УДК 519.61
MSC 65G40

Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика... 2021. Т. 17. Вып. 3

PC-решения и квазирешения интервальной системы линейных алгебраических уравнений

С. И. Носков[1], *А. В. Лакеев*[2]

[1] Иркутский государственный университет путей сообщения, Российская Федерация, 664074, Иркутск, ул. Чернышевского, 15

[2] Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Российская Федерация, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134

Для цитирования: *Носков С. И., Лакеев А. В.* PC-решения и квазирешения интервальной системы линейных алгебраических уравнений // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 3. С. 262–276. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.304

К задачам интенсивно развивающегося в последнее время интервального анализа относится проблема решения интервальной системы линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ). В общем случае этим решением является множество, которое может быть задано по-разному, в зависимости от того, какими кванторами связаны элементы левой и правой частей ИСЛАУ. Каждое подлежащее определению множество решений ИСЛАУ описывается областью совместности соответствующей системы линейных неравенств и в общем случае одного нелинейного условия типа дополнительности. При решении конкретных задач с ним работать затруднительно. Поэтому в случае непустоты множества решений ИСЛАУ предлагается искать ее так называемое PC-решение, основанное на использовании известного в теории многокритериального выбора приема, который предполагает максимизацию разрешающей способности системы неравенств. В случае же пустоты такого множества следует искать квазирешение ИСЛАУ. Проведено сравнение описанного подхода к поиску PC- и квазирешений ИСЛАУ с подходом, предложенным С. П. Шарым и основанным на применении распознающего функционала.

Ключевые слова: интервальная система линейных алгебраических уравнений, АЕ-решения, PC-решение, квазирешение, распознающий функционал, задача линейного программирования.

1. Введение. Рассмотрим одну из ключевых проблем интервального анализа — решение интервальной системы линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ)

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{A} = [\overline{A}, \underline{A}] \in \mathbb{IR}^{m\times n}$ — вещественная интервальная $(m \times n)$-матрица; $\boldsymbol{b} = [\overline{b}, \underline{b}] \in \mathbb{IR}^m$ — m-мерный интервальный вектор; $x \in \mathbb{R}^n$. При этом будем в основном придерживаться терминологии и обозначений из [1, 2].

Множество решений ИСЛАУ может быть определено по-разному, в зависимости от того, какими кванторами связаны коэффициенты левой и правой частей (1).

Отметим, что имеются и другие понятия решений системы (1), которые не укладываются в эту схему. А именно «формальные решения» [2, определение 4.3.2], которые тоже очень важны, нужны, полезны и также могут называться решениями интервальных уравнений.

В данной работе будем изучать только так называемые множества АЕ-решений, введенные С. П. Шарым в 1995 г. [3–5], в которых все кванторы всеобщности предшествуют кванторам существования.

В качестве частных случаев множеств АЕ-решений ИСЛАУ будем рассматривать следующие.

Исторически первым и до сих пор наиболее исследуемым является так называемое объединенное множество решений ИСЛАУ (*united solution set*) [6–10]; в котором все коэффициенты левой и правой частей (1) связаны кванторами существования.

Затем из практических задач появились и стали изучаться некоторые другие множества решений системы:

— допусковое множество решений ИСЛАУ (*tolerable solution set*) [11–16], появившееся при решении задачи о допусках, в котором все коэффициенты матрицы $\boldsymbol{A}$ связаны кванторами всеобщности, а коэффициенты вектора $\boldsymbol{b}$ — кванторами существования;

— управляемое множество решений ИСЛАУ (*controllable solution set*) [11, 13, 17–20]), возникшее при решении задачи автоматического регулирования в интервальной постановке [17] и задачи управляемости для системы типа «вход—выход» [19, 20], в котором все коэффициенты вектора $\boldsymbol{b}$ связаны кванторами всеобщности, а коэффициенты матрицы $\boldsymbol{A}$ — кванторами существования.

Для множества АЕ-решений И. Роном в [21, 22] было получено бескванторное описание в виде разрешимости системы линейных неравенств с модулями (см. также [23]). В отличие от обычной системы линейных неравенств (без модулей), для которых задачи разрешимости и отыскания одного из решений (в случае разрешимости) являются полиномиально разрешимыми [24, 25], эти задачи для системы линейных неравенств с модулями оказались гораздо сложнее, а именно NP-трудными [26–28].

Однако в случае непустоты множества АЕ-решений для конкретных практических задач иногда удобнее пользоваться какой-либо его точечной характеризацией, определяемой некоторой убедительной содержательной эвристикой. В данной работе рассмотрим одну из таких эвристик, которая базируется на приеме, часто применяемом в теории принятия решений при построении линейной свертки локальных критериев оптимальности в задачах векторной оптимизации (см., например, [29–32]).

Заметим, что, разлагая вектор x на разность положительной и отрицательной частей, преобразуем систему линейных неравенств с модулями в систему линейных неравенств (уже без модулей) и одного нелинейного (квадратичного) условия дополнительности [33] между положительной и отрицательной частями. Тогда в качестве «наилучшего» представителя множества решений предлагается взять такое решение, на котором достигается *максимум суммарной разрешающей способности* указанных неравенств, т. е. наибольшее из возможных их суммарных усилий. При этом численно разрешающая способность считается равной неотрицательной разности между левой и правой частями соответствующего неравенства. Такие решения будем называть *решениями с максимальной разрешающей способностью* или, более кратко, *РС-решениями*. Отметим, что этот подход основан на идее, описанной в работах [29, 30].

Рассмотрим теперь случай, когда множество АЕ-решений пусто.

В таком случае в соответствии с теорией решения некорректных задач можно искать так называемое квазирешение исходной задачи (см., например, [34, 35]). Идея его поиска состоит в привнесении искажений во все неравенства, задающие эти множества, гарантирующих их выполнение, и последующей минимизации данных искажений.

В настоящей работе, если множество AE-решений пусто, рассматриваем те же линейные неравенства, что и при определении PC-решений, но условие дополнительности не искажается (остается прежним), а для линейных неравенств берется искажение, равное разрешающей способности, которая умножена на минус единицу, если она отрицательна, и равное нулю — в противном случае. В этом случае минимизация суммы данных искажений равносильна максимизации суммарной разрешающей способности так же, как и при определении PC-решений.

Заметим, что для задачи нахождения множества решений ИСЛАУ такой подход приводит к определению так называемого распознающего функционала (recognizing functional). Впервые эти функционалы были предложены С. П. Шарым в 1989 г. [36], а термин «распознающий функционал» впервые появился, видимо, в его работе [37] при исследовании допускового множества решений ИСЛАУ. В дальнейшем распознающие функционалы для указанных выше частных случаев множеств AE-решений (объединенного, допускового, управляемого) использовались С. П. Шарым [2, 10, 36–40] и С. И. Носковым [29, 30].

Распознающий функционал для произвольного множества AE-решений рассматривался в работе [39], где на его основе предложено понятие «наилучшего» решения в случае, когда множество AE-решений непусто. Это понятие отличается от понятия PC-решения.

В данной работе построим еще один распознающий функционал для множества AE-решений, основанный на изложенных выше идеях.

2. PC-решения. Перейдем теперь к точным формулировкам.

Определим AE-решения (AE-solution set), следуя [2, гл. 5.2].

Пусть для уравнения (1) вместе с интервальной матрицей $\boldsymbol{A}$ и интервальным вектором $\boldsymbol{b}$ заданы $(m \times n)$-матрица α и m-мерный вектор β, состоящие из кванторов.

Определим интервальные матрицы $\boldsymbol{A}^{\forall} = (\boldsymbol{a}_{ij}^{\forall})$, $\boldsymbol{A}^{\exists} = (\boldsymbol{a}_{ij}^{\exists})$ и интервальные векторы $\boldsymbol{b}^{\forall} = (\boldsymbol{b}_i^{\forall})$, $\boldsymbol{b}^{\exists} = (\boldsymbol{b}_i^{\exists})$ тех же размеров, что $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{b}$ соответственно, следующим образом:

$$\boldsymbol{a}_{ij}^{\forall} = \begin{cases} \boldsymbol{a}_{ij}, & \text{если } \alpha_{ij} = \forall, \\ 0, & \text{если } \alpha_{ij} = \exists, \end{cases} \qquad \boldsymbol{a}_{ij}^{\exists} = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha_{ij} = \forall, \\ \boldsymbol{a}_{ij}, & \text{если } \alpha_{ij} = \exists, \end{cases}$$

$$\boldsymbol{b}_i^{\forall} = \begin{cases} \boldsymbol{b}_i, & \text{если } \beta_i = \forall, \\ 0, & \text{если } \beta_i = \exists, \end{cases} \qquad \boldsymbol{b}_i^{\exists} = \begin{cases} 0, & \text{если } \beta_i = \forall, \\ \boldsymbol{b}_i, & \text{если } \beta_i = \exists. \end{cases}$$

Тогда очевидно, что $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\forall} + \boldsymbol{A}^{\exists}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^{\forall} + \boldsymbol{b}^{\exists}$ и выполняются соотношения дизъюнктности $\boldsymbol{a}_{ij}^{\forall}\boldsymbol{a}_{ij}^{\exists} = 0$, $\boldsymbol{b}_i^{\forall}\boldsymbol{b}_i^{\exists} = 0$.

Определение 1 [2, определение 5.2.2]. Пусть для системы (1) заданы кванторные матрица α и вектор β. Множеством AE-решений типа $\alpha\beta$ для (1) называется множество

$$\varXi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall \hat{A} \in \boldsymbol{A}^{\forall} \ \ \forall \hat{b} \in \boldsymbol{b}^{\forall} \ \ \exists \check{A} \in \boldsymbol{A}^{\exists} \ \ \exists \check{b} \in \boldsymbol{b}^{\exists} \ \ (\hat{A} + \check{A})x = \hat{b} + \check{b}\}.$$

Следующие множества являются частными случаями AE-решений:

— объединенное множество решений ИСЛАУ ($\boldsymbol{A}^{\forall} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b}^{\forall} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{A}^{\exists} = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}^{\exists} = \boldsymbol{b}$)

$$\varXi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists A \in \boldsymbol{A} \ \ \exists b \in \boldsymbol{b} \ \ Ax = b\};$$

— допусковое множество решений ИСЛАУ ($\boldsymbol{A}^{\forall} = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}^{\forall} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{A}^{\exists} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b}^{\exists} = \boldsymbol{b}$)

$$\varXi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall A \in \boldsymbol{A} \;\; \exists b \in \boldsymbol{b} \;\; Ax = b\};$$

— управляемое множество решений ИСЛАУ ($\boldsymbol{A}^{\forall} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b}^{\forall} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{A}^{\exists} = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}^{\exists} = \boldsymbol{0}$)

$$\varXi_{ctr}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall b \in \boldsymbol{b} \;\; \exists A \in \boldsymbol{A} \;\; Ax = b\}.$$

Для множества $\varXi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ в [21, 22] получено бескванторное описание в виде линейных неравенств с модулями (см. также [23]).

Далее будем представлять интервальные векторы и интервальные матрицы также и в центрально-симметричной форме, т. е. если $\boldsymbol{b} = [\underline{b}, \overline{b}] \in \mathbb{IR}^m$ — интервальный вектор, а $\boldsymbol{A} = [\underline{A}, \overline{A}] \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ — интервальная матрица, то, полагая, что

$$b_c = \frac{1}{2}(\overline{b} + \underline{b}), \;\; \delta = \frac{1}{2}(\overline{b} - \underline{b}), \;\; A_c = \frac{1}{2}(\overline{A} + \underline{A}), \;\; \Delta = \frac{1}{2}(\overline{A} - \underline{A}),$$

получаем

$$\boldsymbol{b} = [b_c - \delta, b_c + \delta]\,, \;\; \boldsymbol{A} = [A_c - \Delta, A_c + \Delta]\,.$$

Отметим, что в литературе имеются и другие обозначения для этих величин, а именно, $\mathrm{mid}(\boldsymbol{b}) = b_c = \frac{1}{2}(\overline{b} + \underline{b})$ и $\mathrm{rad}(\boldsymbol{b}) = \delta = \frac{1}{2}(\overline{b} - \underline{b}) = \frac{1}{2}\mathrm{wid}(\boldsymbol{b})$, называемые центром и радиусом соответственно (аналогично для интервальных матриц [2]).

Теорема (характеризация Рона множеств AE-решений [2, теорема 5.2.4]). *Вектор $x \in \mathbb{R}^n$ принадлежит множеству AE-решений $\varXi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ тогда и только тогда, когда*

$$|A_c x - b_c| \leqslant (\Delta^{\exists} - \Delta^{\forall})|x| + \delta^{\exists} - \delta^{\forall}, \tag{2}$$

где $|x|$ понимается покоординатно.

Будем также использовать в дальнейшем разложение векторов на положительную и отрицательную части [2, 41].

Для $x \in \mathbb{R}^n$ обозначим $x^+ = \max(x, \boldsymbol{0})$, $x^- = \max(-x, \boldsymbol{0})$. Тогда $x^+ \geqslant 0$, $x^- \geqslant 0$, $x = x^+ - x^-$, $|x| = x^+ + x^-$ и $(x^+, x^-) = 0$ (где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$).

Кроме того, верно и обратное: если $x = y - z$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ и $(y, z) = 0$, то $y = x^+$, $z = x^-$, т. е. представление вектора $x \in \mathbb{R}^n$ в виде разности двух неотрицательных ортогональных векторов единственно.

Будем часто пользоваться этим фактом в дальнейшем. В частности, используя его и возвращаясь к представлению интервальных векторов и матриц через левую и правую границы, из формулы (2) получаем следующее описание множества AE-решений $\varXi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

Предложение 1. Вектор $x \in \mathbb{R}^n$ принадлежит множеству AE-решений $\varXi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ тогда и только тогда, когда он представим в виде разности $x = y - z$, а y и z удовлетворяют системе ограничений

$$(\overline{A}^{\forall} + \underline{A}^{\exists})y - (\underline{A}^{\forall} + \overline{A}^{\exists})z \leqslant \underline{b}^{\forall} + \overline{b}^{\exists}, \tag{3}$$

$$(\underline{A}^{\forall} + \overline{A}^{\exists})y - (\overline{A}^{\forall} + \underline{A}^{\exists})z \geqslant \overline{b}^{\forall} + \underline{b}^{\exists}, \tag{4}$$

$$(y, z) = 0, \tag{5}$$

$$y \geqslant \boldsymbol{0}, \;\; z \geqslant \boldsymbol{0}. \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условия (5), (6) обеспечивают равенства $y = x^+$, $z = x^-$ и, следовательно, $|x| = y + z$. Но тогда, записывая неравенство (2) в виде

$$-(\Delta^\exists - \Delta^\forall)|x| - \delta^\exists + \delta^\forall \leqslant A_c x - b_c \leqslant (\Delta^\exists - \Delta^\forall)|x| + \delta^\exists - \delta^\forall$$

и учитывая, что $x = y - z$ и $|x| = y + z$, получаем

$$-(\Delta^\exists - \Delta^\forall)(y + z) - \delta^\exists + \delta^\forall \leqslant A_c(y - z) - b_c \leqslant (\Delta^\exists - \Delta^\forall)(y + z) + \delta^\exists - \delta^\forall.$$

С учетом обозначений неравенство $-(\Delta^\exists - \Delta^\forall)(y + z) - \delta^\exists + \delta^\forall \leqslant A_c(y - z) - b_c$ переходит в неравенство (4), а неравенство $A_c(y-z)-b_c \leqslant (\Delta^\exists-\Delta^\forall)(y+z)+\delta^\exists-\delta^\forall$ — в неравенство (3). Предложение доказано. $\square$

З а м е ч а н и е 1. Представлениие вектора $x \in \Xi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ в виде разности $x = y - z$, где неотрицательные y и z удовлетворяют системе линейных неравенств (3), (4) и условию дополнительности (5), было получено ранее для некоторых частных случаев множеств AE-решений:

— для объединенного множества решений — в работе И. Рона, 1984 [9, Corollary 4];

— для допускового множества решений — в работе И. Рона, 1985 [12]. При этом нетрудно показать, что в случае, когда отсутствуют кванторы существования по элементам матрицы $\boldsymbol{A}$ (т. е. $\boldsymbol{A}^\exists = \boldsymbol{0}$), в предложении 1 можно опустить нелинейное условие (5). В частности, это верно для допускового множества решений;

— для управляемого множества решений — в работе А. В. Лакеева, С. И. Носкова, 1992 [18] и более подробно в [26, 27].

Определение 2. Вектор $x \in \Xi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ будем называть PC-решением, если найдутся векторы $y, z, u, v \in \mathbb{R}^n$ такие, что $x = y - z$, и на них достигается максимум в следующей задаче:

$$(\overline{A}^\forall + \underline{A}^\exists)y - (\underline{A}^\forall + \overline{A}^\exists)z + u \leqslant \underline{b}^\forall + \overline{b}^\exists, \tag{7}$$

$$(\underline{A}^\forall + \overline{A}^\exists)y - (\overline{A}^\forall + \underline{A}^\exists)z - v \geqslant \overline{b}^\forall + \underline{b}^\exists, \tag{8}$$

$$(y, z) = 0, \tag{9}$$

$$y \geqslant \boldsymbol{0},\ z \geqslant \boldsymbol{0}, \tag{10}$$

$$u \geqslant \boldsymbol{0},\ v \geqslant \boldsymbol{0}, \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{m}(u_j + v_j) = (u + v, e) \to \max, \tag{12}$$

где $e \in \mathbb{R}^m$ — вектор, все координаты которого равны 1. Обозначим $\Xi^r_{\alpha\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ множество всех PC-решений.

Таким образом, с помощью введения векторов $u \geqslant \boldsymbol{0}$ и $v \geqslant \boldsymbol{0}$ пытаемся максимально «раздвинуть» левые и правые границы в неравенствах (3) и (4).

Предложение 2. Вектор $x \in \Xi^r_{\alpha\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ тогда и только тогда, когда на нем достигается максимум функции

$$\varphi(x) = ((\Delta^\exists - \Delta^\forall)|x|, e) = (|x|, \lambda), \tag{13}$$

где $\lambda = (\Delta^\exists - \Delta^\forall)^T e$ ($(\cdot)^T$ — транспонирование).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in \varXi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ и векторы $y, z, u, v \in \mathbb{R}^n$ такие, что $x = y - z$ и для них выполняются условия (7)–(11). Тогда $y = x^+$, $z = x^-$ и из (3), (4) следует, что

$$u_0 = -(\overline{A}^{\forall} + \underline{A}^{\exists})y + (\underline{A}^{\forall} + \overline{A}^{\exists})z + \underline{b}^{\forall} + \overline{b}^{\exists} = (\Delta^{\exists} - \Delta^{\forall})|x| + \delta^{\exists} - \delta^{\forall} - (A_c x - b_c) \geqslant \mathbf{0},$$

$$v_0 = (\underline{A}^{\forall} + \overline{A}^{\exists})y - (\overline{A}^{\forall} + \underline{A}^{\exists})z - \overline{b}^{\forall} - \underline{b}^{\exists} = (\Delta^{\exists} - \Delta^{\forall})|x| + \delta^{\exists} - \delta^{\forall} + (A_c x - b_c) \geqslant \mathbf{0}.$$

Из неравенств (7), (8) получаем, что $u \leqslant u_0$, $v \leqslant v_0$ и, следовательно,

$$(u + v, e) \leqslant (u_0 + v_0, e) = 2((\Delta^{\exists} - \Delta^{\forall})|x|, e) + 2(\delta^{\exists} - \delta^{\forall}, e).$$

Поэтому максимум (12) достигается там же, где и максимум (13). Предложение доказано. □

Заметим, что для объединенного и управляемого множеств решений $\boldsymbol{A}^{\exists} = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^{\forall} = \mathbf{0}$ и, таким образом, $\Delta^{\exists} - \Delta^{\forall} = \Delta \geqslant \mathbf{0}$, $\lambda = \Delta^T e \geqslant \mathbf{0}$. Для допускового множества решений $\boldsymbol{A}^{\exists} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{A}^{\forall} = \boldsymbol{A}$, тогда $\Delta^{\exists} - \Delta^{\forall} = -\Delta \leqslant \mathbf{0}$, $\lambda = -\Delta^T e \leqslant \mathbf{0}$. Обозначим $\lambda_{\boldsymbol{A}} = \Delta^T e \geqslant \mathbf{0}$ и $||x||_{\boldsymbol{A}} = (\lambda_{\boldsymbol{A}}, |x|)$ — взвешенная сумма модулей (являющаяся в общем случае полунормой и нормой, если $\lambda_{\boldsymbol{A}} > \mathbf{0}$). Тогда верно следующее утверждение.

Следствие 1:

1) вектор $x \in \varXi^r_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, или $x \in \varXi^r_{ctr}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, тогда и только тогда, когда на нем достигается максимум $||x||_{\boldsymbol{A}} = (\lambda_{\boldsymbol{A}}, |x|)$;

2) вектор $x \in \varXi^r_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ тогда и только тогда, когда на нем достигается минимум $||x||_{\boldsymbol{A}} = (\lambda_{\boldsymbol{A}}, |x|)$.

Рассмотрим, каким может быть множество РС-решений в случае объединенного множества решений.

Следствие 2:

1) пусть $\Delta = \mathbf{0}$, т. е. в уравнении (1) только правая часть является интервальной, тогда $||x||_{\boldsymbol{A}} \equiv 0$ и $\varXi^r_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \varXi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$;

2) пусть $\varXi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ неограниченно и $\lambda_{\boldsymbol{A}} > \mathbf{0}$; тогда $\varXi^r_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \emptyset$, так как максимум функции (13) не достигается;

3) если $m = n$ и множество $\varXi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ ограничено (следовательно, интервальная матрица $\boldsymbol{A}$ невырождена), а $\lambda_{\boldsymbol{A}} > \mathbf{0}$, то множество $\varXi^r_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ имеет непустое пересечение с конечным множеством $\mathbf{V} = \{x \mid |A_c x - b_c| = \Delta|x| + \delta\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждения 1) и 2) очевидны.

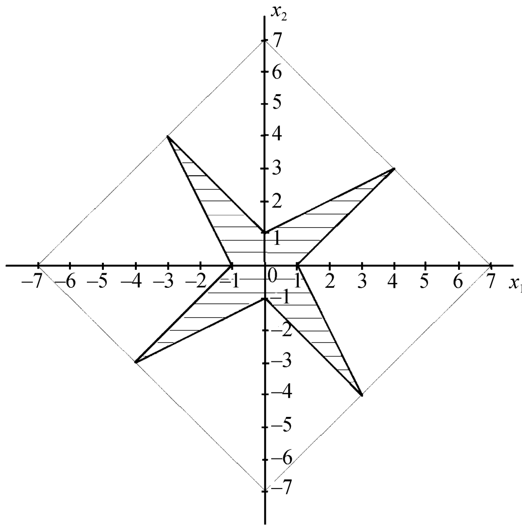
Рассмотрим утверждение 3). В работе И. Рона [9, теоремы 1.2, 1.3] показано (см. также [42, теорема 2.2]), что множество $\mathbf{V} = \{x \mid |A_c x - b_c| = \Delta|x| + \delta\}$ конечно (состоит из не более чем 2^n элементов), все векторы $x \in \mathbf{V}$ будут крайними точками множества $\varXi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ и $\mathrm{Conv}(\varXi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})) = \mathrm{Conv}(\mathbf{V})$ (где $\mathrm{Conv}(\cdot)$ — выпуклая оболочка множества). Отсюда сразу следует утверждение 3), так как функция $||x||_{\boldsymbol{A}} = (\lambda_{\boldsymbol{A}}, |x|)$ выпуклая.

Рассмотрим два примера, которые часто используются в работах по интервальному анализу.

Пример 1 [43]. Интервальная (2×2)-матрица и двумерный интервальный вектор равны

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix}.$$

Множество $\varXi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ показано на рисунке, слева.



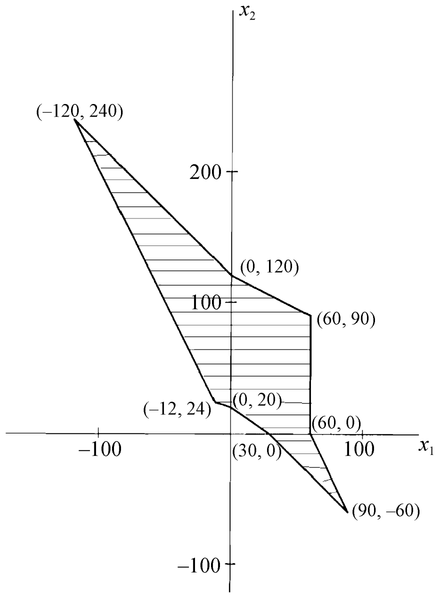


Рисунок. Примеры объединенного множества решений

Тогда вектор $x \in \Xi^r_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, если на нем достигается максимум функционала $||x||_{\boldsymbol{A}} = (\lambda_{\boldsymbol{A}}, |x|) = \frac{2}{3}(|x_1| + |x_2|)$. Нетрудно показать, что в этом случае множество $\Xi^r_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \mathbf{V}$ и состоит из четырех векторов:

$$\Xi^r_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \mathbf{V} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Пример 2 [44]. Интервальная (2×2)-матрица и двумерный интервальный вектор равны

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [2,3] & [0,1] \\ [1,2] & [2,3] \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [0,120] \\ [60,240] \end{pmatrix}.$$

Множество $\Xi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ показано на рисунке, справа.

Тогда вектор $x \in \Xi^r_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, если на нем достигается максимум функционала $||x||_{\boldsymbol{A}} = (\lambda_{\boldsymbol{A}}, |x|) = 4|x_1| + 3|x_2|$. В этом случае множество $\Xi^r_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \subset \mathbf{V}$ и состоит из одного вектора

$$\Xi^r_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \left\{ \begin{pmatrix} -120 \\ 240 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbf{V} = \left\{ \begin{pmatrix} -120 \\ 240 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 60 \\ 90 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 90 \\ -60 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -12 \\ 24 \end{pmatrix} \right\}.$$

З а м е ч а н и е 2. На этих (и других) примерах видно, что в случае 3) следствия 2 выполняется включение $\Xi^r_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \subseteq \mathbf{V}$. Было бы интересно выяснить, будет ли оно верно в общем случае, а также в каких случаях множество $\Xi^r_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ может быть бесконечным.

3. Квазирешения. Пусть теперь множество $\Xi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ решений ИСЛАУ пусто. В этом случае в соответствии с идеей, описанной в п. 1, определим следующее понятие квазирешения.

Определение 3. Вектор $x \in \mathbb{R}^n$ будем называть квазирешением для (1), если найдутся векторы $y, z, u, v \in \mathbb{R}^n$ такие, что $x = y - z$ и на них достигается максимум в задаче

$$(\overline{A}^{\forall} + \underline{A}^{\exists})y - (\underline{A}^{\forall} + \overline{A}^{\exists})z + u \leqslant \underline{b}^{\forall} + \overline{b}^{\exists}, \tag{14}$$

$$(\underline{A}^{\forall} + \overline{A}^{\exists})y - (\overline{A}^{\forall} + \underline{A}^{\exists})z - v \geqslant \overline{b}^{\forall} + \underline{b}^{\exists}, \tag{15}$$

$$(y, z) = 0, \tag{16}$$

$$y \geqslant \mathbf{0},\ z \geqslant \mathbf{0}, \tag{17}$$

$$u \leqslant \mathbf{0},\ v \leqslant \mathbf{0}, \tag{18.a}$$

$$\sum_{j=1}^{m}(u_j + v_j) = (u + v, e) \to \max, \tag{19}$$

где $e \in \mathbb{R}^m$ — вектор, все координаты которого равны 1. Обозначим $\Xi^q_{\alpha\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ множество всех квазирешений.

В связи с определением 3 введем оператор $\Psi(x) = \Psi(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \alpha, \beta)$, $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$\Psi(x) = ((\Delta^{\exists} - \Delta^{\forall})|x| + \delta^{\exists} - \delta^{\forall} - A_c x + b_c)^- + ((\Delta^{\exists} - \Delta^{\forall})|x| + \delta^{\exists} - \delta^{\forall} + A_c x - b_c)^-$$

и функционал $\psi(x) = \psi(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \alpha, \beta)$ в виде

$$\psi(x) = -(\Psi(x), e).$$

Предложение 3:

1) функционал $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ будет распознающим для множества $\Xi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, т. е.

$$x \in \Xi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \Leftrightarrow \psi(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \alpha, \beta) \geqslant 0;$$

2) функционал ψ — вогнутый по x в каждом ортанте $\mathbb{R}^n$;

3) функционал ψ — полиэдральный, т. е. его график составлен из конечного числа кусков гиперплоскостей;

4) функционал ψ достигает конечного максимума по x на всем пространстве $\mathbb{R}^n$ и, кроме того, $x \in \Xi^q_{\alpha\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ тогда и только тогда, когда на нем достигается максимум функционала ψ.

Доказательство. 1). Пусть y и z такие, что для них выполняются условия (16), (17) и $x = y - z$. Учитывая, что при этом $y = x^+$, $z = x^-$, обозначим

$$u_0 = -(\overline{A}^{\forall} + \underline{A}^{\exists})y + (\underline{A}^{\forall} + \overline{A}^{\exists})z + \underline{b}^{\forall} + \overline{b}^{\exists} = (\Delta^{\exists} - \Delta^{\forall})|x| + \delta^{\exists} - \delta^{\forall} - (A_c x - b_c),$$

$$v_0 = (\underline{A}^{\forall} + \overline{A}^{\exists})y - (\overline{A}^{\forall} + \underline{A}^{\exists})z - \overline{b}^{\forall} - \underline{b}^{\exists} = (\Delta^{\exists} - \Delta^{\forall})|x| + \delta^{\exists} - \delta^{\forall} + (A_c x - b_c).$$

Тогда если векторы $y, z, u, v \in \mathbb{R}^n$ такие, что для них выполняются условия (14)–(17), (18.a) и $x = y - z$, то $u \leqslant -u_0^-$ и $v \leqslant -v_0^-$. Поэтому максимум в (19) достигается при $u = -u_0^-$, $v = -v_0^-$ и равен $\psi(x)$. Так как очевидно, что $x \in \Xi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ тогда и только тогда, когда $u_0^- = 0$ и $v_0^- = 0$, то получаем требуемую эквивалентность.

2). Заметим, что в каждом фиксированном ортанте операторы $\Psi_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ и $\Psi_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, определяемые равенствами

$$\Psi_1(x) = (\Delta^{\exists} - \Delta^{\forall})|x| + \delta^{\exists} - \delta^{\forall} - A_c x + b_c, \tag{20}$$

$$\Psi_2(x) = (\Delta^{\exists} - \Delta^{\forall})|x| + \delta^{\exists} - \delta^{\forall} + A_c x - b_c, \tag{21}$$

будут аффинными. Поэтому, представляя $\Psi(x)$ в виде

$$\Psi(x) = (\Psi_1(x))^- + (\Psi_2(x))^- = (-\Psi_1(x))^+ + (-\Psi_2(x))^+,$$

получаем, что функционал $-\psi(x)$ будет суммой положительных частей аффинных функций. Так как положительная часть числа является выпуклой неубывающей функцией, а аффинные функции — выпуклыми, то из теорем 5.1 и 5.2 (см. [45, с. 48–49]) получаем, что функционал $-\psi(x)$ выпуклый, и, следовательно, $\psi(x)$ вогнутый.

3). Следует из кусочной линейности функций $|x|$ и x^-. Действительно, обозначим $Y^n = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y| = e\}$ и $T_y = \operatorname{diag}(y_1, \ldots, y_n)$ — диагональная матрица с $y \in Y^n$ по диагонали. Очевидно, что если $x \in \mathbb{R}^n_y = \{x \in \mathbb{R}^n \mid T_y x \geqslant \mathbf{0}\}$, то $|x| = T_y x$ и, следовательно, как уже отмечалось выше, операторы Ψ_1 и Ψ_2 будут аффинными на $\mathbb{R}^n_y$.

Аналогично, если взять еще два вектора $y_1, y_2 \in Y^m$ и определить полиэдр

$$\mathbb{R}^n_{y,y_1,y_2} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid T_y x \geqslant \mathbf{0},\ T_{y_1}(((\Delta^{\exists} - \Delta^{\forall})T_y - A_c)x + \delta^{\exists} - \delta^{\forall} + b_c) \geqslant \mathbf{0},$$

$$T_{y_2}(((\Delta^{\exists} - \Delta^{\forall})T_y + A_c)x + \delta^{\exists} - \delta^{\forall} - b_c) \geqslant \mathbf{0}\},$$

то на нем функционал ψ будет аффинным и представим в виде

$$\psi(x) = \frac{1}{2}((E - T_{y_1})\Psi_1(x) + ((E - T_{y_2})\Psi_2(x), e)).$$

Так как объединение всех множеств вида $\mathbb{R}^n_{y,y_1,y_2}$ (некоторые из них могут быть и пустыми) составит все $\mathbb{R}^n$, то получаем требуемое утверждение.

4). Следует из 2), 3), ограниченности ψ сверху нулем и определения $\Xi^q_{\alpha\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

З а м е ч а н и е 3. Для функционала ψ выполняется следующее условие:

$$\psi(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \alpha, \beta) \leqslant 0 \text{ для всех } x \in \mathbb{R}^n,$$

$$x \in \Xi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \Leftrightarrow \psi(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \alpha, \beta) = 0.$$

З а м е ч а н и е 4. Можно показать, что в случае, когда отсутствуют кванторы существования по элементам матрицы A (т. е. $\boldsymbol{A}^{\exists} = \mathbf{0}$), функционал ψ будет вогнутым по x на всем $\mathbb{R}^n$. В частности, это верно для допускового множества решений.

Первый распознающий функционал для множества AE-решений был предложен в [39, с. 152]. Его определение использует описание множества AE-решений в арифметике Каухера, а численное значение этого функционала равно максимальному резерву (запасу) этого описания.

В данной работе не применяем арифметику Каухера, поэтому, для того чтобы сравнить распознающий функционал из [39] с функционалом ψ, приведем представление функционала из [39] с помощью операторов Ψ_1 и Ψ_2, определяемых формулами (20), (21).

Обозначим через $\Psi_{1j},\ \Psi_{2j},\ j = \overline{1, m}$, координаты Ψ_1 и Ψ_2 соответственно (т. е. $\Psi_1(x) = (\Psi_{11}(x), \ldots, \Psi_{1m}(x))^T$ и $\Psi_2(x) = (\Psi_{21}(x), \ldots, \Psi_{2m}(x))^T$).

Тогда распознающий функционал $\operatorname{Rsv}(x; \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \alpha, \beta)$ для множества AE-решений из работы [39] можно представить следующим образом:

$$\operatorname{Rsv}(x; \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \alpha, \beta) = \operatorname{Rsv}(x) = \min_{1 \leqslant j \leqslant m} (\min\{\Psi_{1j}(x), \Psi_{2j}(x)\}). \tag{22}$$

Отметим, что в [39] доказаны свойства функционала $\mathrm{Rsv}(x)$, аналогичные свойствам $\psi(x)$ из предложения 3 и некоторые другие. В частности, показано, что если множество $\Xi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ непусто, то с помощью функционала $\mathrm{Rsv}(x)$ можно различать граничные и внутренние точки множества $\Xi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, что невозможно, если использовать функционал $\psi(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \alpha, \beta)$.

Далее представим функционал $\psi(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \alpha, \beta)$ в виде

$$\psi(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \alpha, \beta) = \sum_{j \in J_1(x)} \Psi_{1j}(x) + \sum_{j \in J_2(x)} \Psi_{2j}(x), \tag{23}$$

где $J_1(x) = \{j \mid \Psi_{1j}(x) < 0\}$, $J_2(x) = \{j \mid \Psi_{2j}(x) < 0\}$ и, как обычно, если множество $J_1(x)$ (или $J_2(x)$) пусто, то соответствующая сумма равна нулю.

Из этого представления сразу получаем, что

$$\mathrm{Rsv}(x; \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \alpha, \beta) \geqslant \psi(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \alpha, \beta)$$

при любых $x \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, из (23) получаем, что, если в случае непустоты множества $\Xi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ лучше, возможно, использовать распознающий функционал $\mathrm{Rsv}(x; \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \alpha, \beta)$, так как он более информативен, то в случае $\Xi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \emptyset$ более информативным будет функционал $\psi(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \alpha, \beta)$, поскольку в нем учитываются все возможные нарушения в неравенствах (2), а не только максимальное, как в (22).

З а м е ч а н и е 5. Отметим, что распознающий функционал $\psi(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \alpha, \beta)$ для конкретных множеств решений (объединенного, допускового, управляемого) представлен в работе [29, с. 193–194]. В ней приведены и другие распознающие функционалы для этих множеств, построенные из отрицательных частей функционалов Ψ_{1j}, Ψ_{2j}, $j = \overline{1, m}$, и гёльдеровых норм на $\mathbb{R}^m$. Такого же типа распознающие функционалы можно построить и для любого множества $\Xi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$. Более того, можно взять произвольную отрицательно определенную функцию $U(\tau_1, \ldots, \tau_m, \mu_1, \ldots, \mu_m)$ от $2m$ переменных и рассмотреть функционал

$$U((\Psi_{11}(x))^-, \ldots, (\Psi_{1m}(x))^-, (\Psi_{21}(x))^-, \ldots, (\Psi_{2m}(x))^-),$$

который также будет распознающим для $\Xi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$. Вопрос о том, какой распознающий функционал использовать в каждой конкретной задаче, зависит, естественно, от характера самой задачи.

4. Заключение. В работе дан краткий анализ состояния дел в вопросе изучения множеств решений ИСЛАУ. Каждое подлежащее определению множество решений ИСЛАУ описывается областью совместности соответствующей системы линейных неравенств и в общем случае одного нелинейного условия типа дополнительности. При решении конкретных задач с ним работать затруднительно. Поэтому в случае непустоты множества решений ИСЛАУ будем искать ее так называемое РС-решение, основанное на использовании известного в теории многокритериального выбора приема, предполагающего максимизацию разрешающей способности системы неравенств. В случае же пустоты такого множества предложено искать квазирешение ИСЛАУ. Проведено сравнение приведенного подхода к поиску РС- и квазирешений ИСЛАУ с подходом, предложенным С. П. Шарым и основанным на применении распознающего функционала. Установлено, что если в случае непустоты множества $\Xi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ лучше, возможно, использовать распознающий функционал из [39], то при $\Xi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \emptyset$ более информативен, а значит, и более эффективен распознающий функционал, описанный в настоящей работе. При этом выбор типа распознающего функционала должен определяться спецификой каждой конкретной задачи.

Литература

1. *Kearfott R. B., Nakao M. T., Neumaier A., Rump S. M., Shary S. P., Hentenryck P.* Standardized notation in interval analysis // Вычислительные технологии. 2010. Т. 15. № 1. С. 7–13. URL: http://www.ict.nsc.ru/jct/getfile.php?id=1345 (дата обращения: 27.06.2021).

2. *Шарый С. П.* Конечномерный интервальный анализ. Новосибирск: XYZ, 2020. 650 с. URL: http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf (дата обращения: 27.06.2021).

3. *Shary S. P.* Algebraic solutions to interval linear equations and their applications // Numerical Methods and Error Bounds. Proceedings of IMACS-GAMM International Symposium on Numerical Methods and Error Bounds. Oldenburg, Germany. July 9–12, 1995. Eds by G. Alefeld, J. Herzberger. (Mathematical Research. Vol. 89). Berlin: Akademie Verlag, 1996. P. 224–233. URL: http://interval.ict.nsc.ru/shary/Papers/Herz.pdf (дата обращения: 27.06.2021).

4. *Shary S. P.* Outer estimation of generalized solution sets to interval linear systems // Reliable Computing. 1999. Vol. 5. P. 323–335. URL: http://interval.ict.nsc.ru/shary/Papers/GOuter.pdf (дата обращения: 27.06.2021).

5. *Шарый С. П.* Внешнее оценивание обобщенных множеств решений интервальных линейных систем // Вычислительные технологии. 1999. Т. 4. № 4. С. 82–110.

6. *Oettli W., Prager W.* Compatibility of approximate solution of linear equations with given error bounds for coefficients and right-hand sides // Num. Math. 1964. Vol. 6. P. 405–409.

7. *Oettli W.* On the solution set of a linear system with inacurate coefficients // SIAM J. Numer. Anal. 1965. Vol. 2. P. 115–118.

8. *Beeck H.* Über structur und abschatzungen der loesungsmenge von linear gleichungssystemen mit intervall koeffizienten // Computing. 1972. Vol. 10. P. 231–244.

9. *Rohn J.* Interval linear systems // Freiburger Intervall-Berichte. Freiburg: Albert-Ludwigs-Universitaet, 1984. N 84/7. P. 33–58.

10. *Шарый С. П.* О характеризации объединенного множества решений интервальной линейной алгебраической системы. Деп. в ВИНИТИ. 1990. № 726–В91. 20 с.

11. *Nuding E., Wilhelm J.* Über Gleichungen und über Lösungen // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 1972. Vol. 52. P. T188–T190.

12. *Rohn J.* Inner solutions of linear interval systems // Interval Mathematics 1985. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1986. P. 157–158. (Lecture Notes in Computer Science. Vol. 212.)

13. *Deif A.* Sensitivety analysis in linear systems. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1986. 224 p.

14. *Neumaier A.* Tolerance analysis with interval arithmetic // Freiburger Intervall-Berichte. Freiburg: Albert-Ludwigs-Universität, 1986. N 86/9. P. 5–19.

15. *Шайдуров В. В., Шарый С. П.* Решение интервальной алгебраической задачи о допусках: препринт ВЦ АН СССР. Красноярск: ВЦ АН СССР, 1988. № 5. 27 с.

16. *Шарый С. П.* О разрешимости линейной задачи о допусках // Интервальные вычисления. 1991. № 1. С. 92–98.

17. *Хлебалин Н. А., Шокин Ю. И.* Интервальный вариант метода модального управления // Докл. АН СССР. 1991. Т. 316. № 4. С. 846–850.

18. *Лакеев А. В., Носков С. И.* Описание множеств решений линейного интервального уравнения в упорядоченном пространстве // Сб. трудов Междунар. конференции по интервальным и стохастическим методам в науке и технике (ИНТЕРВАЛ-92, 22–26 сентября). М.: МЭИ, 1992. Т. 1. С. 87–89.

19. *Shary S. P.* On controlled solution set of interval algebraic systems // Interval Computations. 1992. Vol. 4 (6). P. 66–75.

20. *Shary S. P.* Controllable solution sets to interval static systems // Applied Mathematics and Computation. 1997. Vol. 86. N 2–3. P. 185–196.

21. *Rohn J.* E-mail letter to S. P. Shary and A. V. Lakeyev of November 18, 1995. URL: http://www.cs.cas.cz/~rohn/publist/LettShaLak.ps (дата обращения: 27.06.2021).

22. *Rohn J.* (Z, z)-solutions: technical report. N 1159. Prague: Institute of Computer Science. Academy of Sciences of the Czech Republic, 2012. 3 p. URL: http://uivtx.cs.cas.cz/~rohn/publist/zzsols.pdf (дата обращения: 27.06.2021).

23. *Lakeyev A. V.* Computational complexity of estimation of generalized solution sets for interval linear systems // Вычислительные технологии. 2003. Т. 8. № 1. С. 12–23.

24. *Хачиян Л. Г.* Полиномиальные алгоритмы в линейном программировании // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1980. Т. 20. № 1. С. 51–68.

25. *Karmarkar N.* A new polynomial-time algorithm for linear programming // Combinatorica. 1984. Vol. 4. P. 373–395. https://doi.org/10.1007/BF02579150

26. *Лакеев А. В., Носков С. И.* Описание множества решений линейного уравнения с интервально заданными оператором и правой частью // Докл. АН СССР. 1993. Т. 330 (4). С. 430–433.

27. *Лакеев А. В., Носков С. И.* О множестве решений линейного уравнения с интервально заданными оператором и правой частью // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35. № 5. С. 1074–1084.

28. *Lakeyev A. V.* On the computational complexity of the solution of linear systems with moduli // Reliable Computing. 1996. Vol. 2. N 2. P. 125–131.

29. *Носков С. И.* Технология моделирования объектов с нестабильным функционированием и неопределенностью в данных. Иркутск: Облинформпечать, 1996. 320 с.
URL: https://www.researchgate.net/publication/340570185 (дата обращения: 27.06.2021).

30. *Носков С. И.* Точечная характеризация множеств решений интервальных систем линейных алгебраических уравнений // Информационные технологии и математическое моделирование в управлении сложными системами. 2018. № 1 (1). С. 8–13.

31. *Васильев С. Н., Селедкин А. П.* Синтез функции эффективности в многокритериальных задачах принятия решений // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 3. С. 186–190.

32. *Носков С. И., Протопопов В. А.* Оценка уровня уязвимости объектов транспортной инфраструктуры: формализованный подход // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2011. № 4 (32). С. 241–244.

33. *Cottle R. W., Pang J. H., Stone R. E.* The linear complementarity problem. Boston: Academic Press, 1992. 761 p.

34. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.

35. *Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г.* Регуляризующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1983. 200 с.

36. *Шарый С. П.* О некоторых методах решения линейной задачи о допусках: препринт ВЦ АН СССР. Красноярск: ВЦ АН СССР, 1989. № 6. 45 с.

37. *Шарый С. П.* Решение интервальной линейной задачи о допусках // Автоматика и телемеханика. 2004. № 10. С. 147–162.

38. *Шарый С. П., Шарая И. А.* Распознавание разрешимости интервальных уравнений и его приложения к анализу данных // Вычислительные технологии. 2013. Т. 18. № 3. С. 80–109.

39. *Sharaya I. A., Shary S. P.* Reserve of characteristic inclusion as recognizing functional for interval linear systems // Scientific Computing, Computer Arithmetic, and Validated Numerics. 16th International Symposium (SCAN 2014). Würzburg, Germany, September 21–26, 2014. Revised selected papers / eds by M. Nehmeier, J. W. von Gudenberg, W. Tucker. Heidelberg: Springer, 2016. P. 148–167.

40. *Шарый С. П.* Сильная согласованность в задаче восстановления зависимостей при интервальной неопределенности данных // Вычислительные технологии. 2017. Т. 22. № 2. С. 150–172.

41. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: ГИФМЛ, 1961. 407 с.

42. *Rohn J.* Systems of linear interval equations // Linear Algebra and its Applications. 1989. Vol. 126. P. 39–78.

43. *Barth W., Nuding E.* Optimale Lösung von Intervallgleichungssystemen // Computing. 1974. Vol. 12. N 2. P. 117–125. https://doi.org/10.1007/BF02260368

44. *Hansen E.* On linear algebraic equations with interval coefficients // Topics in Interval Analysis / ed. by E. Hansen. Oxford: Oxford University Press, 1969. P. 33–46.

45. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ / пер. с англ. А. Д. Иоффе, В. М. Тихомирова. М.: Мир, 1973. 469 с. (*Rockafellar R.* Convex analysis.)

Статья поступила в редакцию 3 октября 2020 г.
Статья принята к печати 4 июня 2021 г.

К о н т а к т н а я и н ф о р м а ц и я:

Носков Сергей Иванович — д-р техн. наук, проф.; sergey.noskov.57@mail.ru

Лакеев Анатолий Валентинович — д-р физ.-мат. наук, вед. науч. сотр.; lakeyev@icc.ru

PC-solutions and quasi-solutions of the interval system of linear algebraic equations

S. I. Noskov[1], *A. V. Lakeyev*[2]

[1] Irkutsk State Transport University, 15, ul. Chernyshevskogo, Irkutsk, 664074, Russian Federation
[2] Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 134, ul. Lermontova, Irkutsk, 664033, Russian Federation

For citation: Noskov S. I., Lakeyev A. V. PC-solutions and quasi-solutions of the interval system of linear algebraic equations. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 3, pp. 262–276. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.304 (In Russian)

The problem of solving the interval system of linear algebraic equations (ISLAEs) is one of the well-known problems of interval analysis, which is currently undergoing intensive development. In general, this solution represents a set, which may be given differently, depending on which quantifiers are related to the elements of the left and right sides of this system. Each set of solutions of ISLAE to be determined is described by the domain of compatibility of the corresponding system of linear inequalities and, normally, one nonlinear condition of the type of complementarity. It is difficult to work with them when solving specific problems. Therefore, in the case of nonemptiness in the process of solving the problem it is recommended to find a so-called PC-solution, based on the application of the technique known in the theory of multi-criterial choice, that presumes maximization of the solving capacity of the system of inequalities. If this set is empty, it is recommended to find a quasi-solution of ISLAE. The authors compare the approach proposed for finding PC- and/or quasi-solutions to the approach proposed by S. P. Shary, which is based on the application of the recognizing functional.

Keywords: interval system of linear algebraic equations, AE-solutions, PC-solution, quasi-solution, recognizing functional, problem of linear programming.

References

1. Kearfott R. B., Nakao M. T., Neumaier A., Rump S. M., Shary S. P., Hentenryck P. Standardized notation in interval analysis. *Computational Technologies*, 2010, vol. 15, no. 1, pp. 7–13. Available at: http://www.ict.nsc.ru/jct/getfile.php?id=1345 (accessed: June 27, 2021).

2. Shary S. P. *Konechnomerny intervalny analiz* [*Finite-dimensional interval analysis*]. Novosibirsk, XYZ Publ., 2020, 643 p. Available at: http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf (accessed: June 27, 2021). (In Russian)

3. Shary S. P. Algebraic solutions to interval linear equations and their applications. *Numerical Methods and Error Bounds. Proceedings of IMACS-GAMM International Symposium on Numerical Methods and Error Bounds.* Oldenburg, Germany, July 9–12, 1995. Eds by G. Alefeld, J. Herzberger. (Mathematical Research, vol. 89). Berlin, Akademie Verlag Publ., 1996, pp. 224–233. Available at: http://interval.ict.nsc.ru/shary/Papers/Herz.pdf (accessed: June 27, 2021).

4. Shary S. P. Outer estimation of generalized solution sets to interval linear systems. *Reliable Computing*, 1999, vol. 5, pp. 323–335. Available at: http://interval.ict.nsc.ru/shary/Papers/GOuter.pdf (accessed: June 27, 2021).

5. Shary S. P. Vneshneye otsenivaniye obobshennikh mnozhestv reshenyi intervalnikh lineynykh system [External assessment of generlized sets of solutions of interval linear systems]. *Vychislitelniye tekhnologii* [*Computational Terchnologies*], 1999, vol. 4, no. 4, pp. 82–110. (In Russian)

6. Oettli W., Prager W. Compatibility of approximate solution of linear equations with given error bounds for coefficients and right-hand sides. *Num. Math.*, 1964, vol. 6, pp. 405–409.

7. Oettli W. On the solution set of a linear system with inacurate coefficients. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1965, vol. 2, pp. 115–118.

8. Beeck H. Über structur und abschatzungen der loesungsmenge von linear gleichungssystemen mit intervall koeffizienten [About the structure and estimates of the set of solutions of systems of linear equations with interval coefficients]. *Computing*, 1972, vol. 10, pp. 231–244.

9. Rohn J. Interval linear systems. *Freiburger Intervall-Berichte.* Freiburg, Albert-Ludwigs-Universitaet Publ., 1984, no. 84/7, pp. 33–58.

10. Shary S. P. *O kharakterizatsii obyedinennogo mnozhestva reshenii intervalnoy lineynoy algebraicheskoy systemy* [*On characterization of an integrated set of solutions of an interval linear algebraic system*]. Deposited in VINITI, 1990, no. 726–891, 20 p. (In Russian)

11. Nuding E., Wilhelm J. Über Gleichungen und über Lösungen [About equations and about solutions]. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1972, vol. 52, pp. T188–T190.

12. Rohn J. Inner solutions of linear interval systems. *Interval Mathematics 1985.* Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag Publ., 1986, pp. 157–158. (Lecture Notes in Computer Science, vol. 212.)

13. Deif A. *Sensitivety analysis in linear systems.* Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag Publ., 1986, 224 p.

14. Neumaier A. Tolerance analysis with interval arithmetic. *Freiburger Intervall-Berichte.* Freiburg, Albert-Ludwigs-Universität Publ., 1986, no. 86/9, pp. 5–19.

15. Shaidurov V. V., Shary S. P. *Resheniye intervalnoy algebraicheskoy zadachi o dopuskakh.* Preprint VC Academii Nauk SSSR [*Solving an interval algebraic problem of tolerances.* Preprint of the Computing Center of USSR Acad. Sci.]. Krasnoyarsk, Acad. Sci. of USSR Press, 1988, no. 5, 27 p. (In Russian)

16. Shary S. P. O razreshimosti lineynoy zadachi o dopuskakh [On solvability of the linear problem of tolerances]. *Intervalniye vychisleniya* [*Interval Computations*], 1991, no. 1, pp. 92–98. (In Russian)

17. Khlebalin N. A., Shokin Yu. I. Intervalnii variant metoda modalnogo upravleniya [The interval variant of the method of modal control]. *Doklady Academii nauk SSSR* [*USSR Mathematical Papers*], 1991, vol. 316, no. 4, pp. 846–850. (In Russian)

18. Lakeyev A. V., Noskov S. I. Opisaniye mnozhestv resheniy lineynogo intervalnogo uravneniya v uporyadochennom prostranstve [Description of sets of solutions of linear interval equation in the ordered set]. *Sbornik trudov Mezhdunarodnoy konferentsii po intervalnym i stokhasicheskim metodam v nauke i tekhnike* [*Proceedings of the International conference on interval and stochastic methods in science and engineering*] (INTERVAL-92, September 22–26). Moscow, Moscow Energy Institute Publ., 1992, vol. 1, pp. 87–89. (In Russian)

19. Shary S. P. On controlled solution set of interval algebraic systems. *Interval Computations*, 1992, vol. 4 (6), pp. 66–75.

20. Shary S. P. Controllable solution sets to interval static systems. *Applied Mathematics and Computation*, 1997, vol. 86, no. 2–3, pp. 185–196.

21. Rohn J. E-mail letter to S. P. Shary and A. V. Lakeyev of November 18, 1995. Available at: http://www.cs.cas.cz/ rohn/publist/LettShaLak.ps (accessed: June 27, 2021).

22. Rohn J. *(Z, z)-solutions.* Technical Report no. 1159. Prague, Institute of Computer Science, Academy of Sciences of the Czech Republic Publ., 2012, 3 p. Available at: http://uivtx.cs.cas.cz/∼rohn/publist/zzsols.pdf (accessed: June 27, 2021).

23. Lakeyev A. V. Computational complexity of estimation of generalized solution sets for interval linear systems. *Vychislitelnye tekhnologii* [*Computational Terchnologies*], 2003, vol. 8, no. 1, pp. 12–23.

24. Khachiyan L. G. Polynomialniye algoritmy v lineynom programmirovanii [Polynomial algorithms in linear programming]. *Zhurnal vychislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki* [*Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*], 1980, vol. 20, no. 1, pp. 51–68. (In Russian)

25. Karmarkar N. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 1984, vol. 4, pp. 373–395. https://doi.org/10.1007/BF02579150

26. Lakeyev A. V., Noskov S. I. Opisaniye mnozhesva reshenii lineynogo uravneniya s intervalno zadannymi operatorom i pravoy chastyu [Description of a set of solutions for a linear equation with an interval given operator and a right-hand side]. *Doklady Akademii nauk USSR* [*USSR Mathematical Papers*], 1993, vol. 330 (4), pp. 430–433. (In Russian)

27. Lakeyev A. V., Noskov S. I. O mnozhestve reshenii lineynogo uravneniya s intervalno zadannymi operatorom i pravoy chastyu [On a set of solutions of a linear equation with an interval given operator and the right-hand side]. *Sibirskii Matematicheskii Zhurnal* [*Siberian Mathematical Journal*], 1994, vol. 35, no. 5, pp. 1074–1084. (In Russian)

28. Lakeyev A. V. On the computational complexity of the solution of linear systems with moduli. *Reliable Computing*, 1996, vol. 2, no. 2, pp. 125–131.

29. Noskov S. I. *Tekhnologiya modelirovanita obyektov s nestabilnym funktsionirovaniyem i neopredelennostyu v dannykh* [*A technology of modeling objects with unstable functioning and uncertainty in data*]. Irkutsk, Oblformpechat Press, 1996, 320 p. Available at: http://www.researchgate.net/publication/340570185 (accessed: June 27, 2021). (In Russian)

30. Noskov S. I. Tochechnaya kharakterizatsiya mnozhestv reshenyi intervalnikh system lineynikh algebraicheskikh uravnenii [Pointwise characterization of the sets of solutions of interval systems of linear algebraic equations]. *Informatsionnyiye tekhnologii i matematicheskoye modelirovaniye v upravlenii slozhnymi sistemami* [*Information Technologies and Mathematical Modeling in Control of Complex Systems*], 2018, no. 1 (1), pp. 8–13. (In Russian)

31. Vassilyev S. N., Seledkin A. P. Sintez funkcii effektivnosti v mnogokriterial'nyh zadachah prinyatiya reshenij [Synthesis of the function of efficiency in multi-criterion problems of decision making]. *Izvestiya Academii nauk USSR. Tekhnicheskaya kibernetika* [*Proceedings of USSR Academy of Sciences. Technical Cybernetics*], 1980, no. 3, pp. 186–190. (In Russian)

32. Noskov S. I., Protopopov V. A. Otsenka urovnya uyazvimosti obyektov transportnoy infrastruktury: Formalizovanni podhod [Assessment of the level of vulnerability of the objects of transport infrastructure: A formalized approach]. *Sovremenniye Tekhnologii. Sistemny Analiz. Modelirovaniye* [*Contemporary Technologies. Systems Analysis. Modeling*], 2011, no. 4 (32), pp. 241–244. (In Russian)

33. Cottle R. W., Pang J. H., Stone R. E. *The linear complementarity problem.* Boston, Academic Press, 1992, 761 p.

34. Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [*Methods for solving incorrect problems*]. Moscow, Nauka Publ., 1986, 288 p. (In Russian)

35. Tikhonov A. N., Goncharskij A. V., Stepanov V. V., Yagola A. G. *Regulyariziruyushiye algoritmy i apriornaya informatsiya* [*Regulating algorithms and a priori information*]. Moscow, Nauka Publ., 1983, 200 p. (In Russian)

36. Shary S. P. *O nekotorykh metodakh resheniya lineynoy zadachi o dopuskakh.* Preprint VC Academii Nauk SSSR [*On some methods of solving the linear problem of tolerances.* Preprint of the Computing Center of USSR Acad. Sci.]. Krasnoyarsk, USSR Acad. Sci. Publ., 1989, no. 6, 45 p. (In Russian)

37. Shary S. P. Resheniye intervalnoy lineynoy zadachi o dopuskakh [Solution of the linear problem of tolerances]. *Avtomatika i telemekhanika* [*Automatics and Telemechanics*], 2004, no. 10, pp. 147–162. (In Russian)

38. Shary S. P., Sharaya I. A. Raspoznavaniye razreshimosti intervalnikh uravneniy i yego prilozheniya k analizu dannykh [Recognition of solvability of interval equations and its applications to data analysis]. *Vychislitelniye tekhnologii* [*Computational Technologies*], 2013, vol. 18, no. 3, pp. 80–109. (In Russian)

39. Sharaya I. A., Shary S. P. Reserve of characteristic inclusion as recognizing functional for interval linear systems. *Scientific Computing, Computer Arithmetic, and Validated Numerics. 16th International Symposium (SCAN 2014).* Würzburg, Germany, September, 21–26, 2014. Revised selected papers. Eds by M. Nehmeier, J. W. von Gudenberg, W. Tucker. Heidelberg, Springer Publ., 2016, pp. 148–167.

40. Shary S. P. Silnaya soglasovannost v zadache vosstanovleniya zavisimostey pri intervalnoy neopredelennosti dannykh [Strong consistency in the problem of restoration of dependencies under interval data uncertainty]. *Vychislitelniye tekhnologii* [*Computational Technologies*], 2017, vol. 22, no. 2, pp. 150–172. (In Russian)

41. Vulikh B. Z. *Vvedeniye v teoriyu poluuporyadochennykh prostranstv* [*Introduction to the theory of semi-ordered spaces*]. Moscow, GIFML Press, 1961, 407 p. (In Russian)

42. Rohn J. Systems of linear interval equations. *Linear Algebra and its Applications*, 1989, vol. 126, pp. 39–78.

43. Barth W., Nuding E. Optimale Lösung von Intervallgleichungssystemen [Optimal solution of systems of interval equations]. *Computing*, 1974, vol. 12, no. 2, pp. 117–125. https://doi.org/10.1007/BF02260368

44. Hansen E. On linear algebraic equations with interval coefficients. *Topics in Interval Analysis.* Ed. by E. Hansen. Oxford, Oxford University Press, 1969, pp. 33–46.

45. Rockafellar R. *Vypukly analiz* [*Convex analysis*]. Moscow, Mir Publ., 1973, 469 p. (In Russian)

Received: October 03, 2020.
Accepted: June 04, 2021.

Authors' information:

Sergei I. Noskov — Dr. Sci. in Technics, Professor; sergey.noskov.57@mail.ru

Anatoly V. Lakeyev — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Chief Researcher; lakeyev@icc.ru