УДК 517.5 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 3
MSC 41A30

Конструктивное описание гёльдеровых классов на некоторых многомерных компактах

Д. А. Павлов

Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена,
Российская Федерация, 191186, Санкт-Петербург, наб. р. Мойки, 48

Для цитирования: *Павлов Д. А.* Конструктивное описание гёльдеровых классов на некоторых многомерных компактах // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 3. С. 430–441.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.305

В статье дается конструктивное описание классов гёльдеровых функций на специальных компактах в $\mathbb{R}^m$ $(m \geqslant 3)$ в терминах скорости приближения гармоническими функциями в сужающихся окрестностях этих компактов. Рассматриваемые компакты представляют собой обобщение на бóльшие размерности компактов, являющихся подмножествами кривой в $\mathbb{R}^3$, дуга которой соизмерима с хордой. Размер окрестности напрямую связан со скоростью приближения: чем точнее приближение, тем ýже окрестность. Помимо гармоничности в окрестности компакта на приближающие функции накладывается условие, внешне схожее с гёльдеровостью, но более слабое. Состоит оно в том, что разность значений в двух точках оценивается через размер окрестности, если расстояние между этими точками соизмеримо с размером окрестности (а значит, оценивается и через расстояние между точками).

Ключевые слова: конструктивное описание, классы Гёльдера, аппроксимация, гармонические функции, свойство соизмеримости дуги и хорды.

1. Введение. Во второй половине двадцатого века многие авторы занимались проблемой конструктивного описания классов гёльдеровых функций на различных множествах комплексной плоскости в терминах скорости приближения алгебраическими многочленами [1–4]. Зачастую дело сводилось к приближению на кривых, обладающих теми или иными свойствами. В силу специфики комплексной плоскости данные результаты не получается непосредственно распространить на вещественные пространства большей размерности (используемые методы опираются на конформное отображение).

Для трехмерного случая удалось найти иной подход. В работе Т. А. Алексеевой и Н. А. Широкова [5] дано конструктивное описание класса гёльдеровых функций на кривой в $\mathbb{R}^3$, дуга которой соизмерима с хордой, в терминах скорости приближения функциями, гармоническими в окрестности кривой. Также в этой окрестности имеются равномерные оценки на градиент приближающей функции, что помогает установить гёльдеровость функции исходя из возможности приближения. В работе автора [6] конструктивное описание распространено с кривой, дуга которой соизмерима с хордой, на ее произвольное компактное подмножество. Ввиду отсутствия (в большинстве случаев) связности окрестностей рассматриваемых компактов равномерные оценки на градиент заменены другим свойством, также зависящим от размера окрестности. В данной работе мы обобщаем конструктивное описание на аналогичные множества, лежащие в $\mathbb{R}^m$ $(m \geqslant 3)$.

2. Определения и формулировка результата.

Определение 1. Множество $L \subset \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 3$, назовем *хорошим компактом*, если существует такое отображение $\varphi\colon [0,\, 1]^{m-2} \to \mathbb{R}^m$, что

$$C_1\|x_1 - x_2\| \leqslant \|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| \leqslant C_2\|x_1 - x_2\|$$

и $\varphi([0,\, 1]^{m-2}) = L$.

Заметим, что в случае $m = 3$ определение хорошего компакта совпадает с определением кривой, дуга которой соизмерима с хордой. Действительно, пусть L — хороший компакт в $\mathbb{R}^3$, $A = \varphi(x_1)$, $B = \varphi(x_n)$. Тогда для любого разбиения дуги AB точками $\varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_{n-1})$ будет выполняться неравенство

$$\sum_{k=1}^{n-1}\|\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)\| \leqslant C_2\sum_{k=1}^{n-1}|x_{k+1} - x_k| = C_2|x_n - x_1| \leqslant \frac{C_2}{C_1}\|\varphi(x_n) - \varphi(x_1)\|.$$

Переходя к супремуму по всем разбиениям, получим

$$\ell(AB) \leqslant \frac{C_2}{C_1}\|\varphi(x_n) - \varphi(x_1)\| = \frac{C_2}{C_1}|AB|,$$

где $\ell(AB)$ — длина дуги AB. Обратно, пусть L — кривая, дуга которой соизмерима с хордой, $\gamma\colon [0,\, |L|] \to \mathbb{R}^3$ — ее естественная параметризация. Положим $\varphi(x) = \gamma(|L|x)$. Тогда будем иметь $\varphi\colon [0,\, 1] \to \mathbb{R}^3$ и

$$\|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| \asymp \ell(\varphi(x_1),\, \varphi(x_2)) = \ell(\gamma(x_1/|L|), \gamma(x_2/|L|)) = \frac{1}{|L|}|x_1 - x_2|.$$

Таким образом, понятие хорошего компакта в некотором смысле обобщает понятие кривой, дуга которой соизмерима с хордой, на бóльшие размерности.

Определение 2. Пусть ω — модуль непрерывности, удовлетворяющий условию

$$\int\limits_0^x \frac{\omega(t)}{t}\, dt + x\int\limits_x^\infty \frac{\omega(t)}{t^2}\, dt \leqslant C_0\omega(x). \tag{1}$$

Пусть $A \subset \mathbb{R}^m$. Через $H^\omega(A)$ будем обозначать множество всех функций $f\colon A \to \mathbb{R}$ таких, что $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant C_f\omega(\|x_1 - x_2\|)$. Функции из $H^\omega(A)$ будем называть *гёльдеровыми*.

Для множества $A \subset \mathbb{R}^m$ положим

$$\Lambda_\delta(A) = \bigcup_{x\in A} B(x,\, \delta),$$

где $B(x,\, \delta)$ — открытый шар с центром в x радиуса δ.

Основная теорема. *Пусть ω — модуль непрерывности, удовлетворяющий условию* (1)*, K — компактное подмножество хорошего компакта в $\mathbb{R}^m$, $f\colon K \to \mathbb{R}$. Тогда для того, чтобы f принадлежала классу $H^\omega(K)$, необходимо и достаточно,* *чтобы для любого $\delta \in (0,\, 1/2)$ существовала такая гармоническая в $\Lambda_\delta(K)$ функция u_δ, что*

$$|f(x) - u_\delta(x)| \leqslant C_1(f,\, K)\omega(\delta), \quad x \in K,$$

$$|u_\delta(x_1) - u_\delta(x_2)| \leqslant C_2(f,\, K)\omega(\delta) \text{ при } \|x_1 - x_2\| \asymp \delta, \quad x_1,\, x_2 \in K.$$

Последнее свойство приближающей функции назовем «гёльдеровостью». Соизмеримость $\|x_1 - x_2\| \asymp \delta$ предполагается с константами, зависящими от K.

Возьмем $x_1,\, x_2 \in K$, построим для $\delta = ||x_1 - x_2||/3 \operatorname{diam} K$ функцию u_δ и напишем

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - u_\delta(x_1)| + |u_\delta(x_1) - u_\delta(x_2)| + |u_\delta(x_2) - f(x_2)| \leqslant C\omega(\delta).$$

Тем самым мы доказали достаточность указанных условий. Содержательную часть работы составляет доказательство необходимости, то есть построение функции u_δ. Зафиксируем натуральное число $m \geqslant 3$, компактное подмножество хорошего компакта $K \subset \mathbb{R}^m$ и функцию $f \in H^\omega(K)$. Через $d(x)$ обозначим расстояние от точки x до множества K. Через λ_m обозначим меру Лебега в $\mathbb{R}^m$, а через μ_{m-1} — меру Хаусдорфа на поверхностях, составленных из частей сфер в $\mathbb{R}^m$. Замыкание множества A будем обозначать $\overline{A}$. Мы часто будем писать неравенства вида $f \leqslant Cg \leqslant Ch$. Здесь C обозначает не всегда одну и ту же константу, но всегда не зависящую от аргументов, понятных из контекста. Некоторые фиксированные константы мы будем выделять отдельно.

3. Геометрическое построение. Докажем сначала простую, но важную лемму.

Лемма 1. *Пусть в d-мерном кубе со стороной a выбраны несколько точек, попарные расстояния между которыми не меньше b, причем $a\sqrt{d} \geqslant b$. Тогда этих точек не больше, чем $(3a\sqrt{d}/b)^d$.*

Доказательство. Разобьем куб на $(\lceil 2a\sqrt{d}/b \rceil)^d$ одинаковых кубов. Тогда длина диагонали маленького куба не превосходит $b/2$, значит, в одном таком кубе лежит не больше одной выбранной точки. Остается заметить, что в условиях леммы справедливо неравенство $\lceil 2a\sqrt{d}/b \rceil \leqslant 2a\sqrt{d}/b + 1 \leqslant 3a\sqrt{d}/b$. $\square$

Перейдем к построению. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Возьмем произвольную точку $x_{0n} \in K$. Далее, если точки $x_{0n}, \ldots, x_{(k-1)n}$ уже выбраны, то возьмем в качестве x_{kn} одну из ближайших к множеству $\bigcup\limits_{i=0}^{k-1} \overline{B}(x_{in},\, 2^{-n})$ точек множества $K \setminus \bigcup\limits_{i=0}^{k-1} B(x_{in},\, 2^{-n})$, если последнее множество непусто. Пусть $x_{kn} = \varphi(t_{kn})$. Поскольку $\|x_{kn} - x_{k'n}\| \geqslant 2^{-n}$ при $k \neq k'$, то $\|t_{kn} - t_{k'n}\| \geqslant \widetilde{C}2^{-n}$ (здесь и далее $\widetilde{C}$ обозначает одну и ту же константу, зависящую от φ). Эти точки содержатся в единичном $(m-2)$-мерном кубе, так что по лемме 1 мы выберем $c_n \leqslant C2^{(m-2)n}$ точек (если $\widetilde{C}2^{-n} > \sqrt{m-2}$, то есть лемма 1 неприменима, то мы могли взять лишь одну точку, и оценка на c_n выполняется при $C = 1$). Процесс окончен, поэтому $K \subset \bigcup\limits_{i=0}^{c_n-1} \overline{B}(x_{in},\, 2^{-n})$.

Положим $\Omega_n^* = \bigcup\limits_{i=0}^{c_n-1} \overline{B}(x_{in},\, 2^{-n+1})$, $\Omega_n = \Omega_n^* \setminus \Omega_{n+1}^*$. Нетрудно проверить справедливость неравенства

$$2^{-n-1} < d(x) \leqslant 2^{-n+1}, \quad x \in \Omega_n. \tag{2}$$

Отсюда следует, что множества Ω_n с номерами, отличающимися больше, чем на 2, попарно не пересекаются. Множества же Ω_n и Ω_{n+1} не пересекаются, поскольку $\Omega_{n+1} \subset \Omega^*_{n+1}$. Получается, что множества Ω_n попарно не пересекаются.

4. Псевдогармоническое расширение. Построим *псевдогармоническое расширение* f (аналогично псевдоаналитическому расширению, введенному Е. М. Дынькиным [7]), то есть такую функцию $f_0 \in C(\mathbb{R}^m) \cap C^2(\mathbb{R}^m \setminus K)$, что $f_0|_K = f$,

$$\|\mathrm{grad}\ f_0(x)\| \leqslant C_1 \frac{\omega(d(x))}{d(x)}, \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus K, \tag{3}$$

$$f_0(x) = 0 \text{ при } \|x\| \geqslant R_0, \quad K \subset B(\mathbb{O},\, R_0), \tag{4}$$

$$|\Delta f_0(x)| \leqslant C_2 \frac{\omega(d(x))}{d^2(x)}, \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus K. \tag{5}$$

Приведем план ее построения (шаги аналогичны трехмерному случаю, подробные выкладки можно найти в работе [6]). Положим $\omega_{0n} = \overline{B}(x_{0n},\, 2^{-n+1}) \cap \Omega_n$,

$$\omega_{kn} = (\overline{B}(x_{kn},\, 2^{-n+1}) \cap \Omega_n) \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} \overline{B}(x_{in},\, 2^{-n+1}) \text{ при } k = 1, \ldots, c_n - 1.$$

Функцию $g_1(x)$ будем считать равной $f(x_{kn})$ при $x \in \omega_{kn}$ и равной нулю в противном случае. Затем положим

$$g_2(x) = \frac{1}{\lambda_m(B(x,\, 2^{-3}d(x)))} \int\limits_{B(x,\, 2^{-3}d(x))} g_1(y)\, d\lambda_m(y).$$

Далее мы построим «сглаженное расстояние», то есть функцию $d_0 \in C^2(\mathbb{R}^m \setminus K)$, эквивалентную d, и определим функции

$$g_3(x) = \frac{1}{\lambda_m(B(x,\, 2^{-3}d_0(x)))} \int\limits_{B(x,\, 2^{-3}d_0(x))} g_2(y)\, d\lambda_m(y),$$

$$f_0(x) = \frac{1}{\lambda_m(B(x,\, 2^{-3}d_0(x)))} \int\limits_{B(x,\, 2^{-3}d_0(x))} g_3(y)\, d\lambda_m(y).$$

Оценки (3)–(5), как и в трехмерном случае, получаются из гёльдеровости f и довольно громоздких, пусть и непосредственно доказываемых, формул дифференцирования функций вида $g(x) = \int\limits_{B(x,\, r(x))} h(y)\, d\lambda_m(y)$ и $g(x) = \int\limits_{\partial B(x,\, r(x))} h(y)\, d\mu_{m-1}(y)$.

Возьмем точку $x_0 \in B(\mathbb{O},\, R_0) \setminus K$ и такое n, что при любом целом $k \geqslant 0$ будет $x_0 \notin \Omega^*_{n+k}$. Обозначим через T_n компоненту связности множества $B(\mathbb{O},\, R_0) \setminus \Omega^*_n$, содержащую точку x_0. Применим известную формулу [8]

$$\begin{aligned} f_0(x_0) = \frac{1}{(m-2)s_m} \int\limits_{\partial T_n} f'_{0\vec{n}(x)}(x) \frac{1}{r_{x_0}^{m-2}(x)}\, d\mu_{m-1}(x) - \\ - \frac{1}{(m-2)s_m} \int\limits_{\partial T_n} f_0(x) \left(\frac{1}{r_{x_0}^{m-2}(x)} \right)'_{\vec{n}(x)} d\mu_{m-1}(x) - \frac{1}{(m-2)s_m} \int\limits_{T_n} \frac{\Delta f_0(x)}{r_{x_0}^{m-2}(x)}\, d\lambda_m(x), \end{aligned} \tag{6}$$

где s_m — площадь поверхности единичной $(m-1)$-мерной сферы, $r_{x_0}(x) = \|x - x_0\|$, $\vec{n}(x)$ — внешняя единичная нормаль к поверхности T_n в точке x.

Поскольку f_0 и $f'_{0\vec{n}(x)}$ равны нулю на $\partial B(\mathbb{O}, R_0)$, первые два интеграла в (6) берутся по поверхности, содержащейся в $\partial\Omega_n^*$, которая состоит из подмножеств c_n сфер радиуса 2^{-n+1}, общая площадь поверхности которых равна

$$c_n s_m (2^{-n+1})^{m-1} \leqslant s_m 2^{(m-2)n+(m-1)(-n+1)} = C2^{-n}.$$

Точка x_0 не принадлежит замкнутому множеству Ω_n^*, так что $r_{x_0}(x)$ отделено от нуля, причем для рассматриваемых n отделено от нуля одним и тем же числом. Значит, применяя (3) и учитывая (2), получим

$$\left| \int\limits_{\partial T_n} f'_{0\vec{n}(x)}(x) \frac{1}{r_{x_0}^{m-2}(x)}\, d\mu_{m-1}(x) \right| \leqslant C2^{-n} \sup_{x\in\partial\Omega_n^*} \frac{\omega(d(x))}{d(x)} \leqslant C\omega(2^{-n}),$$

что стремится к нулю с ростом n. Далее, оценив модуль нормальной производной нормой градиента и используя ограниченность f_0, получим

$$\left| \int\limits_{\partial T_n} f_0(x) \left(\frac{1}{r_{x_0}^{m-2}(x)} \right)'_{\vec{n}(x)} d\mu_{m-1}(x) \right| \leqslant \int\limits_{\partial T_n} |f_0(x)| \frac{1}{r_{x_0}^{m-1}(x)}\, d\mu_{m-1}(x) \leqslant C2^{-n},$$

что также стремится к нулю. Таким образом, переходя к пределу в (6), получаем важное интегральное представление f_0:

$$f_0(x_0) = -\frac{1}{(m-2)s_m} \int\limits_{B(\mathbb{O},\, R_0)} \frac{\Delta f_0(x)}{r_{x_0}^{m-2}(x)}\, d\lambda_m(x) = -\frac{1}{q_m} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\Delta f_0(x)}{r_{x_0}^{m-2}(x)}\, d\lambda_m(x), \qquad (7)$$

где мы для краткости обозначили $q_m = (m-2)s_m$.

Наша цель — доказать, что представление (7) верно на всем $\mathbb{R}^m$. Для этого достаточно установить непрерывность последнего интеграла. В этом нам помогут следующие леммы.

Лемма 2. *Обозначим $A' = A \cap B(\mathbb{O}, R_0)$ для $A \subset \mathbb{R}^m$. Тогда*

$$\int\limits_{B'(x,\, R)} \frac{\omega(d(x))}{d^2(x)}\, d\lambda_m(x) \leqslant CR^{m-2}\omega(R), \quad x \in K.$$

Доказательство. Пусть $\Omega_0 = B(\mathbb{O}, R_0) \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n$. Положим $\sigma_n = B'(x, R) \cap \Omega_n$. Тогда

$$\int\limits_{B'(x,\, R)} \frac{\omega(d(x))}{d^2(x)}\, d\lambda_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{\sigma_n} \frac{\omega(d(x))}{d^2(x)}\, d\lambda_m(x) = \sum_{n=n(R)}^{\infty} \int\limits_{\sigma_n} \frac{\omega(d(x))}{d^2(x)}\, d\lambda_m(x),$$

где $n(R)$ обозначает наименьшее n, для которого $\sigma_n \neq \varnothing$. Вспомним, что K — подмножество хорошего компакта. Рассмотрим для фиксированного $n \geqslant n(R)$ все точки $x_{kn} = \varphi(t_{kn})$, лежащие в $B(x, R)$. Попарные расстояния между точками t_{kn} не меньше $\widetilde{C}2^{-n}$, все они лежат в $(m-2)$-мерном шаре радиуса $\widetilde{C}R$ и тем более в $(m-2)$-мерном кубе со стороной $2\widetilde{C}R$. Из определения $n(R)$ несложно получить, что $2R \geqslant 2^{-n(R)}$. Значит, по лемме 1 этих точек (как и точек x_{kn}) не больше, чем $CR^{m-2}2^{(m-2)n}$. Множество Ω_n состоит из подмножеств шаров с центрами x_{kn} радиуса 2^{-n+1}, поэтому

$$\lambda_m(\sigma_n) \leqslant CR^{m-2}2^{(m-2)n+m(-n+1)} = CR^{m-2}2^{-2n}.$$

Учитывая это и неравенства (2), получим

$$\sum_{n=n(R)}^{\infty} \int_{\sigma_n} \frac{\omega(d(x))}{d^2(x)}\, d\lambda_m(x) \leqslant C \sum_{n=n(R)}^{\infty} 2^{2n}\omega(2^{-n})\lambda_m(\sigma_n) \leqslant$$

$$\leqslant CR^{m-2} \sum_{n=n(R)}^{\infty} \omega(2^{-n}) \leqslant CR^{m-2}\omega(R).$$

В последнем переходе мы воспользовались условием (1) и тем, что $2^{-n(R)} \asymp R$. □

Лемма 3.

$$\int\limits_{B'(x,\, R)} \frac{\omega(d(x))}{d^2(x) r_{x_0}^{m-2}(x)}\, d\lambda_m(x) \leqslant C\omega(R), \quad x \in K.$$

Доказательство. Преобразуем интеграл из левой части, применим лемму 2 и условие (1):

$$\int\limits_{B'(x,\, R)} \frac{\omega(d(x))}{d^2(x) r_{x_0}^{m-2}(x)}\, d\lambda_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{B'(x,\, 2^{-n}R)\setminus B'(x,\, 2^{-n+1}R)} \frac{\omega(d(x))}{d^2(x) r_{x_0}^{m-2}(x)}\, d\lambda_m(x) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{(m-2)(n-1)}}{R^{m-2}} \int\limits_{B'(x,\, 2^{-n}R)\setminus B'(x,\, 2^{-n+1}R)} \frac{\omega(d(x))}{d^2(x)}\, d\lambda_m(x) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{(m-2)(n-1)}}{R^{m-2}} \int\limits_{B'(x,\, 2^{-n}R)} \frac{\omega(d(x))}{d^2(x)}\, d\lambda_m(x) \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{(m-2)n}}{R^{m-2}} 2^{-(m-2)n} R^{m-2} \omega(2^{-n}R) = C \sum_{n=0}^{\infty} \omega(2^{-n}R) \leqslant C\omega(R). \quad \square$$

Теперь проверим непрерывность интеграла из правой части (7). Обозначим его через $g(x_0)$. Отметим, что в силу леммы 3 и неравенства (5) $g(x)$ корректно определено для $x \in K$. Проверим сначала выполнение неравенства

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leqslant C\omega(\|x_1 - x_2\|), \quad x_1,\, x_2 \in K. \tag{8}$$

Возьмем x_1, $x_2 \in K$ и напишем

$$g(x_2) - g(x_1) = \frac{1}{q_m} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\Delta f_0(x)}{r_{x_1}^{m-2}(x)}\, d\lambda_m(x) - \frac{1}{q_m} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\Delta f_0(x)}{r_{x_2}^{m-2}(x)}\, d\lambda_m(x) =$$

$$= \frac{1}{q_m} \int\limits_{B(x_1,\, 2\|x_1-x_2\|)} \frac{\Delta f_0(x)}{r_{x_1}^{m-2}(x)}\, d\lambda_m(x) - \frac{1}{q_m} \int\limits_{B(x_1,\, 2\|x_1-x_2\|)} \frac{\Delta f_0(x)}{r_{x_2}^{m-2}(x)}\, d\lambda_m(x) +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus B(x_1,\, 2\|x_1-x_2\|)} \Delta f_0(x) \left(\frac{1}{r_{x_1}^{m-2}(x)} - \frac{1}{r_{x_2}^{m-2}(x)} \right) d\lambda_m(x) = I_1 - I_2 + I_3. \quad (9)$$

Неравенство (5) и лемма 3 сразу дают нам

$$|I_1|, |I_2| \leqslant \frac{1}{q_m} \int\limits_{B'(x_1,\, 3\|x_1-x_2\|)} \frac{\omega(d(x))}{d^2(x) r_{x_1}^{m-2}(x)}\, d\lambda_m(x) \leqslant C\omega(\|x_1 - x_2\|).$$

Нетрудно проверить, что для $x \notin B(x_1,\, 2\|x_1 - x_2\|)$ будет выполняться

$$\left| \frac{1}{r_{x_1}^{m-2}(x)} - \frac{1}{r_{x_2}^{m-2}(x)} \right| \leqslant C \frac{\|x_1 - x_2\|}{r_{x_1}^{m-1}(x)},$$

откуда, применяя неравенство (5), лемму 2 и условие (1), получим

$$|I_3| \leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{B'(x_1, 2^{n+1}\|x_1-x_2\|) \setminus B'(x_1, 2^n\|x_1-x_2\|)} \frac{\|x_1 - x_2\| \omega(d(x))}{r_{x_1}^{m-1}(x) d^2(x)}\, d\lambda_m(x) \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(m-1)n} \|x_1 - x_2\|^{m-2}} \int\limits_{B'(x_1, 2^n\|x_1-x_2\|)} \frac{\omega(d(x))}{d^2(x)}\, d\lambda_m(x) \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{(m-2)n} \|x_1 - x_2\|^{m-2} \omega(2^n \|x_1 - x_2\|)}{2^{(m-1)n} \|x_1 - x_2\|^{m-2}} = C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega(2^n \|x_1 - x_2\|)}{2^n} \leqslant C\omega(\|x_1 - x_2\|).$$

Итак, $|g(x_1) - g(x_2)| \leqslant |I_1| + |I_2| + |I_3| \leqslant C\omega(\|x_1 - x_2\|)$. Возьмем теперь $x_1 \in K$, $x_2 \notin K$ и проверим, что $g(x_2) \to g(x_1)$ при $x_2 \to x_1$. Пусть $x_1' \in K$ такова, что $d(x_2) = \|x_1' - x_2\|$. Напишем равенство (9) для $g(x_1')$ и $g(x_2)$. Аналогично получим $|I_1| + |I_3| \leqslant C\omega(\|x_1 - x_2\|)$, что стремится к нулю при $x_2 \to x_1$. Оценим $|I_2|$. Сделав сферическую замену, будем иметь

$$\int\limits_{B(x_2,\, R)} \frac{d\lambda_m(x)}{r_{x_2}^{m-2}(x)} = CR^{m-1}.$$

Далее, по неравенству (5) и лемме 2 получим

$$|I_2| \leqslant \frac{1}{q_m} \int\limits_{B(x_2,\, \frac{1}{2} d(x_2))} \frac{\omega(d(x))}{d^2(x) r_{x_2}^{m-2}(x)}\, d\lambda_m(x) +$$

$$+ \frac{1}{q_m} \int\limits_{B'(x_1',\, 2\|x_1'-x_2\|) \setminus B(x_2,\, \frac{1}{2} d(x_2))} \frac{\omega(d(x))}{d^2(x) r_{x_2}^{m-2}(x)}\, d\lambda_m(x) \leqslant$$

$$\leqslant C \frac{\omega(d(x_2))}{d^2(x_2)} \int\limits_{B(x_2,\, \frac{1}{2} d(x_2))} \frac{d\lambda_m(x)}{r_{x_2}^{m-2}(x)} + \frac{C}{d^{m-2}(x_2)} \int\limits_{B'(x_1',\, 2\|x_1'-x_2\|)} \frac{\omega(d(x))}{d^2(x)}\, d\lambda_m(x) \leqslant$$

$$\leqslant C d^{m-3}(x_2)\omega(d(x_2)) + C\frac{\|x_1' - x_2\|^{m-2}}{d^{m-2}(x_2)}\omega(\|x_1' - x_2\|),$$

что также стремится к нулю при $x_2 \to x_1$. Наконец, по доказанному выше имеем

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leqslant |g(x_1) - g(x_1')| + |g(x_1') - g(x_2)| \leqslant \omega(\|x_1 - x_1'\|) + |g(x_1') - g(x_2)|,$$

то есть $g(x_2) \to g(x_1)$ при $x_2 \to x_1$.

Доказанная непрерывность и непрерывность f_0 позволяют нам подставлять в (7) точки из K. Таким образом,

$$f(x_0) = -\frac{1}{q_m}\int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\Delta f_0(x)}{r_{x_0}^{m-2}(x)}\, d\lambda_m(x), \quad x_0 \in K. \tag{10}$$

Замечание. Доказав оценку (8), мы доказали, что существование псевдогармонического расширения влечет за собой гёльдеровость.

5. Построение приближающей функции. Пусть $C_1 \geqslant 2$. Применяя лемму 1, как это было сделано в доказательстве леммы 2, получим, что в шаре $\overline{B}(x_{kn}, C_1 2^{-n})$ имеется не больше CC_1^{m-2} точек x_{kn}. Значит, справедливо неравенство

$$\lambda_m(\overline{B}(x_{kn}, C_1 2^{-n}) \cap \Omega_n^*) \leqslant CC_1^{m-2} 2^{m(-n+1)}.$$

Многочлен степени m растет быстрее многочлена степени $m-2$, поэтому можно выбрать C_1 так, что

$$\lambda_m(\overline{B}(x_{kn}, C_1 2^{-n}) \setminus \Omega_n^*) \geqslant \frac{1}{2}\lambda_m(B(\mathbb{O},\, C_1 2^{-n})).$$

Определим для $k = 0, 1, \ldots, c_n - 1$ множества β_{kn}:

$$\beta_{0n} = B(x_{0n},\, 2^{-n+1}),\ \beta_{kn} = B(x_{kn},\, 2^{-n+1}) \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} B(x_{in},\, 2^{-n+1}) \text{ при } k = 1, \ldots, c_n - 1.$$

Ясно, что множества β_{kn} попарно (по k) не пересекаются и дают в объединении множество, отличающееся от Ω_n^* на множество меры нуль. Далее, неравенство (5) и лемма 2 дают нам равенство

$$\int\limits_{\beta_{kn}} \Delta f_0(x)\, d\lambda_m(x) = C_{kn} 2^{-(m-2)n}\omega(2^{-n}), \tag{11}$$

причем $|C_{kn}| \leqslant C$ для всех k и n.

Обозначим через χ_{kn} характеристическую функцию множества $B(x_{kn},\, C_1 2^{-n}) \setminus \Omega_n^*$ и положим

$$\varphi_{kn}(x) = \gamma_{kn}\chi_{kn}(x) 2^{2n}\omega(2^{-n}),$$

где числа γ_{kn} подобраны так, чтобы выполнялось

$$\int\limits_{\beta_{kn}} \Delta f_0(x)\, d\lambda_m(x) + \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi_{kn}(x)\, d\lambda_m(x) = 0. \tag{12}$$

Равенство (11) и определение C_1 дают $|\gamma_{kn}| \leqslant C$ при всех k и n. Положим $\Phi_n = \sum\limits_{k=0}^{c_n-1} \varphi_{kn}$ и определим функцию $u_{2^{-n}}$:

$$u_{2^{-n}}(x_0) = -\frac{1}{q_m} \int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus \Omega_n^*} \frac{\Delta f_0(x)}{r_{x_0}^{m-2}(x)}\, d\lambda_m(x) + \frac{1}{q_m} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\Phi_n(x)}{r_{x_0}^{m-2}(x)}\, d\lambda_m(x).$$

Легко проверить, что $\Lambda_{2^{-n}}(K) \subset \Omega_n^*$, так что $u_{2^{-n}}$ гармонична в $\Lambda_{2^{-n}}(K)$. Пусть $x_0 \in K$. Используя (10), напишем

$$u_{2^{-n}}(x_0) - f(x_0) = \frac{1}{q_m} \int\limits_{\Omega_n^*} \frac{\Delta f_0(x)}{r_{x_0}^{m-2}(x)}\, d\lambda_m(x) + \frac{1}{q_m} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\Phi_n(x)}{r_{x_0}^{m-2}(x)}\, d\lambda_m(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{c_n-1} \left(\frac{1}{q_m} \int\limits_{\beta_{kn}} \frac{\Delta f_0(x)}{r_{x_0}^{m-2}(x)}\, d\lambda_m(x) + \frac{1}{q_m} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\varphi_{kn}(x)}{r_{x_0}^{m-2}(x)}\, d\lambda_m(x) \right) = \frac{1}{q_m}(\Sigma_1 + \Sigma_2),$$

где Σ_1 — сумма по индексам k, для которых $x_{kn} \in B(x_0,\, 2^{-n+1})$, а Σ_2 — сумма по всем остальным индексам. Множество индексов k набора Σ_i обозначим через S_i. Из определения Σ_1 следует, что $\bigcup\limits_{k \in S_1} \beta_{kn} \subset B(x_0,\, 2^{-n+2})$, так что по неравенству (5) и лемме 3 имеем

$$\left| \sum_{k \in S_1} \int\limits_{\beta_{kn}} \frac{\Delta f_0(x)}{r_{x_0}^{m-2}(x)}\, d\lambda_m(x) \right| \leqslant \int\limits_{B(x_0,\, 2^{-n+2})} \frac{|\Delta f_0(x)|}{r_{x_0}^{m-2}(x)}\, d\lambda_m(x) \leqslant C\omega(2^{-n}).$$

Применяя лемму 1, можно получить $|S_1| \leqslant C$. Учитывая это и справедливость неравенства $r_{x_0}(x) \geqslant 2^{-n}$ для $x \notin \Omega_n^*$, будем иметь

$$\left| \sum_{k \in S_1} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\varphi_{kn}(x)}{r_{x_0}^{m-2}(x)}\, d\lambda_m(x) \right| \leqslant C 2^{-mn} \frac{2^{2n}\omega(2^{-n})}{2^{(m-2)(-n)}} = C\omega(2^{-n}).$$

Таким образом, $|\Sigma_1| \leqslant \omega(2^{-n})$.

Используя (12), перепишем слагаемые из Σ_2 следующим образом:

$$\int\limits_{\beta_{kn}} \frac{\Delta f_0(x)}{r_{x_0}^{m-2}(x)}\, d\lambda_m(x) + \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\varphi_{kn}(x)}{r_{x_0}^{m-2}(x)}\, d\lambda_m(x) = \int\limits_{\beta_{kn}} \frac{\Delta f_0(x)}{r_{x_0}^{m-2}(x_{kn})}\, d\lambda_m(x) +$$

$$+ \int\limits_{\beta_{kn}} \Delta f_0(x) \left(\frac{1}{r_{x_0}^{m-2}(x)} - \frac{1}{r_{x_0}^{m-2}(x_{kn})} \right) d\lambda_m(x) +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\varphi_{kn}(x)}{r_{x_0}^{m-2}(x_{kn})}\, d\lambda_m(x) + \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi_{kn}(x) \left(\frac{1}{r_{x_0}^{m-2}(x)} - \frac{1}{r_{x_0}^{m-2}(x_{kn})} \right) d\lambda_m(x) =$$

$$= \frac{1}{r_{x_0}^{m-2}(x_{kn})} \left(\int\limits_{\beta_{kn}} \Delta f_0(x)\, d\lambda_m(x) + \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi_{kn}(x)\, d\lambda_m(x) \right) + \ldots =$$

$$
= \int\limits_{\beta_{kn}} \Delta f_0(x) \left(\frac{1}{r_{x_0}^{m-2}(x)} - \frac{1}{r_{x_0}^{m-2}(x_{kn})} \right) d\lambda_m(x) +
$$

$$
+ \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi_{kn}(x) \left(\frac{1}{r_{x_0}^{m-2}(x)} - \frac{1}{r_{x_0}^{m-2}(x_{kn})} \right) d\lambda_m(x) = A_k + D_k.
$$

Заметим, что для $k \in S_2$ будет выполняться

$$
\left| \frac{1}{r_{x_0}^{m-2}(x)} - \frac{1}{r_{x_0}^{m-2}(x_{kn})} \right| \leqslant \frac{C}{\|x_0 - x_{kn}\|^{m-2}}.
$$

Пусть $x_{kn} = \varphi(t_{kn})$, $x_0 = \varphi(t_0)$. Разобъем куб $[0,\, 1]^{m-2}$ на $(\lceil \widetilde{C}^{-1} 2^{n+1} \sqrt{m-2} \rceil)^{m-2}$ одинаковых кубов. Один из кубов, содержащих t_0, назовем *нулевым.* Множество кубов, имеющих общие точки с нулевым, назовем *первым слоем.* Далее, i*-м слоем* назовем множество кубов, не названных ранее и имеющих общие точки с кубами $(i-1)$-го слоя. Длина диагонали маленького куба не превосходит $\widetilde{C} 2^{-n-1}$, так что в каждом кубе не больше одной точки t_{kn}, кроме того, в кубах первого слоя нет точек t_{kn} $(k \in S_2)$. Поскольку в i-м слое имеется $(i+1)^{m-2} - i^{m-2}$ кубов, а расстояние от t_0 до i-го слоя не меньше $C(i-2)2^{-n}$, получаем оценку

$$
\sum_{k \in S_2} \frac{1}{\|x_0 - x_{kn}\|^{m-2}} \leqslant \sum_{i=2}^{\infty} \frac{C}{((i+1)^{m-2} - i^{m-2})(i-1)^{m-2} 2^{-(m-2)n}} \leqslant C 2^{(m-2)n}.
$$

Тогда, применяя неравенство (5) и лемму 1, получим

$$
\left| \sum_{k \in S_2} A_k \right| \leqslant C 2^{-(m-2)m} \omega(2^{-n}) 2^{(m-2)n} = C\omega(2^{-n}),
$$

а из определения φ_{kn} —

$$
\left| \sum_{k \in S_2} D_k \right| \leqslant C 2^{-mn} \cdot 2^{2n} \omega(2^{-n}) 2^{(m-2)n} = C\omega(2^{-n}).
$$

Таким образом, будем иметь

$$
|f(x_0) - u_{2^{-n}}(x_0)| \leqslant \frac{1}{q_m} (|\Sigma_1| + |\Sigma_2|) \leqslant C\omega(2^{-n}). \tag{13}
$$

Для произвольного $\delta \in (0,\, 1/2)$ подберем такое n, что $2^{-n-1} < \delta \leqslant 2^{-n}$, и положим $u_\delta = u_{2^{-n}}$. Тогда требуемая оценка скорости приближения эквивалентна оценке (13). «Гёльдеровость» построенной функции прямо следует из гёльдеровости f и доказанной скорости приближения:

$$
|u_\delta(x_1) - u_\delta(x_2)| \leqslant |u_\delta(x_1) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)| + |f(x_2) - u_\delta(x_2)| \leqslant C\omega(\delta).
$$

Автор выражает признательность Н. А. Широкову за предложенную тему исследования, ценные советы и рекомендации.

Литература

1. Дзядык В. К. О конструктивной характеристике функций, удовлетворяющих условию Lip $\alpha(0 < \alpha < 1)$ на конечном отрезке вещественной оси. *Известия АН СССР, сер. матем.* **20** (5), 623–642 (1956).

2. Андриевский В. В. Геометрическое строение областей и прямые теоремы конструктивной теории функций. *Матем. сб.* **126 (168)** (1), 41–58 (1985).

3. Широков Н. А. Аппроксимативная энтропия континуумов. *Докл. АН СССР* **235** (3), 546–549 (1977).

4. Shirokov N. A. Constructive descriptions of functional classes by polynomial approximations. *Journal of Mathematical Sciences* **105**, 2269–2291 (2001). http://dx.doi.org/10.1023/A:1011393428151

5. Alexeeva T. A., Shirokov N. A. Constructive description of Holder-like classes on an arc in R3 by means of harmonic functions. *Journal of Approximation Theory* **249**, 105308 (2020). https://doi.org/10.1016/j.jat.2019.105308

6. Павлов Д. А. Конструктивное описание гёльдеровых классов на компактах в R3. *Записки научных семинаров ПОМИ* **491**, 119–144 (2020).

7. Dyn'kin E. M. The Pseudoanalytic Extension. *Journal d'Analyse Mathematique* **60**, 45–70 (1993). https://doi.org/10.1007/BF03341966

8. Михлин С. Г. *Курс математической физики.* Москва, Наука (1968).

Статья поступила в редакцию 12 ноября 2020 г.;
после доработки 23 января 2021 г.;
рекомендована в печать 19 марта 2021 г.

Контактная информация:

Павлов Дмитрий Александрович — аспирант; dimapavlow@list.ru

Constructive description of Hölder classes on some multidimensional compact sets

D. A. Pavlov

Herzen State Pedagogical University of Russia,
48, nab. r. Moiki, St. Petersburg, 191186, Russian Federation

For citation: Pavlov D. A. Constructive description of Hölder classes on some multidimensional compact sets. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 3, pp. 430–441. https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.305 (In Russian)

We give a constructive description of Hölder classes of functions on certain compacts in $\mathbb{R}^m$ ($m \geqslant 3$) in terms of a rate of approximation by harmonic functions in shrinking neighborhoods of these compacts. The considered compacts are a generalization to the higher dimensions of compacts that are subsets of a chord-arc curve in $\mathbb{R}^3$. The size of the neighborhood is directly related to the rate of approximation — it shrinks when the approximation becomes more accurate. In addition to being harmonic in the neighborhood of the compact the approximation functions have a property that looks similar to Hölder condition. It consists in the fact that the difference in values at two points is estimated in terms of the size of the neighborhood, if the distance between these points is commensurate with the size of the neighborhood (and therefore it is estimated in terms of the distance between the points).

Keywords: constructive description, Hölder classes, approximation, harmonic functions, chord-arc curves.

References

1. Dzyadyk V. K. Constructive characterization of functions satisfying the condition Lip $\alpha (0 < \alpha < 1)$ on a finite segment of the real axis. *Izv. Akad. Nauk SSSR, ser. mat.* **20** (5), 623–642 (1956). (In Russian)

2. Andrievskii V. V. The geometric structure of regions, and direct theorems of the constructive theory of functions. *Mat. Sb.* **126 (168)** (1), 41–58 (1985). (In Russian) [Engl. transl.: *Math. USSR-Sb.* **54** (1), 39–56 (1986). http://dx.doi.org/10.1070/SM1986v054n01ABEH002959].

3. Shirokov N. A. Approximation entropy of continua. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **235** (3), 546–549 (1977). (In Russian)

4. Shirokov N. A. Constructive descriptions of functional classes by polynomial approximations. *Journal of Mathematical Sciences* **105**, 2269–2291 (2001). http://dx.doi.org/10.1023/A:1011393428151

5. Alexeeva T. A., Shirokov N. A. Constructive description of Holder-like classes on an arc in R3 by means of harmonic functions. *Journal of Approximation Theory* **249**, 105308 (2020). https://doi.org/10.1016/j.jat.2019.105308

6. Pavlov D. A. Constructive description of Hölder classes on compact subsets of R3. *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI* **491**, 119–144 (2020). (In Russian)

7. Dyn'kin E. M. The Pseudoanalytic Extension. *Journal d'Analyse Mathematique* **60**, 45–70 (1993). https://doi.org/10.1007/BF03341966

8. Mikhlin S. G. *Mathematical physics course.* Moscow, Nauka Publ. (1968). (In Russian)

Received: November 12, 2020
Revised: January 23, 2021
Accepted: March 19, 2021

Author's information:

Dmitriy A. Pavlov — dimapavlow@list.ru