + (1-\lambda)g(-\mathbf{x}))/2,\ \lambda \in [0,1]$, где $g$ — произвольная плотность $n$-мерного с. в., не изменяет остроконечность. Для этого понадобилась теорема 3, устанавливающая необходимое и достаточное условие для равенства остроконечности двух с. в.

Раздел 5 касается повышения достоверности статистического вывода при сравнении параметра масштаба у двух распределений с увеличением объема выборки, состоящей из независимых наблюдений над соответствующими с. в. Заключение базируется на работе [3], связанной с остроконечностью, с учетом того факта, что

[1] Это же сокращение используется в разделах 3 и 4 для случайных векторов.

разность двух независимых одинаково распределенных случайных величин является симметричной с. в.

**2. Симметризация по Штейнеру.** ***2.1. Перестановка плотности в симметрично убывающем порядке.*** Пусть одномерная случайная величина $X$ имеет плотность $f(x)$, непрерывную на всей оси. Тогда кривая $y = f(x)$ вместе с осью $x$ ограничивает некоторое открытое множество $D$. Будем его симметризовать по Штейнеру (см. [2, § 1.8] и [4, § 4.5]) относительно оси $y$. Итак, пусть $M = \max f(x)$. При всяком $\zeta$, $0 < \zeta < M$, прямая $y = \zeta$ пересекает $D$ по некоторому множеству непересекающихся открытых промежутков с суммой длин $\ell(\zeta)$, где $0 < \ell(\zeta) < \infty$.

Симметризованным множеством называется множество

$$D^* = \left\{(x, y) : \ |x| < \frac{1}{2}\ell(y)\right\}.$$

Известно, что $D^*$ — открытое множество. В нашем случае оно ограничено осью $x$ и некоторой кривой. Поскольку $\ell(y)$ строго возрастает с уменьшением $y$, то эта кривая является однозначной функцией от $x$, причем непрерывной, четной и унимодальной. Обозначим ее $f^*(x)$. В силу того, что штейнерова симметризация сохраняет площадь, $f^*(x)$ есть плотность некоторой с. в. $X^*$.

Такого рода преобразование функций известно как перестановка функций в симметрично убывающем порядке [5, § 10.12]. Ее связь с симметризацией по Штейнеру отмечена, например, в [6] без привлечения вероятностных аспектов.

**Определение 1.** С. в. $X^*$ с плотностью $f^*(x)$, полученной перестановкой непрерывной плотности $f(x)$ в симметрично убывающем порядке, будем называть *симметризованной* (по Штейнеру) по отношению к с. в. $X$.

**Замечание 1.** Нетрудно проверить, что для с. в. $Z = dX + e$ имеем $Z^* = dX^*$, принимая во внимание одинаковую распределенность $X^*$ и $-X^*$.

В дальнейшем нам понадобится следующее известное неравенство.

Неотрицательная измеримая функция $h$ обнуляется в бесконечности, если все ее множества положительного уровня имеют конечную меру Лебега:

$$\mathcal{L}\{x|h(x) > t\} < \infty \qquad \text{для всех } t > 0.$$

**Неравенство Харди — Литтлвуда.** Пусть $f$ и $g$ — неотрицательные измеримые функции, которые обнуляются в бесконечности. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx \le \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g^*(x)dx,$$

где $f^*$ и $g^*$ — соответственно перестановки функций $f$ и $g$ в симметрично убывающем порядке.

***2.2. Остроконечность.*** По определению З. В. Бирнбаума (см. [7]) одномерная с. в. $U_1$ *более остроконечна* относительно $a$, чем с. в. $U_2$ относительно $b$, если

$$\mathbf{P}\{|U_1 - a| \le t\} \ge \mathbf{P}\{|U_2 - b| \le t\} \qquad \text{для всех } \ t \ge 0.$$

**Предложение.** *Случайная величина $X^*$, симметризованная по отношению к случайной величине $X$, более остроконечна относительно нуля, чем $X$ относительно любого $b$.*

Это утверждение непосредственно следует из неравенства Харди — Литтлвуда, если положить (с учетом замечания 1) функцию $g(x)$ равной единице в интервале $[-t, t]$ и равной нулю в остальной части оси $x$. □

***2.3. Моменты.***

**Теорема 1.** *Если с. в. $X$ с непрерывной плотностью $f(x)$ имеет первый момент, то его имеет и симметризованная с. в. $X^*$. Если, кроме того, $X$ имеет абсолютный центральный момент $s$-го порядка, $s > 0$, то его имеет и $X^*$, причем этот момент у $X^*$ не больше, чем у $X$.*

Доказательство. Сдвинем $f(x)$ так, чтобы математическое ожидание с. в. $X$ оказалось равным нулю. Это не повлияет на центральные моменты $X$ и не изменит $f^*(x)$. Тогда нужно установить, что для любого положительного $s$ выполняется

$$I_1 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |x|^s f(x)dx \geq \int_{-\infty}^{\infty} |x|^s f^*(x)dx \equiv I_2,$$

если интеграл $I_1$ существует. Имеем для любого $c > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (c^s - |x|^s)^+ (f^*(x) - f(x))dx = \int_{-c}^{c} (c^s - |x|^s)(f^*(x) - f(x))dx.$$

Поскольку $|x|^s$ возрастает по $|x|$, то функция $g(x) = (c^s - |x|^s)^+$ обнуляется в бесконечности и $g^*(x) = g(x)$. Тогда согласно неравенству Харди — Литтлвуда получим, что левая часть равенства неотрицательна. Такова же и правая часть, и остается доказать, что

$$c^s \int_{-c}^{c} (f^*(x) - f(x))dx \to 0 \ \text{ при } c \to \infty,$$

если $I_1$ существует, то есть надо доказать, что к нулю стремится выражение

$$c^s \int_{-\infty}^{\infty} (f^*(x) - f(x))dx - c^s \int_{|x|>c} f^*(x)dx + c^s \int_{|x|>c} f(x)dx \equiv I - II + III.$$

Имеем $I = 0$; $III < \int_{|x|>c} |x|^s f(x)dx \to 0$, так как $I_1$ существует, а $|x|^s$ возрастает по $|x|$. Наконец, по предложению получаем $II \ (\leq III) \to 0$. □

**3. Радиальная симметризация.** В [1] Г. Сегё ввел следующий вид радиальной симметризации.

Пусть $C$ — кривая на плоскости, которая ограничивает компактное множество, звездообразное относительно внутренней точки $\mathbf{0}$. Представим $C$ в полярных координатах: $r = r(\varphi)$, где $r$ — расстояние от $\mathbf{0}$. Пусть $m$ обозначает целое число, $m \geq 2$. Симметризация, примененная к $C$ и $\mathbf{0}$, заменяет $C$ кривой $C^*$ с полярным уравнением

$$r = \rho(\varphi) = \{r(\varphi) r(\varphi + 2\pi/m) \cdots r(\varphi + (m-1)2\pi/m)\}^{1/m},$$

то есть $\rho(\varphi)$ — среднее геометрическое радиусов на $m$ равноотстоящих лучах.

В [1], в частности, показано, что при симметризации Сегё площадь фигуры, заключенной внутри кривой $C$, уменьшается (не увеличивается). Это установлено путем сравнения с радиальной симметризацией следующего вида, сохраняющей площадь фигуры:

$$r = \rho(\varphi) = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{\nu=0}^{m-1}\Big[r\Big(\varphi + \frac{2\pi\nu}{m}\Big)\Big]^2}.$$

В дальнейшем нам понадобится именно эта симметризация. Дело в том, что сохранение площади фигур в одноуровневых параллельных сечениях обеспечивает по принципу Кавальери сохранение объема рассекаемого тела. Если это тело заключено между плоскостью декартовых координат и функцией плотности двумерного случайного вектора, то отсюда вытекает, что такая симметризация порождает плотность нового двумерного с. в.

Нас будет интересовать случай $m = 2$, то есть случай, когда звездообразная кривая $r = r(\varphi)$ заменяется звездообразной кривой $r = \rho(\varphi)$, где

$$\rho(\varphi) = \rho(\varphi + \pi) = \sqrt{(r^2(\varphi) + r^2(\varphi + \pi))/2}, \qquad \varphi \in [0, \pi). \tag{1}$$

Мы хотим показать, что симметризация, осуществленная на основании (1), увеличивает остроконечность относительно начала. Но прежде обсудим распространение ряда положений с одномерного случая на многомерный.

Согласно определению С. Шермана (см. [8]), $n$-мерный случайный вектор $Y$ *более остроконечен*, чем с. в. $X$ (относительно начала), $X \prec_{peak} Y$, если они оба имеют плотности и если выполняется неравенство

$$P\{Y \in A\} \geq P\{X \in A\}$$

для всех $A \in \mathbb{S}_n$, класс компактных, выпуклых, симметричных (относительно начала) множеств в $n$-мерном пространстве.

Введем в $\Re^n$, $n \geq 2$, декартовы координаты $x_1, x_2, \dots, x_n$ и полярные координаты $r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$, где

$$x_1 = r\cos(\varphi_1),\ x_2 = r\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2),\ x_3 = r\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\cos(\varphi_3), \dots,$$

$$x_{n-1} = r\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\cdots\sin(\varphi_{n-2})\cos(\varphi_{n-1}),$$

$$x_n = r\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\cdots\sin(\varphi_{n-2})\sin(\varphi_{n-1}).$$

Имеем $r \geq 0$ и все $\varphi_i$, $i \leq n-2$, пробегают интервал $[0, \pi]$, а $\varphi_{n-1}$ пробегает интервал $[0, 2\pi)$.

Пусть $L$ — произвольная прямая в $\Re^n$, проходящая через $\mathbf{0}$. Обозначим через $L_R$ ее отрезок с центром в точке $\mathbf{0}$ и длиной $2R$. Примем прямую $L$ за ось $Z$ с 0 в точке $\mathbf{0}$. Введем на оси $Z$ естественную параметризацию: $z = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \|\, \mathbf{x} \,\|$ «справа» от нуля и $z = -\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = -\,\|\, \mathbf{x} \,\|$ «слева» от нуля. Возьмем $X$ и $Y$ — случайные векторы в $\Re^n$ с непрерывными плотностями $h_1$ и $h_2$ соответственно. Положим $h_j(z) = h_j(x_1, \dots, x_n)$, $j = 1, 2$, на оси $Z$.

**Теорема 2.** *Для того чтобы случайный вектор $Y$ был более остроконечен, чем случайный вектор $X$,*

(i) *достаточно, чтобы для любого* $L_R$

$$\int_{L_R} |z|^{n-1} h_2(z)dz \geq \int_{L_R} |z|^{n-1} h_1(z)dz,$$

(ii) *необходимо, чтобы для любого* $L_R$

$$\int_{L_R} h_2(z)dz \geq \int_{L_R} h_1(z)dz.$$

Доказательство.

(i) Пусть $A$ — произвольное компактное, выпуклое и симметричное (относительно $\mathbf{0}$) множество в $\Re^n$ и $(\Delta)$ — множество в пространстве $r\varphi_1 \dots \varphi_{n-1}$, связанное с $A$ вышеуказанными соотношениями между декартовыми и полярными координатами. Имеем для $j = 1, 2$ соотношение

$$\begin{aligned}
&\int_A h_j(x_1, \dots, x_n)dx_1 \dots dx_n = \\
&\qquad = \int_{(\Delta)} h_j(x_1(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}), \dots, x_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}))\times \\
&\qquad\qquad \times |J(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})| dr d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1} = \\
&\qquad = \int_{(\Delta)} h_j(r\cos(\varphi_1), \dots, r\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\cdots\sin(\varphi_{n-1}))\times \\
&\qquad\qquad \times r^{n-1}\sin(\varphi_1)^{n-2}\sin(\varphi_2)^{n-1}\cdots\sin(\varphi_{n-2}) dr d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1}. \quad (2)
\end{aligned}$$

Заметим, что перебор всех сочетаний $\varphi_i$, $i = 1, \dots, n-2$, по одному в интервалах $[0, \pi]$ и $\varphi_{n-1}$ в интервале $[0, 2\pi)$ дает всевозможные лучи в $\Re^n$, исходящие из $\mathbf{0}$. А если $\varphi_{n-1}$ в интервале $[0, \pi)$ брать только вместе с $\varphi_{n-1} + \pi$, то образуются всевозможные прямые $L$, проходящие через $\mathbf{0}$.

Теперь введем функции

$$f_j(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) = h_j(r\cos(\varphi_1), \dots, r\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\cdots\sin(\varphi_{n-1})), \ j = 1, 2,$$

и положим $P_1(A) = \mathbf{P}\{X \in A\}$ и $P_2(A) = \mathbf{P}\{Y \in A\}$. Пусть $R = R(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$ — уравнение границы множества $A$. Тогда, учитывая, что в силу симметричности $A$ оказывается верным $R(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, \varphi_{n-1}) = R(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, \varphi_{n-1} + \pi)$, можем записать

$$\begin{aligned}
&P_j(A) = \int_A h_j(x_1, \dots, x_n)dx_1 \dots dx_n = \\
&= \underbrace{\int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi}}_{n-2} \Big[\prod_{i=1}^{n-2} \sin(\varphi_i)^{n-1-i} \int_0^{\pi-0} \int_0^{R(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})} r^{n-1}(f_j(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, \varphi_{n-1}) + \\
&\qquad\qquad + f_j(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, \varphi_{n-1} + \pi)) dr d\varphi_{n-1}\Big] d\varphi_{n-2} \dots d\varphi_1.
\end{aligned}$$

Сопоставляя подынтегральные выражения здесь и в (2), легко приходим к справедливости утверждения (i).

(ii) Предположим, что для некоторого отрезка $L_R$ оказалось, напротив, справедливо неравенство

$$\int_{L_R} h_2(z)dz < \int_{L_R} h_1(z)dz.$$

Тогда в силу непрерывности $h_1$ и $h_2$ найдется $\epsilon$-окрестность отрезка $L_R$ (обозначим ее $L_R(\epsilon)$) такая, что

$$\int_{L_R(\epsilon)} h_2(x_1 \ldots x_n)dx_1, \ldots, dx_n < \int_{L_R(\epsilon)} h_1(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n.$$

Поскольку множество $A \equiv L_R(\epsilon) \subset \Re^n$, очевидно, является выпуклым и симметричным, то $Y$ не может быть более остроконечен, чем $X$. Это противоречие доказывает (ii) и теорему. □

Теперь вернемся к радиальной симметризации на секущих плоскостях, базирующейся на (1). Рассмотрим двумерный с. в. $X$ с непрерывной плотностью $h$. Допустим, что для любого $\ell$, $0 < \ell < \max\limits_{(x_1,x_2)\in\Re^2} h(x_1, x_2) = M$, линия уровня $R_\ell = \{(x_1, x_2)|\ h(x_1, x_2) = \ell\}$ представляет собой звездообразную кривую, то есть ограничивает звездообразную фигуру (в частности, это условие выполняется, когда $h$ является непрерывной логарифмически вогнутой функцией). Обозначим последнюю через $S_\ell$ и будем предполагать, что точка $\mathbf{0}$ является модой функции $h$, и тем самым $\mathbf{0}$ оказывается внутри всех ее линий уровня.

Пусть для каждого $\ell$ (звездообразное) множество $S^*_\ell$ — результат симметризации фигуры $S_\ell$. Обозначим через $h^*(x_1, x_2)$ функцию, для которой линиями уровня являются границы соответствующих фигур $S^*_\ell$ (ср. Приложение A2 в [2]). Как отмечено в начале этого параграфа, $h^*$ оказывается плотностью распределения некоторого случайного вектора.

Наша цель — установить, что новый с. в. более остроконечен, чем исходный. Для этого воспользуемся утверждением (i) теоремы 2 и покажем, что для любого отрезка $L_R$ в плоскости выполняется

$$\int_{L_R} |z|h(z)dz \le \int_{L_R} |z|h^*(z)dz.$$

Имеем

$$\int_{-R}^{R} |z|h(z)dz = -\int_{-R}^{0} zh(z)dz + \int_{0}^{R} zh(z)dz.$$

Сделаем замены: $z = -\sqrt{-2t}$ в первом интеграле правой части равенства, $z = \sqrt{2t}$ во втором интеграле той же части равенства. Тогда получим

$$\int_{-R}^{R} |z|h(z)dz = \int_{-R^2/2}^{0} h(-\sqrt{-2t})dt + \int_{0}^{R^2/2} h(\sqrt{2}t)dt.$$

Для произвольного фиксированного $\ell$, $0 < \ell < M$, обозначим через $z_1$ и $z_2$, $z_1 < 0 < z_2$, точки пересечения линии уровня $R_\ell$ плотности $h$ с осью $Z$, то есть $h(z_1) = h(z_2) = \ell$. Отсюда, согласно (1), будем иметь

$$h^*\left(-\sqrt{\frac{z_1^2 + z_2^2}{2}}\right) = h^*\left(\sqrt{\frac{z_1^2 + z_2^2}{2}}\right) = \ell.$$

Введем функцию

$$g(t) = \begin{cases} h(-\sqrt{-2t}) \ , & t \le 0 \\ h(\sqrt{2}t) \ , & t \ge 0 \end{cases}$$

и обозначим $t_1 = -z_1^2/2$ и $t_2 = z_2^2/2$. Тогда получим

$$g(t_1) = h(-\sqrt{-2t_1}) = h(\sqrt{2}t_2) = g(t_2) = \ell.$$

Поступая аналогично с $h^*$, приходим к функции

$$g^*(t) = \begin{cases} h^*(-\sqrt{-2t}) \ , & t \le 0 \\ h^*(\sqrt{2}t) \ , & t \ge 0, \end{cases}$$

для которой

$$g^* \left( \frac{t_1 - t_2}{2} \right) = h^*(-\sqrt{-t_1 + t_2}) = h^*(\sqrt{-t_1 + t_2}) = g^* \left( \frac{-t_1 + t_2}{2} \right) = \ell.$$

Это означает, что функция $g^*(t)$ является перестановкой $g(t)$ в симметрично убывающем порядке. Рассуждая далее, как в п. 2.2, приходим к требуемому результату:

$$\int_{-R}^{R} |z| h(z) dz = \int_{-R^2/2}^{R^2/2} g(t) dt \le \int_{-R^2/2}^{R^2/2} g^*(t) dt = \int_{-R}^{R} |z| h^*(z) dz.$$

**4. Непрерывная симметризация.** ***4.1. Непрерывная радиальная симметризация.*** Будем осуществлять преобразование, введенное в § 3, постепенно, за счет включения параметра $\lambda \in [0, 1]$. Точнее, вместо (1) рассмотрим соотношения

$$\rho_\lambda(\varphi; \ell) = \sqrt{((1 + \lambda) r^2(\varphi; \ell) + (1 - \lambda) r^2(\varphi + \pi; \ell))/2},$$
$$\rho_\lambda(\varphi + \pi; \ell) = \sqrt{((1 - \lambda) r^2(\varphi; \ell) + (1 + \lambda) r^2(\varphi + \pi; \ell))/2}, \qquad \varphi \in [0, \pi),$$

полагая значение $\lambda$ одним и тем же для всех $\varphi$ и $\ell$. Обозначим такое преобразование через $T_\lambda$ (ср. Приложение B3 в [2]). Поскольку $\rho_\lambda^2(\varphi; \ell) + \rho_\lambda^2(\varphi + \pi; \ell) = \rho^2(\varphi; \ell) + \rho^2(\varphi + \pi; \ell)$, то площадь в каждом сечении на уровне $\ell$, $0 < \ell < M$, сохраняется.

По аналогии с § 3, пусть (звездообразное) множество $S_\ell^\lambda$ — результат $T_\lambda$-преобразования фигуры $S_\ell$. Остается показать, что при $\ell_1 < \ell_2$ линия уровня $R_{\ell_2}^\lambda$ лежит строго внутри линии уровня $R_{\ell_1}^\lambda$. Действительно, в силу того, что $r(\varphi; \ell_1) > r(\varphi; \ell_2)$ и $r(\varphi + \pi; \ell_1) > r(\varphi + \pi; \ell_2)$, имеем $\rho_\lambda(\varphi; \ell_1) > \rho_\lambda(\varphi; \ell_2)$ и $\rho_\lambda(\varphi + \pi; \ell_1) > \rho_\lambda(\varphi + \pi; \ell_2)$. Следовательно, линии уровня $R_\ell^\lambda$ предопределяют (однозначную) функцию $h_\lambda(x_1, x_2)$, которая является плотностью некоторого с. в. $X_\lambda$. Тем самым, формируется спектр плотностей: от исходной (при $\lambda = 1$) до симметричной (при $\lambda = 0$).

Покажем, что при $\lambda_1 < \lambda_2$ выполняется

$$\int_{L_R} |z| h_{\lambda_2}(z) dz \le \int_{L_R} |z| h_{\lambda_1}(z) dz. \tag{3}$$

Для этого нужно снова, как в конце § 3, изменить параметризацию с $z$ на $t$. Тогда окажется, что при фиксированных $\varphi$ и $\ell$ убыванию $\lambda$ от 1 до 0 соответствует перемещение отрезка длиной $-t_1 + t_2$ в направлении к 0, вплоть до совмещения центра отрезка с точкой 0.

Нетрудно усмотреть, что в процессе этого перемещения мера пересечения данного отрезка с вертикальной полосой, заключенной между прямыми $t = -R^2/2$ и $t = R^2/2$, не уменьшается. Тогда из аналога принципа Кавальери следует (3). Согласно утверждению (i) теоремы 2 это означает, что $X_{\lambda_1} \prec_{peak} X_{\lambda_2}$.

***4.2. Непрерывная симметризация в $\Re^n$.*** Вид приведенной ниже непрерывной симметризации подсказан работой [9, § 1.2], в которой фигурируют симметричные плотности $f(\mathbf{x}) = (g(\mathbf{x}) + g(-\mathbf{x}))/2$, где $g(\mathbf{x})$ — произвольная плотность $n$-мерного с. в., $n \geq 1$. Предварительно остановимся на некоторых обстоятельствах общего характера. Введем

**Определение 2.** Будем говорить, что $n$-мерные случайные векторы $X$ и $Y$ *одинаково остроконечны*, $X \overset{peak}{=} Y$, если $X \prec_{peak} Y$ и $Y \prec_{peak} X$, то есть если

$$\mathbf{P}\{X \in A\} = \mathbf{P}\{Y \in A\}$$

для всех $A \in \mathbb{S}_n$.

Нам понадобится следующее утверждение, легко доказываемое за счет редукции, закрепленной в теореме 2.

**Теорема 3.** *Для того чтобы $X$ и $Y$ с непрерывными плотностями $f(\mathbf{x})$ и $g(\mathbf{x})$ были одинаково остроконечны, необходимо и достаточно, чтобы функция*

$$\omega(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})$$

*обладала свойством*

$$\omega(\mathbf{x}) = -\omega(-\mathbf{x}), \tag{4}$$

*то есть была нечетной.*

Доказательство. *Необходимость.* Согласно утверждению (ii) теоремы 2, достаточно проверить, что из условия

$$\int_{L_R} f(z)dz = \int_{L_R} g(z)dz$$

следует (4). Фиксируем произвольное $\mathbf{x}$ и возьмем прямую $L$, проходящую через $\mathbf{0}$ и $\mathbf{x}$, и $R_0 = ||\mathbf{x}||$. Имеем для любого $R \geq 0$

$$\int_0^R (f(z) + f(-z))dz = \int_0^R (g(z) + g(-z))dz.$$

Рассмотрим обе части равенства как функции переменной $R$ и возьмем производные. Поскольку $f$ и $g$ непрерывны, то получим $f(R) + f(-R) = g(R) + g(-R)$. Отсюда $\omega(R_0) = -\omega(-R_0)$, то есть $\omega(\mathbf{x}) = -\omega(-\mathbf{x})$.

*Достаточность.* Следует непосредственно из предложения 1.12 в [9, § 1.4]. □

Из теоремы 3 и предложения 1.12 в [9, § 1.4] легко вытекает

**Следствие 1.** *Если для случайных векторов $X$ и $Y$ с непрерывными плотностями оказывается*

$$\mathbf{P}\{X \in A\} = \mathbf{P}\{Y \in A\}$$

*для всех компактных, выпуклых и симметричных множеств $A \in \Re^n$, то равенство справедливо для всех симметричных множеств $A \in \Re^n$.*

Рассмотрим теперь любую непрерывную плотность $g(\mathbf{x})$ в $n$-мерном пространстве и построим спектр плотностей

$$f_\lambda(\mathbf{x}) = \frac{(1+\lambda)g(\mathbf{x}) + (1-\lambda)g(-\mathbf{x})}{2} \tag{5}$$

для $\lambda \in [0,1]$. При этом $f_1(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ — исходная плотность, а $f_0(\mathbf{x}) = (g(\mathbf{x}) + g(-\mathbf{x}))/2$ — плотность симметричного с. в. Теперь возьмем разность

$$\omega_\lambda(\mathbf{x}) = f_\lambda(\mathbf{x}) - f_0(\mathbf{x}) = \frac{\lambda}{2}(g(\mathbf{x}) - g(-\mathbf{x})).$$

Следовательно $\omega_\lambda(\mathbf{x})$ — нечетная функция. По теореме 3 это означает, что случайные векторы с плотностями (5) обладают одинаковой остроконечностью (относительно начала). В таком случае будем «ранжировать» $f_\lambda(\mathbf{x})$ по их отклонению от симметричной плотности $f_0(\mathbf{x})$. При этом отклонение будем характеризовать разностью вероятностей попадания с. в. в полупространства, разделенные гиперплоскостями, содержащими точку $\mathbf{0}$. Точнее, будем считать, что $f_{\lambda_1}(\mathbf{x})$ более симметрична, чем $f_{\lambda_2}(\mathbf{x})$, если для каждого вышеупомянутого разбиения $n$-мерного пространства на полупространства $G_1$ и $G_2$ оказывается верным

$$I_{\lambda_1} \equiv \Big|\int\limits_{G_1} f_{\lambda_1}(\mathbf{x})d\mathbf{x} - \int\limits_{G_2} f_{\lambda_1}(\mathbf{x})d\mathbf{x}\Big| \le \Big|\int\limits_{G_1} f_{\lambda_2}(\mathbf{x})d\mathbf{x} - \int\limits_{G_2} f_{\lambda_2}(\mathbf{x})d\mathbf{x}\Big| \equiv I_{\lambda_2}.$$

Имеем

$$I_\lambda = \Big|\int\limits_{G_1} (f_\lambda(\mathbf{x}) - f_\lambda(-\mathbf{x}))d\mathbf{x}\Big| = \lambda\Big|\int\limits_{G_1} (g(\mathbf{x}) - g(-\mathbf{x}))d\mathbf{x}\Big|$$

и, значит, $I_\lambda$ возрастает по $\lambda$.

**5. Статистическая симметризация.** До сих пор мы занимались косвенной симметризацией случайных величин (или векторов) посредством преобразований их плотностей. В этом разделе мы будем оперировать самими наблюдениями над одномерными случайными величинами и воспользуемся тем, что разность двух независимых одинаково распределенных случайных величин является симметричной случайной величиной.

Мы будем интересоваться положительными с. в. с наблюдениями $X_i$ из $R^+$. Это позволит, в частности, привлечь ситуации из сферы надежности, что проиллюстрировано примером. Наши рассуждения во многом повторяют рассуждения в п. 2.1 работы [10], но здесь мы уделяем внимание семейству плотностей с параметром масштаба вместо семейства плотностей с параметром сдвига. Такому переходу способствуют соображения в [11, § 8.2.2].

**Замечание 2.** Надо учесть, что в [11, § 8.2.2] рассуждения проводятся для семейств симметричных плотностей, но в случае с параметром масштаба они сохраняются и для случайных величин с наблюдениями $X_i$ из $R^+$. Следует лишь потребовать, чтобы плотность $f$ была убывающей функцией на $[0,\infty)$. Дело в том, что это свойство, важное в данном контексте, присуще любой симметричной лог-вогнутой плотности. Пусть $f_\theta(x) = (1/\theta)h(x/\theta)$ — семейство плотностей распределения $X_i$ с параметром масштаба $\theta$, где $h$ убывает и лог-вогнута. Обозначим $Z_i = \ln X_i$ и $\eta = \ln\theta$. Тогда $\tilde h(z-\eta) = h(\exp(z-\eta))\exp(z-\eta)$ — семейство лог-вогнутых плотностей для $Z_i$ и таково же семейство $\tilde{h}_N(z-\eta)$ для средневыборочного $\overline{Z}_N = \sum_{i=1}^N Z_i/\mathrm{N}$. Тем самым оно обладает монотонным отношением правдоподобия [11, § 8.2.1]. Для инвариантных статистических процедур это означает (см. [12]), что при сравнении значений $\theta$ ошибка вывода оказывается меньше, если делается «естественный» вывод, то есть когда повторяется знак неравенства между соответствующими средневыборочными значениями.

Наша цель — показать, что с увеличением объема выборки ошибка такого вывода монотонно убывает. Последующие рассуждения опираются на работу [3], в связи с чем мы обсудим некоторые аспекты мажоризации [13].

Говорят, что вектор $b = (b_1, \dots, b_N)$ *мажорируется* вектором $a = (a_1, \dots, a_N)$, $a \succ b$, если $\sum_{i=1}^N a_i = \sum_{i=1}^N b_i$ и $\sum_{i=1}^k a_{[i]} \geq \sum_{i=1}^k b_{[i]}$, $k = 1, 2, \dots, N-1$, где $a_{[1]} \geq \dots \geq a_{[N]}$, $b_{[1]} \geq \dots \geq b_{[N]}$ — упорядоченные по убыванию (невозрастанию) компоненты векторов $a$ и $b$ соответственно.

Введем формальные обозначения:

$$P_1 = \mathbf{P}\left[\sum_{i=1}^N p_i' \ln X_i^{(1)} < \sum_{i=1}^N p_i' \ln X_i^{(2)}\right], \quad P_2 = \mathbf{P}\left[\sum_{i=1}^N p_i \ln X_i^{(1)} < \sum_{i=1}^N p_i \ln X_i^{(2)}\right].$$

**Теорема 4.** *Пусть $X_1^{(j)}, \dots, X_N^{(j)}$, $j = 1, 2$, — две независимые выборки, составленные из независимых наблюдений над положительными с. в. с плотностями $(1/\theta_j)h(x/\theta_j)$, где $h$ — убывающая лог-вогнутая плотность. Предположим, что $\theta_1 < \theta_2$ и $p \succ p'$, $p_i, p_i' \geq 0$, $i = 1, \dots, N$, $\sum_{i=1}^N p_i = \sum_{i=1}^N p_i' = 1$. Тогда $P_1 \geq P_2$.*

Доказательство. Обозначим

$$F_1(t) = \mathbf{P}\left[\sum_{i=1}^N p_i' \overset{o}{Z}_i \leq t\right], \quad F_2(t) = \mathbf{P}\left[\sum_{i=1}^N p_i \overset{o}{Z}_i \leq t\right],$$

$$f_1(t) = F_1'(t), \quad f_2(t) = F_2'(t),$$

где $\overset{o}{Z}_1, \dots, \overset{o}{Z}_N$ — независимые с. в. с одинаковой лог-вогнутой плотностью $\tilde{h}(z) = h(\exp z)\exp z$. Пусть $\eta_1 = \ln\theta_1$, $\eta_2 = \ln\theta_2$. Тогда для $k = 1, 2$ получаем

$$P_k = \int_{-\infty}^{\infty} F_k(t-\eta_1)\, f_k(t-\eta_2)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} F_k(\vartheta + t)\, f_k(t)\, dt = \mathbf{P}\left[\chi_{1k} - \chi_{2k} \leq \vartheta\right],$$

где $\vartheta = \eta_2 - \eta_1 > 0$, $\chi_{j1} = \sum_{i=1}^N p_i' \overset{o}{Z}{}_i^{(j)}$ и $\chi_{j2} = \sum_{i=1}^N p_i \overset{o}{Z}{}_i^{(j)}$, $j = 1, 2$, причем $\overset{o}{Z}{}_i^{(1)}$, $\overset{o}{Z}{}_i^{(2)}$ имеют ту же плотность, что и $\overset{o}{Z}_i$. Отсюда получаем $\chi_{11} - \chi_{21} = \sum_{i=1}^N p_i' \left(\overset{o}{Z}{}_i^{(1)} - \overset{o}{Z}{}_i^{(2)}\right)$ и $\chi_{12} - \chi_{22} = \sum_{i=1}^N p_i \left(\overset{o}{Z}{}_i^{(1)} - \overset{o}{Z}{}_i^{(2)}\right)$.

Полагаем $Y_i = \overset{o}{Z}{}_i^{(1)} - \overset{o}{Z}{}_i^{(2)}$, $i = 1, \dots, N$. Согласно [13, § 18.B.1] плотность $Y_i$ лог-вогнута; она симметрична как плотность разности независимых одинаково распределенных случайных величин. Поскольку, в свою очередь, $Y_i$ — независимые одинаково распределенные с. в., а $\vartheta > 0$, то теорема 2.3 в [3] означает, что $\mathbf{P}\left[\sum_{i=1}^N p_i' Y_i \leq \vartheta\right] \geq \mathbf{P}\left[\sum_{i=1}^N p_i Y_i \leq \vartheta\right]$, т. е. $P_1 \geq P_2$. □

**Следствие 2.** *Пусть* $X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, \ldots,\ j = 1, 2,$ *— независимые положительные случайные величины с убывающими лог-вогнутыми плотностями* $(1/\theta_j)h(x/\theta_j)$, *причем* $\theta_1 < \theta_2$. *Тогда* $\mathbf{P}\left[\prod_1^N X_i^{(1)} < \prod_1^N X_i^{(2)}\right]$ *не убывает по* $N$.

Доказательство. Имеем $p = (1/N, \ldots, 1/N, 0) \succ (1/(N+1), \ldots, 1/(N+1)) = p'$, где каждый вектор состоит из $N + 1$ компонент. Теперь требуемый результат легко вытекает из теоремы 4 ввиду того, что $Z_i = \ln X_i$ . □

**Пример.** Имеется два изделия таких, что плотность случайного времени их безотказной работы принадлежит семейству плотностей Гомперца:

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta}\exp(x/\theta + 1 - e^{x/\theta}), \qquad x > 0.$$

При этом масштабные параметры $\theta_1$ и $\theta_2$ соответственно первого и второго изделий неизвестны.

Требуется на основании статистических данных по надежности изделий сделать вывод относительно того, у какого из них математическое ожидание времени до отказа больше.

**Решение.** Убедившись, что $f_\theta(x)$ — убывающая лог-вогнутая плотность, следует взять независимые выборки моментов отказа $\{X_i\}_1^N$, $\{Y_i\}_1^N$ одинакового объема первого и второго изделий. По ним составляются статистики $\prod_1^N X_i$ и $\prod_1^N Y_i$. Если $\prod_1^N X_i > \prod_1^N Y_i$, делается вывод о том, что у первого изделия среднее время безотказной работы больше, а если $\prod_1^N X_i < \prod_1^N Y_i$, делается обратный вывод.

По замечанию 2 ошибка такого «естественного» вывода меньше ошибки при альтернативном выводе. Здесь учтено, что математическое ожидание положительной случайной величины, если оно существует, пропорционально масштабному параметру. В нашем случае существование всех моментов обеспечивается лог-вогнутостью плотности $f_\theta(x)$ [14].

По следствию 2 эта ошибка монотонно убывает с ростом $N$. Рассуждая, как в п. 2.1 работы [10], легко заключить, что ошибка стремится к 0 при $N \to \infty$.

**Замечание 3.** Следует признать, что распределения, используемые в теории надежности, довольно редко удовлетворяют условиям теоремы 4 (прежде всего это относится к монотонности $h$). Однако из доказательства теоремы нетрудно усмотреть, что на самом деле эти условия нужны лишь для того, чтобы плотность с. в. $Z = \ln X$ оказалась лог-вогнутой. Это эквивалентно требованию лог-вогнутости для функции $h(\exp(z))$, что расширяет область применения теоремы 4 (и следствия 2). Примером такой функции $h$ могут служить плотности Г-распределения, распределения Вейбулла, степенного (Парето II) распределения и, конечно, лог-нормального распределения.

Автор выражает свою искреннюю признательность рецензентам за их полезные замечания и советы.

**Литература**

1. Szego G. On a certain kind of symmetrization and its applications. *Ann. Mat. Pura Appl.* **40**, 113–119 (1955).

2. Polya G., Szego G. *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*. Princeton, Princeton University Press (1951).

3. Proschan F. Peakedness of distributions of convex combinations. *Ann. Math. Statist.* **36**, 1703–1706 (1965).

4. Hayman W. K. *Multivalent Functions.* Cambridge, Cambridge University Press (1958).

5. Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G. *Inequalities.* 2nd ed. Cambridge, Cambridge University Press (1952).

6. Lieb E. H., Loss M. *Analysis.* 2nd ed. Providence, Rhode Island, American Mathematical Society (2001).

7. Birnbaum Z. W. On random variables with comparable peakedness. *Ann. Math. Statist.* **19**, 76–81 (1948).

8. Sherman S. A theorem on convex sets with applications. *Ann. Math. Statist.* **26**, 763–767 (1955).

9. Azzalini A., Capitanio A. *The Skew-normal and Related Families.* Cambridge, Cambridge University Press (2014).

10. Ревяков М. Ранжирование и селекция популяций по выборочным средним. *Зап. научн. сем. ПОМИ* **454**, 238–253 (2016).

11. Lehmann E. L., Romano J. P. *Testing Statistical Hypotheses.* 3rd ed. New York, Springer (2005).

12. Eaton M. L. Some optimum properties of ranking procedures. *Ann. Math. Statist.* **38**, 124–137 (1967).

13. Marshall A., Olkin I., Arnold B. *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications.* 2nd ed. New York, Springer (2011).

14. An M. Y. Logconcavity versus logconvexity: a complete characterization. *J. Economic Theory* **80**, 350–369 (1998).

Статья поступила в редакцию 7 ноября 2020 г.;
после доработки 12 января 2021 г.;
рекомендована в печать 19 марта 2021 г.

Контактная информация:

*Ревяков Михаил Ильич* — канд. физ.-мат наук, ст. науч. сотр.; revyakov.m@gmail.com

## The effect of distributions symmetrization on their peakedness

*M. I. Revyakov*

St. Petersburg Department of the Steklov Mathematical Institute,
27, nab. r. Fontanki, St. Petersburg, 191023, Russian Federation

**For citation:** Revyakov M. I. The effect of distributions symmetrization on their peakedness. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 3, pp. 442–454. https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.306 (In Russian)

Indirect transformations of a one-dimensional, two-dimensional, and multidimensional random variable are proposed. They are based on various symmetrizations of the density function. The focus is on changing peakedness of a distribution about the origin.

*Keywords*: peakedness, function rearrangement, continuous symmetrization, log-concave density, majorization, statistical inference.

### References

1. Szego G. On a certain kind of symmetrization and its applications. *Ann. Mat. Pura Appl.* **40**, 113–119 (1955).

2. Polya G., Szego G. *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics.* Princeton, Princeton University Press (1951).

3. Proschan F. Peakedness of distributions of convex combinations. *Ann. Math. Statist.* **36**, 1703–1706 (1965).

4. Hayman W. K. *Multivalent Functions.* Cambridge, Cambridge University Press (1958).

5. Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G. *Inequalities.* 2nd ed. Cambridge, Cambridge University Press (1952).
6. Lieb E. H., Loss M. *Analysis.* 2nd ed. Providence, Rhode Island, American Mathematical Society (2001).
7. Birnbaum Z. W. On random variables with comparable peakedness. *Ann. Math. Statist.* **19**, 76–81 (1948).
8. Sherman S. A theorem on convex sets with applications. *Ann. Math. Statist.* **26**, 763–767 (1955).
9. Azzalini A., Capitanio A. *The Skew-normal and Related Families.* Cambridge, Cambridge University Press (2014).
10. Revyakov M. Ranking and selection of populations on the base of sample means. *Zap. Nauchn. Sem. POMI* **454**, 238–253 (2016). (In Russian) [Engl. transl.: *J. Math. Sci.* **229**, 756–766 (2018). https://doi.org/10.1007/s10958-018-3715-2].
11. Lehmann E. L., Romano J. P. *Testing Statistical Hypotheses.* 3rd ed. New York, Springer (2005).
12. Eaton M. L. Some optimum properties of ranking procedures. *Ann. Math. Statist.* **38**, 124–137 (1967).
13. Marshall A., Olkin I., Arnold B. *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications.* 2nd ed. New York, Springer (2011).
14. An M. Y. Logconcavity versus logconvexity: a complete characterization. *J. Economic Theory* **80**, 350–369 (1998).

Received: November 7, 2020
Revised: January 12, 2021
Accepted: March 19, 2021

Author's information:

*Mikhail I. Revyakov* — revyakov.m@gmail.com