УДК 517.925.53 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 3
MSC 34D10

Многообходные устойчивые периодические точки диффеоморфизма плоскости с гомоклинической орбитой*

Е. В. Васильева

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Васильева Е. В.* Многообходные устойчивые периодические точки диффеоморфизма плоскости с гомоклинической орбитой // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 3. С. 406–416. https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.303

Изучается диффеоморфизм плоскости в себя с неподвижной гиперболической точкой и нетрансверсальной гомоклинической к ней точкой. Известны различные способы касания устойчивого и неустойчивого многообразия в гомоклинической точке. Периодические точки, траектории которых не покидают окрестность траектории гомоклинической точки, делятся на счетное множество типов. Периодические точки, принадлежащие одному типу, называются n-обходными, если их траектории имеют n витков, которые лежат вне достаточно малой окрестности гиперболической точки. Ранее в статьях Ш. Ньюхауса, Л. П. Шильникова, Б. Ф. Иванова и других авторов изучались диффеоморфизмы плоскости с нетрансверсальной гомоклинической точкой, предполагалось, что эта точка является точкой с конечным порядком касания. В этих работах показано, что в окрестности гомоклинической точки могут лежать бесконечные множества устойчивых двухобходных и трехобходных периодических точек. Наличие таких множеств зависит от свойств гиперболической точки. В данной работе предполагается, что гомоклиническая точка не является точкой с конечным порядком касания устойчивого и неустойчивого многообразия. В работе показано, что при любом фиксированном натуральном n окрестность нетрансверсальной гомоклинической точки может содержать бесконечное множество устойчивых n-обходных периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями.

Ключевые слова: диффеоморфизм, нетрансверсальная гомоклиническая точка, устойчивость, характеристические показатели.

1. Введение. В работе рассматривается диффеоморфизм плоскости в себя с неподвижной гиперболической точкой и нетрансверсальной гомоклинической к ней точкой. Предполагается, что гомоклиническая точка не является точкой с конечным порядком касания. Основная цель предлагаемой статьи — показать, что при определенных условиях произвольно малая окрестность гомоклинической точки содержит бесконечное множество устойчивых многообходных периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями. В [1] приведен пример двумерного диффеоморфизма с бесконечным множеством периодических точек, траектории которых лежат в ограниченном множестве плоскости, и их характеристические по-

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 19-01-00388).

казатели отделены от нуля. Известно, что в этом случае при малых возмущениях у диффеоморфизма остается сколь угодно много устойчивых периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями.

Точка, которая лежит в пересечении устойчивого и неустойчивого многообразия гиперболической точки, называется гомоклинической точкой. В случае касания этих многообразий в гомоклинической точке она называется нетрансверсальной гомоклинической точкой. Периодическая точка, траектория которой не покидает окрестность траектории гомоклинической точки, но имеет n $(n > 3)$ витков, лежащих вне достаточно малой окрестности гиперболической точки, называется многообходной или n-обходной периодической точкой.

В работах [2–6] изучалась окрестность нетрансверсальной гомоклинической точки. Предполагалось, что гомоклиническая точка является точкой с конечным порядком касания устойчивого и неустойчивого многообразия.

Пусть f — диффеоморфизм плоскости в себя с гиперболической неподвижной точкой в начале координат и нетрансверсальной гомоклинической к ней точкой, а λ, μ — собственные числа матрицы $Df(0)$, причем $0 < \lambda < 1 < \mu$. Пусть

$$\theta = -\frac{\ln \lambda}{\ln \mu}.$$

В работах [2–6] предполагалось, что $\theta > 1$, и было показано, что существует такое неограниченное множество Θ, что при $\theta \in \Theta$ окрестность нетрансверсальной гомоклинической точки содержит счетные множества двухобходных или трехобходных устойчивых периодических точек, однако из [3] следует, что существует неограниченное множество Θ_1 такое, что при $\theta \in \Theta_1$ окрестность нетрансверсальной гомоклинической точки не содержит устойчивых двухобходных периодических точек.

Предлагаемая работа является продолжением работ [7, 8]. В этих статьях предполагается, что нетрансверсальная гомоклиническая точка не является точкой касания конечного порядка устойчивого и неустойчивого многообразия. Даны достаточные условия существования в окрестности гомоклинической точки счетных множеств однообходных или двухобходных устойчивых периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями. В предлагаемой статье даны условия, достаточные для того, чтобы при любых $\theta > n$, где n — натуральное число $(n > 3)$, окрестность гомоклинической точки содержала бесконечное множество n-обходных устойчивых периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями.

2. Основные определения и обозначения. Пусть f — C^1-диффеоморфизм плоскости в себя с гиперболической неподвижной точкой в начале координат, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(0) = 0$. Предположим, что

$$Df(0) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix},$$

где $0 < \lambda < 1 < \mu$.

Зафиксируем натуральное число $n \geq 4$. Предположим, что

$$\theta = -\frac{\ln \lambda}{\ln \mu} > n. \tag{1}$$

Как обычно, пусть $W^s(0)$, $W^u(0)$ — устойчивое и неустойчивое многообразия гиперболической точки. Известно, что

$$W^s(0) = \left\{ z \in \mathbb{R}^2 : \lim_{k \to +\infty} \| f^k(z) \| = 0 \right\},$$

$$W^u(0) = \left\{ z \in \mathbb{R}^2 : \lim_{k \to +\infty} \| f^{-k}(z) \| = 0 \right\},$$

где f^k, f^{-k} — степени диффеоморфизмов f и f^{-1}.

Пусть точка w такова, что $w \neq 0$, $w \in W^s(0) \bigcap W^u(0)$, такая точка является *гомоклинической точкой.* Предположим, что $W^s(0)$, $W^u(0)$ касаются друг друга в точке w, тогда w — *нетрансверсальная гомоклиническая точка.* Ясно, что

$$\lim_{k \to +\infty} \| f^k(w) \| = \lim_{k \to +\infty} \| f^{-k}(w) \| = 0.$$

Предположим, что f в некоторой ограниченной окрестности V_0 начала координат имеет вид

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \mu y \end{pmatrix} \tag{2}$$

при $(x, y) \in V_0$.

Пусть $w_1 = (0, y^0)$, $w_2 = (x^0, 0)$ — две такие точки из орбиты гомоклинической точки w, что $w_1 \in V_0$, $w_2 \in V_0$. Предположим, что при некоторых $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$ таких, что $\lambda < \bar{\lambda} < 1$, $1 < \bar{\mu} < \mu$, справедливо включение

$$V = \left\{ (x, y) : \, |x| \leq \bar{\lambda}^{-1} |x^0|, \, |y| \leq \bar{\mu} |y^0| \right\} \subset V_0. \tag{3}$$

Предположим, что

$$x^0 > 0, \quad y^0 > 0. \tag{4}$$

Из определения гомоклинической точки следует, что существует натуральное число $\omega > 1$ такое, что $f^\omega(w_1) = w_2$. Предположим, что $f^k(w_1) \notin V$, $k = 1, 2, \ldots, \omega - 1$.

Пусть U — такая окрестность точки w_1, что $U \subset V$, $f^\omega(U) \subset V$, $f^k(U) \bigcap V = \emptyset$, $k = 1, 2, \ldots, \omega - 1$, и множества U, $f(U)$, $\ldots$, $f^\omega(U)$ попарно не пересекаются.

Назовем

$$U^0 = V \bigcup f(U) \bigcup \ldots \bigcup f^{\omega - 1}(U)$$

расширенной окрестностью гомоклинической точки.

Периодическая точка $u \in U$ является *n-обходной периодической точкой*, если ее траектория лежит в U^0 и пересечение ее орбиты с U состоит из n различных точек.

Обозначим через L сужение $f^\omega \mid_U$. Ясно, что L — отображение класса C^1. Запишем отображение L в координатах:

$$L(x, y) = \begin{pmatrix} x^0 + F_1(x, y - y^0) \\ F_2(x, y - y^0) \end{pmatrix},$$

где $F_1(x, y - y^0)$, $F_2(x, y - y^0)$ — C^1-функции, определенные в U, такие, что $F_1(0, 0) = F_2(0, 0) = 0$.

Точка w_2 называется *гомоклинической точкой с конечным порядком касания*, если существует такое натуральное число $l > 1$, что

$$\frac{\partial F_2(0,0)}{\partial y} = \ldots = \frac{\partial^{l-1} F_2(0,0)}{\partial y^{l-1}} = 0, \quad \frac{\partial^l F_2(0,0)}{\partial y^l} \neq 0. \tag{5}$$

В работах [2–6] предполагалось, что гомоклиническая точка является точкой с конечным порядком касания. В предлагаемой работе, как и в работах [7, 8], изучается иной способ касания устойчивого и неустойчивого многообразия.

3. Формулировка теорем. Пусть f — C^1-диффеоморфизм плоскости в себя с гиперболической неподвижной точкой в начале координат и нетрансверсальной гомоклинической к ней точкой. Предположим, что в некоторой ограниченной окрестности начала координат выполнены условия (2). Пусть $w_1 = (0, y^0)$, $w_2 = (x^0, 0)$ — две такие точки из орбиты гомоклинической точки w, что выполнены условия (3), (4) и определена расширенная окрестность U^0. В окрестности U точки w_1 определено отображение $L = f^{\omega}\,|_U$.

Предположим, что координатные функции отображения L имеют вид

$$\begin{gathered} F_1(x, y - y^0) = a(y - y^0) + x\varphi_1(x, y - y^0), \\ F_2(x, y - y^0) = bx + g(y - y^0) + x\varphi_2(x, y - y^0), \end{gathered} \tag{6}$$

где a, b — действительные числа такие, что

$$a < 0, \quad b > 0, \tag{7}$$

а функции g, φ_1, φ_2 таковы, что $\varphi_1(0,0) = \varphi_2(0,0) = 0$, $g(0) = \dfrac{dg(0)}{dy} = 0$. Ясно, что φ_1, φ_2 и их производные первого порядка ограничены в U, а функция g и ее производная ограничены в окрестности нуля.

Характер касания устойчивого многообразия с неустойчивым в точке w_2 определяется свойствами функции g. Опишем свойства этой функции с помощью последовательностей. Пусть $\sigma = \sigma(k)$, $\varepsilon = \varepsilon(k)$ — такие положительные, стремящиеся к нулю последовательности, что при любом k выполняется

$$\sigma(k-1) - \varepsilon(k-1) - \sigma(k) - \varepsilon(k) > 0. \tag{8}$$

Пусть $i_0 = i_0(k)$ — такая возрастающая последовательность натуральных чисел, что существует натуральное число $s \geq n$ такое, что

$$i_0(k) - i_0(k-1) > s \tag{9}$$

при любом k.

Предположим, что при любом k

$$(\lambda \mu^n)^{i_0(k)} < \varepsilon(k). \tag{10}$$

Пусть функция g такова, что существуют такие последовательности $\sigma(k)$, $\epsilon(k)$, $i_0(k)$ с перечисленными свойствами, что при любом k

$$g\left(\sigma(k)\right) = \left(y^0 + \Delta(k)\right) \mu^{-i_0(k)}, \tag{11}$$

где $\Delta = \Delta(k)$ — стремящаяся к нулю последовательность действительных чисел.

Предположим, что существует такое действительное число $\alpha > 1$, что при любом k справедливо неравенство

$$\left|\frac{dg(t)}{dt}\right| < \mu^{-\alpha n i_0(k)} \tag{12}$$

при $t \in (\sigma(k) - \varepsilon(k),\, \sigma(k) + \varepsilon(k))$.

Из условий (11), (12) следует, что точка w_2 не является точкой с конечным порядком касания. Очевидно, что в этом случае условия (5) не выполняются.

Пусть $i_1 = i_1(k)$, $i_2 = i_2(k)$, $\ldots$, $i_{n-1} = i_{n-1}(k)$ — такие возрастающие последовательности натуральных чисел, что

$$2 \le i_0(k) - i_m(k) \le s - 1, \quad |i_m(k) - i_l(k)| \ge 1, \tag{13}$$

где $m = 1, 2, \ldots, n-1$, $l = 1, 2, \ldots, n-1$, $m \ne l$.

Предположим, что функция g такова, что существует такой набор последовательностей $i_1 = i_1(k)$, $i_2 = i_2(k)$, $\ldots$, $i_{n-1} = i_{n-1}(k)$, удовлетворяющих условиям (13), что при любом k следующая система уравнений имеет решение:

$$\begin{cases} g(\xi_2) - \mu^{-i_2(k)}\xi_3 + a^2b^2\lambda^{i_1(k)+i_{n-1}(k)}\mu^{i_0(k)}\xi_{n-1} = \\ = \mu^{-i_2(k)}y^0 - b\lambda^{i_1(k)}(x^0 + a\Delta(k)) - ab^2\lambda^{i_1(k)+i_{n-1}(k)}\mu^{i_0(k)}x^0, \\ g(\xi_3) - \mu^{-i_3(k)}\xi_4 + ab\lambda^{i_2(k)}\xi_2(k) = \mu^{-i_3(k)}y^0 - b\lambda^{i_2(k)}x^0, \\ \ldots \\ g(\xi_{n-2}) - \mu^{-i_{n-2}(k)}\xi_{n-1} + ab\lambda^{i_{n-3}(k)}\xi_{n-3} = \mu^{-i_{n-2}(k)}y^0 - b\lambda^{i_{n-3}(k)}x^0, \\ g(\xi_{n-1}) + ab\lambda^{i_{n-2}(k)}\xi_{n-2} = \mu^{-i_{n-1}(k)}(y^0 + \sigma(k)) - b\lambda^{i_{n-2}(k)}x^0. \end{cases} \tag{14}$$

Пусть $\xi_2 = \xi_2(k), \xi_3 = \xi_3(k), \ldots, \xi_{n-1} = \xi_{n-1}(k)$ — решение системы (14). Определим последовательность $\xi_1 = \xi_1(k)$ следующим образом:

$$\xi_1(k) = \Delta(k) + \mu^{i_0(k)}\lambda^{i_{n-1}(k)}b(x^0 + a\xi_{n-1}(k)).$$

Теорема 1. *Пусть f — диффеоморфизм плоскости в себя с неподвижной гиперболической точкой в начале координат и нетрансверсальной гомоклинической к ней точкой. Пусть выполнены условия* (1)–(4), (6)–(12). *Предположим, что существует такой набор возрастающих последовательностей натуральных чисел $i_1 = i_1(k)$, $i_2 = i_2(k)$, $\ldots$, $i_{n-1} = i_{n-1}(k)$, удовлетворяющих* (13), *что система уравнений* (14) *разрешима. Предположим, что при любом k справедливы неравенства*

$$\left|g(\xi_1(k)) - (y^0 + \xi_2(k))\mu^{-i_1(k)} + \lambda^{i_0(k)}b\left(x^0 + a\sigma(k)\right)\right| < \varepsilon(k)\mu^{-(n-1)i_0(k)}. \tag{15}$$

Тогда в любой окрестности гомоклинической точки w_1 лежит счетное множество n-обходных устойчивых периодических точек, характеристические показатели которых отделены от нуля.

Отметим, что для выполнения условий (15) необходимо, чтобы $\xi_1(k) \notin (\sigma(k) - \varepsilon(k),\, \sigma(k) + \varepsilon(k))$. В противном случае неравенства (15) противоречат (11), (12).

Поскольку $g(t)$ — C^1-функция одной переменной, определенная в окрестности нуля, удовлетворяющая (11), (12), то существуют такие последовательности $\tau_1 = \tau_1(k)$, $\tau_2 = \tau_2(k)$, что $(\tau_1(k), \tau_2(k)) \subset (\sigma(k) + \varepsilon(k),\, \sigma(k-1) - \varepsilon(k-1))$ и

$$\frac{dg(t)}{dt} > \mu^{-(\theta+1)(n-2)^{-1}i_0(k)} \tag{16}$$

при $t \in (\tau_1(k), \tau_2(k))$.

Теорема 2. *Пусть* $g(t)$ — C^1*-функция одной переменной, определенная в окрестности нуля, удовлетворяющая условиям* (8)–(12). *Предположим, что при любом* k *справедливы включения*

$$\left[y^0\mu^{-i_0(k)+1}, y^0\mu^{-i_0(k)+s}\right] \subset \left(g(\tau_1(k)), g(\tau_2(k))\right), \tag{17}$$

где последовательности $\tau_1(k)$, $\tau_2(k)$ *определены условиями* (16). *Тогда для любого набора возрастающих натуральных последовательностей* $i_1 = i_1(k)$, $i_2 = i_2(k)$, $\ldots$, $i_{n-1} = i_{n-1}(k)$, *удовлетворяющих условиям* (13), *система уравнений* (14) *разрешима.*

4. Доказательство теоремы 1. Пусть k — достаточно большое натуральное число. Пусть σ, ε, Δ, i_0, $i_1,\ldots$, i_{n-1}, ξ_1, $\xi_2,\ldots$, ξ_{n-1} — элементы соответствующих последовательностей с достаточно большим номером k. При доказательстве теоремы индекс k у последовательностей опускается.

Для любого k определим $x_0 = \lambda^{i_{n-1}}(x^0 + a\xi_{n-1})$, $x_1 = \lambda^{i_0}(x^0 + a\sigma)$, $x_m = \lambda^{i_{m-1}}(x^0 + a\xi_{m-1})$, где $m = 2, 3, \ldots, n-1$. Определим множества

$$U_0 = \left\{|x - x_0| \le \lambda^{i_0}(|a|+1)\varepsilon, |y - (y^0 + \sigma)| \le \varepsilon\right\},$$
$$U_m = \left\{|x - x_m| \le \lambda^{i_0}(|a|+1)\varepsilon, |y - (y^0 + \xi_m)| \le \varepsilon\mu^{-(i_m + i_{m+1} + \ldots + i_{n-1})}\right\},$$

где $m = 1, 2, \ldots, n-1$. Считаем, что $U_m \subset U$ при $m = 0, 1, \ldots, n-1$.

Покажем, что справедливы включения $f^{i_m}L\left(U_m\right) \subset U_{m+1}$, где $m = 0, 1, \ldots, n-2$, $f^{i_{n-1}}L\left(U_{n-1}\right) \subset U_0$.

Пусть $(x, y) \in U_0$. Ясно что $x = x_0 + u_0$, $y = y^0 + \sigma + v_0$, где $|u_0| \le \lambda^{i_0}(|a|+1)\varepsilon$, $|v_0| \le \varepsilon$. Обозначим

$$\begin{pmatrix} \overline{x}_0 \\ \overline{y}_0 \end{pmatrix} = f^{i_0}L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Из условий (2), (6) будем иметь

$$\overline{x}_0 = \lambda^{i_0}\left[x^0 + a(\sigma + v_0) + (x_0 + u_0)\varphi_1(x_0 + u_0, \sigma + v_0)\right],$$

$$\overline{y}_0 = \mu^{i_0}\left[b(x_0 + u_0) + g(\sigma) + g(\sigma + v_0) - g(\sigma) + (x_0 + u_0)\varphi_2(x_0 + u_0, \sigma + v_0)\right],$$

откуда, с учетом условий (11), получим

$$\begin{aligned}
&|\overline{x}_0 - x_1| \le \lambda^{i_0}\left[|a|\varepsilon + (|x_0| + \lambda^{i_0}(|a|+1)\varepsilon)|\varphi_1(x_0 + u_0, \sigma + v_0)|\right],\\
&\left|\overline{y}_0 - \left(y^0 + \xi_1\right)\right| \le\\
&\le \mu^{i_0}\left[b\lambda^{i_0}(|a|+1)\varepsilon + |g(\sigma + v_0) - g(\sigma)| + (|x_0| + \lambda^{i_0}(|a|+1)\varepsilon)|\varphi_2(x_0 + u, \sigma + v)|\right].
\end{aligned}$$

Из условий (12) имеем

$$|g(\sigma + v_0) - g(\sigma)| \le \varepsilon\mu^{-n\alpha i_0},$$

откуда, с учетом свойств функций φ_1, φ_2 и условий (10), получим

$$\begin{aligned}
&|\overline{x}_0 - x_1| \le \lambda^{i_0}(|a|+1)\varepsilon,\\
&\left|\overline{y}_0 - \left(y^0 + \xi_1\right)\right| \le \varepsilon\mu^{-(i_1 + i_2 + \ldots + i_{n-1})}.
\end{aligned}$$

Включение $f^{i_0}L\left(U_0\right) \subset U_1$ доказано.

Пусть $(x, y) \in U_1$. Ясно что $x = x_1 + u_1$, $y = y^0 + \xi_1 + v_1$, где $|u_1| \leq \lambda^{i_0}(|a| + 1)\varepsilon$, $|v_1| \leq \varepsilon\mu^{-(i_1+i_2+\ldots+i_{n-1})}$. Обозначим

$$\begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{y}_1 \end{pmatrix} = f^{i_1} L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Из условий (2), (6) получим

$$\overline{x}_1 = \lambda^{i_1} \left[x^0 + a(\xi_1 + v_1) + (x_1 + u_1)\varphi_1(x_1 + u_1, \xi_1 + v_1)\right],$$

$$\overline{y}_1 = \mu^{i_1} \left[b(x_1 + u_1) + g(\xi_1) + g(\xi_1 + v_1) - g(\xi_1) + (x_1 + u_1)\varphi_2(x_1 + u_1, \xi_1 + v_1)\right].$$

Из условий (15) будем иметь

$$\begin{aligned}
&|\overline{x}_1 - x_2| \leq \lambda^{i_1} \left[|a|\varepsilon\mu^{-(i_1+i_2+\ldots+i_{n-1})} + (|x_1| + \lambda^{i_0}(|a|+1)\varepsilon)|\varphi_1(x_1 + u_1, \xi_1 + v_1)|\right],\\
&\left|\overline{y}_1 - \left(y^0 + \xi_2\right)\right| \leq \mu^{i_1} \left[b\lambda^{i_0}(|a|+1)\varepsilon + |g(\xi_1 + v_1) - g(\xi_1)| + \varepsilon\mu^{-i_0(n-1)}\right] +\\
&+\mu^{i_1}(|x_1| + \lambda^{i_0}(|a|+1)\varepsilon)|\varphi_2(x_1 + u_1, \xi_1 + v_1)|.
\end{aligned}$$

Из свойств функций g следует

$$|g(\xi_1 + v_1) - g(\xi_1)| \leq 0.5\varepsilon\mu^{-(i_1+i_2+\ldots+i_{n-1})},$$

откуда получаем

$$\begin{aligned}
&|\overline{x}_1 - x_2| \leq \lambda^{i_0}(|a| + 1)\varepsilon,\\
&\left|\overline{y}_1 - \left(y^0 + \xi_1\right)\right| \leq \varepsilon\mu^{-(i_2+\ldots+i_{n-1})}.
\end{aligned}$$

Включение $f^{i_1}L\,(U_1) \subset U_2$ доказано. Включения $f^{i_m}L\,(U_m) \subset U_{m+1}$, где $m = 2, 3, \ldots, n-1$, $f^{i_{n-1}}L\,(U_{n-1}) \subset U_0$ доказываются аналогично с учетом условий (14), следовательно, получим $f^{i_{n-1}}L \ldots f^{i_0}L(U_0) \subset U_0$.

Из предыдущих рассуждений следует, что существует такая точка $z_0 \in U_0$, $z_0 = (x_0^*, y_0^*)$, что $f^{i_{n-1}}L \ldots f^{i_0}L(z_0) = z_0$ и в U_0 лежит периодическая точка исходного диффеоморфизма. Пусть $z_m = (x_m^*, y_m^*)$, $z_m \in U_m$ — такие точки из орбиты периодической точки, что $z_m = f^{i_{m-1}}L \ldots f^{i_0}L(z_0)$, $m = 1, 2, \ldots, n-1$.

Определим

$$\Xi = Df^{i_{n-1}}L \ldots f^{i_0}L(z_0) = Df^{i_{n-1}}L(z_{n-1}) \ldots Df^{i_0}L(z_0).$$

Для того чтобы доказать устойчивость точек z_0, оценим собственные числа этой матрицы. Ясно, что

$$Df^{i_m}L(z_m) = \begin{pmatrix} \lambda^{i_m}\frac{\partial x\varphi_1(x,y-y^0)}{\partial x} & \lambda^{i_m}\left(a + \frac{\partial x\varphi_1(x,y-y^0)}{\partial y}\right) \\ \mu^{i_m}\left(b + \frac{\partial x\varphi_2(x,y-y^0)}{\partial x}\right) & \mu^{i_m}\left(\frac{dg(y-y^0)}{dy} + \frac{\partial x\varphi_2(x,y-y^0)}{\partial y}\right) \end{pmatrix}_{\substack{x=x_m^*\\ y=y_m^*}},$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Легко видеть, что

$$\mathrm{Det}\Xi = (-ab)^n(\lambda\mu)^{ni_0}A, \tag{18}$$

где величина A зависит от k, но является ограниченной для всех k.

Введем обозначения

$$\varphi_2^{(m)} = \varphi_2(x_m^*, y_m^* - y^0),$$

$$g_m = \frac{dg(y_m^* - y^0)}{dy},$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Следующие равенства определяют матрицы Ψ, Φ_m, где $m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$:

$$(\lambda\mu)^{i_0}\Phi_m = Df^{i_m}L(z_m) - \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{i_m}a \\ \mu^{i_m}\left(b + \varphi_2^{(m)}\right) & \mu^{i_m}g_m \end{pmatrix},$$

$$(\lambda\mu^n)^{i_0}\Psi = \Xi - \prod_{m=0}^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{i_{n-1-m}}a \\ \mu^{i_{n-1-m}}\left(b + \varphi_2^{(n-1-m)}\right) & \mu^{i_{n-1-m}}g_{n-1-m} \end{pmatrix}.$$

Элементы матриц Ψ, Φ_m, где $m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, зависят от k, но являются ограниченными для всех k.

Индукцией по l при $l = 1, 2, \ldots, n-1$, легко показать, что

$$\prod_{m=0}^{l} \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{i_{l-m}}a \\ \mu^{i_{l-m}}\left(b + \varphi_2^{(l-m)}\right) & \mu^{i_{l-m}}g_{l-m} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda^{i_0}\mu^{li_0}\beta_{11}(l) & \lambda^{i_0}\mu^{li_0}\beta_{12}(l) \\ \mu^{(l+1)i_0}\beta_{21}(l) & \lambda^{i_0}\mu^{li_0}\beta_{22}(l) + \mu^{i_0+i_1+\ldots+i_l}g_0g_1\ldots g_l \end{pmatrix},$$

где $\beta_{11}(l)$, $\beta_{12}(l)$, $\beta_{21}(l)$, $\beta_{22}(l)$, $l = 1, 2, \ldots, n-1$, зависят от k, но являются ограниченными для всех k.

Из (12) имеем $|g_0| < \mu^{-\alpha n i_0}$, следовательно, существует такая не зависящая от k величина B, что

$$\mathrm{Tr}\Xi \leq B\mu^{-\gamma i_0},$$

где $\mathrm{Tr}\Xi$ — след матрицы Ξ, а $\gamma = \min[\theta - n, n(\alpha - 1)]$.

Пусть ρ_1, ρ_2 — собственные числа матрицы Ξ. Известно, что

$$\rho_1\rho_2 = \mathrm{Det}\Xi,$$

$$\rho_1 + \rho_2 = \mathrm{Tr}\Xi.$$

Покажем, что существуют такие $C > 0$ и k_0, что при любом $k > k_0$ и $m = 1, 2$ справедливы неравенства

$$|\rho_m| \leq C\mu^{-\gamma i_0}. \tag{19}$$

Предположим, что (19) не выполняются, тогда для любого $C > B$ существует такая последовательность номеров k, что

$$|\rho_1| > C\mu^{-\gamma i_0},$$

следовательно,

$$|\rho_2| \geq |\rho_1| - |\mathrm{Tr}\Xi| > (C - B)\,\mu^{-\gamma i_0},$$

откуда

$$|\mathrm{Det}\Xi| \geq C\,(C - B)\,\mu^{-2\gamma i_0}.$$

Последнее неравенство противоречит равенствам (18). Неравенства (19) доказаны.

Характеристические показатели ν_m, $m = 1, 2$, периодических точек $z_0 \in U_0$ определяются следующим образом:

$$\nu_m = (i_0 + i_1 + \ldots + i_{n-1} + n\omega)^{-1} \ln |\rho_m|,$$

где $m = 1, 2$.

Из условий (13), (19) следует, что при достаточно больших k выполняется

$$\nu_m \leq -\gamma \ln \mu (2n)^{-1},$$

где $m = 1, 2$.

Последние неравенства доказывают теорему 1.

5. Доказательство теоремы 2. Пусть k — достаточно большое натуральное число. В доказательстве этой теоремы у последовательностей σ, ε, Δ, i_0 , i_1,..., i_{n-1}, τ_1, τ_2 индекс k опускается. Предполагается, что ξ_2, ξ_3,..., ξ_{n-1} — действительные переменные.

Пусть $P = \{(\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{n-1}), \xi_m \in (\tau_1, \tau_2)\, m = 2, 3, \ldots, n-1\}$. Определим на этих множествах при любом k отображение $G : P \to \mathbb{R}^{n-2}$, или в координатах

$$G(\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{n-1}) = \begin{pmatrix} G_2(\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{n-1}) \\ G_3(\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{n-1}) \\ \ldots \\ G_{n-1}(\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{n-1}) \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{gathered} G_2(\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{n-1}) = g(\xi_2) - \mu^{-i_2}\xi_3 + a^2b^2\lambda^{i_1+i_{n-1}}\mu^{i_0}\xi_{n-1}, \\ G_3(\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{n-1}) = g(\xi_3) - \mu^{-i_3}\xi_4 + ab\lambda^{i_2}\xi_2, \\ \ldots \\ G_{n-2}(\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{n-1}) = g(\xi_{n-2}) - \mu^{-i_{n-2}}\xi_{n-1} + ab\lambda^{i_{n-3}}\xi_{n-3}, \\ G_{n-1}(\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{n-1}) = g(\xi_{n-1}) + ab\lambda^{i_{n-2}}\xi_{n-2}. \end{gathered}$$

Пусть H_{n-2} — определитель порядка $n-2$ вида

$$H_{n-2} = \mathrm{Det} \begin{pmatrix} \frac{dg(\xi_2)}{d\xi_2} & -\mu^{-i_2} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ ab\lambda^{i_2} & \frac{dg(\xi_3)}{d\xi_3} & -\mu^{-i_3} & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{dg(\xi_{n-2})}{d\xi_{n-2}} & -\mu^{-i_{n-2}} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & ab\lambda^{i_{n-2}} & \frac{dg(\xi_{n-1})}{d\xi_{n-1}} \end{pmatrix}.$$

Ясно, что

$$H_1 = \frac{dg(\xi_2)}{d\xi_2},$$

$$H_2 = \frac{dg(\xi_2)}{d\xi_2}\frac{dg(\xi_3)}{d\xi_3} + ab\left(\lambda(\mu)^{-1}\right)^{i_2}.$$

Пользуясь свойствами определителя, легко показать, что

$$H_{n-2} = \frac{dg(\xi_{n-1})}{d\xi_{n-1}} H_{n-3} + ab\left(\lambda(\mu)^{-1}\right)^{i_{n-2}} H_{n-4},$$

$$\mathrm{Det}DG\,(\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{n-1}) = H_{n-2} + (-1)^{n-1}(ab)^{n-1}\lambda^{i_1+i_2+\ldots+i_{n-1}}\mu^{i_0}.$$

Из последних формул и условий (16), (17) следует, что

$$\mathrm{Det}DG\,(\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{n-1}) > 0$$

при любых $(\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{n-1}) \in P$. Легко видеть, что отображение G взаимно однозначно на P.

Из условий (13) при достаточно больших k и любом $m = 2, 3, \ldots, n-1$ имеем

$$|G_m\,(\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{n-1}) - g(\xi_m)| < y^0\mu^{-i_0}(\mu^{\frac{1}{2}} - 1).$$

Из этих неравенств и условий (17) следует, что при достаточно больших k справедливы включения

$$\left\{(\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{n-1})\,,\, \xi_m \in \left[y^0\mu^{-i_0+\frac{3}{2}}, y^0\mu^{-i_0+s-\frac{1}{2}}\right],\, m = 2, 3, \ldots, n-1\right\} \subset G(P).$$

Из последних включений следует существование решения системы (14).

Теорема 2 доказана.

Литература

1. Плисс В. А. *Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений.* Москва, Наука (1977).

2. Newhouse Sh. Diffeomorphisms with infinitely many sinks. *Topology* **12**, 9–18 (1973).

3. Иванов Б. Ф. Устойчивость траекторий, не покидающих окрестность гомоклинической кривой. *Дифференц. уравнения* **15** (8), 1411–1419 (1979).

4. Гонченко С. В., Шильников Л. П. О динамических системах с негрубыми гомоклиническими кривыми. *Доклады АН СССР* **286** (5), 1049–1053 (1986).

5. Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. Динамические явления в многомерных системах с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре. *Докл. Академии наук* **330** (2), 144–147 (1993).

6. Стенькин О. В., Шильников Л. П. О бифуркациях периодических движений вблизи негрубой гомоклинической кривой. *Дифференц. уравнения* **33** (3), 377–384 (1997).

7. Васильева Е. В. Диффеоморфизмы плоскости с устойчивыми периодическими точками. *Дифференц. уравнения* **48** (3), 307–315 (2012).

8. Васильева Е. В. Устойчивость периодических точек диффеоморфизма плоскости в случае наличия гомоклинической орбиты. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **6 (64)**, вып. 1, 44–52 (2019). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.103

Статья поступила в редакцию 16 февраля 2021 г.;
после доработки 14 марта 2021 г.;
рекомендована в печать 19 марта 2021 г.

Контактная информация:

Васильева Екатерина Викторовна — д-р физ.-мат. наук; ekvas1962@mail.ru

Multi-pass stable periodic points of diffeomorphism of a plane with a homoclinic orbit*

E. V. Vasil'eva

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Vasil'eva E. V. Multi-pass stable periodic points of diffeomorphism of a plane with a homoclinic orbit. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 3, pp. 406–416. https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.303 (In Russian)

A diffeomorphism of a plane into itself with a fixed hyperbolic point and a nontransversal point homoclinic to it is studied. There are various ways of touching a stable and unstable manifold at a homoclinic point. Periodic points whose trajectories do not leave the vicinity of the trajectory of a homoclinic point are divided into a countable set of types. Periodic points of the same type are called n-pass periodic points if their trajectories have n turns that lie outside a sufficiently small neighborhood of the hyperbolic point. Earlier in the articles of Sh. Newhouse, L. P. Shil'nikov, B. F. Ivanov and other authors, diffeomorphisms of the plane with a nontransversal homoclinic point were studied, it was assumed that this point is a tangency point of finite order. In these papers, it was shown that in a neighborhood of a homoclinic point there can be infinite sets of stable two-pass and three-pass periodic points. The presence of such sets depends on the properties of the hyperbolic point. In this paper, it is assumed that a homoclinic point is not a point with a finite order of tangency of a stable and unstable manifold. It is shown in the paper that for any fixed natural number n, a neighborhood of a nontransversal homolinic point can contain an infinite set of stable n-pass periodic points with characteristic exponents separated from zero.

Keywords: diffeomorphism of plane, nontransversal homoclinic point, stability, characteristic exponents.

References

1. Pliss V. A. *Integral Sets of Periodic Systems of Differential Equations.* Moscow, Nauka Publ. (1977). (In Russian)

2. Newhouse Sh. Diffeomorphisms with infinitely many sinks. *Topology* **12**, 9–18 (1973).

3. Ivanov B. F. Stability of the trajectories that do not leave the neighborhood of a homoclinic curve. *Differ. Uravn.* **15** (8), 1411–1419 (1979). (In Russian)

4. Gonchenko S. V., Shil'nikov L. P. Dynamical systems with structurally unstable homoclinic curves. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **286** (5), 1049–1053 (1986). (In Russian)

5. Gonchenko S. V., Turaev D. V., Shil'nikov L. P. Dynamical phenomena in multidimensional systems with a structurally unstable homoclinic Poincare curve. *Dokl. Akad. Nauk* **330** (2), 144–147 (1993). (In Russian) [Engl. transl.: *Dokl. Math.* **17** (3), 410–415 (1993)].

6. Sten'kin O. V, Shilnikov L. P. On bifurcations of periodic motions near a structurally unstable homoclinic curve. *Differential Equations* **33** (3), 375–383 (1997). (In Russian)

7. Vasil'eva E. V. Diffeomorphisms of the plane with stable periodic points. *Differentsial'nye Uravneniya* **48** (3), 307–315 (2012). (In Russian) [Engl. transl.: *Differential Equations* **48** (3), 309–317 (2012). https://doi.org/10.1134/S0012266112030019].

8. Vasil'eva E. V. Stability of periodic points of a diffeomorphism of a plane in a homoclinic orbit. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **6 (64)**, вып. 1, 44–52 (2019). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.103 (In Russian) [Engl. transl.: *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics* **52**, iss. 1, 30–35 (2019). https://doi.org/10.3103/S1063454119010138].

Received: February 16, 2021
Revised: March 14, 2021
Accepted: March 19, 2021

Author's information:

Ekaterina V. Vasil'eva — ekvas1962@mail.ru

*The work is supported by Russian Foundation for Basic Research (grant No. 19-01-00388).