Санкт-Петербургский государственный университет
Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН
Институт прикладной астрономии РАН

П.А. Тараканов, А.В. Веселова, М.И. Волобуева,
В.В. Григорьев, М.В. Костина, Б.Б. Эскин

Задачи XXVIII Санкт-Петербургской Астрономической олимпиады

Санкт-Петербург
2021

Рецензенты:
доктор физ.-мат. наук, профессор Л.Л. Соколов (СПбГУ)
доктор физ.-мат. наук, профессор В.П. Пронин (РГПУ им. Герцена)

Печатается по постановлению
Учебно-методической комиссии по укрупненной группе направлений
и специальностей 03.00.00 «Физика и астрономия»

Тараканов П.А., Веселова А.В., Волобуева М.И.,
Григорьев В.В., Костина М.В., Эскин Б.Б.

Задачи XXVIII Санкт-Петербургской Астрономической олимпиады:
учебно-методическое пособие — СПб, 2021. — 106 с.

Сборник содержит задачи, предлагавшиеся на XXVIII Санкт-Петербургской Астрономической олимпиаде (2020–2021 учебный год) и решения задач. Сборник может быть использован как для углубленного изучения астрономии в средней школе (в том числе для подготовки к олимпиадам различных уровней), так и в рамках курса «Общая астрономия» студентов Астрономического отделения СПбГУ и других университетов, ведущих подготовку астрономов или учителей физики и астрономии.

1 Введение

В 1993 году в Санкт-Петербурге прошла первая экспериментальная городская олимпиада по астрономии. Она была настолько экспериментальной, что даже не получила порядкового номера. Правила ее проведения сильно отличались от последующих олимпиад, в частности не было разделения по возрастным группам.

Следующая олимпиада — 1994 года — проводилась уже по правилам, которые в своей основе сохранились до настоящего времени. Школьникам было предложено пять заданий, разбитых на две группы: для 8–9 и 10–11 классов. В 1995 году впервые появились задания для 6 и 7 классов, которые впоследствии стали обязательной составной частью олимпиад, а в 2009 году появилась и параллель 5 класса.

Олимпиада развивалась, увеличивалось количество участников олимпиады. Это привело к необходимости предварительного отбора участников, и к концу 90-х годов появился заочный отборочный (а затем, с 2010 года, и очный) тур, задача которого состояла в предварительном отборе участников теоретического тура олимпиады.

Постепенно сформировались традиции Санкт-Петербургской астрономической олимпиады. Среди этих традиций — задачи, максимально приближенные к реальной работе астронома, желательно на основе реальных астрономических событий и данных, составление практически непересекающихся комплектов заданий для различных возрастных параллелей, причем только «собственного производства». На Санкт-Петербургской астрономической олимпиаде запрещается пользоваться калькуляторами, чтобы приучать школьников проводить оценочные расчеты и корректно учитывать точность используемых данных.

С 2003 года олимпиада стала открытой, в ней начали принимать участие школьники из различных регионов РФ, а затем и других стран. Начиная с 2010 года туры олимпиады проводятся одновременно во многих городах. В последние годы олимпиада проходит примерно на 50 площадках в различных регионах России и 12 других стран.

Предлагаемые на Санкт-Петербургской астрономической олимпиаде задачи, как правило, обладают некоторыми специфическими особенностями. Первой особенностью является необычно большая доля задач астрофизической тематики, в том числе и тех разделов, которые, как правило, в традиционных курсах астрономии для школ и кружков практически не рассматриваются (физика межзвездной среды, космология, радиоастрономия и т.д.). В целом от участника олимпиады требуется не только умение решать задачи по астрономии «классического» типа, но и широкие знания по всем разделам астрономии и умение этими знаниями пользоваться.

Еще одной особенностью является необходимость оценки промежуточных данных, нужных для решения задач. Как правило, участникам олимпиады сообщаются только те числовые данные, которые школьники заведомо не могут оценить или получить из других известных им величин (по крайней мере, за отведенное на решение задач время). Основные физические константы также считаются известными участникам.

Как правило, задачи олимпиады требуют для решения повышенного уровня знаний по физике и математике. Например, уравнение, получившееся в процессе решения задачи, может оказаться нетривиальным, и для его решения потребуется либо воспользоваться каким-либо «олимпиадным» математическим приемом, либо аккуратно упростить его, воспользовавшись физически корректным приближением. В силу специфики предмета олимпиады необходимые дополнительные знания по физике и математике нередко выходят даже за пределы «классической» тематики физических и математических олимпиад. В качестве примеров можно упомянуть физику излучения (в т.ч. и квантовую), ядерную физику, некоторые разделы математического анализа и геометрии, теорию погрешностей и т.д.

По сложившейся традиции какими-либо вычислительными средствами (калькуляторами и т.п.) на заключительном этапе олимпиады (теоретическом и практическом турах) пользоваться запрещено, однако на олимпиадах практически отсутствуют задачи, решить которые без трудоемких вычислений невозможно. В то же время иногда встречаются задачи, существенным элементом решения которых является нахождение эффективных методов получения численного ответа.

На каждом из туров, кроме практического, участникам предлагается решить по 5 задач. На решение задач очного отборочного тура отводится 3 часа, при этом можно пользоваться калькуляторами, но не справочными данными и литературой. Заочный отборочный тур проводится в форме теста, при выполнении его заданий можно пользоваться любыми данными и любой вычислительной техникой.

На турах заключительного этапа — теоретическом и практическом — запрещены уже любые справочные данные и вычислительная техника. На решение 5 задач теоретического тура у участников есть 4 часа, на практическом туре, продолжающемся 2.5 часа, в каждой параллели предлагается одна (иногда две) задачи, связанных с обработкой наблюдательных данных, их интерпретацией, разработкой методов наблюдений и т.п.

<table>
<tr><th rowspan="2">Туры</th><th colspan="7">Класс</th></tr>
<tr><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th>8</th><th>9</th><th>10</th><th>11</th></tr>
<tr><td>очный отборочный</td><td colspan="3">1–5</td><td colspan="2">6–10</td><td>11–15</td><td>16–20</td></tr>
<tr><td>заочный отборочный</td><td colspan="2">21–25</td><td colspan="2">26–30</td><td>31–35</td><td>36–40</td><td>41–45</td></tr>
<tr><td>теоретический</td><td colspan="2">45–50</td><td colspan="2">51–55</td><td>56–60</td><td>61–65</td><td>66–70</td></tr>
<tr><td>практический</td><td colspan="2">71</td><td colspan="2">72</td><td>73</td><td>74</td><td>75</td></tr>
</table>

В таблице указано, на каком из туров и каким классам предлагались задачи, включенные в сборник. По традиции задачи для младших возрастных параллелей общие для двух (иногда трех) классов, однако итоговый конкурс является раздельным и места победителей и призеров присуждаются в каждом классе отдельно.

В разделе 2 сборника для удобства самостоятельной работы с ним приведены только условия задач, раздел 3 содержит как условия, так и решения задач.

Авторами задач, включенных в сборник, являются А.В. Веселова, М.И. Волобуева, А.П. Гордеев, В.В. Григорьев, В.А. Дмитриев, В.Б. Игнатьев, М.В. Костина, И.Д. Маркозов, П.А. Тараканов.

2 Условия задач

Задача № 1

В каком направлении нужно смотреть, чтобы увидеть первый восход Солнца после полярной ночи в Арктике? Поясните свой ответ.

Задача № 2

27 ноября 1947 года родился замечательный советский писатель Григорий Бенционович Остер. В какой день недели он родился?

Задача № 3

Американский аппарат MESSENGER, исследовавший поверхность Меркурия, вышел на орбиту вокруг планеты 18 марта 2011 года. 30 апреля 2015 года он завершил свою миссию и врезался в поверхность Меркурия. За время, пока аппарат кружился вокруг Меркурия, он прислал на Землю около 277 тысяч снимков поверхности. Через какой промежуток времени (в среднем) MESSENGER делал фотографии?

Задача № 4

Начинающий петербургский астроном внёс в дневник наблюдений следующую запись: «Луна хорошо была видна в предрассветные часы. Половина её диска была освещена, неподалёку были видны Плеяды, Альдебаран же наблюдался в непосредственной близости от Луны». В каком месяце проводились наблюдения? Поясните свой ответ.

Задача № 5

Туманность Вуаль, находящаяся в Лебеде, является результатом вспышки Сверхновой, произошедшей примерно 7500 лет назад. На данный момент ее угловой диаметр составляет 3°. Определите когда эта туманность была на небе размером с Луну, если считать, что она расширялась равномерно. Можно ли наблюдать прохождение Луны по этой туманности?

Задача № 6

Звезда Рукбах в некоторый момент в Петербурге оказалась в зените. На какой высоте над горизонтом ее можно будет наблюдать через 12 часов?

Задача № 7

Приведите примеры типов астрономических объектов (достаточно одного в каждом случае), которые:

A) называют в честь первооткрывателей;
B) первооткрыватели называют в честь кого-то другого;
C) называют по направлению, в котором объект виден;
D) называют по времени, когда объект обнаружен.

Задача № 8

Параллакс звезды μ Зайца составляет $0''.022$ (22 тысячных угловой секунды). На угловом расстоянии $0''.93$ от этой звезды было зарегистрировано рентгеновское излучение. Каково может быть минимальное расстояние между μ Зайца и источником рентгеновского излучения?

Задача № 9

В вымышленной планетной системе "Nonordinaria" вокруг звезды типа Солнца по круговым орбитам в одной плоскости и в одном направлении вращаются две планеты. Радиус орбиты планеты земного типа равен 1 астрономической единице, радиус орбиты планеты-гиганта равен 3 а.е. Жители одной из планет отмечают «Праздник гармонии светил» каждый раз, когда другая планета оказывается на небе в направлении, противоположном местному Солнцу. Сколько земных суток проходит между праздниками?

Задача № 10

Некоторая переменная звезда, чей блеск меняется строго периодически, достигла максимума блеска 3 августа 2020 г. в 14:10. Затем 4 августа в 21:15 был зарегистрирован минимум блеска этой звезды. Следующий максимум пронаблюдать не удалось, но 9 августа в 1:35 был зарегистрирован очередной минимум этой звезды. В максимуме или в минимуме блеска была звезда 16 августа и в какое время это произошло?

Задача № 11

Цефеиды — это пульсирующие переменные звезды, период которых однозначно связан с их светимостью (максимальной или средней за период). Цефеиды II типа слабее классических цефеид того же периода пульсации на 1.6 звёздной величины. Астроном при определении расстояния до цефеиды II типа по ошибке воспользовался соотношением «период–светимость» для классических цефеид. Завысил или занизил он при этом расстояние до цефеиды и во сколько раз?

Задача № 12

Самая быстро вращающаяся вокруг своей оси нормальная звезда, известная астрономам, имеет массу 25 масс Солнца и скорость вращения на экваторе

$2 \cdot 10^6$ км/час. Оцените экваториальный радиус этой звезды. Масса Солнца равна $2 \cdot 10^{30}$ кг.

Задача № 13

Метеорный поток Леониды имеет чётко выраженный период активности, равный 33 годам. Чему равна большая полуось орбиты кометы, его породившей?

Задача № 14

Фридрих Бессель предложил отмечать некое событие тогда, когда прямое восхождение Солнца оказывается равным в точности $18^h 40^m$. Определите примерную дату события. Что именно предполагалось таким образом отмечать?

Задача № 15

Астероид Халва обращается вокруг Солнца по орбите с большой полуосью 2.5 а.е. и эксцентриситетом 0.23. На какое минимальное расстояние этот астероид приближается к Земле? С какой скоростью относительно Земли он при этом движется? Наклон орбиты астероида к плоскости эклиптики и эксцентриситет орбиты Земли считайте равными нулю.

Задача № 16

Взрыв сверхновой произошёл ровно 10 суток назад. Наблюдения показали, что скорость оболочки сверхновой на уровне фотосферы равна 10^4 км/с, а эффективная температура фотосферы 10^4 К. Считая, что фотосфера расширяется с постоянной скоростью, оцените светимость сверхновой в момент наблюдений.

Задача № 17

В проводившемся в конце XIX и начале XX века международном проекте “Carte du Ciel” предполагалось получить фотографии всего неба с помощью размещенных в разных странах 20 однотипных телескопов-астрографов. При однократной экспозиции на фотопластинке получалось изображение квадратной области неба размером $2^\circ \times 2^\circ$, для исключения возможных ошибок каждая область неба снималась сначала дважды с экспозицией по 6 минут, а потом, на второй стадии проекта — трижды с экспозицией по 20 минут. Оцените минимально необходимое для выполнения проекта число фотопластинок, а также минимально возможную продолжительность выполнения проекта, считая, что в течение одной ночи наблюдать можно в среднем в течение 6 часов, а на наведение телескопа, установку и снятие пластинки и т.п. для одной съемки уходит 2 минуты.

Задача № 18

Звезда S2 движется вокруг чёрной дыры в центре нашей Галактики с периодом 16 лет. В момент наибольшего сближения она оказывается на расстоянии 120 а.е. от чёрной дыры. Оцените её скорость в этот момент, если известно, что масса черной дыры составляет $4.3 \cdot 10^6$ масс Солнца.

Задача № 19

Во время зимы в северном полушарии Марса снеговая полярная шапка может доходить до широты $55°$. Оцените площадь поверхности планеты, которую покрывает снег в это время. Радиус Марса составляет $3.4 \cdot 10^3$ км.

Задача № 20

Видимый поперечник звездного скопления составляет $13'$, видимая звездная величина 9^m, диаметр скопления равен 6 пк. Считая, что в скоплении содержится 10^3 звезд, похожих на Солнце, оцените поглощение света в звездных величинах на 1 кпк в направлении на скопление.

Задача № 21

Астероид (518) Халва вращается вокруг Солнца, совершая полный оборот за 4.03 земных года. Вокруг своей оси астероид совершает оборот за 14.3 часа. Определите продолжительность года на астероиде в единицах суток на астероиде.

Задача № 22

Выберите созвездия, в которых Луна может находиться при наблюдении с Земли.

1. Кит
2. Орион
3. Дева
4. Лебедь
5. Южная Корона
6. Северная Корона

Задача № 23

Спутник некоторой экзопланеты находится в 2 раза ближе к своей планете, чем Луна к Земле, и имеет период обращения в 6 раз меньший, чем период обращения Луны вокруг Земли. Во сколько раз орбитальная скорость этого спутника больше орбитальной скорости Луны?

Задача № 24

Выберите верные утверждения о наблюдениях с поверхности Земли объектов в Солнечной системе.

1. Венера не может быть выше всего над горизонтом в полночь.
2. Если Венера наблюдается в созвездии Девы, то Меркурий может находиться в созвездии Овна.
3. Марс и Юпитер могут находиться в противоположных точках неба для земного наблюдателя.
4. Полная Луна может закрыть Меркурий.
5. Юпитер и Меркурий можно увидеть невооружённым глазом.
6. Луна в фазе третьей четверти может закрыть Сатурн.

Задача № 25

Вам предлагается несколько утверждений. Для каждого из них выберите, согласны Вы с ним («да») или нет («нет»), можно также выбрать вариант «не знаю».

1. В Южном полушарии Земли Солнце движется с запада на восток.
2. Обратная сторона Луны никогда не освещается Солнцем.
3. В один календарный месяц может случиться два полнолуния.
4. Сириус не является самой яркой звездой Северного полушария.
5. В том календаре, по которому мы сейчас живём, каждый четвертый год — високосный.

Задача № 26

По одной из оценок радиус звезды Вольфа–Райе WR 142 равен 80% радиуса Солнца, а масса в 28 раз превышает солнечную. Во сколько раз плотность WR 142 больше плотности Солнца?

Задача № 27

Два пункта наблюдения находятся на широте 60 градусов и имеют долготы: первый — 30 градусов восточной долготы, второй — 60 градусов восточной долготы. Выберите верные утверждения.

1. Расстояние между ними равно приблизительно 3333 км.
2. Во втором пункте Солнце достигнет максимальной высоты над горизонтом на 2 часа раньше, чем в первом пункте.
3. Во втором пункте Солнце достигнет минимальной высоты под горизонтом на 2 часа позже, чем в первом пункте.
4. Максимальные высоты Солнца над горизонтом в двух пунктах будут отличаться не более, чем на 0.5 градуса.
5. Во втором пункте Солнце находится над горизонтом на 12 минут дольше, чем в первом пункте.
6. Различие продолжительности светлого времени суток в двух пунктах не превышает 15 минут.

Задача № 28

Во сколько раз отличаются максимальный и минимальный угловой диаметр Венеры при наблюдении с Земли? Орбиты обеих планет считать круговыми и лежащими в одной плоскости, радиус орбиты Венеры равен 0.72 астрономической единицы.

Задача № 29

Выберите верные утверждения об объектах Солнечной системы.

1. Для наблюдателя на Марсе Земля никогда не окажется в противоположной с Солнцем точке неба.
2. Видимые размеры Марса для земного наблюдателя меняются в течение нескольких лет не менее чем в 3 раза.
3. С Меркурия невозможно увидеть Землю невооружённым глазом.
4. Для наблюдателя на Венере Луна и Земля не удаляются друг от друга более чем на 2 угловые минуты.
5. Не наблюдаются астероиды, чья орбита полностью лежит внутри земной орбиты.
6. Наблюдаются астероиды, движущиеся по орбите Юпитера.

Задача № 30

Вам предлагается несколько утверждений. Для каждого из них выберите, согласны Вы с ним («да») или нет («нет»), можно также выбрать вариант «не знаю».

1. Впервые после новолуния Луну можно заметить вечером.
2. Луна не вращается вокруг своей оси.
3. При центральном солнечном затмении Луна закрывает сначала западную часть диска Солнца.
4. В некоторых местах на Земле Солнце можно увидеть как на севере, так и на юге.
5. Через несколько тысяч лет на полюсах Земли перестанут происходить полярные дни и ночи.
6. Сириус — звезда Южного полушария, поэтому в Петербурге она не видна.

Задача № 31

13 марта некоторого года Марс оказался в противостоянии, а 31 марта того же года в противостоянии оказался Уран. Оцените угловое расстояние между Марсом и Ураном 13 марта.

Задача № 32

Околоземный спутник обращается вокруг Земли по круговой орбите с периодом 15 часов. Выберите верные утверждения.

1. Скорость движения спутника по орбите приблизительно равна 3.6 километров в секунду.
2. Радиус орбиты равен примерно 25 тысяч километров.
3. При наклоне орбиты 20 градусов максимальное отклонение спутника от плоскости экватора не более 28 тысяч километров.
4. Спутник можно наблюдать с северного полюса при любом наклоне орбиты.
5. Спутник будет проходить через зенит в некотором пункте на экваторе.
6. Наименьшая высота спутника над поверхностью Земли не менее 18 тысяч километров.

Задача № 33

21 декабря 2020 года планеты Юпитер (видимая звездная величина -2^m) и Сатурн (видимая звездная величина $+0.6^m$) окажутся на небе очень близко друг к другу. Объектом какой звездной величины они покажутся любителю астрономии с плохим зрением, который будет видеть их как один объект?

Задача № 34

В некотором пункте с широтой 30 градусов северной широты и 45 градусов восточной долготы наблюдается звезда со склонением -40 градусов. Выберите верные утверждения.

1. Звезда является невосходящей для этого пункта.
2. Звезда находится над горизонтом менее 24 часов.
3. Звезда находится над горизонтом менее 12 часов.
4. С южного полюса эта звезда не видна.
5. Наибольшая высота звезды над горизонтом лежит в интервале от 15 до 25 градусов.
6. Звезда является незаходящей для этого пункта.

Задача № 35

Вам предлагается несколько утверждений. Для каждого из них выберите, согласны Вы с ним («да») или нет («нет»), можно также выбрать вариант «не знаю».

1. С Земли можно увидеть более половины поверхности Луны.
2. Чем больше площадь объектива телескопа, тем более тусклые объекты он позволяет увидеть.
3. В день летнего солнцестояния в Петербурге угловой размер Солнца близок к минимальному.
4. Скорость столкновения Земли с астероидами Солнечной системы может достигать 100 километров в секунду.
5. В созвездии Большой Медведицы наблюдается больше далёких галактик, чем в созвездии Стрельца.
6. Незадолго до солнечного затмения Луну можно наблюдать утром перед рассветом.
7. На Земле существует место, где Солнце восходит в точке запада.

Задача № 36

Бетельгейзе в среднем имеет видимую звездную величину $+0^m.6$ и излучает только 12% энергии в видимом диапазоне спектра. Остальное в основном приходится на инфракрасный диапазон. Оцените, какой была бы средняя видимая звездная величина Бетельгейзе, если бы человеческий глаз мог бы видеть не только в оптическом, но и в инфракрасном диапазоне.

Задача № 37

Некоторая комета обладает большой полуосью орбиты 60 а.е. Выберите верные утверждения.

1. Комета может удалиться от Солнца на 130 а.е.
2. В афелии скорость кометы может быть равна 5 км/с.
3. Период обращения кометы составляет около 465 лет.
4. Комета может приблизиться к Солнцу на 0.5 а.е.
5. Комета может пересечь орбиту Земли.
6. Скорость кометы на расстоянии 1 а.е. от Солнца может равняться 60 км/с.

Задача № 38

Спутник некоторой экзопланеты, находясь почти на таком же расстоянии от планеты, как и Луна от Земли, имеет период обращения в 5 раз меньший, чем период обращения Луны вокруг Земли. Во сколько раз масса этой экзопланеты больше массы Земли?

Задача № 39

В двойной звезде радиус первой компоненты равен 2.3 радиуса Солнца, второй — 3 радиуса Солнца. Температура первой равна 12500 K, температура второй — 4500 K. Выберите верные утверждения.

1. В телескоп с апертурой 25 см вторую компоненту можно увидеть глазом с расстояния 500 парсеков.
2. Абсолютная звездная величина второй звезды равна примерно +2.1.
3. Отношение светимости первой компоненты к светимости второй приблизительно равно 30.
4. Когда двойная при наблюдении в телескоп не разрешается, то её эффективная температура составит 17 000 K.

5. С расстояния в 20 парсеков первая компонента наблюдается как объект примерно 1.2 звёздной величины.

6. Первая звезда относится к спектральному классу B.

Задача № 40

Вам предлагается несколько утверждений. Для каждого из них выберите, согласны Вы с ним («да») или нет («нет»), можно также выбрать вариант «не знаю».

1. Большой наклон орбиты тела к плоскости эклиптики однозначно свидетельствует о том, что тело не принадлежит Солнечной системе.

2. Увеличение изображения в телескопе зависит от параметров окуляра.

3. При покрытии звёзд Луной они скрываются за восточной частью её диска.

4. В конце своей жизни звёзды превращаются либо в чёрную дыру, либо в белый карлик.

5. В день летнего солнцестояния в Петербурге наблюдается самый ранний (по московскому времени) восход Солнца.

6. Красные звёзды холоднее голубых.

7. Все спутники Земли на круговых орбитах двигаются с одной и той же скоростью — первой космической.

Задача № 41

Оцените величину поглощения на луче зрения от Солнца до рассеянного скопления, если радиус скопления равен 7 световым годам, угловой диаметр равен $6'$. Видимая звездная величина скопления равна $+8^m$, а абсолютная звёздная величина равна -6^m.

Задача № 42

Галактика обладает космологическим красным смещением 0.02, а видимый угловой диаметр её равен $1'$. Выберите верные утверждения.

1. В телескоп с диаметром зеркала 15 см принципиально возможно увидеть отдельные детали галактики.

2. Галактика приближается к наблюдателю со скоростью 6 тысяч км/с.

3. Для земного наблюдателя видимая звездная величина галактики может быть ярче -1^m.

4. Линейный диаметр галактики лежит в интервале от 20 до 30 кпк.

5. Расстояние до галактики лежит в интервале от 78 до 92 Мпк.

6. Если галактика находится в направлении созвездия Стрельца, то ее может не быть видно при наблюдении в оптическом диапазоне.

Задача № 43

Определите максимальную элонгацию астероида 2020 AV2 при наблюдении с Земли, если большая полуось его орбиты равна 0.555 а.е., а эксцентриситет равен 0.177. Орбиту Земли считайте круговой.

Задача № 44

Некоторая звезда имеет радиус 44 радиуса Солнца и массу 2.5 массы Солнца. Выберите верные утверждения.

1. Температура такой звезды может составлять 38000 К в течение 5 миллионов лет.

2. Средняя плотность звезды равна 0.04 килограммов на кубический метр.

3. Планета с большой полуосью орбиты 2 а.е. не может иметь эксцентриситет орбиты больше 0.95.

4. Звезда не может вращаться с периодом меньше 1 месяца.

5. Вокруг такой звезды может вращаться планета с орбитальным периодом 13 суток.

6. Звезда не может вращаться с периодом больше 1 года.

Задача № 45

Вам предлагается несколько утверждений. Для каждого из них выберите, согласны Вы с ним («да») или нет («нет»), можно также выбрать вариант «не знаю».

1. Через несколько тысяч лет список зодиакальных созвездий изменится.

2. Некоторые галактики называют неправильными из-за аномального химического состава.

3. Закон Хаббла выполняется не для всех галактик.

4. Солнце выглядит жёлтым из-за влияния земной атмосферы, на самом деле оно голубоватое.

5. Плотность чёрной дыры может быть меньше плотности воды.
6. Луна вызывает прилив не только на обращённой к ней стороне Земли, но и на противоположной.
7. Разрешающая способность сколь угодно большого наземного телескопа с простым зеркалом примерно равна разрешающей способности небольшого любительского телескопа.

Задача № 46

Начинающий петербургский астроном Вася ночью 28 июля 2018 года увидел недалеко от полной Луны довольно яркий красно-оранжевый объект. Вася утверждает, что это был Альдебаран, а его друг Аркадий — что это был Марс. Взглянув в компьютерный планетарий, мальчики убедились, что один из них был прав. Кто же был прав и почему?

Задача № 47

В книгах по истории культуры иногда встречается утверждение, что великий испанский писатель Мигель де Сервантес и великий английский драматург Уильям Шекспир умерли в один день — 23 апреля 1616 года. Однако хотя в день смерти каждого из них на календаре действительно была эта дата, в реальности один из них пережил другого. Кто именно умер позже и на сколько дней?

Задача № 48

В записках одного юного путешественника начинающий астроном Вася прочитал такие строки: «Море спокойно, и Орион погружается в его тёплые воды, согретые жарким июльским солнцем. Я могу ещё долго любоваться красотой звёздного неба, ведь солнце взойдёт лишь спустя шесть часов». Вася догадался, что путешественник допустил ошибку в своём описании. Объясните, почему описанной ситуации не могло быть.

Задача № 49

Вокруг горячего белого карлика WDJ0914+1914 обращается планета с массой Нептуна (10^{23} тонн). Так как белый карлик очень горячий, а планета расположена близко к нему, то атмосфера планеты потихоньку испаряется со скоростью 3300 тонн за секунду. Подсчитано, что через 350 миллионов лет белый карлик остынет до такой степени, что планета перестанет испаряться. Оцените, на сколько процентов своей массы «похудеет» планета за это время?

Задача № 50

Школьник Вася на осенних каникулах, длившихся с 26 октября по 1 ноября включительно, увидел полную Луну. Может ли он увидеть полную Луну в этом же учебном году на весенних каникулах, если они длятся с 22 марта по 28 марта (также включительно)?

Задача № 51

Будем считать, что большинство звёзд Млечного Пути расположено в диске с характерным диаметром 100 тысяч световых лет и толщиной около 3 тысяч световых лет. Общая масса диска составляет около $4 \cdot 10^{10}$ масс Солнца. Во сколько раз средняя концентрация звёзд диска меньше средней концентрации звезд шарового скопления с диаметром 150 световых лет и общей массой $4 \cdot 10^6$ масс Солнца.

Задача № 52

Найдите лишний по двум разным критериям объект в списке: Сириус, Арктур, Альдебаран, Поллукс. Объясните свой выбор.

Задача № 53

Уфологи бьют тревогу — загадочный радиосигнал зафиксирован вновь! Но если три года назад расстояние до его источника оказалось равным шести тысячам световых лет, сейчас источник оказался на расстоянии всего полторы тысячи световых лет. Вторжение «гостей» из далекого космоса неизбежно и неотвратимо! Считая, что источник у сигналов и правда один и тот же и что он движется к Земле по прямой с постоянной скоростью, определите, сколько у человечества осталось времени, чтобы устроить «гостям» торжественный прием.

Задача № 54

Петербургскому астроному в ночь с 17 на 18 сентября необходимо пронаблюдать четыре звезды: α Орла, α Волопаса, ζ Тельца, θ Водолея. В каком порядке их удобнее наблюдать в моменты их лучшей видимости в эту ночь и почему?

Задача № 55

Для получения изображения Hubble Deep Field South камере WFPC2 потребовалась суммарная экспозиция продолжительностью 99300 секунд при наблюдении на длине волны 606 нанометров. Размеры области неба — 2.5×2.5 угловой минуты. Сколько лет потребовалось бы для съемки всего неба?

Задача № 56

В далекой галактике произошла мощная вспышка, в результате которой выделилось 10^{55} Дж энергии. Предполагая, что эта вспышка явилась результатом падения вещества на центральную чёрную дыру, оцените количество звезд, похожих на Солнце, которые должны были бы упасть на чёрную дыру при этом. Можно считать, что при падении в виде излучения выделяется половина энергии покоя аккрецирующей массы (энергия покоя E_0 массы M равна $E_0 = Mc^2$, где c — скорость света).

Задача № 57

В конце декабря начинающий астроном из Санкт-Петербурга пронаблюдал звезду Миру Кита ($\delta = -3^\circ$) вблизи максимума блеска за два часа до ее кульминации. Он сразу же сообщил своему другу из села Хатанга (72° с.ш., $102^\circ.5$ в.д.) о своем наблюдении. Может ли наблюдатель из Хатанги увидеть Миру в течение получаса после наблюдения из Петербурга?

Задача № 58

Пять лет назад японская орбитальная обсерватория «Хитоми» разрушилась на орбите из-за ошибки системы ориентации, которая заставила обсерваторию слишком быстро вращаться вокруг своей оси. Оцените период вращения, при котором обсерватория стала разрушаться, если известно, что ее длина составляла 14 м.

Задача № 59

Вокруг белого карлика по круговой орбите обращается экзопланета, период обращения равен 1/60 орбитального периода Меркурия. Известно, что радиус белого карлика равен радиусу Земли, а средняя плотность равна $9 \cdot 10^8$ кг/м^3. Могла ли планета существовать на этой орбите в то время, когда звезда еще была красным гигантом? Можно считать, что масса красного гиганта была вдвое больше массы белого карлика.

Задача № 60

В некоторой планетной системе масса центральной звезды составляет 4 массы Солнца. Вокруг звезды по круговой орбите радиуса 4 а.е. вращается планета массой $3 \cdot 10^{24}$ кг. На расстоянии 400 тысяч километров от центра планеты по круговой орбите в той же плоскости вращается спутник радиусом 800 км. Определите период повторения фаз спутника для наблюдателя на планете.

Задача № 61

Капелла — тесная двойная звезда, состоящая из почти одинаковых компонент. Впервые уверенно разрешить её компоненты без использования интерферометра удалось только при наблюдениях на телескопе Хаббла в ультрафиолетовом диапазоне на длине волны 3000 Å. Оцените угловое расстояние между компонентами. Диаметр зеркала телескопа Хаббла равен 2.4 метра.

Задача № 62

Астероид радиусом 50 метров в некоторый момент времени находился на расстоянии 0.866 а.е. от Солнца и при наблюдении с Земли угол между астероидом и Солнцем составлял 60°. Оцените видимую звездную величину астероида в этот момент. Возможно ли наблюдать его в телескоп с диаметром объектива 50 см? Оптические свойства поверхности астероида такие же, как у Луны.

Задача № 63

Двойная система состоит из звезды с максимальным радиусом 0.10 а.е. и белого карлика, находящегося на расстоянии 0.14 а.е. от центра основного компонента. Масса белого карлика равна массе Солнца, с основного компонента на карлик идет аккреция вещества с небольшой скоростью. Оцените среднюю плотность основного компонента системы.

Задача № 64

При наблюдениях двойной системы, состоящей из нейтронной звезды массой 1.4 массы Солнца и звезды главной последовательности, были обнаружены рентгеновские пульсации со средним периодом 1 секунда, отклоняющиеся от него максимум на 10^{-4} секунды. При этом спектральные наблюдения в оптическом диапазоне показали, что линия H_α также периодически меняет длину волны, отклоняясь от среднего значения максимум на 0.5 Å. Оцените светимость такой системы в оптическом диапазоне.

Задача № 65

Звезда Гиаусар (λ Дракона) имеет координаты $\delta = 69°20'$ и $\alpha = 11^h31^m$. Ее видимая звездная величина без атмосферы равна $3^m.8$. Как зависит видимая звездная величина звезды от часового угла при наблюдениях в Мурманске? Широта города $\varphi = 68°58'$.

Задача № 66

Геостационарный спутник потребовалось перевести на новую орбиту с помощью двухимпульсного перехода. Предполагалось, что первый импульс придаёт спутнику добавку скорости 10%, а второй импульс через половину периода промежуточной орбиты уменьшает скорость на 10%. Но что-то пошло не так и импульсы поменяли местами. Определите разность орбитальных периодов предполагавшейся и реально получившейся новых орбит.

Задача № 67

Известен анекдот:

> Стоим с сестрой вечером на улице, любуемся на Сириус — самую яркую звезду ночного неба. Я ей говорю:
>
> — Давай поближе подойдём, чтобы лучше видно было.
>
> И мы пошли. Секунд через 30 до неё дошло.

Допустим, дело происходит на широте $+28^\circ$ в новогоднюю полночь, пешеходы перемещаются со скоростью 1 м/с. Оцените изменение видимой звездной величины Сириуса. Координаты Сириуса $\alpha = 6^h 45^m$, $\delta = -17^\circ$.

Задача № 68

Вокруг звезды главной последовательности с массой 2 массы Солнца по круговой орбите с периодом 4 года обращается планета земных размеров с разреженной атмосферой, совершающая оборот вокруг своей оси, перпендикулярной плоскости орбиты, за 20 часов. На экваторе этой планеты находится научная станция, для нужд которой рядом с ней была установлена солнечная батарея площадью 100 м^2 и эффективностью 10%. Батарея покоится на поверхности планеты и расположена в горизонтальной плоскости. Какое количество энергии за сутки производит батарея?

Задача № 69

В одном и том же направлении на небе наблюдаются звезда и шарообразная однородная туманность, причем туманность подсвечивается звездой. Известно, что интегральная видимая звездная величина туманности и видимая звездная величина звезды совпадают и равны $5^m.7$, расстояние до звезды равно 0.31 кпк, абсолютная звездная величина звезды равна $-2^m.5$. Оцените расстояние между центром туманности и звездой. Что из них находится ближе к нам?

Задача № 70

Аккрецирующая нейтронная звезда имеет светимость 10^{30} Вт, массу 1.4 $\mathfrak{M}_\odot$ и радиус 10 км. Измерения спектра нейтронной звезды показали наличие циклотронной линии с энергией фотонов 30 кэВ (частота излучения соответствует частоте вращения электрона в магнитном поле), гравитационное красное смещение уже учтено. Известно, что на границе магнитосферы динамическое давление падающего вещества уравновешивается давлением магнитного поля. Считая аккрецию сферически-симметричной и учитывая, что циклотронная линия образуется около поверхности звезды, а индукция магнитного поля зависит от расстояния до центра звезды как $B \propto r^{-3}$, оцените радиус магнитосферы для этой звезды. Давление магнитного поля можно найти по формуле $p = \kappa B^2$, где $\kappa = 4 \cdot 10^5$ Па/Тл^2.

Задача № 71

При наблюдении Юпитера и трех его галилеевых спутников с четвертого (Каллисто) был получен снимок, на котором изображения спутников (слева направо — Ио, Ганимед, Европа) заменены черными кружками.

У Юпитера освещена ровно половина видимого диска. Нарисуйте в увеличенном масштабе видимые диски трех спутников и изобразите на них освещенные части дисков, которые в этот момент мог увидеть наблюдатель с Каллисто. Известно, что радиус Юпитера составляет 70 тыс. км, орбиты всех четырех спутников круговые, находятся в одной плоскости, их радиусы указаны в таблице ниже.

Спутник	Радиус орбиты в тыс. км
Ио	420
Европа	670
Ганимед	1070
Каллисто	1880

Задача № 72

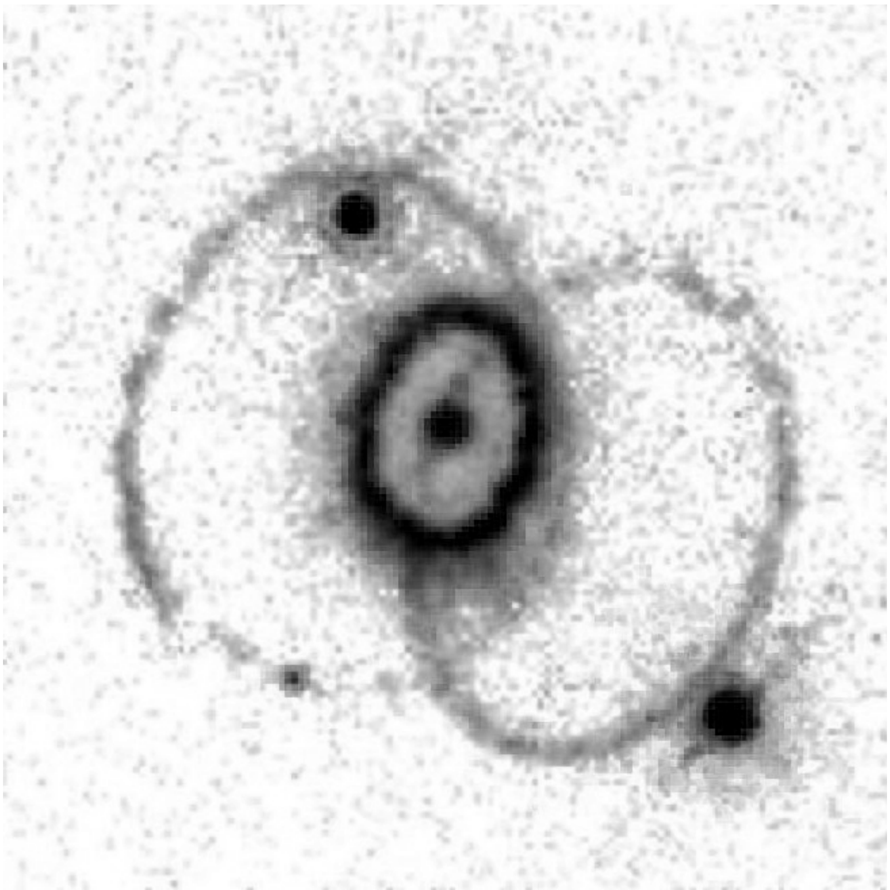
Вам даны координаты пяти наиболее заметных звезд созвездия Кассиопеи (α, β, γ, δ и ε Cas) и расстояния до них от Солнца, а также координаты альфы Центавра (α Cen) и расстояние до нее от Солнца. Нарисуйте положение Солнца среди звезд созвездия Кассиопеи на небе для наблюдателя, находящегося около альфы Центавра. Оцените, какой по порядку яркости будет Солнце среди звезд Кассиопеи для наблюдателя с альфы Центавра.

Подсказка: прямое восхождение и склонение — координаты на небе, аналогичные долготе и широте соответственно. Прямое восхождение меняется от 0° до 360°, склонение — от −90° до +90°.

Звезда	Прямое восхождение	Склонение	Расстояние, св.лет
α Cas	10°	+56°	228
β Cas	2°	+59°	54
γ Cas	14°	+61°	613
δ Cas	22°	+60°	99
ε Cas	29°	+64°	442
α Cen	220°	−61°	4

Задача № 73

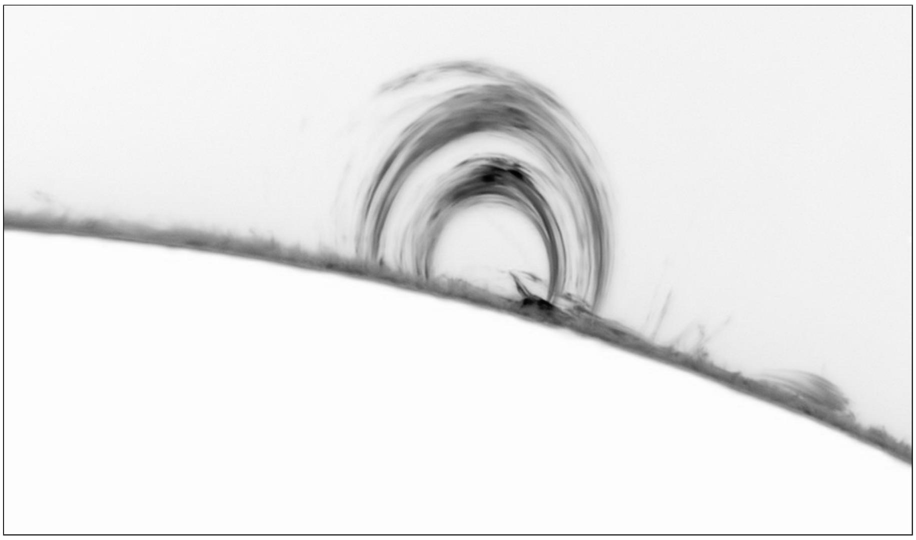
Вам дано негативное изображение, полученное при наблюдении остатка вспышки сверхновой с высоким разрешением. Две кольцеобразных структуры — это два параллельных кольца одинакового радиуса, расположенных симметрично по отношению к сверхновой и состоящих из вещества, выброшенного предшественником сверхновой, и подсвеченного во время вспышки.



Известно, что угловое расстояние между сверхновой и яркой звездой, проецирующейся на снимок левее и выше сверхновой, равно $1''.4$, угловое расстояние между сверхновой и яркой звездой, проецирующейся на снимок правее и ниже сверхновой, равно $3''.0$. Свет от вспышки достиг колец примерно через 450 суток после вспышки. Определите с помощью этих данных расстояние до сверхновой.

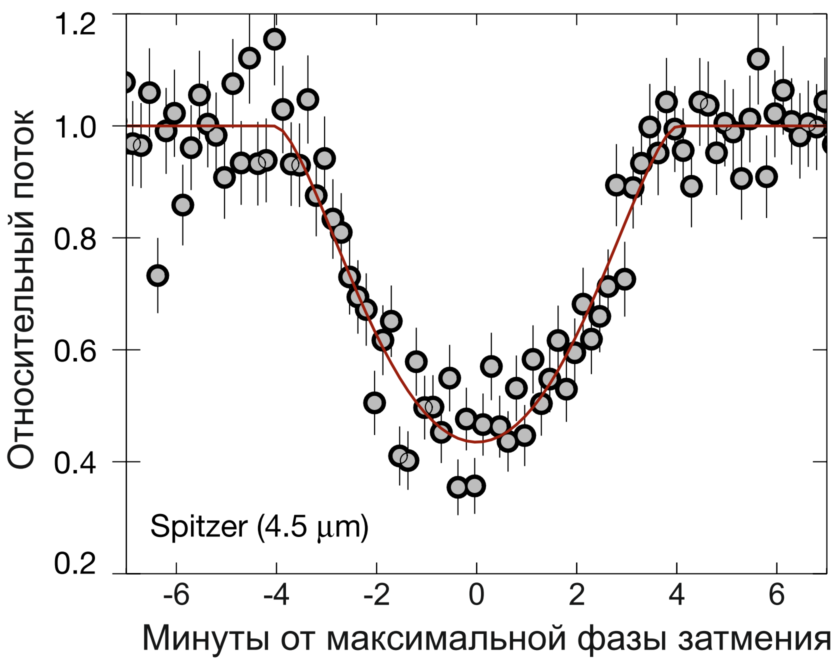
Задача № 74

Вам дано изображение (негатив) корональной петли, образовавшейся на видимом краю диска Солнца из-за выхода силовых линий магнитного поля. Оцените объем этой корональной петли, считая ее изогнутой трубкой.



Задача № 75

Вам дан график кривой блеска (наблюдения получены на телескопе Spitzer), образованной прохождением планеты по диску звезды Gaia DR2 2146576589564898688. Детальный анализ показал, что данная планета имеет период обращения 1.4 дня при радиусе круговой орбиты 3 млн. км. Угол между лучом зрения и нормалью к плоскости орбиты составляет 88°.8. Исходя из этих параметров, оцените радиусы звезды и планеты, а также определите, к каким типам относятся звезда и планета.



3 Решения задач

Задача № 1

В каком направлении нужно смотреть, чтобы увидеть первый восход Солнца после полярной ночи в Арктике? Поясните свой ответ.

Решение. Смотреть надо на юг. В Северном полушарии Земли (в котором находится Арктика) за пределами тропического пояса Солнце в полдень, когда его высота над горизонтом максимальна, находится на юге. Поскольку описанная ситуация означает, что Солнце наблюдается на максимально возможной высоте над горизонтом (чуть большей нуля), оно в этот момент должно находиться на юге.

П.А.Тараканов

Задача № 2

27 ноября 1947 года родился замечательный советский писатель Григорий Бенционович Остер. В какой день недели он родился?

Решение. Тур, как вам известно, прошел в пятницу, и Г.Б.Остеру исполнилось 73 года. Известно, что одна и та же календарная дата в каждый следующий год приходится на следующий по порядку день недели (поскольку остаток от деления 365 на 7 равен 1), а в високосный год (для дат в марте или позже) — через день. Поэтому нам надо лишь посчитать, сколько високосных годов прошло со дня рождения Г.Б.Остера. Поделив 73 на 4 (или даже пересчитав вручную) можно обнаружить, что их было 19 (надо не забыть учесть нынешний), следовательно, день недели, соответствующий дню рождения, сдвинулся на $73 + 19 = 92$ дня вперед. Сдвиг на 7 дней к изменению дня недели не приводит, поэтому находим остаток от деления 92 на 7 и обнаруживаем, что он равен 1. Следовательно, произошел сдвиг на один день, так что Г.Б.Остер родился в день, предшествующий пятнице — четверг.

В.В.Григорьев

Задача № 3

Американский аппарат MESSENGER, исследовавший поверхность Меркурия, вышел на орбиту вокруг планеты 18 марта 2011 года. 30 апреля 2015 года он завершил свою миссию и врезался в поверхность Меркурия. За время, пока аппарат кружился вокруг Меркурия, он прислал на Землю около 277 тысяч снимков поверхности. Через какой промежуток времени (в среднем) MESSENGER делал фотографии?

Решение. Рассчитаем длительность полета MESSENGER'а вокруг Меркурия на основании двух данных дат. Получится 4 года и 44 дня (в марте 31 день, а в апреле — 30 дней). Очевидно, лишь один из этих четырех лет был високосным (2012-ый), так что мы можем вычислить эту длительность в днях, а лучше в минутах:

$$365 \times 3 + 366 + 44 = 1505 \text{ дней} = 36\ 120 \text{ часов} = 2\ 167\ 200 \text{ минут.}$$

Теперь поделим количество минут на количество снимков, чтобы получить ответ задачи:

$$\frac{2\ 167\ 200}{277\ 000} = 7.82 \approx 8 \text{ минут}$$

Таким образом, аппарат MESSENGER в среднем делал одно фото раз в 8 минут.

В.В.Григорьев

Задача № 4

Начинающий петербургский астроном внёс в дневник наблюдений следующую запись: «Луна хорошо была видна в предрассветные часы. Половина её диска была освещена, неподалёку были видны Плеяды, Альдебаран же наблюдался в непосредственной близости от Луны». В каком месяце проводились наблюдения? Поясните свой ответ.

Решение. Луна наблюдалась в предрассветные часы, то есть была убывающей, при этом освещена была ровно половина диска, что свидетельствует о фазе последней четверти. Близкое положение Альдебарана и Плеяд говорит о нахождении Луны в созвездии Тельца (хотя может быть и Орион). Солнце при этом находится на 90° в сторону годичного видимого движения Солнца по эклиптике, то есть в созвездии Льва, а это соответствует второй половине августа и первой половине сентября.

А.В.Веселова

Задача № 5

Туманность Вуаль, находящаяся в Лебеде, является результатом вспышки Сверхновой, произошедшей примерно 7500 лет назад. На данный момент ее угловой диаметр составляет 3°. Определите когда эта туманность была на небе размером с Луну, если считать, что она расширялась равномерно. Можно ли наблюдать прохождение Луны по этой туманности?

Решение. Ответим сначала на второй вопрос задачи: нет, нельзя. Орбита Луны недалеко отходит от эклиптики (не более 5°), а созвездие Лебедя отстоит от нее на весьма большой угол.

Скорость расширения туманности равна $3^\circ/7500 = 1^\circ$ за 2500 лет. То есть полградуса (видимый диаметр Луны) туманность имела через 1250 лет после вспышки, то есть 6250 лет назад.

В.В.Григорьев

Задача № 6

Звезда Рукбах в некоторый момент в Петербурге оказалась в зените. На какой высоте над горизонтом ее можно будет наблюдать через 12 часов?

Решение. Поскольку высота полюса мира над горизонтом равна широте места (а широта Петербурга равна $\varphi = 60^\circ$), то угловое расстояние между полюсом и звездой составляет 30° и не меняется в течение суток. В указанный момент Рукбах был в верхней кульминации, соответственно, через 12 часов он окажется в нижней кульминации и будет на те же 30° ниже полюса. Следовательно, его высота над горизонтом будет равна 30°.

П.А.Тараканов

Задача № 7

Приведите примеры типов астрономических объектов (достаточно одного в каждом случае), которые:

A) называют в честь первооткрывателей;
B) первооткрыватели называют в честь кого-то другого;
C) называют по направлению, в котором объект виден;
D) называют по времени, когда объект обнаружен.

Решение. Собственно решения у этой задачи нет, а разных вариантов ответов может быть достаточно много. Приведем только некоторые примеры.

A) Кометы (комета Шумейкеров-Леви-9, комета Хейла-Боппа), очень редко — звезды (звезда Барнарда, звезда ван Маанена). Во втором случае, впрочем, под «первооткрывателем» подразумевается не тот, кто первым наблюдал объект (для звезд это практически бессмысленно), а тот, кто первым обнаружил те или иные его примечательные свойства. С кометами подобное тоже встречается (комета Галлея, комета Энке).

B) Тут ответ единственен: астероиды (в качестве экзотики можно вспомнить также не сохранившееся название Урана «звезда Георга», данное ему открывшим Уран В.Гершелем). Названия кратеров на планетах и т.п.

не годятся, поскольку это не астрономические объекты (а лишь детали их рельефа), спутники планет (и планеты), называемые в честь богов и мифологических персонажей, названы не в честь реально существующих людей.

C) Тут, напротив, выбор очень большой: от звезд, именуемых по созвездию, где они находятся (α Центавра, 61 Лебедя, RR Лиры) до практически любых объектов, задаваемых координатами (например, пульсар PSR B1913+16).

D) Т.к. как правило, называются эруптивные переменные (например, сверхновая SN 1987A), так же могут обозначаться кометы и астероиды (по дате открытия или, в случае долгопериодических комет, еще и наблюдения — «комета 1811/1812 года»).

П.А.Тараканов

Задача № 8

Параллакс звезды μ Зайца составляет $0''.022$ (22 тысячных угловой секунды). На угловом расстоянии $0''.93$ от этой звезды было зарегистрировано рентгеновское излучение. Каково может быть минимальное расстояние между μ Зайца и источником рентгеновского излучения?

Решение. Мы можем определить только минимально возможное расстояние между звездой и источником, поскольку отрезок, соединяющий звезду и источник, проецируется на картинную плоскость. Поэтому оценка расстояния в картинной плоскости и предоставит нам оценку минимального расстояния между объектами.

Определим расстояние от Солнца до μ Зайца:

$$r = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{0.022''} \approx 45.5\,\text{пк}.$$

На таком удалении угловому расстоянию $\alpha = 0.93''$ будет соответствовать линейное расстояние

$$d = r \cdot \sin\alpha \approx r \cdot \alpha\,[\text{рад}] = r \cdot \frac{\alpha\,['']}{206265\,[''/\text{рад}]} = 2 \cdot 10^{-4}\,\text{пк} \approx 42\,\text{а.е.}$$

А.В.Веселова

Задача № 9

В вымышленной планетной системе “Nonordinaria” вокруг звезды типа Солнца по круговым орбитам в одной плоскости и в одном направлении вращаются две планеты. Радиус орбиты планеты земного типа равен 1 астрономической единице, радиус орбиты планеты-гиганта равен 3 а.е. Жители одной из планет отмечают «Праздник гармонии светил» каждый раз, когда другая планета оказывается на небе в направлении, противоположном местному Солнцу. Сколько земных суток проходит между праздниками?

Решение. В данной задаче речь идет о периоде повторения конфигурации, при которой звезда и две планеты выстраиваются вдоль одной линии, при этом планета-гигант и звезда оказываются по разные стороны от планеты земного типа. Такая конфигурация называется противостоянием. Период повторения противостояний — это синодический период S для данной системы двух планет, связанный с относительной угловой скоростью движения планет вокруг центральной звезды. Его можно вычислить как

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}.$$

Зная, что центральная звезда представляет собой копию Солнца, мы можем определить периоды обращения планет вокруг звезды из третьего закона Кеплера в упрощённой форме: $T^2 = R^3$, где радиусы орбит выражены в астрономических единицах, а периоды обращения — в годах. Таким образом, $T_1 = 1$ года, $T_2 \approx 5.2$ года. Подставляя эти значения в формулу для синодического периода, получаем $S \approx 1.24$ года. Для перевода этой величины в сутки, домножим ее на 365.24 и получим приблизительно 452 дня.

А.В.Веселова

Задача № 10

Некоторая переменная звезда, чей блеск меняется строго периодически, достигла максимума блеска 3 августа 2020 г. в 14:10. Затем 4 августа в 21:15 был зарегистрирован минимум блеска этой звезды. Следующий максимум пронаблюдать не удалось, но 9 августа в 1:35 был зарегистрирован очередной минимум этой звезды. В максимуме или в минимуме блеска была звезда 16 августа и в какое время это произошло?

Решение. Раз речь идет о регулярной переменной звезде, то ее период ее переменности T можно считать постоянным, причем этот промежуток времени одинаков как между двумя последовательными минимумами, так и между двумя последовательными максимумами. Сразу отметим, что время уменьшения блеска звезды меньше, чем время ее поярчания, поэтому говорить, что промежуток времени в $1^d7^h5^m$ (здесь и далее индекс ^{d} означает сутки, ^{h} — часы, а ^{m} — минуты) является половиной периода — неверно.

По двум отметкам времени минимумов блеска аккуратно установим период T:

$$T = 9.08.2020(1:35) - 4.08.2020(21:15) = 9^d 1^h 35^m - 4^d 21^h 15^m = \\ = 8^d 25^h 35^m - 4^d 21^h 15^m = 4^d 4^h 20^m$$

Теперь, зная период переменности звезды можно, например, аккуратно составить табличку:

Максимум блеска	**Минимум блеска**
03.08.2020 14:10	*04.08.2020 21:15*
07.08.2020 18:30	*09.08.2020 1:35*
11.08.2020 22:50	13.08.2020 5:55
16.08.2020 3:10	17.08.2020 10:15

Из таблички становится ясен ответ: 16.08.2020 в 3:10 был максимум блеска этой переменной звезды.

В.В.Григорьев

Задача № 11

Цефеиды — это пульсирующие переменные звезды, период которых однозначно связан с их светимостью (максимальной или средней за период). Цефеиды II типа слабее классических цефеид того же периода пульсации на 1.6 звёздной величины. Астроном при определении расстояния до цефеиды II типа по ошибке воспользовался соотношением «период–светимость» для классических цефеид. Завысил или занизил он при этом расстояние до цефеиды и во сколько раз?

Решение. Абсолютная звёздная величина цефеиды II типа на 1.6 больше абсолютной звёздной величины классической цефеиды с тем же периодом. Сравним расстояния, на которых цефеида II типа и классическая цефеида будут иметь одинаковую видимую звездную величину. Абсолютная и видимая величины связаны с расстоянием соотношением

$$m = M - 5 + 5\lg r[\text{пк}],$$

следовательно для двух объектов равенство видимых звездных величин даст уравнение

$$M_{\text{кл. ц.}} - 5 + 5\lg r_{\text{кл. ц.}} = M_{\text{ц. II}} - 5 + 5\lg r_{\text{ц. II}} \quad \Longrightarrow \quad 5\lg r_{\text{кл. ц.}} - 5\lg r_{\text{ц. II}} = M_{\text{ц. II}} - M_{\text{кл. ц.}}\,,$$

$$5\lg\frac{r_{\text{кл. ц.}}}{r_{\text{ц. II}}} = M_{\text{ц. II}} - M_{\text{кл. ц.}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{r_{\text{кл. ц.}}}{r_{\text{ц. II}}} = 10^{0.2(M_{\text{ц. II}} - M_{\text{кл. ц.}})} = 10^{0.2\cdot 1.6} = 10^{0.32} \approx 2.1.$$

Таким образом, расстояние оказывается завышенным более чем в два раза.

А.В.Веселова

Задача № 12

Самая быстро вращающаяся вокруг своей оси нормальная звезда, известная астрономам, имеет массу 25 масс Солнца и скорость вращения на экваторе $2 \cdot 10^6$ км/час. Оцените экваториальный радиус этой звезды. Масса Солнца равна $2 \cdot 10^{30}$ кг.

Решение. Скорость вращения звезды не может быть больше круговой на радиусе звезды, в противном случае звезду просто разорвет. Отсюда сразу же получается оценка радиуса:

$$R = \frac{GM}{v^2} = \frac{6.7 \cdot 10^{-11} \cdot 25 \cdot 2 \cdot 10^{30}}{(2 \cdot 10^6 \cdot 10^3/3600)^2} \approx 10^{10} \text{ м.}$$

Это оценка радиуса снизу, однако, поскольку это самая быстро вращающаяся вокруг своей оси звезда, ситуация близка к экстремальной, а и предельная оценка не слишком сильно отличается от реальной.

М.В.Костина

Задача № 13

Метеорный поток Леониды имеет чётко выраженный период активности, равный 33 годам. Чему равна большая полуось орбиты кометы, его породившей?

Решение. Метеорные потоки образуются в результате распада ядра кометы. Образовавшиеся частицы продолжают двигаться по той же орбите, причем повышенная концентрация частиц наблюдается там, где ранее находилось ядро кометы. Следовательно, нам надо по известному периоду найти большую полуось орбиты.

Для этого можно воспользоваться III законом Кеплера в его простейшем виде, $P^2 = a^3$, откуда $a = 33^{2/2} \approx 10$ а.е. (в реальности 10.34 а.е., это комета Темпеля-Туттля).

М.В.Костина

Задача № 14

Фридрих Бессель предложил отмечать некое событие тогда, когда прямое восхождение Солнца оказывается равным в точности $18^h 40^m$. Определите примерную дату события. Что именно предполагалось таким образом отмечать?

Решение. В процессе годового движения Солнца по эклиптике его прямое восхождение принимает следующие значения: 0^h00^m в точке весеннего равноденствия, 6^h00^m в точке летнего солнцестояния, 12^h00^m в точке осеннего равноденствия, 18^h00^m в точке зимнего солнцестояния. У нашего события прямое восхождение равно 18^h40^m, следовательно, нас интересует точка зимнего солнцестояния. Оценим, считая, что прямое восхождение Солнца менялось линейно в указанный период. Скорость изменения его прямого восхождения: $\frac{24^h}{365} = \frac{(24\cdot60)^m}{365} \sim 4^m$/день. Таким образом, между нашим событием и зимним солнцестоянием (происходит приблизительно 21 декабря) прошло 10 дней. Получается, интересующее нас событие произойдёт с 31 декабря на 1 января, и это Новый год.

П.А. Тараканов

Задача № 15

Астероид Халва обращается вокруг Солнца по орбите с большой полуосью 2.5 а.е. и эксцентриситетом 0.23. На какое минимальное расстояние этот астероид приближается к Земле? С какой скоростью относительно Земли он при этом движется? Наклон орбиты астероида к плоскости эклиптики и эксцентриситет орбиты Земли считайте равными нулю.

Решение. Определим перигелийное расстояние астероида:

$$r_\pi = a(1-e) = 2.5\cdot(1-0.23) \approx 1.93 \text{ а.е.}$$

Это минимальное расстояние между Солнцем и астероидом. Если при этом Земля находится строго на одной прямой между Солнцем и астероидом (то есть при наблюдении с Земли астероид находится в противостоянии с Солнцем), то расстояние между Землей и астероидом будет равно $r_\pi - a_\oplus = 1.93 - 1 = 0.93$ а.е.

Поскольку наклонение орбиты астероида к эклиптике нулевое, то всё движение происходит в одной плоскости. На круговой орбите вектор скорости перпендикулярен радиус-вектору объекта на орбите. На эллиптической орбите такое свойство проявляется в точках апоцентра и перицентра. Значит, в случае противостояния векторы скорости Земли и астероида сонаправлены. Следовательно, относительная скорость по модулю будет равна разности скоростей Земли и астероида.

Скорость движения Земли на орбите можно вычислить как первую космическую скорость на расстоянии 1 а.е. от Солнца или же из равенства гравитационного и центростремительного ускорений:

$$G\cdot\frac{M_\odot}{a_\oplus^2} = \frac{v_\oplus^2}{a_\oplus} \quad\Longrightarrow\quad v_\oplus = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a_\oplus}} \approx 29.8\,\text{км/с}.$$

Скорость движения астероида мы можем найти, например, из интеграла энергии:

$$v^2 = GM_\odot \left(\frac{2}{r_\pi} - \frac{1}{a}\right) = GM_\odot \left(\frac{2}{a(1-e)} - \frac{1}{a}\right) = \frac{GM_\odot}{a} \cdot \frac{1+e}{1-e}.$$

Скорость оказывается равной 24 км/с. Если округлить скорость движения Земли по орбите до 30 км/с, то относительная скорость астероида может быть либо $30 - 24 = 6$ км/с, если астероид вращается вокруг Солнца в том же направлении, что и Земля, либо $30 + 24 = 54$ км/с если он вращается в противоположенном направлении. Отметим, что первый случай более вероятен, так как в целом тела Солнечной системы вращаются в одном направлении.

А.В.Веселова

Задача № 16

Взрыв сверхновой произошёл ровно 10 суток назад. Наблюдения показали, что скорость оболочки сверхновой на уровне фотосферы равна 10^4 км/с, а эффективная температура фотосферы 10^4 K. Считая, что фотосфера расширяется с постоянной скоростью, оцените светимость сверхновой в момент наблюдений.

Решение. Без особой потери точности (что можно проверить в процессе решения) можно считать, что взрыв сверхновой начинается из точки. Тогда радиус фотосферы через 10 суток после вспышки можно получить просто умножением времени на скорость расширения:

$$R = v \cdot t = 10 \cdot 86400 \cdot 10^4 = 8.64 \cdot 10^9 \text{ км}.$$

Это число в 10 раз превышает радиус самых больших звёзд ($1000R_\odot$), следовательно, сделанное выше предположение вполне оправдано. Так как речь идёт о фотосфере, то светимость нужно оценивать по формуле Стефана-Больцмана:

$$L = 4\pi R^2 \varsigma T^4 = 4\pi(8.64 \cdot 10^9 \cdot 10^5)^2 \cdot 5.67 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{16} \approx 5 \cdot 10^{42} \text{ эрг}.$$

М.В.Костина

Задача № 17

В проводившемся в конце XIX и начале XX века международном проекте “Carte du Ciel” предполагалось получить фотографии всего неба с помощью размещенных в разных странах 20 однотипных телескопов-астрографов.

При однократной экспозиции на фотопластинке получалось изображение квадратной области неба размером $2^\circ \times 2^\circ$, для исключения возможных ошибок каждая область неба снималась сначала дважды с экспозицией по 6 минут, а потом, на второй стадии проекта — трижды с экспозицией по 20 минут. Оцените минимально необходимое для выполнения проекта число фотопластинок, а также минимально возможную продолжительность выполнения проекта, считая, что в течение одной ночи наблюдать можно в среднем в течение 6 часов, а на наведение телескопа, установку и снятие пластинки и т.п. для одной съемки уходит 2 минуты.

Решение. Оценим площадь неба. Тот, кто знает, может сразу написать, что площадь неба составляет около 40 тысяч кв. градусов. Кто не знает, может грубо оценить площадь неба как площадь карты звездного неба: 180° по ширине (от полюса, до полюса) и 360° по длине вдоль экватора, т.е. $180^\circ \cdot 360^\circ \approx 65$ тысяч кв. градусов. Но правильнее будет сказать, что площадь сферы составляет 4π стерадиан, и поскольку в стерадиане $(180/\pi)^2$ квадратных градусов, правильный результат легко вычисляется.

Отсюда видно, что в самом лучшем случае небо можно разбить на 10^4 участков, по площади соответствующих области одной съемки (в реальности все полученные нами оценки будет занижены — разбить небо на области без перекрытий не получится). Из условия следует, что каждая область снималась 5 раз, поэтому общее количество пластинок, необходимых для проекта, составляет по крайней мере $5 \cdot 10^4$.

Теперь посчитаем время. На полную съемку одной области расходовалось $2 \cdot 6 + 3 \cdot 20 + 5 \cdot 2 = 82$ минуты. Для съемки всех областей, как следствие, придется потратить $82 \cdot 10^4 \approx 8 \cdot 10^5$ минут. Этим заняты 20 телескопов, поэтому при равномерном распределении работы между ними каждый телескоп будет заниматься съемкой $4 \cdot 10^4$ минут. Одна наблюдательная ночь по условию составляет $6 \cdot 60 = 360$ минут, поэтому понадобится около 10^2 ночей или примерно 0.3 года (при отсутствии плохой погоды и поломок). Заметим, что в реальности затраченное время оказалось намного больше.

П.А. Тараканов

Задача № 18

Звезда S2 движется вокруг чёрной дыры в центре нашей Галактики с периодом 16 лет. В момент наибольшего сближения она оказывается на расстоянии 120 а.е. от чёрной дыры. Оцените её скорость в этот момент, если известно, что масса черной дыры составляет $4.3 \cdot 10^6$ масс Солнца.

Решение. Очевидно, что в задаче требуется найти скорость звезды S2 в перицентре орбиты. Для этого необходимо знать эксцентриситет орбиты звезды. Эксцентриситет e можно найти из данного в условии расстояния в перицентре r_Π

и большой полуоси a, которую можно найти, зная период P, из III закона Кеплера. В единицах [а.е., год и масса Солнца] III закон Кеплера выглядит очень просто:

$$a = \sqrt[3]{P^2 \cdot M} = \sqrt[3]{16^2 \cdot 4.3 \cdot 10^6} \approx 1033 \text{ а.е.}$$

$$e = 1 - \frac{r_\Pi}{a} = 1 - \frac{120}{1033} \approx 0.88$$

Окончательно находим скорость в перицентре:

$$v_\Pi = \sqrt{\frac{GM}{a}\frac{1+e}{1-e}} = v_\oplus \sqrt{\frac{M\,[M_\odot]}{a\,[\text{а.е.}]}\frac{1+e}{1-e}} = 30\text{ км/с}\sqrt{\frac{4.3 \cdot 10^6}{1033}\frac{1+0.88}{1-0.88}} \approx 7.7{\cdot}10^3\text{ км/с.}$$

Естественно, тот же ответ получится, если просто подставить в первое равенство нужные единицы в системе СИ или СГС.

М.В.Костина

Задача № 19

Во время зимы в северном полушарии Марса снеговая полярная шапка может доходить до широты 55°. Оцените площадь поверхности планеты, которую покрывает снег в это время. Радиус Марса составляет $3.4 \cdot 10^3$ км.

Решение. Снеговая полярная шапка представляет собой сферический сегмент с углом раствора $\theta = 90° - 55° = 35°$. Площадь поверхности S сферического сегмента радиуса R вычисляется по формуле:

$$S = 2\pi R^2(1 - \cos\theta) = 2 \cdot \pi \cdot 3400^2(1 - \cos 35°) \approx 1.3 \cdot 10^7 \text{ км}^2$$

Если же использованная выше формула неизвестна (и ее не удалось вывести), то можно сделать сравнительно простую оценку. «Отрежем» от Марса полярную шапку и попробуем оценить площадь оставшейся части полушария между экватором и широтой +55°. Длина параллели, ограничивающей эту часть полушария сверху, примерно в два раза меньше длины экватора, поэтому в качестве оценки ее площади можно взять $\frac{3}{4}$ длины экватора и умножить на расстояние между экватором и параллелью (с хорошей точностью равное радиусу планеты — в одном радиане примерно 57°). Тогда искомая площадь составит $\frac{3}{4} \cdot 2\pi R \cdot R$, а площадь полярной шапки равна дополнению этой величины до площади полусферы. Получаем

$$S = 2\pi R^2 - \frac{3}{4} \cdot 2\pi R^2 = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{3.1 \cdot 3.4^2 \cdot 10^6}{2} \approx 1.8 \cdot 10^7 \text{ км}^2.$$

Есть и другие варианты оценивания (подсчет площади как площади боковой поверхности конуса и т.п.), дающиее более-менее точные результаты.

В.В.Григорьев

Задача № 20

Видимый поперечник звездного скопления составляет $13'$, видимая звездная величина 9^m, диаметр скопления равен 6 пк. Считая, что в скоплении содержится 10^3 звезд, похожих на Солнце, оцените поглощение света в звездных величинах на 1 кпк в направлении на скопление.

Решение. Как известно, в одном радиане содержится около $2 \cdot 10^5$ секунд, а $13' \approx 800''$. Поэтому угловой диаметр скопления составляет $4 \cdot 10^{-3}$ радиана, и это означает, что расстояние до него $r = 6/(4 \cdot 10^{-3}) = 1.5 \cdot 10^3$ пк.

Абсолютная звездная величина Солнца составляет $+5^m$, поэтому 10^3 таких звезд на расстоянии 10 пк выглядели бы как объект $M = -2^m.5$ звездной величины, и это абсолютная звездная величина скопления. Тогда его видимая величина

$$m = M + 5 \lg r - 5 = -2.5 + 5 \lg(1.5 \cdot 10^3) - 5 = 8^m.4.$$

Наблюдается же 9^m, и это означает, что около $0^m.6$ приходится на поглощение. Поскольку расстояние составляет 1.5 кпк, то на 1 кпк приходится $0^m.4$.

М.В.Костина

Задача № 21

Астероид (518) Халва вращается вокруг Солнца, совершая полный оборот за 4.03 земных года. Вокруг своей оси астероид совершает оборот за 14.3 часа. Определите продолжительность года на астероиде в единицах суток на астероиде.

Решение. Вычислим продолжительность года на астероиде в часах:

$$T = 4.03 \cdot 365.2422 \cdot 24 \approx 35326 \text{ часов.}$$

Теперь поделим полученное число на период обращения астероида вокруг своей оси:

$$N = \frac{35326}{14.3} \approx 2470 \text{ сут.}$$

Следует заметить, что период обращения вокруг своей оси (звёздные сутки) и солнечные сутки на самом деле будут различаться. Для Земли это различие составляет чуть менее 4 минут. С увеличением расстояния до Солнца эта разница будет уменьшаться, для рассматриваемого астероида она не будет превышать минуты, поэтому с учетом точности исходных данных эту разницу можно не учитывать.

А.В.Веселова

Задача № 22

Выберите созвездия, в которых Луна может находиться при наблюдении с Земли.

1. Кит
2. Орион
3. Дева
4. Лебедь
5. Южная Корона
6. Северная Корона

Решение. Заметим, что любые созвездия, находящиеся на эклиптике как видимом пути Солнца по небу в течение года, Луна посетить может, поэтому в созвездии Девы Луна может наблюдаться. Созвездие Кита находится немного ниже эклиптики, рядом с созвездиями Тельца, Овна и Рыб, в некоторых точках почти касаясь эклиптики. Поскольку Луна может отклоняться от эклиптики чуть более чем на 5°, поэтому в созвездие Кита она может заходить. Например, в 2021 году это произойдет ближе к середине апреля. Созвездие Ориона также расположено своей верхней частью недалеко от эклиптики, что позволяет Луне изредка появляться в этом созвездии (например, в начале января 2031 года).

Созвездия Лебедя и Северной Короны расположены более чем на 30° севернее эклиптики, созвездие Южной Короны находится более чем на 10° южнее эклиптики, поэтому Луна в этих созвездиях оказаться не может.

Правильные ответы: (a), (b), (c).

А.В.Веселова

Задача № 23

Спутник некоторой экзопланеты находится в 2 раза ближе к своей планете, чем Луна к Земле, и имеет период обращения в 6 раз меньший, чем период обращения Луны вокруг Земли. Во сколько раз орбитальная скорость этого спутника больше орбитальной скорости Луны?

Решение. Будем считать орбиты круговыми. В таком случае скорость постоянна и равна частному от деления пройденного пути на время. Пусть S — длина орбиты спутника экзопланеты, тогда $2S$ — длина орбиты Луны, поскольку длина окружности прямо пропорциональна ее радиусу. Период обращения спутника экзопланеты равен T, тогда период обращения Луны равен $6T$.

Скорость движения спутника экзопланеты:

$$V_1 = \frac{S}{T},$$

скорость движения Луны

$$V_2 = \frac{2S}{6T} = \frac{1}{3} \cdot \frac{S}{T} = \frac{1}{3} V_1.$$

Поэтому скорость спутника в 3 раза больше скорости Луны.

П.А. Тараканов

Задача № 24

Выберите верные утверждения о наблюдениях с поверхности Земли объектов в Солнечной системе.

1. Венера не может быть выше всего над горизонтом в полночь.
2. Если Венера наблюдается в созвездии Девы, то Меркурий может находиться в созвездии Овна.
3. Марс и Юпитер могут находиться в противоположных точках неба для земного наблюдателя.
4. Полная Луна может закрыть Меркурий.
5. Юпитер и Меркурий можно увидеть невооружённым глазом.
6. Луна в фазе третьей четверти может закрыть Сатурн.

Решение.

1. Венера — внутренняя (относительно Земли) планета Солнечной системы. Радиус ее орбиты таков, что Венера в своем видимом движении для земного наблюдателя не может отклоняться от Солнца дальше, чем на 50°. Солнце в полночь ниже всего под горизонтом, выше всего в этот момент находится противоположная Солнцу область неба, в которой Венера находиться не может.

   Заметим, что в условии не сказано, истинная рассматривается полночь или же полночь по гражданскому времени. Тем не менее отклонение даже на пару часов не приведет к изменению результата.

2. Определим относительное расположение созвездий Девы и Овна. Вспомним, что в Овне Солнце находится весной, а в Деве — осенью. Это означает, что совездия находятся в приблизительно противоположных областях неба.

   Венера и Меркурий — внутренние планеты Солнечной системы. Даже если они находятся по разные стороны от Солнца для земного наблюдателя, то так как не могут удаляться от Солнца дальше чем на $50°$, то и друг от друга они располагаются не дальше $100°$. Следовательно, в противоположных частях неба планеты оказаться не могут.

3. Такая ситуация возможна. Если пренебречь наклоном орбит планет, то, поскольку периоды обращения Марса и Юпитера не кратны, может наступить момент одновременного противостояния Юпитера и верхнего соединения Марса, то есть Юпитер будет находиться в противоположной относительно Солнца точке, Марс же при этом может быть строго за Солнцем.

   Если же считать, что орбиты наклонены к эклиптике, то вопрос становится более сложным: в противоположных точках для земного наблюдателя планеты могут находиться, только если окажутся в плоскости эклиптики, то есть в точках пересечения своей орбиты с плоскостью земной орбиты. Эти точки для двух планет не обязательно расположены так, чтобы Земля могла в некоторый момент оказаться строго между ними. Тем не менее, поскольку в настоящих планетных системах плоскости орбит поворачиваются со временем, то описанная в задании ситуация становится принципиально возможной.

4. Луна наблюдается в полнолунии, когда находится в противоположной области неба относительно Солнца. Меркурий является внутренней планетой, поэтому не может существенно удаляться от Солнца для земного наблюдателя, поэтому он не может быть закрыт полной Луной.

5. Юпитер является является одним из наиболее ярких объектов земного неба. Меркурий обычно виден хуже, его удается наблюдать в сумерки, но при этом в моменты максимальной яркости его можно с надежностью наблюдать невооруженным глазом.

6. Когда Луна находится в фазе третьей четверти, то направление на нее и на Солнце составляет примерно $90°$. Сатурн как внешняя планета может удаляться от Солнца на такое расстояние, поэтому описанная в задаче ситуация возможна.

Таким образом, верные утверждения здесь (a), (c), (e), (f).

А.В.Веселова

Задача № 25

Вам предлагается несколько утверждений. Для каждого из них выберите, согласны Вы с ним («да») или нет («нет»), можно также выбрать вариант «не знаю».

1. В Южном полушарии Земли Солнце движется с запада на восток.
2. Обратная сторона Луны никогда не освещается Солнцем.
3. В один календарный месяц может случиться два полнолуния.
4. Сириус не является самой яркой звездой Северного полушария.
5. В том календаре, по которому мы сейчас живём, каждый четвертый год — високосный.

Решение.

1. В Южном полушарии Земли Солнце движется с запада на восток: нет.

   Вне зависимости от полушария та сторона горизонта, где светила восходят, называется востоком, где заходят — западом.

2. Обратная сторона Луны никогда не освещается Солнцем: нет.

   Например, в моменты вблизи новолуния, когда видимая сторона Луны почти не освещена, обратная сторона Луны освещается Солнцем.

3. В один календарный месяц может случиться два полнолуния: да.

   Период повторения фаз Луны составляет чуть больше 29.5 дней. Если в месяце 30 или 31 день и при этом полнолуние пришлось на 1-е число, то 29–30 числа того же месяца произойдет второе полнолуние. Описанную ситуацию принято называть «голубой Луной» (хотя цвет Луна при этом, естественно, не меняет).

4. Сириус не является самой яркой звездой Северного полушария: да.

   Сириус находится в Южном полушарии неба.

5. В том календаре, по которому мы сейчас живём, каждый четвертый год — високосный: нет.

   Мы живем по григорианскому календарю. В нем каждый четвертый год — високосный, за исключением тех лет, номер которых делится на 100, но не делится на 400.

М.И.Волобуева, А.В.Веселова, М.В.Костина

Задача № 26

По одной из оценок радиус звезды Вольфа–Райе WR 142 равен 80% радиуса Солнца, а масса в 28 раз превышает солнечную. Во сколько раз плотность WR 142 больше плотности Солнца?

Решение. Средняя плотность объекта — это отношение его массы к его объему. Запишем отношение плотности звезды к плотности Солнца:

$$\frac{\rho}{\rho_\odot} = \frac{\dfrac{M}{V}}{\dfrac{M_\odot}{V_\odot}} = \frac{M}{M_\odot} \cdot \frac{V_\odot}{V}.$$

Звезды мы будем считать сферически-симметричными, в таком случае их объем можно выразить через радиус как $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, то есть объем пропорционален кубу радиуса. Если эту формулу не помнить, то можно предположить, что объем фигуры должен расти с радиусом примерно как у кубика, что в итоге и даст нам право считать V пропорциональным R^3. Таким образом, формула для отношения плотностей принимает вид

$$\frac{\rho}{\rho_\odot} = \frac{M}{M_\odot} \cdot \frac{R_\odot^3}{R^3} = \frac{M}{M_\odot} \cdot \left(\frac{R_\odot}{R}\right)^3 = 28 \cdot \left(\frac{R_\odot}{0.8R_\odot}\right)^3 = 28 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^3 \approx 55.$$

А.В.Веселова

Задача № 27

Два пункта наблюдения находятся на широте 60 градусов и имеют долготы: первый — 30 градусов восточной долготы, второй — 60 градусов восточной долготы. Выберите верные утверждения.

1. Расстояние между ними равно приблизительно 3333 км.
2. Во втором пункте Солнце достигнет максимальной высоты над горизонтом на 2 часа раньше, чем в первом пункте.
3. Во втором пункте Солнце достигнет минимальной высоты под горизонтом на 2 часа позже, чем в первом пункте.
4. Максимальные высоты Солнца над горизонтом в двух пунктах будут отличаться не более, чем на 0.5 градуса.
5. Во втором пункте Солнце находится над горизонтом на 12 минут дольше, чем в первом пункте.
6. Различие продолжительности светлого времени суток в двух пунктах не превышает 15 минут.

Решение.

1. Оценим сначала расстояние вдоль параллели. Угловое расстояние составляет $\lambda_2 - \lambda_1 = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$. Вспомним, что длина экватора составляет примерно 40 тыс. км. Длина 60 параллели вдвое меньше, 20 тыс. км. Полная длина параллели соответствует градусной мере 360°, тогда углу в 30° будет соответствовать расстояние $20000/360 \cdot 30 \approx 1670$ км. На самом деле расстояние между пунктами будет еще меньше, поскольку на сфере расстоянием между двумя точками является дуга большого круга (окружности, в плоскости которой находится центр сферы), а параллель широты 60 градусов большим кругом не является.

2. Угловое расстояние вдоль параллели между пунктами составляет 30°. Оборот вокруг своей оси, то есть на 360°, Земля совершает приблизительно за 24 часа. Следовательно, угловому расстоянию 30° будет соответствовать интервал времени $24/360 \cdot 30 = 2$ часа. Второй пункт находится восточней, поэтому Солнце в нем достигнет максимальной высоты раньше.

3. Аналогично предыдущему, во втором пункте Солнце достигнет минимальной высоты также раньше, а не позже.

4. Поскольку пункты находятся на одной широте, то траектории суточного движения светил будут одинаковы, поэтому и максимальные высоты Солнца будут почти одинаковыми.

5. Аналогично предыдущему, при одинаковых широтах время нахождения объекта над горизонтом будет одинаково.

6. При одинаковых широтах различие в продолжительности суток будет несущественным.

Таким образом, верные утверждения здесь (b), (d), (f).

А.В.Веселова

Задача № 28

Во сколько раз отличаются максимальный и минимальный угловой диаметр Венеры при наблюдении с Земли? Орбиты обеих планет считать круговыми и лежащими в одной плоскости, радиус орбиты Венеры равен 0.72 астрономической единицы.

Решение. Размеры Венеры малы по сравнению с расстоянием от Земли до неё, поэтому можно утверждать, что видимый размер будет обратно пропорционален расстоянию до объекта. В таком случае отношение максимального и минимального диаметров будет равно отношению максимального и минимального расстояний.

Максимальное расстояние до Венеры достигается в момент ее верхнего соединения с Солнцем, то есть когда Венера находится за Солнцем для земного наблюдателя. При этом расстояние до нее равно сумме радиусов орбит: $r_1 = r_з + r_в = 1.72$ а.е.

Максимальное расстояние до Венеры достигается в момент ее нижнего соединения с Солнцем, то есть когда Венера находится перед Солнцем для земного наблюдателя. При этом расстояние до нее равно разности радиусов орбит: $r_2 = r_з - r_в = 0.28$ а.е.

Отношение расстояний равно

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{1.72}{0.28} \approx 6.1.$$

А.В.Веселова

Задача № 29

Выберите верные утверждения об объектах Солнечной системы.

1. Для наблюдателя на Марсе Земля никогда не окажется в противоположной с Солнцем точке неба.

2. Видимые размеры Марса для земного наблюдателя меняются в течение нескольких лет не менее чем в 3 раза.

3. С Меркурия невозможно увидеть Землю невооружённым глазом.

4. Для наблюдателя на Венере Луна и Земля не удаляются друг от друга более чем на 2 угловые минуты.

5. Не наблюдаются астероиды, чья орбита полностью лежит внутри земной орбиты.

6. Наблюдаются астероиды, движущиеся по орбите Юпитера.

Решение.

1. Для наблюдателя на Марсе Земля будет внутренней планетой. Но в противоположной Солнцу точке неба может находиться планета, чья орбита лежит, хотя бы частично, за пределами орбиты Марса. Следовательно, первое утверждение верно.

2. Размеры Марса малы по сравнению с расстоянием от Земли до него, поэтому можно утверждать, что видимый размер будет обратно пропорционален расстоянию до объекта. В таком случае отношение максимального и минимального размеров будет равно отношению максимального и минимального расстояний.

   Максимальное расстояние до Марса достигается в момент его соединения с Солнцем, то есть когда Марс находится за Солнцем для земного наблюдателя. При этом расстояние до него равно сумме радиусов орбит: $r_1 = r_з + r_м = 2.5$ а.е.

   Максимальное расстояние до Марса достигается в момент его противостояния с Солнцем, то есть когда Марс находится в противоположной с Солнцем точке для земного наблюдателя. При этом расстояние до него равно разности радиусов орбит: $r_2 = r_м - r_з = 0.5$ а.е.

   Отношение расстояний равно 5, поэтому и угловые размеры могут меняться в 5 раз (и даже более, если учитывать, что орбита Марса заметно вытянута).

3. Заметим, что на земном небе Венера хорошо видна. Несмотря на то, что Земля находится дальше от Солнца, чем Венера, и имеет меньшее альбедо, она немного больше и тем не менее будет довольно ярким объектом. Мы видим Венеру, когда она находится на почти одинаковом с Солнцем расстоянии и при этом не в полной фазе. Если же Земля для наблюдателя на Меркурии будет в противостоянии, то расстояние между ними будет около $1 - 0.4 = 0.6$ а.е., при этом Земля будет в полной фазе, что позволит ее видеть.

4. Наибольшее угловое расстояние между Землей и Луной для наблюдателя на Венере получится, когда отрезок «Земля – Луна» будет располагаться в картинной плоскости для наблюдателя и при этом расстояние между Венерой и объектами минимально. В такой конфигурации Земля для Венеры будет в противостоянии, расстояние между Венерой и Землей будет равно $r = a_з - a_в \approx 0.28$ а.е $= 4.2 \cdot 10^7$ км. Расстояние между Землей и Луной равно $l = 3.8 \cdot 10^5$ км.

   Угловое расстояние, выраженное в радианах, составит

$$\alpha = \frac{l}{r} = \frac{3.8 \cdot 10^5}{4.2 \cdot 10^7} = 9 \cdot 10^{-3}\,\text{рад},$$

   что примерно равно $30'$. Это существенно больше, чем $2'$.

5. Это утверждение неверно. Существует класс астероидов, называемых атиры, чья орбита полностью лежит внутри земной орбиты. Таких астероидов известно всего несколько десятков. Недавно был открыт астероид 2020 AV2, орбита которого полностью лежит внутри орбиты Венеры.

6. Это верное утверждение. Такие астероиды существуют, это так называемые троянские астероиды, одна из групп которых опережает Юпитер на его орбите на 60°, а другая отстаёт от него на 60°.

Таким образом, верные утверждения здесь (a), (b), (f).

А.В.Веселова

Задача № 30

Вам предлагается несколько утверждений. Для каждого из них выберите, согласны Вы с ним («да») или нет («нет»), можно также выбрать вариант «не знаю».

1. Впервые после новолуния Луну можно заметить вечером.
2. Луна не вращается вокруг своей оси.
3. При центральном солнечном затмении Луна закрывает сначала западную часть диска Солнца.
4. В некоторых местах на Земле Солнце можно увидеть как на севере, так и на юге.
5. Через несколько тысяч лет на полюсах Земли перестанут происходить полярные дни и ночи.
6. Сириус — звезда Южного полушария, поэтому в Петербурге она не видна.

Решение.

1. Впервые после новолуния Луну можно заметить вечером: да.

   После новолуния лунный серп — освещённая часть лунного диска — начинает «расти». Как известно, в Северном полушарии при этом серп похож на закруглённую часть буквы «Р». Таким образом освещена правая сторона лунного диска, т.е. Солнце находится от Луны справа, т.е. западнее. Это означает, что, когда Солнце заходит, Луна, которая находится восточнее, ещё находится над горизонтом и некоторое время видна. Понятно, что это происходит вечером.

2. Луна не вращается вокруг своей оси: нет.

   Луна вращается вокруг своей оси, причем это вращение синхронизировано с вращением Земли, так как Луна подвержена сильному приливному влиянию со стороны Земли: Луна делает полный оборот вокруг своей оси за то же время, за которое делает полный оборот вокруг Земли по орбите. Это приводит к тому, что к Земле Луна всегда обращена примерно одной стороной.

3. При центральном солнечном затмении Луна закрывает сначала западную часть диска Солнца: да.

   При затмении Луна, которая движется по небу примерно в 12 раз быстрее Солнца, «находит» на него. Луна в своём движении вокруг Земли движется против суточного движения небесной сферы, т.е. с запада на восток. Следовательно, при затмении Луна первым закрывает западный край Солнца.

4. В некоторых местах на Земле Солнце можно увидеть как на севере, так и на юге: да.

   Например, в период полярного дня за Северным полярным кругом Солнце не скрывается под горизонтом и в полночь наблюдается на севере.

5. Через несколько тысяч лет на полюсах Земли перестанут происходить полярные дни и ночи: нет.

   Полярные дни и ночи происходят из-за того, что ось вращения Земли наклонена к плоскости её орбиты. Этот наклон очень стабилен и через несколько тысяч лет останется практически таким же, как сейчас.

6. Сириус — звезда Южного полушария, поэтому в Петербурге она не видна: нет.

   Зимой Сириус в Петербурге наблюдается, хотя и невысоко над горизонтом.

М.И.Волобуева, А.В.Веселова, М.В.Костина

Задача № 31

13 марта некоторого года Марс оказался в противостоянии, а 31 марта того же года в противостоянии оказался Уран. Оцените угловое расстояние между Марсом и Ураном 13 марта.

Решение. Уран находится далеко от Солнца и совершает полный оборот вокруг него более чем за 80 лет, вследствие чего его положение относительно звезд за полмесяца можно считать не изменяющимся. Таким образом, искомое угловое расстояние между Марсом и Ураном — это расстояние между точками, в которых произойдет противостояние Марса 13 марта и противостояние Урана 31 марта. Эти точки на небе диаметрально противоположны положениям Солнца в те же даты, так что задача сводится к выяснению, какое угловое расстояние Солнце пройдет на небе с 13 по 31 марта. Поскольку за 365 с четвертью суток Солнце проходит 360°, с достаточной точностью можно считать, что средняя скорость движения Солнца составляет около 1° в сутки. Таким образом, ответ — около 18°.

М.В.Костина

Задача № 32

Околоземный спутник обращается вокруг Земли по круговой орбите с периодом 15 часов. Выберите верные утверждения.

1. Скорость движения спутника по орбите приблизительно равна 3.6 километров в секунду.
2. Радиус орбиты равен примерно 25 тысяч километров.
3. При наклоне орбиты 20 градусов максимальное отклонение спутника от плоскости экватора не более 28 тысяч километров.
4. Спутник можно наблюдать с северного полюса при любом наклоне орбиты.
5. Спутник будет проходить через зенит в некотором пункте на экваторе.
6. Наименьшая высота спутника над поверхностью Земли не менее 18 тысяч километров.

Решение.

1. Определим радиус орбиты спутника по третьему закону Кеплера.

   $$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\oplus} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{GM_\oplus T^2}{4\pi^2}} = 3.1 \cdot 10^7\,\text{м}.$$

   Круговая скорость для орбиты может быть вычислена как

   $$v = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{a}} = 3.6 \cdot 10^3\,\text{м/с} = 3.6\,\text{км/с}.$$

   Утверждение верно.

2. Как было вычислено ранее, радиус орбиты — приблизительно 31 тысяча километров.

3. Максимальное отклонение от плоскости экватора равно произведению радиуса орбиты на синус угла наклона как угла между плоскостью экватора и плоскостью орбиты. Тогда

   $$h = a \cdot \sin i = 3.1 \cdot 10^7\,\text{м} \cdot \sin 20^\circ = 1 \cdot 10^7\,\text{м} = 10^4\,\text{км}.$$

   Спутник действительно отклоняется от экватора не более, чем на 28 тысяч километров.

4. Это утверждение неверно. Пусть спутник движется в плоскости экватора, то есть наклон равен нулю. В такой ситуации спутник будет под горизонтом для наблюдателей в областях вблизи полюсов.

5. Если орбита спутника лежит в плоскости экватора, то спутник в каждый момент времени пролетает строго над некоторой точкой экватора, где и наблюдается в зените. Если же орбита спутника не лежит в плоскости экватора, то всё равно пересекает ее в двух точках. Когда спутник будет пролетать эту точку, он окажется в зените для наблюдателя в подспутниковой точке.

6. Орбита круговая, поэтому спутник находится на одной и той же высоте над поверхностью Земли. Радиус орбиты равен 31 тысяче километров, радиус Земли составляет 6400 километров, поэтому высота равна $31 - 6.4 \approx 24.6$ тыс. км, что более 18 тыс. км.

Таким образом, верные утверждения здесь (a), (c), (e), (f).

А.В.Веселова

Задача № 33

21 декабря 2020 года планеты Юпитер (видимая звездная величина -2^m) и Сатурн (видимая звездная величина $+0.6^m$) окажутся на небе очень близко друг к другу. Объектом какой звездной величины они покажутся любителю астрономии с плохим зрением, который будет видеть их как один объект?

Решение. Для наблюдателя с плохим зрением освещенность, создаваемая двумя отдельными источниками, представляется освещенностью от одного источника: $E = E_{\text{ю}} + E_{\text{с}}$. Запишем формулу Погсона для суммарного объекта и для Юпитера:

$$m - m_{\text{ю}} = -2.5 \lg \frac{E}{E_{\text{ю}}} = -2.5 \lg \frac{E_{\text{ю}} + E_{\text{с}}}{E_{\text{ю}}} = -2.5 \lg \left(1 + \frac{E_{\text{с}}}{E_{\text{ю}}}\right).$$

Из формулы Погсона для Сатурна и Юпитера имеем

$$m_{\text{с}} - m_{\text{ю}} = -2.5 \lg \frac{E_{\text{с}}}{E_{\text{ю}}} \;\Rightarrow\; \frac{E_{\text{с}}}{E_{\text{ю}}} = 10^{-0.4(m_{\text{с}} - m_{\text{ю}})} \approx 0.09.$$

Тогда

$$m = m_{\text{ю}} - 2.5 \lg (1 + 0.09) \approx -2.1.$$

М.И.Волобуева, А.В.Веселова

Задача № 34

В некотором пункте с широтой 30 градусов северной широты и 45 градусов восточной долготы наблюдается звезда со склонением -40 градусов. Выберите верные утверждения.

1. Звезда является невосходящей для этого пункта.
2. Звезда находится над горизонтом менее 24 часов.
3. Звезда находится над горизонтом менее 12 часов.
4. С южного полюса эта звезда не видна.
5. Наибольшая высота звезды над горизонтом лежит в интервале от 15 до 25 градусов.
6. Звезда является незаходящей для этого пункта.

Решение.

1. Для склонения δ и широты φ наибольшую высоту над горизонтом (высоту верхней кульминации) можно определить по формуле $h = 90^\circ - |\varphi - \delta|$. В нашем случае $h = 90^\circ - |30 + 40| = 20^\circ > 0$, поэтому хотя бы в верхней точке своего суточного пути по небу звезда восходит над горизонтом.
2. Проверим, не является ли звезда незаходящей. Для этого определим наименьшую высоту (высоту нижней кульминации) по формуле
$$h = |\varphi + \delta| - 90^\circ = |30 - 40| - 90^\circ = -80^\circ.$$
Мы видим, что звезда опускается глубоко под горизонт, что занимает некоторое время. Поэтому она не может находиться над горизонтом 24 часа.
3. Примерно 12 часов над горизонтом находятся те звезды, которые лежат вблизи небесного экватора. Склонение звезды существенно отрицательное, поэтому над горизонтом звезда находится менее 12 часов.
4. С Южного подюса видны все звезды, находящиеся на небесном экваторе или южнее его (с отрицательным склонением). Указанная в условии задачи звезда находится южнее небесного экватора, поэтому она видна на Южном полюсе.
5. В первом пункте мы рассчитали значение этой высоты, она составляет около 20°, то есть лежит в указанном интервале.
6. Поскольку в нижней кульминации высота звезды значительно меньше нуля, то звезда не является незаходящей.

Таким образом, верные утверждения здесь (b), (c), (e).

А.В.Веселова

Задача № 35

Вам предлагается несколько утверждений. Для каждого из них выберите, согласны Вы с ним («да») или нет («нет»), можно также выбрать вариант «не знаю».

1. С Земли можно увидеть более половины поверхности Луны.
2. Чем больше площадь объектива телескопа, тем более тусклые объекты он позволяет увидеть.
3. В день летнего солнцестояния в Петербурге угловой размер Солнца близок к минимальному.
4. Скорость столкновения Земли с астероидами Солнечной системы может достигать 100 километров в секунду.
5. В созвездии Большой Медведицы наблюдается больше далёких галактик, чем в созвездии Стрельца.
6. Незадолго до солнечного затмения Луну можно наблюдать утром перед рассветом.
7. На Земле существует место, где Солнце восходит в точке запада.

Решение.

1. С Земли можно увидеть более половины поверхности Луны: да.

   Из-за того, что орбиты Луны вокруг Земли эллиптическая, скорость движения Луны по орбите меняется, в отличие от постоянной скорости вращения вокруг оси. Поэтому земному наблюдателю периодически видны небольшие участки обратного полушария Луны то с запада, то с востока. Это называется либрацией по долготе.

   Вследствие наклона оси вращения Луны к плоскости её орбиты, с Земли видна поверхность обратного полушария Луны около её полюсов. Это либрация по широте.

   В итоге мы можем видеть около 59% поверхности Луны.

2. Чем больше площадь объектива телескопа, тем более тусклые объекты он позволяет увидеть: да.

   Более крупный объектив собирает больше света.

3. В день летнего солнцестояния в Петербурге угловой размер Солнца близок к минимальному: да.

   В начале июля Земля проходит афелий своей орбиты, то есть вблизи летнего солнцестояния расстояние от Земли до Солнца близко к максимальному. Поскольку угловые размеры обратно пропорциональны расстоянию, то в конце июня – начале июля угловой размер Солнца близок к минимальному.

4. Скорость столкновения Земли с астероидами Солнечной системы может достигать 100 километров в секунду: нет.

   Это утверждение неверно. Пусть астероид и Земля движутся по встречным курсам, в таком случае скорость столкновения будет близка к сумме скоростей объектов. Скорость движения Земли по орбите примерно равна 30 км/с. Это значение практически равно круговой скорости. Поскольку астероиды принадлежат Солнечной системе, то их скорость на заданном расстоянии не может превышать параболическую скорость на данном расстоянии. Для орбиты Земли параболическая скорость равна $\sqrt{2} \cdot 30 \approx 42$ км/с, поэтому относительная скорость не может превышать $30 + 42 = 72$ км/с. Строго говоря, следует учитывать притяжение астероида Землей, что в соответствии с законом сохранения энергии увеличит итоговую скорость, но несущественно.

5. В созвездии Большой Медведицы наблюдается больше далёких галактик, чем в созвездии Стрельца: да.

   Вспомним, что в созвездии Стрельца расположено направление на центре нашей Галактики. При этом луч зрения наблюдателя будет проходить через диск Галактики, поэтому существенная доля излучения будет поглощаться. Далёкие галактики выглядят слабыми, поэтому поглощение будет препятствовать наблюдению таких объектов.

   Направление на созвездие Большой Медведицы находится вне галактического диска, поэтому поглощение здесь не такое сильное. Также в направлении этого созвездия наблюдается много скоплений галактик, и в 1995 году в этой области неба было получено изображение Hubble Deep Field.

6. Незадолго до солнечного затмения Луну можно наблюдать утром перед рассветом: да.

   Солнечное затмение происходит тогда, когда Луна находится в фазе новолуния. Незадолго до этого Луна выглядит, как стареющий месяц. Как известно, в Северном полушарии серп Луны при этом похож на букву «С», т.е. освещена левая сторона Луны. Таким образом Солнце находится слева от Луны, т.е. восточнее её. Это означает, что утром, до того, как Солнце взайдёт, Луна, находясь западнее Солнца, уже восходит и тем самым видна перед рассветом.

7. На Земле существует место, где Солнце восходит в точке запада: нет.

   Вне зависимости от полушария та сторона горизонта, где светила восходят, называется востоком, где заходят — западом.

М.И.Волобуева, А.В.Веселова, М.В.Костина

Задача № 36

Бетельгейзе в среднем имеет видимую звездную величину $+0^m.6$ и излучает только 12% энергии в видимом диапазоне спектра. Остальное в основном приходится на инфракрасный диапазон. Оцените, какой была бы средняя видимая звездная величина Бетельгейзе, если бы человеческий глаз мог бы видеть не только в оптическом, но и в инфракрасном диапазоне.

Решение. Видимая звездная величина m по определению связана с освещенностью E, создаваемой объектом, как $m = -2.5\lg E + \mathrm{const}$. Поэтому если обозначить индексом 0 величины для оптического диапазона, а без индекса — «новые» величины (с учетом инфракрасного диапазона), получим

$$m - m_0 = -2.5\lg\frac{E}{E_0} = -2.5\lg\frac{1}{0.12} = 2.5\lg 0.12 \approx -2.3,$$

откуда $m = m_0 - 2.3 = -1^m.7$.

М.В.Костина

Задача № 37

Некоторая комета обладает большой полуосью орбиты 60 а.е. Выберите верные утверждения.

1. Комета может удалиться от Солнца на 130 а.е.
2. В афелии скорость кометы может быть равна 5 км/с.
3. Период обращения кометы составляет около 465 лет.
4. Комета может приблизиться к Солнцу на 0.5 а.е.
5. Комета может пересечь орбиту Земли.
6. Скорость кометы на расстоянии 1 а.е. от Солнца может равняться 60 км/с.

Решение.

1. Большая полуось орбиты a конечна и положительна, что означает замкнутую орбиту, близкую к эллиптической. Вычислим афелийное расстояние как $a(1+e)$, где e — эксцентриситет орбиты. Для эллиптических орбит $e < 1$, поэтому $a(1+e) < 2a = 120$ а.е. Поэтому даже в самой дальней точке орбиты комета не может удалиться от Солнца дальше, чем на 120 а.е.

2. Афелийная скорость равна

$$v_\alpha = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a} \cdot \frac{1-e}{1+e}}.$$

При постоянной большой полуоси скорость в афелии будет тем больше, чем меньше e. Значит, максимально возможная афелийная скорость будет равна

$$v_\alpha = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a}} \approx 3.9\,\text{км/с}.$$

Поэтому скорость 5 км/с в афелии орбиты достигаться не может.

3. По третьему закону Кеплера определяем период обращения. Для объектов Солнечной системы квадрат периода обращения, выраженного в годах, численно равен кубу большой полуоси, выраженной в астрономических единицах:

$$T^2 = a^3 \Rightarrow T = \sqrt{a^3} = \sqrt{60^3} \approx 465\,\text{лет}.$$

4. Перигелийное расстояние равно $a(1-e)$. Чем ближе e к 1, тем меньше перигелийное расстояние, и комета может оказаться сколь угодно близко к Солнцу. Например, пусть $e = 0.995$, тогда перигелийное расстояние будет равно 0.3 а.е., что меньше 0.5 а.е.

5. Мы видим, что перигелийное расстояние может быть меньше 0.5 а.е. Тогда, если орбита кометы лежит в плоскости эклиптики, то комета должна будет пересечь земную орбиту.

6. Заметим, что комета находится на эллиптической орбите. Тогда на любом расстоянии от Солнца ее скорость должна быть меньше второй космической для этого расстояния. На земной орбите вторая космическая скорость равна примерно 42 км/с, значит, 60 км/с — слишком большая скорость для замкнутой орбиты.

Таким образом, верные утверждения здесь (c), (d), (e).

А.В.Веселова

Задача № 38

Спутник некоторой экзопланеты, находясь почти на таком же расстоянии от планеты, как и Луна от Земли, имеет период обращения в 5 раз меньший, чем период обращения Луны вокруг Земли. Во сколько раз масса этой экзопланеты больше массы Земли?

Решение. Запишем третий закон Кеплера для системы «Земля – Луна» и «экзопланета – спутник», пренебрегая массой меньших компонентов:

$$\frac{T_{☾}^2}{a_{☾}^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{\oplus}}, \quad \frac{T_s^2}{a_s^3} = \frac{4\pi^2}{GM_p}.$$

Поделим первое равенство на второе с учетом $a_{☾} = a_s$:

$$\frac{T_{☾}^2}{T_s^2} = \frac{M_p}{M_{\oplus}}.$$

Величина слева равна $5^2 = 25$, тогда и масса экзопланеты в 25 раз больше массы Земли.

П.А.Тараканов, А.В.Веселова

Задача № 39

В двойной звезде радиус первой компоненты равен 2.3 радиуса Солнца, второй — 3 радиуса Солнца. Температура первой равна 12500 K, температура второй — 4500 K. Выберите верные утверждения.

1. В телескоп с апертурой 25 см вторую компоненту можно увидеть глазом с расстояния 500 парсеков.
2. Абсолютная звездная величина второй звезды равна примерно +2.1.
3. Отношение светимости первой компоненты к светимости второй приблизительно равно 30.
4. Когда двойная при наблюдении в телескоп не разрешается, то её эффективная температура составит 17 000 K.
5. С расстояния в 20 парсеков первая компонента наблюдается как объект примерно 1.2 звёздной величины.
6. Первая звезда относится к спектральному классу B.

Решение.

1. Определим сначала абсолютную звездную величину второй компоненты. Ее светимость равна

   $$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 = 4\pi \cdot (3 \cdot 7 \cdot 10^8)^2 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 4500^4 \approx 1.3 \cdot 10^{27}\ \text{Вт} \ \approx 3.2\, L_\odot.$$

   По формуле Погсона

   $$M_\odot - M = 2.5 \lg \frac{L}{L_\odot}, \quad M = 3^m.5.$$

   Видимая звёздная величина с расстояния 500 парсеков равна

   $$m = M - 5 + 5 \lg r = 3.5 - 5 + 5 \cdot \lg 500 = 12^m.$$

   Определим предельную звездную величину при наблюдении глазом в телескоп:

   $$m_{\text{lim}} - 6 = 5 \lg \frac{25}{0.5}, \quad m_{\text{lim}} = 14.5 > m.$$

   Поэтому звезду можно будет увидеть.

2. Абсолютная звездная величина второй звезды, как мы уже знаем, равна $+3^m.5$.

3. Запишем отношение светимостей:

   $$\frac{L_1}{L_2} = \frac{4\pi R_1^2\, \sigma T_1^4}{4\pi R_2^2\, \sigma T_2^4} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \cdot \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^4 = \left(\frac{2.3}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{12500}{4500}\right)^4 = 35.$$

4. Формальная эффективная температура двойной звезды, видимой как одна, если исходить из звездных величин в разных полосах спектра или же из полного спектра, будет находиться между температурами ее компонентов.

   В этой системе радиусы звезд очень близки друг к другу, а температуры отличаются очень сильно. Тогда, в соответствии с законом Стефана–Больцмана, светимость более горячей звезды намного превосходит светимость более холодной. Таким образом, в этой системе будет доминировать излучение более горячей звезды и, если эффективная температура двойной будет определяться по полному распределению энергии в спектре, то она окажется близка к 12500 K.

5. Определим абсолютную звездную величину первой компоненты. Ее светимость равна

   $$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 = 4\pi \cdot (2.3 \cdot 7 \cdot 10^8)^2 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 12500^4 \approx 4.5 \cdot 10^{28}\ \text{Вт} \approx 114\, L_\odot.$$

По формуле Погсона

$$M_\odot - M = 2.5\lg\frac{L}{L_\odot}, \quad M = -0.34^m.$$

Видимая звёздная величина с расстояния 20 парсеков равна

$$m = M - 5 + 5\lg r = -0.34 - 5 + 5\ \lg 20 = 1^m.2.$$

6. Температура соответствует поздним подклассам спектрального класса B.

Таким образом, верные утверждения здесь (a), (c), (e), (f).

А.В.Веселова

Задача № 40

Вам предлагается несколько утверждений. Для каждого из них выберите, согласны Вы с ним («да») или нет («нет»), можно также выбрать вариант «не знаю».

1. Большой наклон орбиты тела к плоскости эклиптики однозначно свидетельствует о том, что тело не принадлежит Солнечной системе.
2. Увеличение изображения в телескопе зависит от параметров окуляра.
3. При покрытии звёзд Луной они скрываются за восточной частью её диска.
4. В конце своей жизни звёзды превращаются либо в чёрную дыру, либо в белый карлик.
5. В день летнего солнцестояния в Петербурге наблюдается самый ранний (по московскому времени) восход Солнца.
6. Красные звёзды холоднее голубых.
7. Все спутники Земли на круговых орбитах двигаются с одной и той же скоростью — первой космической.

Решение.

1. Большой наклон орбиты тела к плоскости эклиптики однозначно свидетельствует о том, что тело не принадлежит Солнечной системе: нет.

   Ряд астероидов имеет существенный наклон к плоскости эклиптики. Среди таких астероидов можно упомянуть околоземный астероид (2014) PP_{69} с наклоном $93^\circ.7$. Большинство комет и объектов пояса Койпера также имеют орбиты, сильно наклонённые к эклиптике.

2. Увеличение изображения в телескопе зависит от параметров окуляра: да.

   Понятие увеличения применимо только к телескопу с окуляром и при неизменном объективе определяется фокусным расстоянием окуляра.

3. При покрытии звёзд Луной они скрываются за восточной частью её диска: да.

   Луна в своём движении вокруг Земли движется против суточного движения небесной сферы, т.е. с запада на восток. Следовательно, при покрытии звезды Луна сначала касается их своим восточным краем.

4. В конце своей жизни звёзды превращаются либо в чёрную дыру, либо в белый карлик: нет.

   Например, одним из конечных результатов эволюции звезды может быть нейтронная звезда.

5. В день летнего солнцестояния в Петербурге наблюдается самый ранний (по московскому времени) восход Солнца: нет.

   Московское время — это гражданское, т.е. среднее солнечное время (с некоторым постоянным сдвигом, но в данном случае это не важно). В день летнего солнцестояния среднее солнечное время опережает истинное. Поэтому самый ранний восход Солнца по московскому времени будет до дня летнего солнцестояния.

6. Красные звёзды холоднее голубых: да.

   Согласно закону смещения Вина, чем горячее звезда, тем меньшая длина волны будет соответствовать максимуму спектральной плотности потока излучения.

7. Все спутники Земли на круговых орбитах двигаются с одной и той же скоростью — первой космической: нет.

   Это утверждение неверно. Первая космическая скорость зависит от расстояния до притягивающего центра как

   $$v(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

   Таким образом, с ростом расстояния скорость будет уменьшаться.

   Существует также более частное определение первой космической скорости — как круговой скорости на поверхности рассматриваемого тела (в данном случае Земли). Тогда ее значение станет фиксированным, но вот скорости движения спутников по круговым орбитам не будут с ней совпадать.

М.И.Волобуева, А.В.Веселова, М.В.Костина

Задача № 41

Оцените величину поглощения на луче зрения от Солнца до рассеянного скопления, если радиус скопления равен 7 световым годам, угловой диаметр равен $6'$. Видимая звездная величина скопления равна $+8^m$, а абсолютная звёздная величина равна -6^m.

Решение. Сначала определим расстояние до скопления, пользуясь информацией о угловом и линейном радиусе. Поскольку угловые размеры скопления малы, то расстояние определяем через отношение линейного и углового радиусов:

$$r \approx \frac{R}{\alpha} = \frac{7\,\text{св. лет}}{\frac{6}{2}\cdot 60\cdot \frac{1}{206265}} = 8\cdot 10^3\,\text{св. лет} \approx 2.5\cdot 10^3\,\text{пк}.$$

С учётом поглощения A связь между видимой звёздной величиной m, абсолютной звёздной величиной M и расстоянием r имеет вид

$$m = M - 5 + 5\lg r + A.$$

Отсюда

$$A = m - M + 5 - 5\lg r = 8 - (-6) + 5 - 5\lg(2.5\cdot 10^3) \approx 2^m.$$

А.В.Веселова

Задача № 42

Галактика обладает космологическим красным смещением 0.02, а видимый угловой диаметр её равен $1'$. Выберите верные утверждения.

1. В телескоп с диаметром зеркала 15 см принципиально возможно увидеть отдельные детали галактики.
2. Галактика приближается к наблюдателю со скоростью 6 тысяч км/с.
3. Для земного наблюдателя видимая звездная величина галактики может быть ярче -1^m.
4. Линейный диаметр галактики лежит в интервале от 20 до 30 кпк.
5. Расстояние до галактики лежит в интервале от 78 до 92 Мпк.
6. Если галактика находится в направлении созвездия Стрельца, то ее может не быть видно при наблюдении в оптическом диапазоне.

Решение.

1. Определим разрешающую способность телескопа:

$$\alpha[\text{рад}] \approx \frac{\lambda}{D} = \frac{5 \cdot 10^{-7}\,\text{м}}{0.15\,\text{м}} = 3 \cdot 10^{-6}\,\text{рад} \approx 0'.01.$$

   Разрешающая способность существенно меньше размеров галактики, поэтому можно надеяться увидеть отдельные крупные детали структуры.

   Можно обойтись и без вычислений, вспомнив, что $1'$ — это характерная разрешающая способность человеческого глаза. При использовании телескопа она явно будет лучше, поэтому ее хватит для наблюдения крупных деталей.

2. В условии указано, что смещение линий в спектре обусловлено космологическим расширением Вселенной. Это означает, что галактика будет удаляться от нас.

   При этом скорость удаления галактики за счет расширения Вселенной будет равна $v = cz = 6 \cdot 10^3$ км/с. Если предположить, что галактика находится в скоплении и имеет собственную скорость, то для достижения скорости приближения 6 тысяч км/с собственная скорость должна быть равна 12 тысяч км/с, а это довольно много даже для богатого скопления. Во всяком случае, из данных задачи это утверждение никак не следует.

3. Можно отметить, что при указанной видимой звездной величине объект наблюдался бы невооруженным глазом. Среди наблюдаемых невооружённых глазом галактик настолько ярких нет. Тем не менее, решим задачу немного иным способом. Определим, на каком расстоянии находится галактика:

$$v = HD, \quad D = \frac{v}{H} = \frac{6 \cdot 10^3}{72} = 83\,\text{Мпк}.$$

   Посмотрим, какую абсолютную звездную величину должна иметь галактика, чтобы видимая звездная величина равнялась -1:

$$M = m + 5 - 5\lg r = -1 + 5 - 5\,\lg(83 \cdot 10^6) \approx -36^m.$$

   Это неправдоподобно яркий объект: например, Млечный Путь по оценкам имеет абсолютную звездную величину $\sim -22^m$.

4. На расстоянии 83 Мпк угловому размеру $1'$ соответствует линейный размер

$$D = \alpha \cdot r = \frac{1'}{60 \cdot 57.3} \cdot 83 \cdot 10^6 = 2.4 \cdot 10^4\,\text{пк} = 24\,\text{кпк}.$$

5. В одном из пунктов выше мы определили расстояние, оно оказалось равным примерно 83 Мпк.

6. В направлении созвездия Стрельца находится центр нашей Галактики, луч зрения при этом проходит через галактический диск, испытывая значительное поглощение. В направлении на центр Галактики поглощение достигает десятков звездных величин, что делает невозможным наблюдения в оптическом диапазоне.

Таким образом, верные утверждения здесь (a), (d), (e), (f)

А.В.Веселова

Задача № 43

Определите максимальную элонгацию астероида 2020 AV2 при наблюдении с Земли, если большая полуось его орбиты равна 0.555 а.е., а эксцентриситет равен 0.177. Орбиту Земли считайте круговой.

Решение. В условиях задачи максимальная элонгация соответствует наибольшему угловому удалению объекта от Солнца при наблюдении с Земли. Такая конфигурация будет достигаться в момент, когда луч зрения наблюдателя пройдет по касательной к точке орбиты, наиболее удалённой от Солнца, то есть к точке афелия.

В точке афелия расстояние от Солнца до астероида равно

$$r_\alpha = a(1+e) = 0.555 \cdot (1+0.177) \approx 0.653 \text{ а.е.}$$

Угловое расстояние l, соответствующее данному линейному расстоянию, можно определить из прямоугольного треугольника «Солнце – астероид – Земля»:

$$\sin l = \frac{r_\alpha}{a_\oplus} = \frac{0.653}{1} = 0.653.$$

Получаем, что $l = 41°$.

А.В.Веселова, П.А.Тараканов

Задача № 44

Некоторая звезда имеет радиус 44 радиуса Солнца и массу 2.5 массы Солнца. Выберите верные утверждения.

1. Температура такой звезды может составлять 38000 K в течение 5 миллионов лет.

2. Средняя плотность звезды равна 0.04 килограммов на кубический метр.

3. Планета с большой полуосью орбиты 2 а.е. не может иметь эксцентриситет орбиты больше 0.95.

4. Звезда не может вращаться с периодом меньше 1 месяца.

5. Вокруг такой звезды может вращаться планета с орбитальным периодом 13 суток.

6. Звезда не может вращаться с периодом больше 1 года.

Решение.

1. Если сопоставить массу звезды и ее радиус, то можно понять, что это звезда на поздней стадии эволюции, красный гигант. У таких звёзд температура не может быть больше 5000 K.

2. Средняя плотность равна отношению массы к объему объекта:
$$\bar{\rho} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{2.5 \cdot 2 \cdot 10^{30}}{\frac{4}{3}\pi \cdot (44 \cdot 7 \cdot 10^8)^3} = 0.04\,\text{кг/м}^3.$$

3. Если эксцентриситет будет более 0.95, то перицентрическое расстояние будет меньше $a\,(1-0.95) = 2 \cdot 1.5 \cdot 10^{11} \cdot (1-0.95) = 1.5 \cdot 10^{10}$ м. Радиус звезды равен $44 \cdot 7 \cdot 10^8 = 3 \cdot 10^{10}$ м, то есть орбита заходила бы внутрь звезды.

4. Предельной скоростью вращения звезды на экваторе является первая космическая скорость:
$$v_I = \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$
Тогда минимальный период обращения будет равен
$$T = \frac{2\pi R}{v_I} = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM}} = \sqrt{\frac{4\pi^2(44 \cdot 7 \cdot 10^8)^3}{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 2.5 \cdot 2 \cdot 10^{30}}} = 1.9 \cdot 10^6\,\text{с.} \approx 22\,\text{сут.}$$
Значение, полученное нами, формально меньше месяца. Но как мы знаем, при вращении жидкого или газового объекта форма его будет меняться: чем выше скорость вращения, тем более уплощенной становится форма. Для таких фигур предельная скорость вращения будет меньше (примерно вдвое, а с учетом хода плотности и сильнее), что даст большее время вращения.

5. Определим большую полуось орбиты такой планеты. Воспользуемся третьим законом Кеплера в системе единиц «а.е. – год – масса Солнца»:
$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{1}{M}\,, a = \sqrt[3]{MT^2} = \sqrt[3]{2.5 \cdot (13/365)^2} = 0.15\,\text{а.е.}$$
Если перевести радиус звезды в астрономические единицы, мы получим 0.2 а.е., иначе говоря, планета должна была бы оказаться внутри звезды.

6. В действительности звезда может практически не вращаться, поэтому верхний предел для скорости определить сложно. Мы видели, что при периоде вращения, равном месяцу, звезда вращается с предельной скоростью. Поэтому следует ожидать существенно больших периодов вращения.

Таким образом, верные утверждения здесь (b), (c), (d).

А.В.Веселова

Задача № 45

Вам предлагается несколько утверждений. Для каждого из них выберите, согласны Вы с ним («да») или нет («нет»), можно также выбрать вариант «не знаю».

1. Через несколько тысяч лет список зодиакальных созвездий изменится.
2. Некоторые галактики называют неправильными из-за аномального химического состава.
3. Закон Хаббла выполняется не для всех галактик.
4. Солнце выглядит жёлтым из-за влияния земной атмосферы, на самом деле оно голубоватое.
5. Плотность чёрной дыры может быть меньше плотности воды.
6. Луна вызывает прилив не только на обращённой к ней стороне Земли, но и на противоположной.
7. Разрешающая способность сколь угодно большого наземного телескопа с простым зеркалом примерно равна разрешающей способности небольшого любительского телескопа.

Решение.

1. Через несколько тысяч лет список зодиакальных созвездий изменится: нет.

   Для изменения списка зодиакальных созвездий требуется изменение положения в пространстве плоскости эклиптики, которое, хотя и происходит из-за гравитационного воздействия других планет, оказывается сравнительно малым. Как следствие, в ближайшие 3–5 тысяч лет список не изменится (но через больший интервал времени Солнце в своём годичном движении будет слегка «задевать» созвездия Кита и Ориона).

2. Некоторые галактики называют неправильными из-за аномального химического состава: нет.

   Название обусловлено неправильностью формы галактик.

3. Закон Хаббла выполняется не для всех галактик: да.

   Близкие к Млечному Пути галактики, входящие в Местную группу, не подчиняются закону Хаббла. Например, Туманность Андромеды и Млечный Путь взаимно сближаются, а не удаляются. Также закону Хаббла не подчиняются очень далёкие от нас галактики.

4. Солнце выглядит жёлтым из-за влияния земной атмосферы, на самом деле оно голубоватое: нет.

   Максимум интенсивности излучения Солнца приходится на длины волн, соответствующие жёлто-зелёной части спектра.

5. Плотность чёрной дыры может быть меньше плотности воды: да.

   Формальной границей чёрной дыры является радиус Шварцшильда. Так как он прямо пропорционален массе, то средняя плотность чёрной дыры, определенная как масса, делённая на объём, обратно пропорциональна квадрату массы. Таким образом, чем массивнее чёрная дыра, тем меньше её средняя плотность. Плотности чёрных дыр звёздных масс большие, больше ядерной, а вот плотности сверхмассивных чёрных дыр очень малы. Например, средняя плотность знаменитой чёрной дыры в центре галактики M87 меньше плотности воздуха у поверхности Земли.

6. Луна вызывает прилив не только на обращённой к ней стороне Земли, но и на противоположной: да.

   Так как приливное ускорение — это разность ускорений в точке наблюдения и в центре Земли, то приливные ускорения в подлунной точке и в точке, противоположной Луне, будут практически равны по величине и противоположны по направлению. Это создаст два приливных «горба» с двух сторон Земли.

7. Разрешающая способность сколь угодно большого наземного телескопа с простым зеркалом примерно равна разрешающей способности небольшого любительского телескопа: да.

   Влияние атмосферы ограничивает предельную разрешающую способность наземных телескопов примерно $1'' \div 2''$. Сравнительно редко удается добиться лучшего разрешения, но не намного.

М.И.Волобуева, М.В.Костина

Задача № 46

Начинающий петербургский астроном Вася ночью 28 июля 2018 года увидел недалеко от полной Луны довольно яркий красно-оранжевый объект. Вася утверждает, что это был Альдебаран, а его друг Аркадий — что это был Марс. Взглянув в компьютерный планетарий, мальчики убедились, что один из них был прав. Кто же был прав и почему?

Решение. В июле Солнце находится в созвездиях Близнецов и Рака, звезда Альдебаран находится в созвездии Тельца, которое находится близ указанных созвездий. Это означает, что Альдебаран в момент наблюдения находился недалеко от Солнца. Но в момент полнолуния Луна находится в противоположной области от Солнца, так что не может оказаться рядом с Альдебараном. Поэтому утверждение Васи не может быть верным.

Проверим, может ли утверждение Аркадия быть верным. Во время великих противостояний Марс виден невооруженным глазом, при этом он по видимому блеску может превышать яркие звезды земного неба. В конце июля 2018 года состоялось великое противостояние Марса, поэтому полная Луна находилась в той же области неба, где и Марс.

А.В.Веселова

Задача № 47

В книгах по истории культуры иногда встречается утверждение, что великий испанский писатель Мигель де Сервантес и великий английский драматург Уильям Шекспир умерли в один день — 23 апреля 1616 года. Однако хотя в день смерти каждого из них на календаре действительно была эта дата, в реальности один из них пережил другого. Кто именно умер позже и на сколько дней?

Решение. Казалось бы, совпадение календарных дат должно означать и совпадение дней, однако это не обязательно, если Испания и Англия пользовались разными календарями. Проверим, насколько правдоподобно такое предположение.

В самом деле, григорианский календарь был введен в 1582 году буллой римского папы Григория XIII, но первоначально на него перешли только католические страны, а для всех остальных процесс перехода растянулся на несколько веков. Поскольку в условии задачи прямо сообщается, что разница была, остается предположить, что Англия перешла на григорианский календарь позже 1616 года (и это действительно так — переход произошел в 1752 году).

Осталось выяснить, какой была разница календарей в XVII веке. Поскольку устройство григорианского календаря таково, что 1700, 1800 и 1900 годы в нем были на сутки короче, чем в юлианском, то зная современную разницу — 13 суток — можно сделать вывод, что в 1616 году календари различались на 10 суток, причем одна и та же календарная дата в юлианском наступала позже. Таким образом, позже на 10 дней умер Шекспир.

Следует также отметить еще одну историческую деталь. В те времена дату смерти было принято фиксировать по дню похорон, поэтому фактически Сервантес умер еще на день раньше, и в современных источниках, как правило, упоминается 22 апреля. Однако ранее календарные даты считались одинаковыми, что и породило многочисленные обсуждения их совпадения, некоторые историки даже относили к этой дате формальный конец эпохи Возрождения.

П.А. Тараканов

Задача № 48

В записках одного юного путешественника начинающий астроном Вася прочитал такие строки: «Море спокойно, и Орион погружается в его тёплые воды, согретые жарким июльским солнцем. Я могу ещё долго любоваться красотой звёздного неба, ведь солнце взойдёт лишь спустя шесть часов». Вася догадался, что путешественник допустил ошибку в своём описании. Объясните, почему описанной ситуации не могло быть.

Решение. В июле Солнце находится в созвездии Близнецов и в созвездии Рака. Эти созвездия расположены на небе близко к созвездию Ориона, причем восточнее и севернее него. Это означает, что во время наблюдения Солнце находилось вблизи указанного созвездия к северо-востоку от него. Если путешественник находился в северном полушарии, то в момент погружения Ориона за горизонт Солнце еще не зашло. В связи с этим наблюдать созвездие Ориона на заходе будет невозможно.

В южном полушарии возможна ситуация, при которой Орион ещё небольшое время после захода Солнца находится над горизонтом, т.к. Орион южнее Солнца и, следовательно, проводит над горизонтом больше времени, чем Солнце. Однако такая ситуация возможна только в высоких широтах Южного полушария. Так как там в это время зима, то не приходится говорить о тёплых водах. К тому же в июле в высоких широтах Южного полушария Солнце будет находиться над горизонтом меньшую часть времени, то есть под горизонтом оно будет находиться более 12 часов. Поскольку в момент захода Ориона Солнце будет неглубоко под горизонтом, то до его восхода пройдет существенно больше 6 часов.

А.В. Веселова

Задача № 49

Вокруг горячего белого карлика WDJ0914+1914 обращается планета с массой Нептуна (10^{23} тонн). Так как белый карлик очень горячий, а планета расположена близко к нему, то атмосфера планеты потихоньку испаряется со скоростью

3300 тонн за секунду. Подсчитано, что через 350 миллионов лет белый карлик остынет до такой степени, что планета перестанет испаряться. Оцените, на сколько процентов своей массы «похудеет» планета за это время?

Решение. Оценим, сколько секунд в году (результат очень полезно запомнить, поскольку пересчет годов в секунды встречается в астрономических задачах крайне часто).

$$365 \text{ дней} = 365 \times 24 \text{ часа} = 365 \times 24 \times 60 \text{ минут} = \\ = 365 \times 24 \times 60 \times 60 \text{ секунд} \approx 3 \cdot 10^7 \text{ секунд.}$$

Тогда за 350 миллионов лет планета потеряет

$$350 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^7 \cdot 3300 \approx 3 \cdot 10^{19} \text{ тонн.}$$

Доля массы, которую планета потеряет, окажется равной

$$\frac{3 \cdot 10^{19}}{10^{23}} = 3 \cdot 10^{-4}$$

и поскольку 1% — это 10^{-2}, получаем, что планета потеряет 0.03 % своей массы.

М.В.Костина

Задача № 50

Школьник Вася на осенних каникулах, длившихся с 26 октября по 1 ноября включительно, увидел полную Луну. Может ли он увидеть полную Луну в этом же учебном году на весенних каникулах, если они длятся с 22 марта по 28 марта (также включительно)?

Решение. Определим сначала, сколько дней пройдет от начала осенних каникул до начала весенних каникул. До 1 ноября прошло 6 дней, еще 30 дней ноября, 31 день декабря, 31 день января, 28 дней февраля, 21 день марта, итого $6 + 30 + 31 + 31 + 28 + 21 = 147$ дней.

Период повторения фаз Луны составляет 29.5 дней. За 147 дней пройдет $147/29.5 \approx 5$ (точнее 4.98) таких периодов, поэтому в момент начала как осенних, так и весенних каникул фаза Луны будет практически одна и та же. Это значит, что если некоторая фаза Луны наблюдалась на осенних каникулах, то та же фаза будет наблюдаться и на весенних.

В 2020/2021 учебном году на осенних каникулах Луна была полной 31 октября, а на весенних каникулах полнолуние придется на 28 марта.

А.В.Веселова

Задача № 51

Будем считать, что большинство звёзд Млечного Пути расположено в диске с характерным диаметром 100 тысяч световых лет и толщиной около 3 тысяч световых лет. Общая масса диска составляет около $4{\cdot}10^{10}$ масс Солнца. Во сколько раз средняя концентрация звёзд диска меньше средней концентрации звезд шарового скопления с диаметром 150 световых лет и общей массой $4 \cdot 10^6$ масс Солнца.

Решение. Для удобства будем считать, что все звезды имеют массу, равную массе Солнца. На самом деле это не вполне верно, поскольку наиболее многочисленными являются маломассивные красные звезды, но для решения задачи достаточно считать, что все массы одинаковы.

Определим концентрацию объектов. Для этого поделим количество звезд на объем структуры. Диск Галактики будем считать цилиндром с радиусом 50 тысяч световых лет и высотой 3 тысячи световых лет. Тогда концентрация равна

$$n_1 = \frac{N_1}{\pi R^2 h} = \frac{4 \cdot 10^{10}}{\pi \cdot (5 \cdot 10^4)^2 \cdot 3 \cdot 10^3} \approx 0.0017\,/\text{св. год}^3.$$

Объем шарового скопления равен

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3 = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot (1.5 \cdot 10^2)^3 = 1.8 \cdot 10^6\,\text{св. лет}^3.$$

Тогда концентрация звезд в скоплении будет равна

$$n_2 = \frac{N_2}{V_2} = \frac{4 \cdot 10^6}{1.8 \cdot 10^6\,\text{св. год}^3} = 2.3\,/\text{св. год}^3.$$

Отношение концентраций будет равно

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{2.2}{0.0017} = 1.3 \cdot 10^3.$$

А.В.Веселова

Задача № 52

Найдите лишний по двум разным критериям объект в списке: Сириус, Арктур, Альдебаран, Поллукс. Объясните свой выбор.

Решение. Возможный список критериев разделения будет достаточно объемным, поэтому выделим только основные. Все звезды в списке, кроме Сириуса, являются красноватыми по цвету (имеют спектральный класс K), все они являются красными гигантами (у Альдебарана, как и у Сириуса, есть спутник-карлик), все три находятся в Северном полушарии неба. Сириус имеет бело-голубой цвет (спектральный класс A), находится в южном полушарии неба и является звездой главной последовательности, что и выделяет его из этого списка.

Перечислим также вероятные неверные ответы: α своих созвездий являются все, кроме Поллукса, входят в состав двойной системы две звезды из четырех, ярчайшими звездами своих созвездий являются все четыре (даже Поллукс, хотя он β Близнецов), отрицательную звездную величину имеют две звезды из четырех (Сириус и Арктур), планеты известны у двух звезд из четырех (Поллукс и Альдебаран).

А.В.Веселова, П.А.Тараканов

Задача № 53

Уфологи бьют тревогу — загадочный радиосигнал зафиксирован вновь! Но если три года назад расстояние до его источника оказалось равным шести тысячам световых лет, сейчас источник оказался на расстоянии всего полторы тысячи световых лет. Вторжение «гостей» из далекого космоса неизбежно и неотвратимо! Считая, что источник у сигналов и правда один и тот же и что он движется к Земле по прямой с постоянной скоростью, определите, сколько у человечества осталось времени, чтобы устроить «гостям» торжественный прием.

Решение. Первое, что привлекает к себе внимание – невероятная скорость источника. Тысячи световых лет за какие-то три года! Кажется, что такого просто не может быть, ведь скорость света на порядки меньше. Однако же, такое вполне возможно. Источник почти догоняет свой свет, уменьшая разницу между приходами сигналов из разных точек. Пусть первое расстояние $r_1 = 6 \cdot 10^3$ св. лет, а второе $r_2 = 1.5 \cdot 10^3$ св. лет. Положим, что в момент времени t_1 источник находился на расстоянии r_1, а в момент времени t_2 источник находился на расстоянии r_2. Пусть t_{1g} и t_{2g} – моменты принятия сигналов от источника на Земле, t_{3g} – момент прибытия источника к Земле, а v – скорость источника. Источник прибудет через время $\tau = t_{3g} - t_{2g}$. Запишем систему уравнений, записав разные моменты времени, и из них найдем искомую величину τ:

$$\begin{cases} t_{1g} = t_1 + \dfrac{r_1}{c} \\ t_{2g} = t_2 + \dfrac{r_2}{c} \\ t_{3g} = t_2 + \dfrac{r_2}{v} \\ t_2 - t_1 = \dfrac{r_1 - r_2}{v} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_{3g} - t_{2g} = \dfrac{r_2}{v} - \dfrac{r_2}{c} \\ t_{2g} - t_{1g} = \dfrac{r_1 - r_2}{v} + \dfrac{r_2 - r_1}{c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_{3g} - t_{2g} = r_2 \left(\dfrac{1}{v} - \dfrac{1}{c} \right) \\ \dfrac{1}{v} - \dfrac{1}{c} = \dfrac{t_{2g} - t_{1g}}{r_1 - r_2} \end{cases}$$

Таким образом, после всех преобразований получаем, учитывая, что $t_{2g} - t_{1g} = \Delta t = 3$ года, итоговые выражения для τ:

$$\tau = \Delta t \cdot \frac{r_2}{r_1 - r_2} = 1 \text{ год.}$$

В.А.Дмитриев

Задача № 54

Петербургскому астроному в ночь с 17 на 18 сентября необходимо пронаблюдать четыре звезды: α Орла, α Волопаса, ζ Тельца, θ Водолея. В каком порядке их удобнее наблюдать в моменты их лучшей видимости в эту ночь и почему?

Решение. Рассматриваемая ночь находится недалеко от даты осеннего равноденствия, значит, приближенно можно считать, что Солнце находится около точки осеннего равноденствия, расположенной в Деве.

С созвездием Девы с востока граничит созвездие Весов, а севернее него — Волопас. Значит, у астронома будет немного времени, чтобы пронаблюдать Арктур (α Волопаса), так как затем звезда будет еще ближе к горизонту, что ухудшит наблюдения.

Продолжим движение по эклиптике на восток: после Весов идут Скорпион, Змееносец и Стрелец, а севернее которого находится как раз Орел (Лебедь «летит» за Орлом вдоль полосы Млечного пути, а центр нашей Галактики, как известно, находится в созвездии Стрельца). Значит, самое время наблюдать Альтаир (α Орла), причем, эта звезда будет как раз в кульминации.

После Скорпиона следует Козерог, а потом — Водолей. Также около кульминации будет наблюдаться звезда θ Водолея.

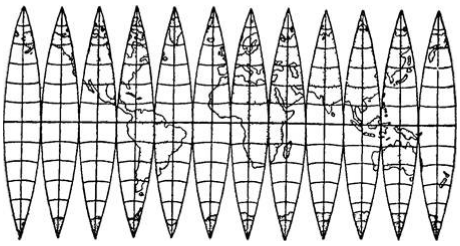
Примерно в истинную солнечную полночь кульминирует точка весеннего равноденствия, находящаяся в Рыбах (которые следуют после Водолея). Затем настанет черед Овна, и уже перед рассветом — Тельца. Так что последней звездой, которую будет наблюдать астроном — ζ Тельца.

В.В. Григорьев

Задача № 55

Для получения изображения Hubble Deep Field South камере WFPC2 потребовалась суммарная экспозиция продолжительностью 99300 секунд при наблюдении на длине волны 606 нанометров. Размеры области неба — 2.5×2.5 угловой минуты. Сколько лет потребовалось бы для съемки всего неба?

Решение. Оценим площадь неба. Тот, кто знает, может сразу написать, что площадь неба составляет около 40 тысяч кв. градусов. Кто не знает, может с неплохой точностью оценить площадь неба как площадь карты звездного неба: 180° по ширине (от полюса, до полюса) и 360° по длине вдоль экватора, т.е. $180^\circ{\cdot}360^\circ \approx 65$ тысяч кв. градусов. Видно, что эта оценка в полтора раза выше, чем истинное значение. Очевидно, что эта разница берется из-за невозможности без разрывов изобразить поверхность шара на плоскости. Вспомнив, как выглядит изображение развертки глобуса, например Земли (см. рисунок внизу), можно даже попытаться оценить ошибку, которую мы делаем, считая площадь неба как площадь карты.



В каждом квадратном градусе содержится $60\times 60 = 3600$ квадратных угловых минут. Площадь одного снимка составляет $2.5 \cdot 2.5 = 6.25$ квадратных угловых минут. Тогда в 1 квадратном градусе поместится $3600/6.25 = 576$ снимков, а для съемки всего неба потребуется $4 \cdot 10^4 \cdot 576 \approx 2.3 \cdot 10^7$ снимков.

На каждый снимок уходит 99300 секунд, округлим до 10^5 секунд. Тогда для получения $2.3 \cdot 10^7$ снимков потребуется $2.3 \cdot 10^7 \cdot 10^5 = 2.3 \cdot 10^{12}$ секунд. В одном году примерно $3 \cdot 10^7$ секунд. Тогда на съемку всего неба понадобится $2.3 \cdot 10^{12}/(3 \cdot 10^7) \approx 8 \cdot 10^4$ лет.

А.В.Веселова

Задача № 56

В далекой галактике произошла мощная вспышка, в результате которой выделилось 10^{55} Дж энергии. Предполагая, что эта вспышка явилась результатом падения вещества на центральную чёрную дыру, оцените количество звезд, похожих на Солнце, которые должны были бы упасть на чёрную дыру при этом. Можно считать, что при падении в виде излучения выделяется половина энергии покоя аккрецирующей массы (энергия покоя E_0 массы M равна $E_0 = Mc^2$, где c — скорость света).

Решение. Определим величину массы, необходимую для вспышки. Поскольку при при аккреции массы M выделится энергия $Mc^2/2$, значит, для 10^{55} Дж необходима аккреция

$$M = \frac{2 \cdot 10^{55}}{9 \cdot 10^{16}} \approx 2 \cdot 10^{38} \text{ кг}.$$

Масса Солнца равна $2 \cdot 10^{30}$ кг, тогда количество звезд окажется равным 10^8.

А.В.Веселова

Задача № 57

В конце декабря начинающий астроном из Санкт-Петербурга пронаблюдал звезду Миру Кита ($\delta = -3°$) вблизи максимума блеска за два часа до ее кульминации. Он сразу же сообщил своему другу из села Хатанга (72° с.ш., 102°.5 в.д.) о своем наблюдении. Может ли наблюдатель из Хатанги увидеть Миру в течение получаса после наблюдения из Петербурга?

Решение. Проверим для начала, является ли Мира восходящей для наблюдателя в Хатанге. Для этого оценим ее максимальную высоту над горизонтом, то есть высоту верхней кульминации: $h = 90° - \varphi + \delta = 15°$. Это положительная величина, поэтому звезда, хоть и не высоко, но поднимается над горизонтом. Заметим также, что звезда находится немного ниже небесного экватора, поэтому находится над горизонтом немногим менее половины суток.

Определим примерное время, когда Мира находится выше всего над горизонтом. Созвездие Кита находится примерно под созвездием Рыб и Овна, а Мира расположена под границей этих созвездий. Поскольку наблюдения ведутся в окрестности зимнего солнцестояния, то есть Солнце в созвездии Стрельца, то Мира будет находиться в противоположной Солнцу области, то есть кульминирует она ночью.

Долгота Санкт-Петербурга примерно равна 30°, Хатанга находится на 72.5° восточнее, поэтому время в Хатанге обгоняет петербургское на $72.5°/(15°/h) = 4^h50^m$. Тогда для наблюдателя в Хатанге Мира уже пройдет верхнюю кульминацию, и после нее пройдет еще около 2.5 часов. При этом, поскольку от верхней кульминации звезды до момента захода проходит лишь немногим меньше 6 часов, то звезда еще будет достаточно высоко над горизонтом. Отметим также (самое важное), что Хатанга находится за полярным кругом, поэтому в окрестности дня зимнего солнцестояния Солнце над горизонтом не поднимается, поэтому даже в утренние часы засветка не будет мешать наблюдениям.

А.В.Веселова

Задача № 58

Пять лет назад японская орбитальная обсерватория «Хитоми» разрушилась на орбите из-за ошибки системы ориентации, которая заставила обсерваторию слишком быстро вращаться вокруг своей оси. Оцените период вращения, при котором обсерватория стала разрушаться, если известно, что ее длина составляла 14 м.

Решение. При вращении объекта на его части, находящиеся на расстоянии R от оси вращения, в системе отсчета, связанной с объектом, действует центробежное ускорение $a = \omega^2 R$, где ω — угловая скорость вращения.

Заметим, что то же утверждение можно сформулировать и иначе — чтобы такая часть объекта не оторвалась от него, на нее со стороны объекта должно действовать центростремительное ускорение. Оно, как известно, равно

$$a = \frac{v^2}{R},$$

и поскольку $v = \omega R$, мы получаем уже известный нам результат.

Пусть «Хитоми» не повезло и она стала вращаться, так что самые далекие от ее центра части оказались и наиболее далекими от оси вращения (в действительности, по-видимому, это так и было). Тогда один из концов обсерватории будет двигаться относительно другого с ускорением

$$a' = 2a = \omega^2 \cdot 2R = \omega^2 \cdot l,$$

где $l = 14$ м — длина обсерватории. Выражая период вращения через угловую скорость, получаем

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{a'}}.$$

Осталось понять, откуда можно взять оценку a'. Однако обсерватория строилась на Земле и, следовательно, не должна была разваливаться под действием собственной тяжести, поэтому $a' \gtrsim g$. Более того, при выводе на орбиту полезная нагрузка ракет-носителей (в штатном режиме полета) испытывает перегрузки 3–4 g, поэтому в качестве нижней оценки a' можно взять $a' = 4g$. Поскольку вывод каждого лишнего килограмма на орбиту стоит очень дорого, это не только оценка максимального ускорения снизу, но и просто правдоподобная оценка — делать обсерваторию существенно прочнее, чем необходимо, попросту невыгодно. А тогда, подставляя данные в единицах СИ, получаем

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{a'}} \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{4g}} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{14}{10}} \approx 4 \text{ с}.$$

Таким образом, обсерватория должна была начать разваливаться при вращении с периодом около 4 секунд. Интересно заметить, что последующие наблюдения обломков с помощью спутниковых камер (специализированных телескопов, предназначенных для наблюдения за ИСЗ) вполне согласуются с полученным нами результатом.

М.В.Костина, П.А.Тараканов

Задача № 59

Вокруг белого карлика по круговой орбите обращается экзопланета, период обращения равен 1/60 орбитального периода Меркурия. Известно, что радиус белого карлика равен радиусу Земли, а средняя плотность равна $9 \cdot 10^8$ кг/м^3.

Могла ли планета существовать на этой орбите в то время, когда звезда еще была красным гигантом? Можно считать, что масса красного гиганта была вдвое больше массы белого карлика.

Решение. Начнем с поиска массы белого карлика $\mathfrak{M}_{\text{WD}}$:

$$\mathfrak{M}_{\text{WD}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\text{бк}} = \frac{4}{3}\pi(10 \cdot 6.4 \cdot 10^6\,\text{м})^3 \cdot 9 \cdot 10^5\,\text{кг/м}^3 = 10^{30}\,\text{кг} = 0.5\,\mathfrak{M}_\odot.$$

Отсюда сразу же видно, что красный гигант имел массу, равную солнечной.

Далее можно пойти двумя различными путями. Во-первых, можно вспомнить, что эволюция звезд одинаковых масс проходит примерно одинаково, поэтому красный гигант такой массы будет очень похож на Солнце на соответствующей стадии эволюции. Известно, что при этом Солнце расширится примерно до орбиты Меркурия, следовательно, планета, орбитальный период которой при движении вокруг звезды с меньшей, чем у Солнца, массой в несколько десятков раз меньше периода Меркурия, заведомо должна находиться существенно ближе к звезде, чем Меркурий. Это означает, что ответ на вопрос задачи — нет, не могла, при этом она оказалась бы внутри красного гиганта.

Во-вторых, можно честно посчитать радиус орбиты. По III закону Кеплера большая полуось орбиты (в данном случае — радиус) a и период обращения T связаны соотношением

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G\mathfrak{M}_{\text{WD}}}.$$

Если выразить большую полуось орбиты в астрономических единицах, период в годах, а массу центрального объекта — в массах Солнца, то соотношение будет выглядеть так:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{1}{\mathfrak{M}_{\text{WD}}}.$$

Можно либо приблизительно помнить период обращения Меркурия вокруг Солнца (около 90 суток), либо помнить примерное значение большой полуоси его орбиты (0.4 а.е.), что позволит по третьему закону Кеплера оценить его орбитальный период. Таким образом, период обращения экзопланеты равен 1.5 суткам, что примерно равно $4 \cdot 10^{-3}$ года.

Тогда радиус орбиты равен

$$a = \sqrt[3]{T^2\mathfrak{M}_{\text{WD}}} = \sqrt[3]{(4 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 0.5} = \sqrt[3]{8 \cdot 10^{-6}} = 0.02\,\text{а.е.}.$$

Остается лишь прикинуть радиус Солнца в тех же единицах. Это можно и помнить, и получить (из углового размера Солнца на небе), в результате окажется, что он равен примерно 1/200 а.е. Таким образом, если при переходе на стадию красного гиганта Солнце увеличит свой размер более чем в 4 раза (а это очевидно так), то планета окажется внутри, и мы приходим к тому же ответу.

Интереса ради отметим, что подобные планетные системы действительно существуют. Прототипом для этой задачи послужил белый карлик WD 1856+534 и его планета, параметры были лишь немного округлены для удобства вычислений.

А.В.Веселова, П.А.Тараканов

Задача № 60

В некоторой планетной системе масса центральной звезды составляет 4 массы Солнца. Вокруг звезды по круговой орбите радиуса 4 а.е. вращается планета массой $3 \cdot 10^{24}$ кг. На расстоянии 400 тысяч километров от центра планеты по круговой орбите в той же плоскости вращается спутник радиусом 800 км. Определите период повторения фаз спутника для наблюдателя на планете.

Решение. Задача сводится к определению синодического периода спутника для наблюдателя на планете. Сначала определим период обращения планеты вокруг звезды, пользуясь третьим законом Кеплера. Если выразить большую полуось орбиты в астрономических единицах, период в годах, а массу центрального объекта — в массах Солнца, то соотношение будет выглядеть так:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{1}{\mathfrak{M}}.$$

Отсюда

$$T = \sqrt{\frac{a^3}{\mathfrak{M}}} = \sqrt{\frac{4^3}{4}} = 4\,\text{года}.$$

Также определим период обращения спутника вокруг планеты, пользуясь третьим законом Кеплера в сопоставлении планеты и Земли. Вспомним, что масса Земли примерно $6 \cdot 10^{24}$ кг, расстояние от Земли до Луны $4 \cdot 10^5$ км, период ее обращения (сидерический месяц) равен 27.3 суткам. Тогда радиус орбиты оказывается таким же, масса планеты — в два раза меньше массы Земли, следовательно, период обращения спутника должен быть в $\sqrt{2}$ раз больше и равняться $27.3 \cdot \sqrt{2} \approx 38$ суток, что, с учетом точности исходных данных, можно и нужно округлить до $T_s = 0.1$ года (земного).

Теперь у нас все готово для вычисления синодического периода в случаях, когда обращение спутника вокруг планеты является прямым или ретроградным… но это можно и не делать. Известно, что сидерический и синодический месяцы (обычные лунные, на Земле) отличаются меньше чем на 1/10, а в обсуждаемой планетной системе сидерический месяц увеличился заметно меньше, чем продолжительность года. Отсюда сразу же следует, что относительная разница между синодическим и сидерическим месяцами для этой планетной системы будет еще меньше, поэтому с доступной для вычислений точностью синодический месяц (как при прямой, так и при ретроградной орбите спутника) просто совпадает с сидерическим и составляет 0.1 земного года.

А.В.Веселова

Задача № 61

Капелла — тесная двойная звезда, состоящая из почти одинаковых компонент. Впервые уверенно разрешить её компоненты без использования интерферометра удалось только при наблюдениях на телескопе Хаббла в ультрафиолетовом диапазоне на длине волны 3000 Å. Оцените угловое расстояние между компонентами. Диаметр зеркала телескопа Хаббла равен 2.4 метра.

Решение. Угловое разрешение

$$\alpha \approx 1.2 \cdot \frac{\lambda}{D} = 1.2 \cdot \frac{3000}{10^{10} \cdot 2.4} \approx 0''.03$$

Это минимально возможное расстояние между компонентами, при котором их можно будет различить. С другой стороны, можно заметить, что результат не должен быть и существенно больше — в противном случае компоненты удалось бы разрешить и при наблюдениях в оптическом диапазоне (или при наземных наблюдениях в близком ИК-диапазоне, где эффективно можно использовать адаптивную оптику).

М.В.Костина

Задача № 62

Астероид радиусом 50 метров в некоторый момент времени находился на расстоянии 0.866 а.е. от Солнца и при наблюдении с Земли угол между астероидом и Солнцем составлял 60°. Оцените видимую звездную величину астероида в этот момент. Возможно ли наблюдать его в телескоп с диаметром объектива 50 см? Оптические свойства поверхности астероида такие же, как у Луны.

Решение. Применим теорему синусов к треугольнику с вершинами в Солнце, Земле и астероиде и определим угол φ с центром в астероиде между направлениями на Солнце и Землю:

$$\frac{\sin\varphi}{1\,\text{а.е.}} = \frac{\sin 60^\circ}{0.866\,\text{а.е.}} \;\; \sin\varphi = 1, \;\; \varphi = 90^\circ.$$

То есть треугольник является прямоугольным. Тогда расстояние от астероида до Земли можно вычислить как

$$r = 1\,\text{а.е.} \cdot \cos 60^\circ = 0.5\,\text{а.е.},$$

и мы видим астероид, используя аналогию с Луной, в первой или последней четверти.

Дальше можно рассуждать т.к. Отношение освещенностей, создаваемых астероидом и Луной в какой-то четверти, можно вычислить следующим образом:

$$\frac{E}{E_{☾}} = \left(\frac{a_{☾}}{a} \cdot \frac{R}{R_{☾}} \cdot \frac{r_{☾}}{r}\right)^2,$$

где a — радиус орбиты астероида ($a = \sqrt{3}/2$ а.е., что можно легко заметить после вычисления расстояний выше), $a_{☾}$ — расстояние от Солнца до Луны (попросту 1 а.е.), R — радиус астероида, $R_{☾}$ — радиус Луны (равный примерно $1.7 \cdot 10^3$ км), $r_{☾}$ — расстояние от Земли до Луны (в данном случае удобнее всего вспомнить, что это примерно 1/400 а.е.). Подставляя числа, получаем

$$\frac{E}{E_{☾}} = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{5 \cdot 10^1}{1.7 \cdot 10^6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1/400}{1/2}\right)^2 = \frac{4 \cdot 25 \cdot 10^2}{3 \cdot 3 \cdot 10^{12} \cdot 4 \cdot 10^4} \approx 2.8 \cdot 10^{-14}.$$

Переход к звездным величинам можно произвести вообще без формул. Поскольку каждые два порядка эквивалентны разнице на 5^m, а коэффициент 2.8 мало отличается от $2.512\ldots$, видимая звездная величина астероида будет отличаться от видимой звездной величины Луны в четверти на $14/2 \cdot 5 - 1 = 34^m$.

Видимая звездная величина полной Луны известна и составляет $-12^m.7$. Напрашивается идея найти изменение звездной величины при уменьшении освещенности в два раза и посчитать это видимой звездной величиной Луны в четверти (если это сделать, получится с довольно хорошей точностью -12^m), однако это неправильно. Так было бы, если бы поверхность Луны рассеивала свет во всех направлениях одинаково, но это не совсем т.к. Поэтому надо вспомнить более подходящее данное: видимая звездная величина Луны в четверти составляет около -10^m. Тогда мы сразу можем сказать, что астероид будет иметь величину $+24^m$.

То, что его не удастся увидеть глазом в полуметровый телескоп, по-видимому, можно считать очевидным, да простят нас за небольшой каламбур. Интереснее отметить, что и использование более совершенных приемников излучения также не поможет: наибольшие наземные телескопы позволяют наблюдать объекты примерно $+29^m$, что соответствует освещенности, меньшей в 10^2 раз. Следовательно, надеяться зарегистрировать астероид можно при наблюдении с телескопом, линейный размер объектива которого в 10 раз меньше, чем у крупнейших наземных телескопов. Последние имеют размеры около 10 м, следовательно, необходим инструмент по крайней мере с метровым диаметром объектива.

А.В.Веселова

Задача № 63

Двойная система состоит из звезды с максимальным радиусом 0.10 а.е. и белого карлика, находящегося на расстоянии 0.14 а.е. от центра основного компонента. Масса белого карлика равна массе Солнца, с основного компонента на карлик идет аккреция вещества с небольшой скоростью. Оцените среднюю плотность основного компонента системы.

Решение. Так как скорость изменения массы мала, то для частиц вещества основного компонента, расположенных ближе всего к карлику (они лежат на прямой, соединяющей центры звезд и удалены на максимальный радиус от центра основного компонента), векторная сумма сил гравитации и центробежной (вызванной вращением вокруг центра масс системы) должна оказаться нулевой. Отметим, что орбиты в системе должны быть круговыми (и потому, что идет постоянная аккреция, и потому, что расстояние между компонентами системы фиксировано).

Обозначим массу основного компонента $\mathfrak{M}_1$, массу карлика $\mathfrak{M}_2$, большую полуось системы (фактически расстояние между компонентами) a и максимальный радиус основного компонента R. Центр масс системы находится на расстоянии r от центра основного компонента, которое можно выразить как

$$r = a \cdot \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}$$

Тогда условие для сил — вернее, для ускорений, действующих на пробную частицу — может быть записано в виде

$$\frac{G\mathfrak{M}_2}{(a-R)^2} + \omega^2 \cdot (R - r) = \frac{G\mathfrak{M}_1}{R^2},$$

где ω — орбитальная циклическая частота системы, легко определяемая из III закона Кеплера. В самом деле

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G\left(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2\right)} \quad \text{и} \quad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

поэтому

$$\omega^2 = \frac{G\left(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2\right)}{a^3}.$$

Собирая все воедино, получаем уравнение

$$\frac{G\mathfrak{M}_2}{(a-R)^2} + \frac{G\left(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2\right)}{a^3} \cdot \left(R - a \cdot \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}\right) = \frac{G\mathfrak{M}_1}{R^2},$$

в котором гравитационная постоянная G сокращается. Сначала немного упростим выражение:

$$\frac{\mathfrak{M}_2}{(a-R)^2} + \frac{\left(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2\right) R}{a^3} - \frac{\mathfrak{M}_2}{a^2} = \frac{\mathfrak{M}_1}{R^2}$$

и

$$\mathfrak{M}_2 \, \frac{R \cdot (2\,a - R)}{(a-R)^2\, a^2} + \frac{\left(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2\right) R}{a^3} = \frac{\mathfrak{M}_1}{R^2},$$

а затем подставим все известные величины в массах Солнца и сотых долях астрономических единиц (чтобы не возиться с дробными числами):

$$1 \cdot \frac{10 \cdot 18}{4^2 \cdot 14^2} + \frac{(\mathfrak{M}_1 + 1) \cdot 10}{14^3} = \frac{\mathfrak{M}_1}{10^2}.$$

Отсюда

$$\left(\frac{18 \cdot 14}{16} + 1\right) \cdot 10^3 = (14^3 - 10^3)\,\mathfrak{M}_1$$

или

$$17 \cdot 10^3 = 1.7 \cdot 10^3\,\mathfrak{M}_1.$$

Видно, что $\mathfrak{M}_1 \approx 10\,\mathfrak{M}_\odot$ и останется оценить только среднюю плотность. Конечно, это можно сделать, если перевести массу в килограммы, радиус — в метры и воспользоваться очевидной формулой, но можно действовать проще.

Поскольку радиус Солнца составляет примерно 1/200 а.е., то основной компонент примерно в 20 раз больше Солнца. Следовательно, его объем в $8{\cdot}10^3$ раз больше. Масса же больше солнечной в 10 раз, следовательно, плотность должна быть меньше плотности Солнца в $8 \cdot 10^2$ раза. Воспользовавшись любой разумной оценкой плотности Солнца ($1.4{\cdot}10^3$ кг/м^3, но можно просто взять плотность воды) получаем ($1{\div}2$) кг/м^3 — что-то похоже на плотность воздуха в обычных условиях. Это и есть ответ задачи.

А.П.Гордеев

Задача № 64

При наблюдениях двойной системы, состоящей из нейтронной звезды массой 1.4 массы Солнца и звезды главной последовательности, были обнаружены рентгеновские пульсации со средним периодом 1 секунда, отклоняющиеся от него максимум на 10^{-4} секунды. При этом спектральные наблюдения в оптическом диапазоне показали, что линия H_α также периодически меняет длину волны, отклоняясь от среднего значения максимум на 0.5 Å. Оцените светимость такой системы в оптическом диапазоне.

Решение. За рентгеновские пульсации ответственна нейтронная звезда, поскольку звезды главной последовательности в рентгеновском диапазоне излучают очень слабо, а за оптическое излучение — звезда-компаньон (поскольку нейтронные звезды в оптике практически ненаблюдаемы). Найдём из эффекта Доплера орбитальную скорость нейтронной звезды:

$$\frac{\Delta P}{P_0} = \frac{v_1}{c},$$

тогда $v_1 = 34$ км/с. Аналогичным образом из эффекта Доплера для линии H_α получим скорость вращения звезды-компаньона вокруг центра масс: $v_2 = 24$ км/с (для этого можно вспомнить или вычислить лабораторную длину волны линии, равную 6563 Å, но на самом деле достаточно помнить, что она попадает в оптический диапазон и красная). Орбитальные скорости, как известно, обратно пропорциональны массам компонентов, откуда видно, что масса оптического компонента равна $\mathfrak{M}_2 = \frac{v_2}{v_1}\mathfrak{M}_1 = 2\ \mathfrak{M}_\odot$.

Поскольку масса не очень сильно отличается от солнечной и мы имеем дело со звездой главной последовательности, ее оптическую светимость можно оценить, исходя из соотношения $L \propto \mathfrak{M}^4$, а она, как мы уже выяснили, и обеспечивает светимость двойной системы в оптическом диапазоне. Следовательно, ответ — 16 светимостей Солнца.

И.Д.Маркозов

Задача № 65

Звезда Гиаусар (λ Дракона) имеет координаты $\delta = 69°20'$ и $\alpha = 11^h31^m$. Ее видимая звездная величина без атмосферы равна $3^m.8$. Как зависит видимая звездная величина звезды от часового угла при наблюдениях в Мурманске? Широта города $\varphi = 68°58'$.

Решение. Известно, что поглощение в зените приблизительно равно $0^m.2$. Заметим, что верхняя кульминация звезды происходит почти в зените ($h_{\text{в}} = 90° - |\varphi - \delta| \approx 90°$), а высота нижней кульминации ($h_{\text{н}} = \varphi + \delta - 90° \approx 48°$). Воспользуемся моделью плоской атмосферы, согласно которой $\Delta m \approx 0^m.2 \sec z$ при $z < 70°$. Теперь посмотрим, как меняется зенитное расстояние Гиаусара. Так как Гиаусар отстоит от полюса на $\approx 21°$ (как и полюс от зенита), примем рассматриваемый участок неба плоским, а также будем считать, что в суточном движении Гиаусар проходит через зенит. Тогда зададим декартову систему координат с центром в зените и такой ориентацией, что одна из осей проходит через полюс (и координата полюса отрицательная):

Пусть $r = 21°$ – расстояние от полюса до зенита. Тогда суточный путь звезды задается так:

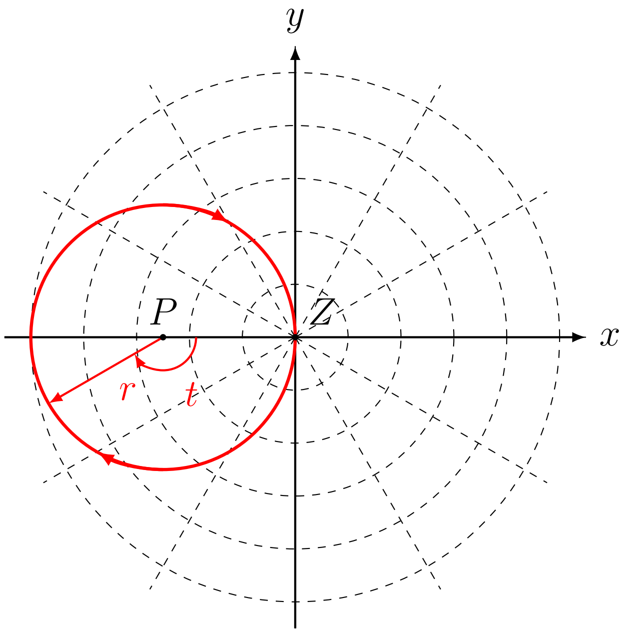
$$\begin{cases} x = r\,(\cos t - 1) \\ y = -r\,\sin t \end{cases}$$

где t – часовой угол, а искомое зенитное расстояние есть

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} = r\,\sqrt{2\,(1 - \cos t)} = 2r\,\sin(t/2).$$

Осталось лишь подставить в начальное выражение, и тогда получим:

$$\Delta m \approx \frac{0^m.2}{\cos(42° \cdot \sin(t/2))} \approx \frac{0^m.2}{1 - (42/57)^2 \cdot \sin^2(t/2)/2} \approx \frac{1^m.6}{7 + \cos t}.$$



Можно и не пользоваться плоским приближением. Запишем сферическую теорему косинусов для параллактического треугольника:

$$\cos z = \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos t.$$

Подставив выражение, приближенно получим:

$$m = 3^m.8 + \frac{1^m.6}{6.9 + \cos t}.$$

В.А.Дмитриев

Задача № 66

Геостационарный спутник потребовалось перевести на новую орбиту с помощью двухимпульсного перехода. Предполагалось, что первый импульс придаёт спутнику добавку скорости 10%, а второй импульс через половину периода промежуточной орбиты уменьшает скорость на 10%. Но что-то пошло не так и импульсы поменяли местами. Определите разность орбитальных периодов предполагавшейся и реально получившейся новых орбит.

Решение. Перед тем как приступать к решению задачи, стоит обдумать выбор единиц, в которых ее удобнее решать. Давайте договоримся, что массу мы будем измерять в массах Земли, время — в периодах обращения геостационарного спутника (иначе говоря, в звездных сутках), расстояние — в радиусах орбиты геостационарного спутника. Как несложно показать (или сразу догадаться по аналогии с «звездноастрономической системой единиц»), в такой системе единиц гравитационная постоянная $G = 4\pi^2$.

Итак, геостационарный спутник движется по орбите со скоростью $v_0 = 2\pi$. Пусть в результате первого импульса скорость изменилась в k_1 раз, тогда она станет равной $v_1 = 2\pi \cdot k_1$. Запишем выражение для скорости в общем случае (пользуясь стандартными обозначениями):

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

и в интересующем нас частном случае:

$$4\pi^2 \cdot k_1^2 = 4\pi^2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{2}{1} - \frac{1}{a_1}\right).$$

Отсюда видно, что после первого импульса спутник перейдет на орбиту с большой полуосью $a_1 = 1/(2 - k_1^2)$.

Через половину периода спутник окажется в апогее (или перигее) новой орбиты, на расстоянии $r_2 = 2 \cdot a_1 - 1$ от центра Земли. Его скорость при этом станет равной

$$v_2^2 = 4\pi^2 \cdot \left(\frac{2}{r_2} - \frac{1}{a_1}\right).$$

Если при этом скорость спутника изменится в k_2 раз, то спутник будет иметь большую полуось орбиты a_2, определяемую аналогичным образом:

$$k_2^2 \cdot v_2^2 = 4\pi^2 \cdot \left(\frac{2}{r_2} - \frac{1}{a_2}\right).$$

Подставляя в последнее выражение формулы для v_2 и r_2, получаем

$$k_2^2 \cdot 4\pi^2 \cdot \left(\frac{2}{2 \cdot a_1 - 1} - \frac{1}{a_1}\right) = 4\pi^2 \cdot \left(\frac{2}{2 \cdot a_1 - 1} - \frac{1}{a_2}\right)$$

и после очевидных преобразований имеем

$$a_2 = \frac{(2a_1 - 1)\, a_1}{2a_1 - k_2^2}.$$

Наконец, подставляя выражение для a_1, получим

$$a_2 = \frac{\frac{2}{2-k_1^2} - 1}{(2 - k_1^2)\left(\frac{2}{2-k_1^2} - k_2^2\right)} = \frac{k_1^2}{(2 - k_1^2)\,(2 - 2k_2^2 + k_1^2 \cdot k_2^2)}.$$

Если бы все пошло т.к. как предполагалось, то $k_1 = 1.1$, а $k_2 = 0.9$. Поэтому в результате должна была бы получиться орбита с большой полуосью

$$a_{\text{п}} = \frac{k_1^2}{(2 - k_1^2)\,(2 - 2k_2^2 + k_1^2 \cdot k_2^2)}.$$

В реальности же коэффициенты меняются местами, давайте учтем это, поменяв индексы (и сохранив числовые значения). Получилась орбита с большой полуосью

$$a_{\text{н}} = \frac{k_2^2}{\left(2 - k_2^2\right)\left(2 - 2k_1^2 + k_1^2 \cdot k_2^2\right)}.$$

Найдем отношение этих больших полуосей:

$$\frac{a_{\text{п}}}{a_{\text{н}}} = \frac{k_1^2\left(2 - k_2^2\right)\left(2 - 2k_1^2 + k_1^2 \cdot k_2^2\right)}{k_2^2\left(2 - k_1^2\right)\left(2 - 2k_2^2 + k_1^2 \cdot k_2^2\right)}.$$

Теперь займемся подсчетами. Предварительно имеет смысл отметить, что $1.1^2 \approx 1.2$, а $0.9^2 \approx 0.8$, а произведение $1.2 \times 0.8 \approx 1$. Тогда получается

$$\frac{a_{\text{п}}}{a_{\text{н}}} \approx \frac{1.2 \cdot 1.2 \cdot 0.6}{0.8 \cdot 0.8 \cdot 1.4} \approx 0.9.$$

Видно, что изменение оказывается небольшим и, что интересно, меньшим единицы. Аналогичный результат можно получить, если искать не отношение больших полуосей, а их разность — «правильная» большая полуось в любом случае окажется меньше «неправильной» примерно на 10% (при более точных вычислениях — на 9%).

Осталось разобраться, как это повлияет на период. Для выбранных нами единиц III закон Кеплера имеет вид $T = a^{3/2}$, и наиболее эффективный способ найти изменение периода при изменении большой полуоси — продифференцировать его. Тогда

$$dT = \frac{3}{2}\sqrt{a} \cdot da$$

и

$$\frac{dT}{T} = \frac{3}{2}\frac{da}{a}.$$

Иначе говоря, относительное изменение периода в полтора раза больше относительного изменения большой полуоси. Поскольку все рассматриваемые орбиты близки к геостационарным, относительное изменение в выбранных единицах мало отличается от абсолютного, а это означает, что периоды для предполагавшейся и реально получившейся орбит будут отличаться примерно на 14% звездных суток, т.е. примерно на 3 часа, причем реально получившийся период будет больше.

А.В.Веселова, П.А.Тараканов

Задача № 67

Известен анекдот:

Стоим с сестрой вечером на улице, любуемся на Сириус — самую яркую звезду ночного неба. Я ей говорю:

— Давай поближе подойдём, чтобы лучше видно было.

И мы пошли. Секунд через 30 до неё дошло.

Допустим, дело происходит на широте $+28^\circ$ в новогоднюю полночь, пешеходы перемещаются со скоростью 1 м/с. Оцените изменение видимой звездной величины Сириуса. Координаты Сириуса $\alpha = 6^h45^m$, $\delta = -17^\circ$.

Решение. Начнем с выяснения обстановки. Достаточно широко известным фактом является то, что Солнце имеет прямое восхождение 18^h40^m примерно в Новый год (а если неизвестно, это легко получить). Таким образом, в новогоднюю ночь Сириус находится практически в диаметрально противоположной от Солнца части неба и в полночь находится где-то рядом с верхней кульминацией. Высота его над горизонтом при этом, вычисляемая по стандартной формуле $h_{\text{ВК}} = 90^\circ - \varphi + \delta$, окажется равной 45° (зенитное расстояние — тоже).

Итак, персонажи анекдота, гуляющие где-нибудь в Шарм-эш-Шейхе (широта как раз совпадает), видят Сириус на юге на высоте 45° и проходят на юг 30 метров. За счет чего Сириус может стать ярче?

Во-первых, они тем самым приблизились к нему на $30 \cdot \cos 45^\circ \approx 21$ метр (не забудем, что движутся герои анекдота по горизонтали), и Сириус должен был стать ярче из-за наблюдения с более близкого расстояния. Во-вторых, во время движения Сириус испытывал фиолетовое смещение, соответствующее скорости $1{\cdot}\cos 45^\circ \approx 0.7$ м/с, что также несколько увеличило создаваемую им освещенность. Наконец, в результате перемещения Сириус поднялся над горизонтом примерно на $1''$ (полезно помнить, что $1'$ дуги меридиана — это морская миля, 1852 м, так что $1''$ соответствует расстоянию в 31 м), из-за чего поглощение его излучения в атмосфере должно было уменьшиться. Попробуем оценить величину каждого из трех эффектов.

Расстояние до Сириуса, скорее всего, точно помнят немногие, но вполне достаточно понимать, что он относится к числу близких к Солнцу звезд (потому и настолько яркий). До ближайшей звезды (α Cen) около 1.3 пк, так что если в качестве оценки расстояния до Сириуса взять 2 или 3 пк, сильно мы не ошибемся (реальное значение 2.64 пк). Завысим эффект и примем, что расстояние равно 2 пк. Это $6 \cdot 10^{16}$ м.

Вычислим изменение звездной величины Сириуса в этом случае (величины с индексом 0 — исходные, с другими числовыми индексами — соответствующие номеру рассматриваемого случая, m, как обычно, обозначаются видимые звездные величины, E — освещенности, r — расстояния):

$$\Delta m_1 = m_0 - m_1 = -2.5\ \lg \frac{E_0}{E_1} = -5 \lg \frac{r_1}{r_0} = -5 \lg \frac{r_0 - \Delta r}{r_0}.$$

Тут Δr — расстояние, на которое герои приблизились к Сириусу. Перейдем от десятичных логарифмов к натуральным и получим

$$\Delta m_1 = -5\lg\frac{r_0 - \Delta r}{r_0} = -\frac{5}{\ln 10}\cdot\ln\left(1 - \frac{\Delta r}{r_0}\right) \approx \frac{5}{\ln 10}\cdot\frac{\Delta r}{r_0}.$$

Сделанное нами приближение основывается на очень полезном факте: если $x \approx 0$, то $\ln(1+x) \approx x$.

Нас все-таки интересует только очень грубая оценка, поэтому, хотя $\ln 10 \approx 2.3$, это число вполне можно округлить до 2.5. Итого получаем

$$\Delta m_1 = 2\cdot\frac{\Delta 2\cdot 10^1}{6\cdot 10^{16}} = 7\cdot 10^{-16}.$$

Со вторым эффектом все существенно проще. Эффект Доплера, записанный для частот, имеет вид

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v}{c} = \frac{0.7}{3\cdot 10^8} \approx 2\cdot 10^{-9}.$$

Поскольку энергия фотонов прямо пропорциональна их частоте, то и освещенность, создаваемая Сириусом, возрастет на такую же долю. Поэтому

$$\Delta m_2 = m_0 - m_2 = -2.5\lg\frac{E_0}{E_2} = 2.5\lg\left(1 + \frac{\Delta E}{E_0}\right).$$

Тут $\Delta E/E_0$ — это как раз найденное нами относительное изменение освещенности.

Для интереса и разнообразия изложим еще один способ это посчитать. Вообще говоря, звездные величины — это логарифмы по основанию $\sqrt[5]{100} = 2.512\ldots$, которое не слишком сильно отличается от основания натуральных логарифмов $e = 2.718\ldots$. Поэтому $2.5\lg x \approx \ln x$ (не совсем точно, конечно, но теряемый при этом коэффициент, равный $1.086\ldots$, мало отличается от единицы и для грубых прикидок им можно просто пренебречь). А тогда

$$\Delta m_2 \approx \ln\left(1 + \frac{\Delta E}{E_0}\right) \approx \frac{\Delta E}{E_0} = 2\cdot 10^{-9}.$$

Оценка, правда, предполагает, что чувствительность человеческого глаза, проницаемость атмосферы и т.п. не зависят от длины волны (что неверно), но поскольку Сириус белый, то все эти факторы скорее занизят полученную нами оценку (пусть и не сильно). Пока заметим для себя, что второй эффект на много порядков больше первого, и перейдем к третьему.

В узких кругах широко известна «формула воздушной массы»

$$\Delta m = 0^m.2\cdot\sec z = 0^m.2/\cos z,$$

описывающая поглощение света в атмосфере. Она, как и прочие модели плоской атмосферы, применима для зенитных расстояний $z \lesssim 70^\circ$, стало быть, нас тоже устроит. Поэтому

$$\Delta m_3 = m_0 - m_3 = 0.2\cdot\left(\frac{1}{\cos z_0} - \frac{1}{\cos z}\right).$$

Тут $z_0 = 45°$, а $z = z_0 - \Delta z$, причем мы уже знаем, что $\Delta z = 1''$.

Вообще говоря, малые приращения функции при малом же приращении аргумента удобно и полезно вычислять с помощью дифференциалов (см. предыдущую задачу), но мы обойдемся более простыми средствами.

$$\cos z = \cos(z_0 - \Delta z) = \cos z_0 \cos \Delta z + \sin z_0 \sin \Delta z.$$

$\cos \Delta z = 1$ (тут даже приближенное равенство писать как-то нелепо), а $\sin \Delta z$ равен Δz, выраженному в радианах. Сколько секунд в радиане, знают все, поэтому $\Delta z \approx 1/206265 = 5 \cdot 10^{-6}$. Сразу же заметим, что $\sin z_0 = \cos z_0 = 0.7$.

Тогда

$$\Delta m_3 = 0.2 \cdot \left(\frac{1}{0.7} - \frac{1}{0.7 \cdot (1 + 5 \cdot 10^{-6})}\right) = \frac{2}{7} \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + 5 \cdot 10^{-6}}\right).$$

Воспользуемся еще одним крайне полезным фактом: при $x \approx 0$ верно $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$. Тогда мы сразу же получим, что

$$\Delta m_3 = \frac{2}{7} \cdot 5 \cdot 10^{-6} \approx 10^{-6}.$$

Остается только констатировать, что именно изменение высоты Сириуса — главная причина того, что он станет лучше виден. Две других причины приводят к существенно меньшим изменениям звездной величины.

Впрочем, заметить такое изменение совершенно невозможно даже с использованием технических средств, именно поэтому анекдот (реально существующий, см. *https://www.anekdot.ru/id/1010360/*) все же остается анекдотом.

П.А. Тараканов

Задача № 68

Вокруг звезды главной последовательности с массой 2 массы Солнца по круговой орбите с периодом 4 года обращается планета земных размеров с разреженной атмосферой, совершающая оборот вокруг своей оси, перпендикулярной плоскости орбиты, за 20 часов. На экваторе этой планеты находится научная станция, для нужд которой рядом с ней была установлена солнечная батарея площадью 100 м^2 и эффективностью 10%. Батарея покоится на поверхности планеты и расположена в горизонтальной плоскости. Какое количество энергии за сутки производит батарея?

Решение. Определим значение местной солнечной постоянной. Для этого нам нужно оценить светимость звезды. Воспользуемся соотношением масса–светимость для звезд главной последовательности: $\mathfrak{L} \propto \mathfrak{M}^4$, тогда у звезды светимость равна $L = 2^4 L_\odot = 16 L_\odot$. Также определим радиус орбиты планеты, воспользовавшись третьим законом Кеплера. Если выразить большую полуось орбиты в астрономических единицах, период в годах, а массу центрального объекта — в массах Солнца, то соотношение будет выглядеть так:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{1}{M}.$$

Отсюда $a = \sqrt[3]{MT^2} \approx 3.2$ а.е. Следовательно, освещенность на поверхности планеты будет равна

$$E_0 = \frac{L}{4\pi a^2} = \frac{L_\odot}{4\pi a_\oplus^2} \cdot \frac{16}{(3.2)^2} \approx 1.6 E_\odot = 1.6 \cdot 1.37 \cdot 10^3\,\text{Вт/м}^2 = 2.2 \cdot 10^3\,\text{Вт/м}^2.$$

Светлое время суток на экваторе длится около половины суток, то есть 10 часов. Заметим, что полученное ранее значение освещенности соответствует падению света на площадку перпендикулярно, но вследствие суточного вращения высота Солнца над горизонтом будет меняться, и падающая на площадку энергия будет пропорциональна $\sin h$, где h — высота светила над горизонтом.

Высота связана с широтой места наблюдения φ, склонением светила δ и часовым углом t соотношением

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t.$$

В нашем случае $\delta = 0$, поскольку плоскость экватора и орбиты совпадает, также $\varphi = 0$. Тогда $\sin h = \cos t$, то есть освещенность при часовом угле t равна $E_0 \cos t$.

Общее количество энергии, падающей на единичную площадку, можно получить интегрированием освещенности по времени:

$$W = \int\limits_{-5^h}^{5^h} E_0 \cos t\, dt = E_0 \int\limits_{-75^\circ}^{75^\circ} E_0 \cos t\, dt = E_0 \cdot \sin t \Big|_{-5^h}^{5^h} \cdot \frac{10^h \cdot 3600^s}{\pi}.$$

$$\sin 5^h = \sin 75^\circ \approx 1.$$

Тогда количество энергии, падающее на единичную площадку за половину суток, равно

$$W = E_0 \cdot 2 \cdot \frac{10^h \cdot 3600^s}{\pi} = 5 \cdot 10^7\,\text{Дж/м}^2.$$

Площадь S соберёт WS энергии, при учете эффективности η собранное количество энергии равно $\eta WS = 0.1 \cdot 100 \cdot 5 \cdot 10^7 = 5 \cdot 10^8$ Дж.

А.В.Веселова

Задача № 69

В одном и том же направлении на небе наблюдаются звезда и шарообразная однородная туманность, причем туманность подсвечивается звездой. Известно, что интегральная видимая звездная величина туманности и видимая звездная величина звезды совпадают и равны $5^m.7$, расстояние до звезды равно 0.31 кпк, абсолютная звездная величина звезды равна $-2^m.5$. Оцените расстояние между центром туманности и звездой. Что из них находится ближе к нам?

Решение. Найдем видимую звездную величину m_0 звезды, которую она имела бы при отсутствии поглощения по дороге.

$$m_0 = M + 5\lg r - 5 = -2.5 + 5\ \lg 310 - 5 = -7.5 + 10 + 5\ \lg 3.1 = 2.5 + 5 \cdot 0.5 = 5^m.0.$$

Известно, что при ослаблении источника излучения в два раза его видимая звездная величина увеличивается на $0^m.75$, что, впрочем, легко получить, вычислив $\Delta m = -2.5\lg(1/2) = 2.5\lg 2$. Тогда, присмотревшись внимательнее к условию задачи, мы заметим, что излучение звезды ослабело как раз наполовину (с точностью, с которой известны исходные данные).

Дальше можно обойтись рассуждениями без формул. Совершенно очевидно, что звезда не может быть ближе к нам, чем туманность (для среднего поглощения в межзвездной среде получается слишком много, наличие еще одной туманности на луче зрения практически невероятно, так что интересующая нас туманность поглощение и обеспечивает, для чего она должна хотя бы частично находиться ближе к нам, чем звезда).

Пусть теперь звезда находится дальше, чем туманность. В таком случае туманность «забирает» половину пришедшего к ней от звезды излучения. Но переизлучать полученную энергию она должна примерно изотропно (равномерно во все стороны), а это означает, что мы увидим только какую-то сравнительно малую часть переизлученной энергии — туманность должна будет иметь большую интегральную звездную величину, чем звезда, что противоречит условию. Даже при заметно анизотропном рассеянии получится то же самое, если только вещество туманности не переизлучает свет строго в том направлении, в котором он в него попал (но, помимо общих соображений о необычных свойствах такого вещества, возникнет вопрос, как мы вообще видим такую туманность и почему она ослабляет свет звезды).

Получается, что звезда должна находиться где-то внутри туманности. Допустим, что она ближе к нам, чем центр туманности. В таком случае, раз на пути к нам поглощается половина излучения, в других направлениях туманность должна «забирать» бóльшую долю излучения звезды, и поскольку туманнность за счет нее светится (и находится фактически на том же расстоянии, что и звезда), она должна оказаться ярче, чем звезда, что противоречит условию.

Если допустить, что звезда дальше, чем центр туманности, аналогичное рассуждение приведет нас к тому, что туманность «забирает» меньше половины излучения звезды и должна быть тусклее звезды, что тоже противоречит условию. Вообще говоря, можно заметить, что случаи со звездой внутри туманности в пределе переходят в случаи, когда звезда находится снаружи перед туманностью или за ней.

Остается единственный вариант — звезда находится практически в центре туманности. Тогда половина излучения звезды выходит из туманности беспрепятственно, а еще половина расходуется на свечение туманности, что полностью согласуется с исходными данными. Тем самым ответ — расстояние между центром туманности и звездой близко к нулю.

Заметим, что у объектов задачи есть реальные прототипы — «Туманность пламенеющей звезды», она же IC 405, и находящаяся внутри нее звезда AE Возничего. Параметры лишь немного подправлены для удобства вычислений.

М.В.Костина, П.А.Тараканов

Задача № 70

Аккрецирующая нейтронная звезда имеет светимость 10^{30} Вт, массу 1.4 $\mathfrak{M}_\odot$ и радиус 10 км. Измерения спектра нейтронной звезды показали наличие циклотронной линии с энергией фотонов 30 кэВ (частота излучения соответствует частоте вращения электрона в магнитном поле), гравитационное красное смещение уже учтено. Известно, что на границе магнитосферы динамическое давление падающего вещества уравновешивается давлением магнитного поля. Считая аккрецию сферически-симметричной и учитывая, что циклотронная линия образуется около поверхности звезды, а индукция магнитного поля зависит от расстояния до центра звезды как $B \propto r^{-3}$, оцените радиус магнитосферы для этой звезды. Давление магнитного поля можно найти по формуле $p = \kappa B^2$, где $\kappa = 4 \cdot 10^5$ Па/Тл^2.

Решение. Для начала найдём из энергии фотонов циклотронной линии E величину индукции магнитного поля B_0 у поверхности нейтронной звезды. Поскольку известно, что частота линии равна частоте вращения электрона в магнитном поле, запишем второй закон Ньютона: $m\omega^2 r_e = e\omega r_e B_0$, где e — заряд электрона, m — его масса, ω — циклическая частота, r_e — радиус траектории электрона. Отсюда получаем:

$$B_0 = \frac{2\pi m E}{eh} = 2.6 \cdot 10^8 \text{ Тл}.$$

Далее найдём динамическое давление падающего вещества, чтобы приравнять его к магнитному давлению. Рассмотрим вещество, падающее на поверхность сферы радиуса r со скоростью V. Пусть за время Δt упала масса ΔM. Тогда давление есть

$$p = \frac{F}{S} = \frac{\Delta(MV)}{\Delta t\, 4\pi r^2} = \frac{\dot{M} V}{4\pi r^2},$$

где $\dot{M}$ — темп аккреции вещества, $\dot{M} = \Delta M/\Delta t$, а скорость V — это скорость свободного падения вещества с бесконечно большого расстояния: $V = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$. Из условия нам известна светимость звезды. Светимость за счёт аккреции и темп аккреции связаны следующим соотношением: $L = \frac{GM\dot{M}}{R}$, где R — радиус нейтронной звезды. Давление магнитного поля, как сказано в условии, рассчитывается по формуле $p = \kappa B^2 = \kappa {B_0}^2 \frac{R^6}{r^6}$. Приравнивая силы динамического и магнитного давления, получим:

$$\frac{\kappa {B_0}^2 R^6}{r^6} = \frac{\dot{M} V}{4\pi r^2}.$$

Подставив сюда зависимость темпа аккреции от светимости и формулу для скорости, получим выражение для радиуса магнитосферы:

$$r = \left(\frac{4\pi\kappa {B_0}^2 R^5 \sqrt{GM}}{L\sqrt{2}}\right)^{2/7} = 5 \cdot 10^6 \text{м}$$

Ответ: $5 \cdot 10^6$ м.

И.Д.Маркозов

Задача № 71

При наблюдении Юпитера и трех его галилеевых спутников с четвертого (Каллисто) был получен снимок, на котором изображения спутников (слева направо — Ио, Ганимед, Европа) заменены черными кружками.

У Юпитера освещена ровно половина видимого диска. Нарисуйте в увеличенном масштабе видимые диски трех спутников и изобразите на них освещенные части дисков, которые в этот момент мог увидеть наблюдатель с Каллисто. Известно, что радиус Юпитера составляет 70 тыс. км, орбиты всех четырех спутников круговые, находятся в одной плоскости, их радиусы указаны в таблице ниже.

Спутник	Радиус орбиты в тыс. км
Ио	420
Европа	670
Ганимед	1070
Каллисто	1880

Решение. Задачу можно решать различными способами, но самый простой (и в то же время достаточно точный) — графический. Содержащаяся в условии информация позволяет восстановить положение спутников в системе Юпитера практически полностью и, хотя для получения ответа это не требуется, опишем, как это можно было бы сделать — будет понятнее, почему на многих деталях такого решения можно сэкономить.

1. Построим рисунок с соблюдением масштабов, изображающий Юпитер, орбиты трех спутников и положение Каллисто (красная точка снизу). Затем построим дугу с центром в наблюдателе (Каллисто) и радиусом, равным расстоянию между Каллисто и Юпитером.

2. Измерив диаметр Юпитера на данной в условии картинке (и получив 28 мм), измерим также расстояния от центра Юпитера до Ио (70 мм), Ганимеда (40 мм) и Европы (100 мм). Цвета названий соответствуют обозначениям на рисунке.

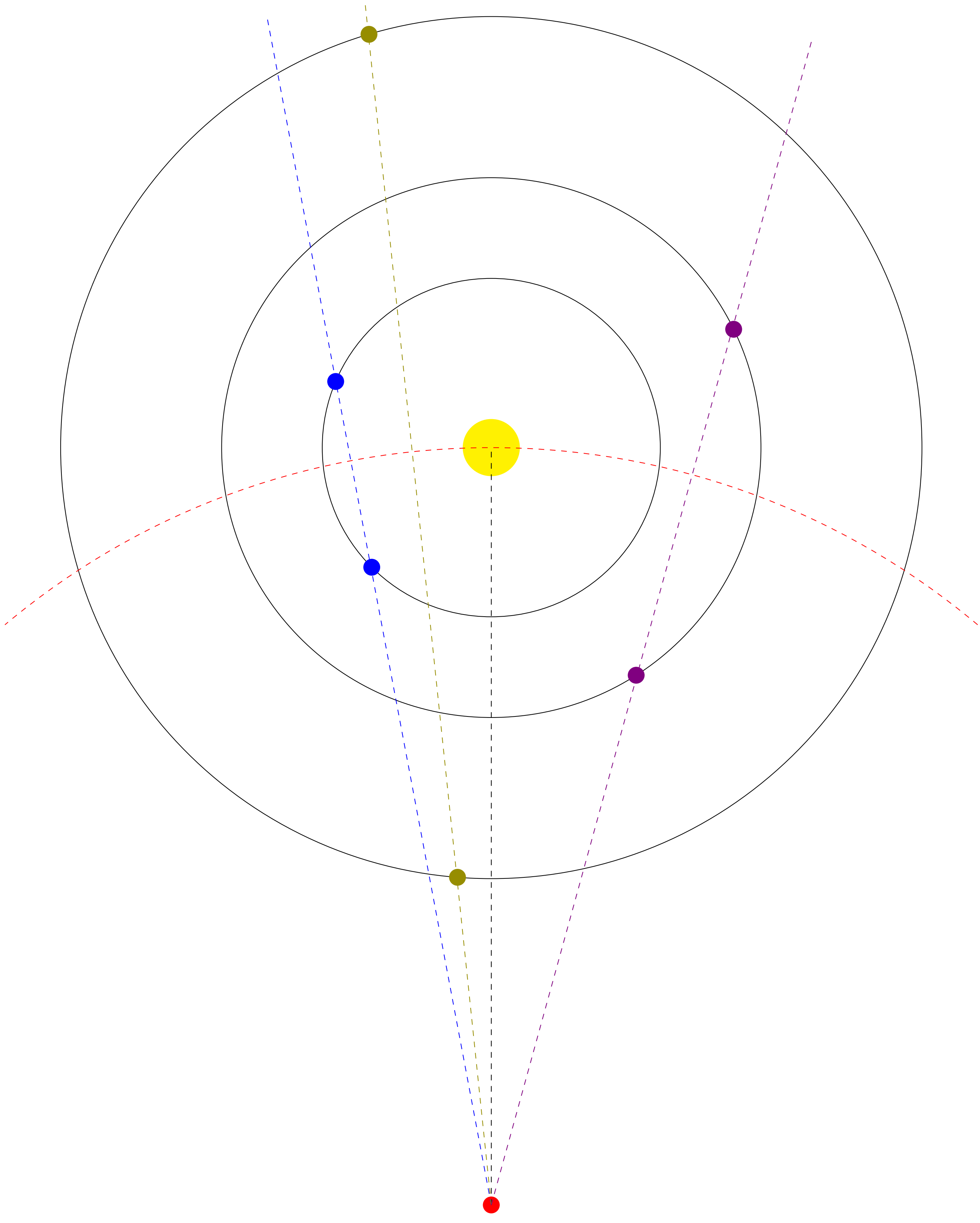
3. Отложим на дуге с центром в Каллисто (на рисунке она красная штрихованная) точки, находящиеся на расстояниях, соответственно, $70/28 = 2.5$, $40/28 = 1.4$ и $100/28 = 3.6$ диаметров «Юпитера» от центра Юпитера (это можно сделать с помощью транспортира или циркуля) и построим прямые, проходящие через Каллисто и полученные точки.

4. Поскольку в этих направлениях с Каллисто видны спутники, пересечения орбит спутников с прямыми — это возможные места, в которых могут находиться спутники (для каждого из них возможно по два варианта расположения). Отметим их на рисунке.

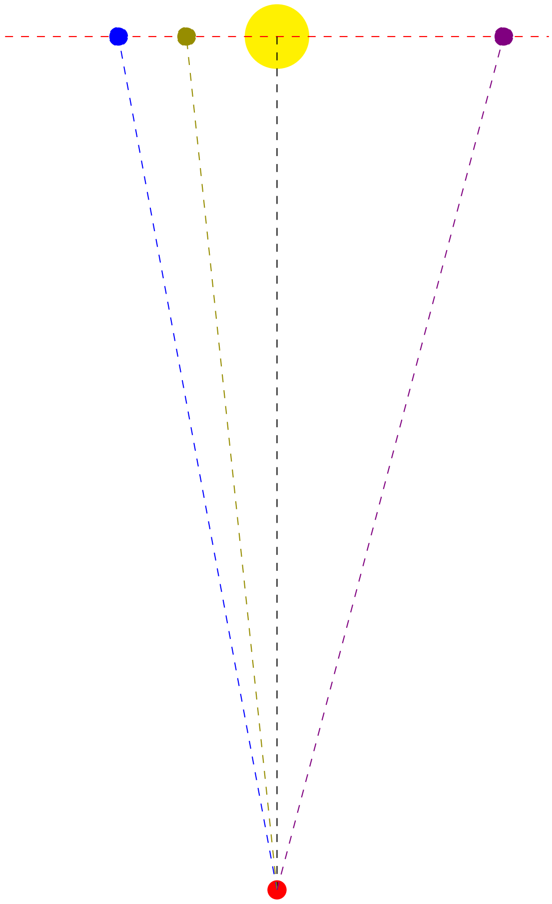
Теперь можно заметить то, что позволяет сильно упростить решение. Юпитер по условию освещен ровно наполовину (и слева), поэтому Солнце на нашем рисунке также располагается слева, причем (в масштабе рисунка) очень далеко (если рисунок напечатан на обычном листе бумаги, то Солнце окажется на расстоянии более 60 метров от него). Следовательно, каждый из трех наблюдаемых спутников будет выглядеть одинаково вне зависимости от того, в каком из двух положений на орбите окажется. Более того, если спутник сдвинуть вдоль прямой, задающей направление на него, то его вид и в этом случае не изменится, так что все спутники можно расположить на красной штрихованной дуге. Это обстоятельство сразу же приводит нас к полезному выводу: радиусы орбит спутников (кроме Каллисто) для решения задачи на самом деле не нужны.

Далее, можно заметить, что спутники на небе располагаются очень близко к Юпитеру (особенно это заметно в случае Ганимеда), поэтому красную штрихованную дугу мы вполне могли бы заменить горизонтальной прямой — внесенные при этом ошибки окажутся весьма небольшими.

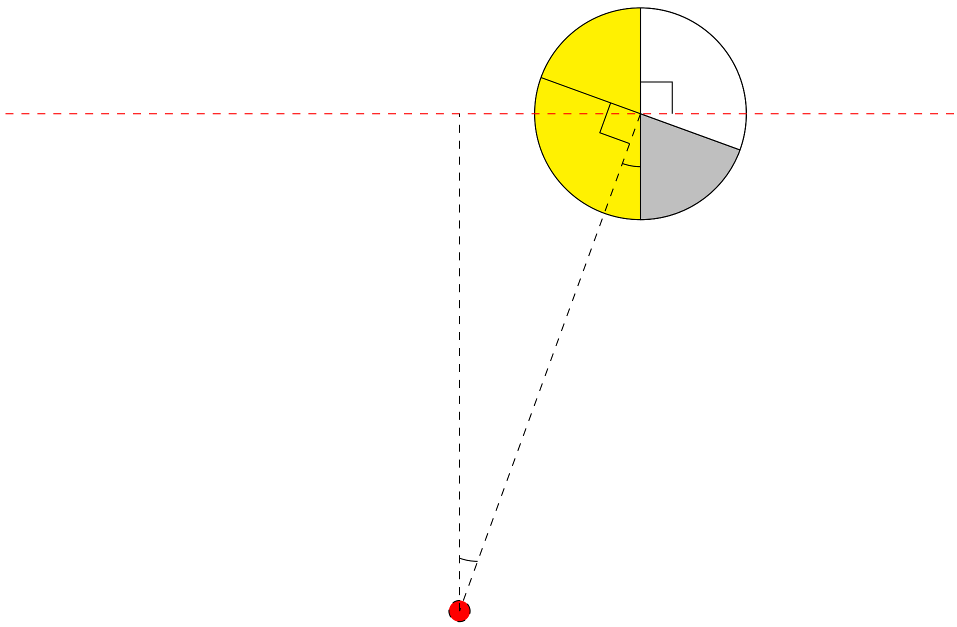
Поэтому рисуем существенно более простой рисунок (сохранив те же цветовые обозначения). Во время олимпиады это можно было сделать прямо на условии,



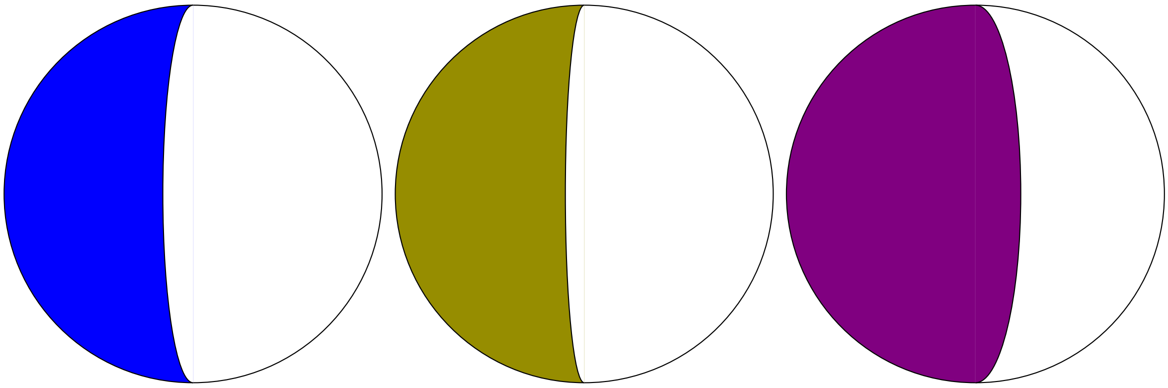
но Каллисто пришлось бы нарисовать на другом листе, но можно и сделать рисунок мельче, тем более что точное изображение размеров Юпитера на нем не требуется:



Осталось извлечь отсюда информацию о видимой фазе каждого спутника. Нарисуем примерную схему, объясняющую возникновение фаз:



Осталось только нарисовать подобный рисунок три раза для каждого из трех спутников. Результаты будут выглядеть так (спутники в том же порядке и с теми же цветовыми обозначениями):



В.Б.Игнатьев, П.А.Тараканов

Задача № 72

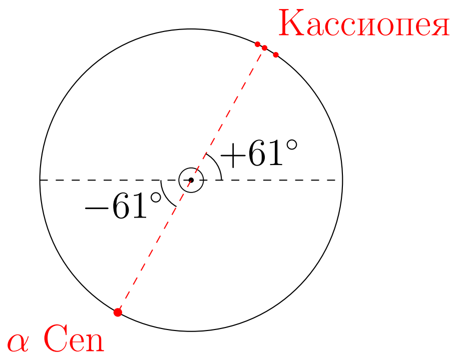
Вам даны координаты пяти наиболее заметных звезд созвездия Кассиопеи (α, β, γ, δ и ε Cas) и расстояния до них от Солнца, а также координаты альфы Центавра (α Cen) и расстояние до нее от Солнца. Нарисуйте положение Солнца среди звезд созвездия Кассиопеи на небе для наблюдателя, находящегося около альфы Центавра. Оцените, какой по порядку яркости будет Солнце среди звезд Кассиопеи для наблюдателя с альфы Центавра.

Подсказка: прямое восхождение и склонение — координаты на небе, аналогичные долготе и широте соответственно. Прямое восхождение меняется от 0° до 360°, склонение — от −90° до +90°.

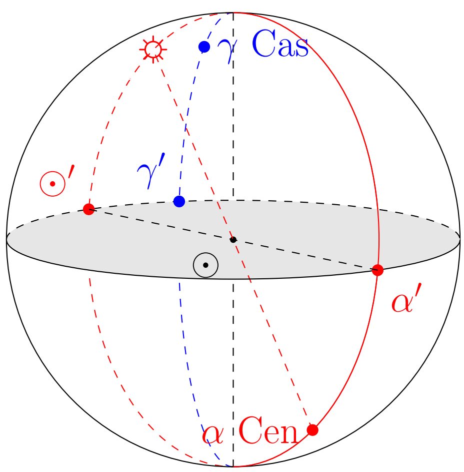
Звезда	Прямое восхождение	Склонение	Расстояние, св.лет
α Cas	10°	+56°	228
β Cas	2°	+59°	54
γ Cas	14°	+61°	613
δ Cas	22°	+60°	99
ε Cas	29°	+64°	442
α Cen	220°	−61°	4

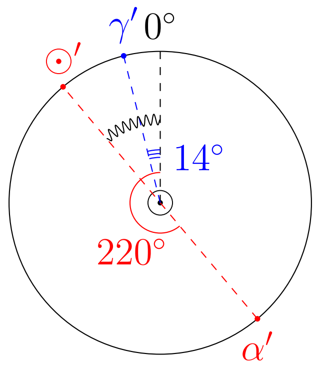
Решение. Внимательно посмотрев на координаты звезд, можно заметить, что среднее склонение звезд Кассиопеи и склонение α Cen равны по модулю, но имеют разные знаки, т.к. Кассиопея — северное созвездие, а Центавр — южное. Также видно, что среднее прямое восхождение звезд Кассиопеи отличается от прямого восхождения α Cen чуть больше, чем на 180°. Из этого сразу можно сделать вывод, что с Земли, а значит, и с Солнца, расстояние до которого от Земли пренебрежимо мало по сравнению с расстоянием от Земли до других звезд, Кассиопея и α Cen видны примерно в диаметрально противоположных направлениях. Примерную схему можно увидеть на рисунке ниже.

Расстояние от Солнца до звезд Кассиопеи намного больше, чем до α Cen. Это означает, что видимое с α Cen расположение звезд созвездия Кассиопеи останется примерно таким же, как и с Земли. Но на небе α Cen примерно в ту же область будет проецироваться Солнце. Поэтому для α Cen можно оставить ту же систему небесных координат «склонение–прямое восхождение», сместив её начало с Земли на α Cen. В этой системе координат звезды Кассиопеи будут иметь такие же координаты, как и в земной.



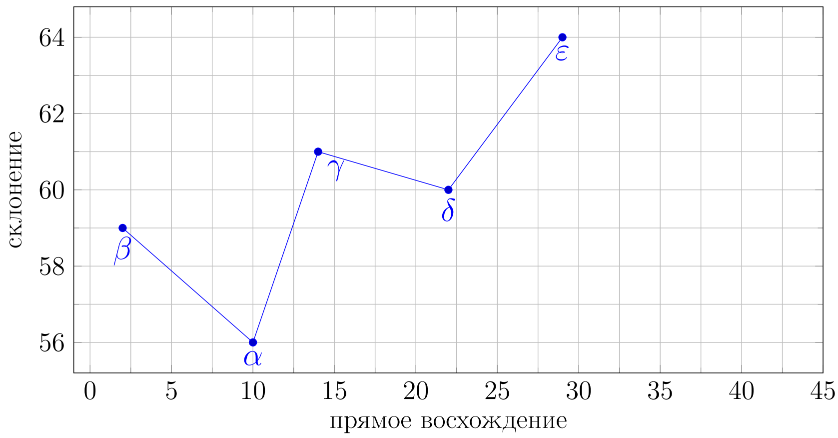
Чтобы понять, какие координаты будет иметь Солнце, нужно спроецировать Солнце на небо альфы Центавра, т.е. понять, через какую точку в окрестности созвездия Кассиопеи пройдёт прямая, соединяющая Солнце и α Cen. Очевидно (см. рис. выше), что склонение этой точки будет равно $+61°$. Чтобы понять, чему будет равно прямое восхождение этой точки, перейдём в плоскость небесного экватора Земли, вдоль которого, аналогично земной долготе, отсчитываются прямые восхождения. Спроецируем вдоль «меридиана» (на самом деле эта линия называется круг склонения) на плоскость экватора положение α Cen по прямому восхождению. На рисунках «нулевой меридиан» показан черной пунктирной линией и, чтобы не загромождать рисунки, изображена только γ Кассиопеи.



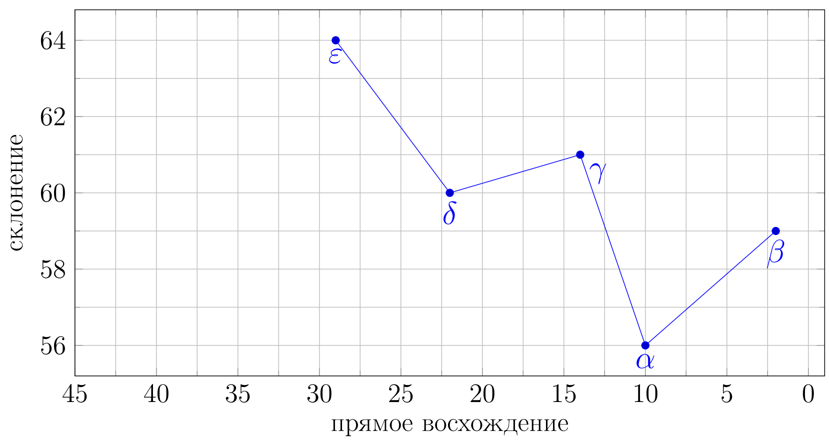


Из рисунков очевидно, что прямое восхождение Солнца с α Cen — угол, обозначенный на рисунке волнистой линией — будет равно прямому восхождению α Cen с Земли минус 180°, т.е. $220° - 180° = 40°$. Теперь можно нарисовать расположение звезд Кассиопеи и Солнца среди них на графике, используя данные в условии и полученные координаты.

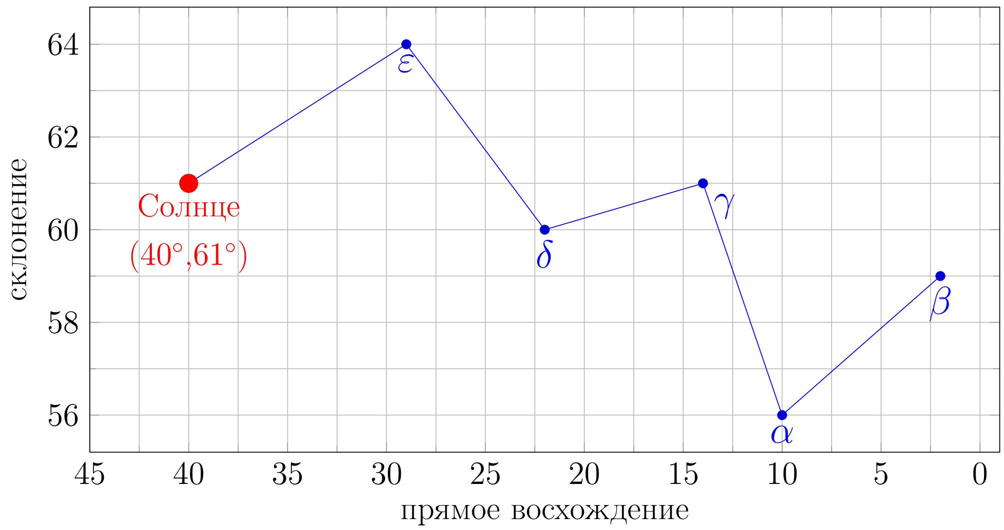
Нарисуем сначала по координатам созвездие Кассиопеи:



Тот, кто помнит, как на земном небе выглядит это созвездие, сразу отметит, что оно получилось отраженным справа налево. Дело в том, что система небесных координат устроена так, что прямое восхождение в ней увеличивается в сторону годичного движения Солнца, которое направлено против суточного вращения неба, т.е. справа налево в северном полушарии. Поэтому, чтобы на графике созвездие получилось в привычном виде, ось прямых восхождений надо направить справа налево:



Дорисуем Солнце:



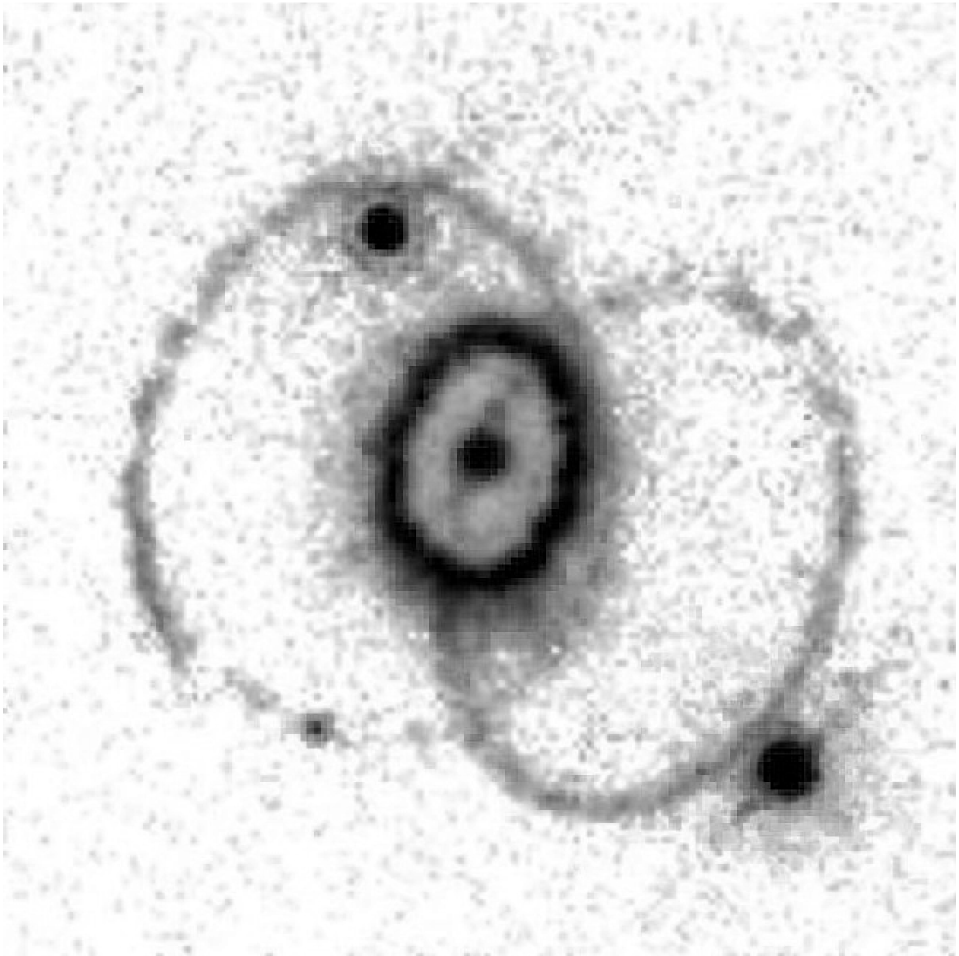
Оценим яркость Солнца по сравнению со звездами Кассиопеи при наблюдении с α Cen. Так как α Cen и Кассиопея находятся от Солнца в противоположных направлениях, то расстояние от звезд Кассиопеи до α Cen будет даже чуть больше, чем расстояние от них до Солнца. Следовательно, с α Cen все звезды Кассиопеи будут выглядеть более слабыми (чем дальше, тем слабее), чем при наблюдении с Земли. Осталось вспомнить, несколько фактов. α Cen — одна из ярчайших звезд земного неба, если точнее, 3-я по яркости. Звезды же Кассиопеи — не очень яркие. Самая яркая из них в настоящий момент — γ Cas — 63-я по яркости на земном небе, а α, β, δ и ε — 71-я, 74-я, 109-я и 245-я, соответственно. Солнце по своим физическим параметрам похожа на α Cen, а, значит, должна выглядеть с α Cen примерно так же, как α Cen выглядит с Земли (на самом деле, немного слабее). Следовательно, Солнце при наблюдении с α Cen будет ярче всех звезд Кассиопеи, т.е. первой по яркости в этом созвездии.

М.В.Костина

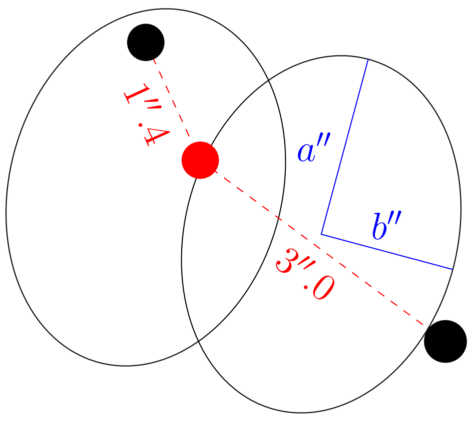
Задача № 73

Вам дано негативное изображение, полученное при наблюдении остатка вспышки сверхновой с высоким разрешением. Две кольцеобразных структуры — это два параллельных кольца одинакового радиуса, расположенных симметрично по отношению к сверхновой и состоящих из вещества, выброшенного предшественником сверхновой, и подсвеченного во время вспышки.

Известно, что угловое расстояние между сверхновой и яркой звездой, проецирующейся на снимок левее и выше сверхновой, равно $1''.4$, угловое расстояние между сверхновой и яркой звездой, проецирующейся на снимок правее и ниже сверхновой, равно $3''.0$. Свет от вспышки достиг колец примерно через 450 суток после вспышки. Определите с помощью этих данных расстояние до сверхновой.

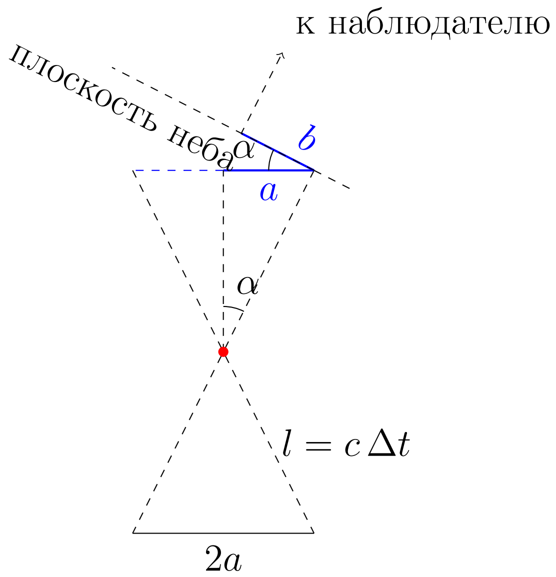


Решение. Схематически нарисуем то, что видим на снимке:



Очевидно, что кольца кажутся эллипсами, потому что плоскости колец наклонены к лучу зрения. Используя масштаб фотографии, заданный расстояниями между сверхновой и опорными звездами, можно определить малые b и большие a полуоси эллипсов в угловых секундах. Угол $3''.0$ соответствует примерно 54 мм, соответственно, в масштабе изображения 18 мм соответствуют $1''$. В результате измерений получим, что $a = 1''.9$, $b = 1''.3$.

Нарисуем вид «сбоку», когда луч зрения лежит в плоскости, параллельной плоскостям колец и проходящей через сверхновую.



Из рисунков следует, что $\cos\alpha = b/a$ и $\sin\alpha = a/l$. Воспользовавшись тем, что $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, получим, что

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{l^2} = 1,$$

откуда

$$l = \frac{a}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}} = \frac{1''.9}{\sqrt{1 - \frac{1.3^2}{1.9^2}}} \approx \frac{1''.9}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}}} = 2''.8.$$

В то же время мы знаем, что это угловое расстояние соответствует 450 световым суткам, т.е. примерно 1.2 светового года или 0.4 парсека. Учитывая, что в парсеке $2 \cdot 10^5$ а.е., получаем, что оно составляет около $8 \cdot 10^4$ а.е. Поскольку с 1 пк расстояние 1 а.е. по определению видно под углом $1''$, то расстояние до объекта (или линейного масштаба) в парсеках — это отношение его размера в а.е. к его угловому размеру в угловых секундах, поэтому искомое расстояние оказывается около $3 \cdot 10^4$ пк.

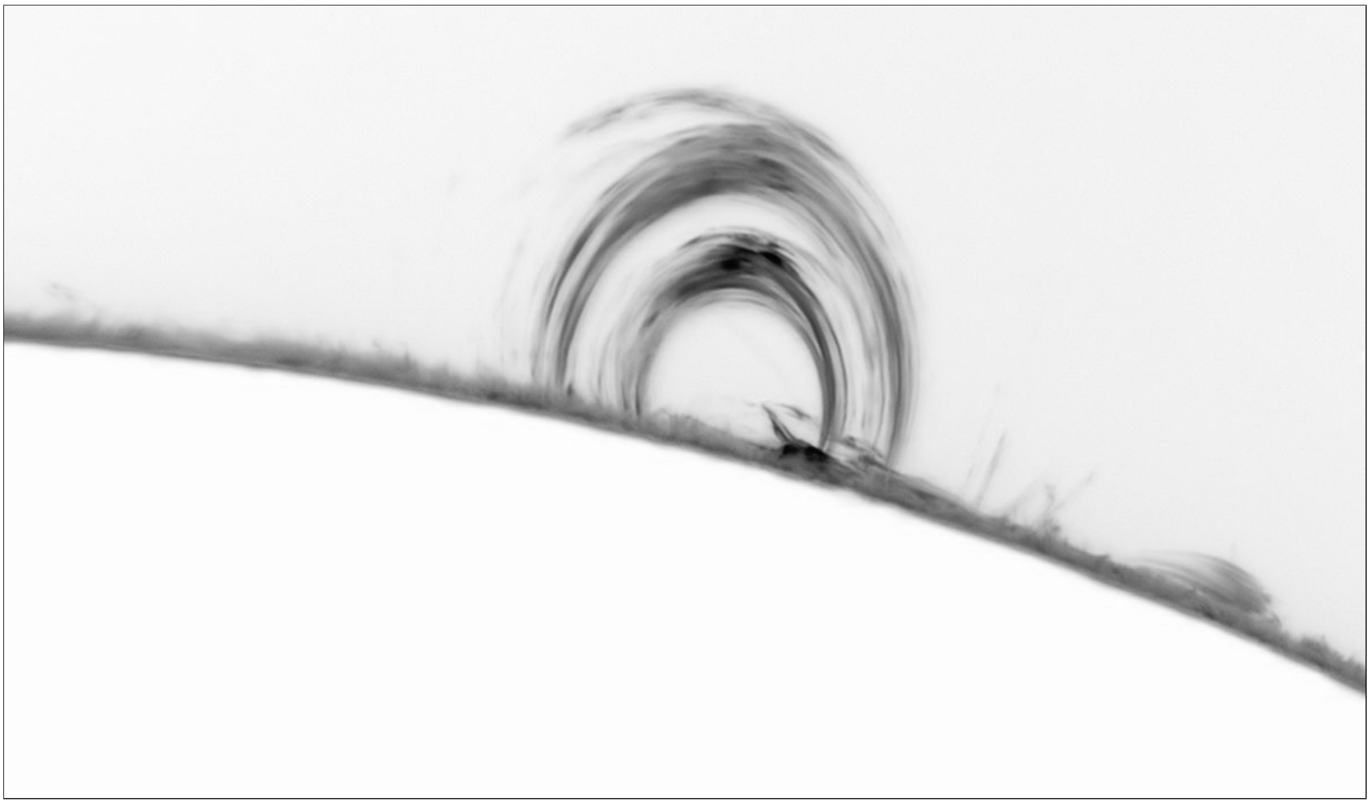
Подобные же измерения можно провести по левому кольцу. Результаты, скорее всего, будут отличаться, т.к. на глаз видно, что, вопреки написанному в условии, плоскости колец не совсем параллельны. Также будет отличаться масштаб изображения при измерении расстояния между сверхновой и верхней звездой. Большую погрешность в измерения также вносят размеры сверхновой и звезд на снимке и ненулевая толщина колец. Поэтому итоговый численный ответ у разных участников может отличаться от приведенного в данном решении.

Осталось сказать, что на снимке изображён остаток сверхновой SN1987A, вспыхнувшей 23 февраля 1987 года в Большом Магеллановом облаке. Известно, что вещество колец было выброшено предсверхновой более, чем за 20 тыс. лет до вспышки. Однако до сих пор остаётся загадкой, почему вещество было выброшено в виде колец, а не в виде сферически-симметричной (или близкой к такой) оболочки.

М.В.Костина, П.А.Тараканов

Задача № 74

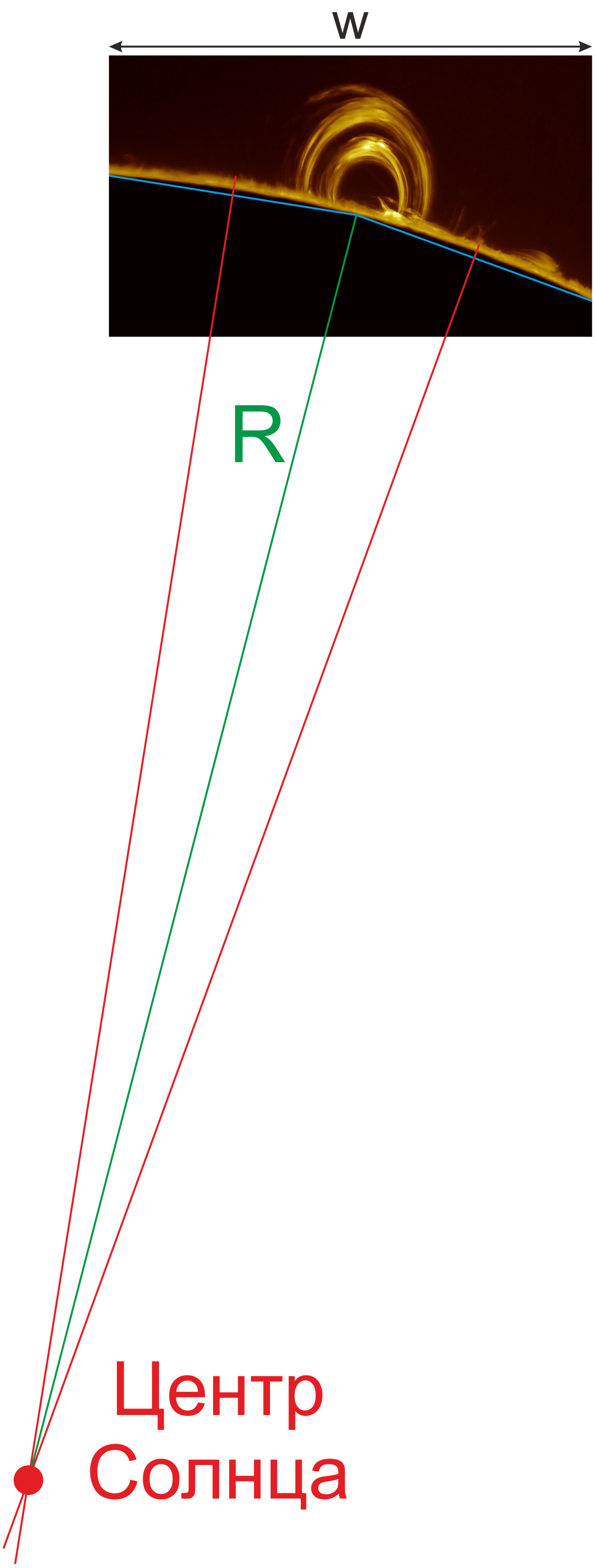
Вам дано изображение (негатив) корональной петли, образовавшейся на видимом краю диска Солнца из-за выхода силовых линий магнитного поля. Оцените объем этой корональной петли, считая ее изогнутой трубкой.



Решение. Для решения задачи необходим масштаб фото. Для этого надо помнить, что радиус Солнца составляет примерно 700 тыс. км. Но есть проблема: сам радиус здесь измерить напрямую нельзя, т.к. центр Солнца находится сильно далеко за пределами фото. Существует несколько методов его определения, ниже перичислим некоторые из них. Единицей измерения длины будем считать ширину фотографии w, т.к. у всех участников, вероятно, размер фото несколько отличался (15–18 см) из-за различных типографских особенностей.

Идейно самый простой вариант — построить две хорды (голубые), считая солнечный диск окружностью, провести срединные перпендикуляры к ним (красные) и продлить их до пересечения, которое будет находиться далеко за пределами листа с условием. Данные построения можно выполнить при помощи длинной линейки, циркуля или угольника.

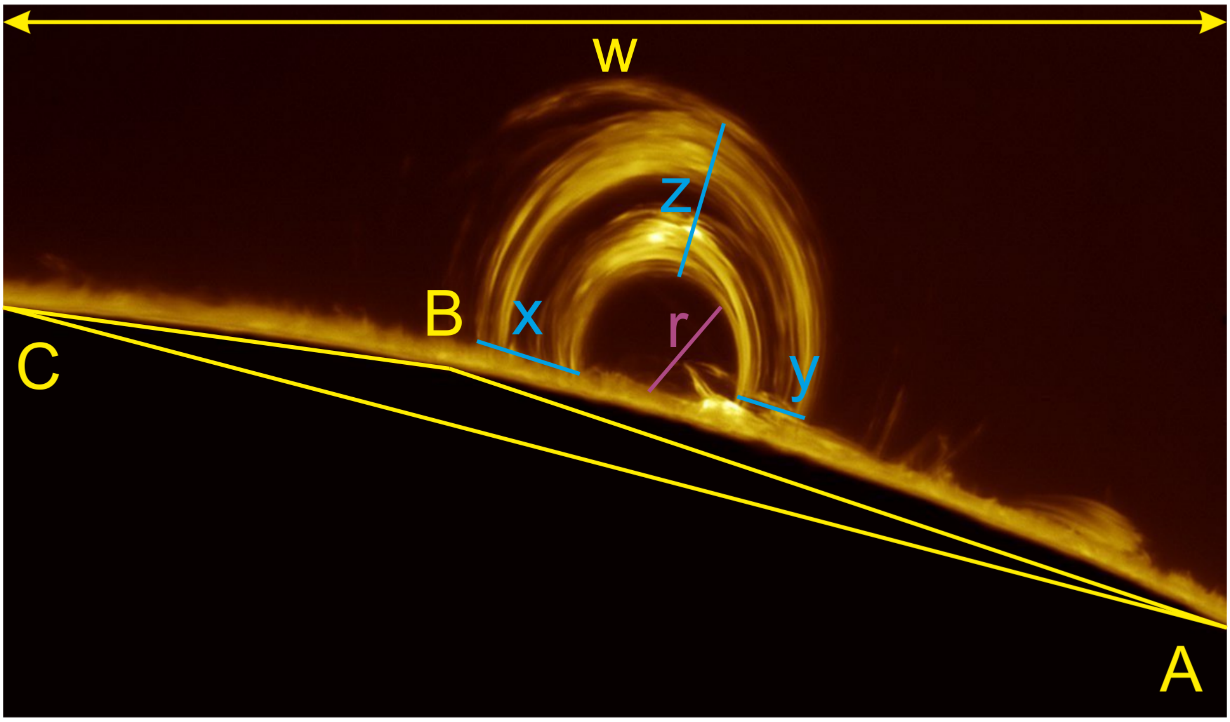
Для большей точности это следует сделать несколько раз, использовав несколько пар хорд. Тогда радиус Солнца R (зеленый) получится в 2.7 раза длиннее, чем ширина изображения w.



Идейно чуть более сложный вариант, но реализуемый в рамках одного листа бумаги — использовать теорему синусов. Если воспользоваться ею несколько раз (хотя бы для двух сторон, а еще лучше — для нескольких треугольников), то результат будет существенно точнее, т.к. очевидно, что углы в данном случае будут малы, а относительная погрешность их измерения — велика. Известно, что для любого треугольника с углами A, B, C и лежащих против них сторон BC, AC, AB соответственно выполняется равенство:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2R,$$

где R — радиус описанной окружности около такого треугольника. В нашем случае он равен радиусу Солнца.



Углы $C = 7°$ и $A = 4°$ на данном рисунке можно измерить транспортиром с точностью до $1°$, а для нахождения синусов нарисовать соответствующие прямоугольные треугольники или воспользоваться приближением $\sin\alpha \approx \alpha$, если α выражен в радианах. Получаем, что $\sin C \approx \frac{7°}{57°.3}$, $\sin A \approx \frac{4°}{57°.3}$. Измерение сторон дает: $AB = 0.67w$ и $BC = 0.37w$. Таким образом, мы получаем два значения радиуса, усредняем их:

$$R = \frac{1}{2}\left(\frac{AB}{2\sin C} + \frac{BC}{2\sin A}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{0.67w \cdot 57.3}{2 \cdot 7} + \frac{0.37w \cdot 57.3}{2 \cdot 4}\right) =$$

$$= \frac{57.3w}{4}\left(\frac{0.67}{7} + \frac{0.37}{4}\right) \approx 2.7w.$$

Так или иначе, радиус Солнца на данном изображении получается примерно равным $2.7w$.

Корональная петля, по условию, считается трубкой, то есть тором, а точнее — половиной тора. Будем считать, что она располагается в картинной плоскости. На фото хорошо видно, что толщина этой трубки меняется (то есть тор имеет переменное сечение), поэтому введем несколько параметров: x и y — толщина трубки у основания (слева и справа соответственно), z — толщина трубки на максимальной высоте, r — внутренний радиус трубки. Все обозначения приведены на рисунке выше.

Изменяя их линейкой, получаем: $x = 0.088w$, $y = 0.060w$, $z = 0.131w$, $r = 0.091w$. Переводим к радиусу Солнца R:

$x = 0.033R = 22.8$ тыс. км,

$y = 0.022R = 15.6$ тыс. км,

$z = 0.049R = 34$ тыс. км,

$r = 0.034R = 23.6$ тыс. км.

Объем целого тора можно найти, если вспомнить, что он является геометрической фигурой, образующейся при вращении круга вокруг оси, расположенной за пределами этого круга. Тогда если перемножить площадь поперечного сечения тора (образующего круга радиуса ρ) на длину окружности радиуса r_0, которую при вращении описывает центр этого круга (направляющей окружностью), то мы получим искомый объем V_0 целого тора:

$$V_0 = \pi\rho^2 \cdot 2\pi r_0 = 2\pi^2\rho^2 r_0.$$

В данном случае будем считать, что корональная петля состоит из четвертинок двух торов переменного сечения. Четвертинка тора от сечения шириной x до сечения шириной z имеет средний радиус $r_{xz} = r + (x+z)/4 = 48.2$ тыс.км (так как x и z — "диаметры"), а образующий круг имеет средний радиус $\rho_{xz} = (x+z)/4 = 14.2$ тыс. км. Вычислим объем левой «половины» корональной петли V_{xz}:

$$V_{xz} = \frac{1}{4}\cdot 2\pi^2\rho_{xz}^2 r_{xz} = \frac{\pi^2}{2}\cdot(14.2\times10^3)^2\cdot 48.2\times10^3 \approx 48\times10^{3+3\times3}\ \text{км}^3 = 48\times10^{12}\ \text{км}^3.$$

Аналогично можно найти объем V_{yz} правой «половины», а затем и полный объем V:

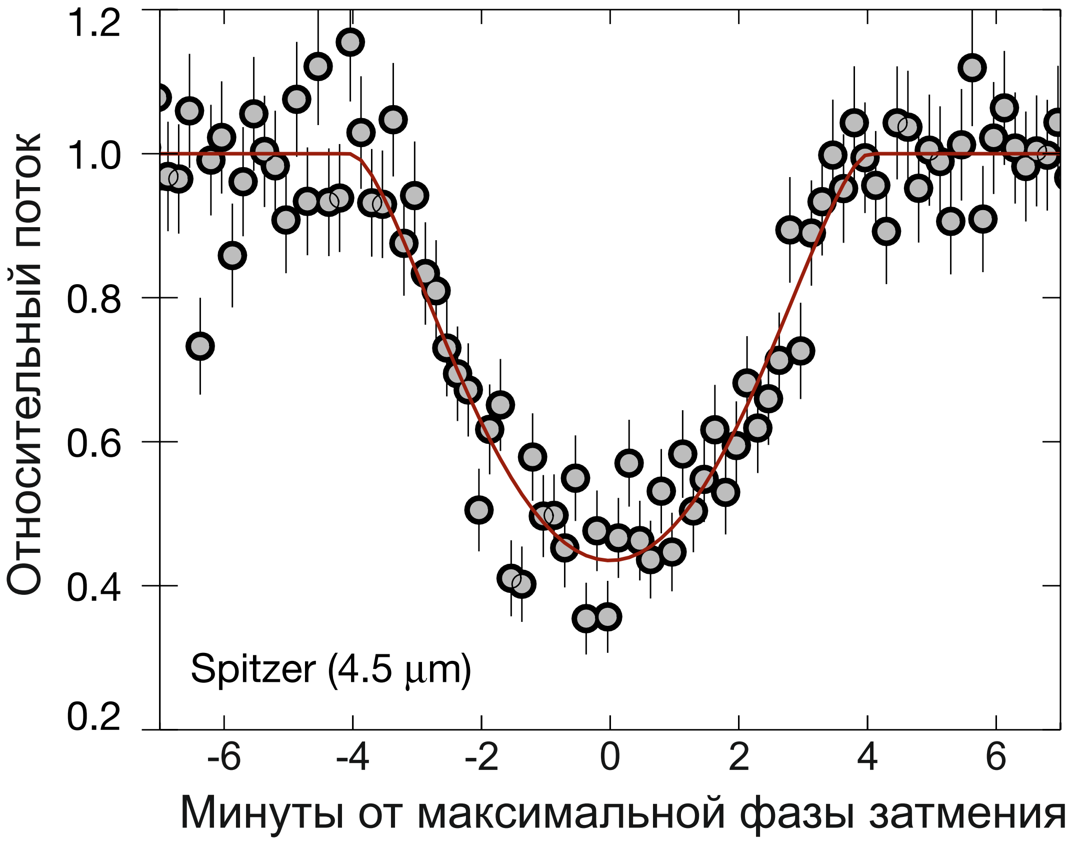
$$V_{yz} \approx 27\times10^{12}\ \text{км}^3 \qquad \Rightarrow \qquad V = V_{xz} + V_{yz} = 7.5\times10^{13}\ \text{км}^3.$$

Однако, можно учесть тот факт, что угол раскрыва петли больше 180°, поэтому итоговый ответ округляется вверх: $V = 10^{14}$ км.

В.В.Григорьев

Задача № 75

Вам дан график кривой блеска (наблюдения получены на телескопе Spitzer), образованной прохождением планеты по диску звезды Gaia DR2 2146576589564898688. Детальный анализ показал, что данная планета имеет период обращения 1.4 дня при радиусе круговой орбиты 3 млн. км. Угол между лучом зрения и нормалью к плоскости орбиты составляет 88°.8. Исходя из этих параметров, оцените радиусы звезды и планеты, а также определите, к каким типам относятся звезда и планета.



Решение. При помощи третьего закона Кеплера по известному радиусу орбиты a и периоду обращения T находим массу звезды M в массах Солнца, считая ее заметно больше массы планеты:

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} = 0.52\ M_\odot$$

Из графика видно, что затмение длилось $\Delta t = 8$ минут, а планета это время, можно сказать, двигалась по прямой со скоростью v:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{a}} = 1.5 \times 10^5\ \text{м/с},$$

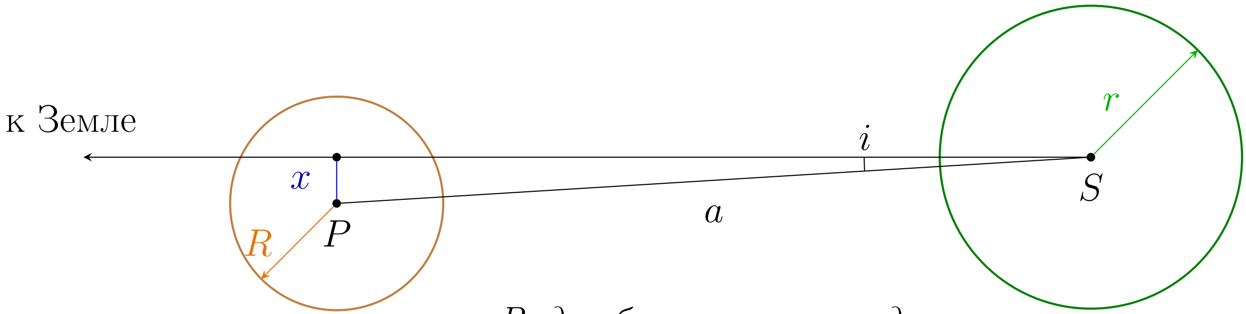
то есть планета прошла $d = v\Delta t = 72$ тыс. км.

Если внимательно присмотреться к кривой блеска, то на ней видно плавное убывание яркости звезды, отсутствие плато и симметричное возрастание яркости. Такое возможно, если планета «чиркнула» по звезде (т.е. планета должна «выступать» за пределы изображения звезды, в крайнем случае — диски должны касаться внутренним образом). Однако, глубина минимума говорит о том, что было закрыто около половины (!) диска звезды. Пусть радиус планеты — R, радиус звезды — r, а их отношение — $k = r/R$.

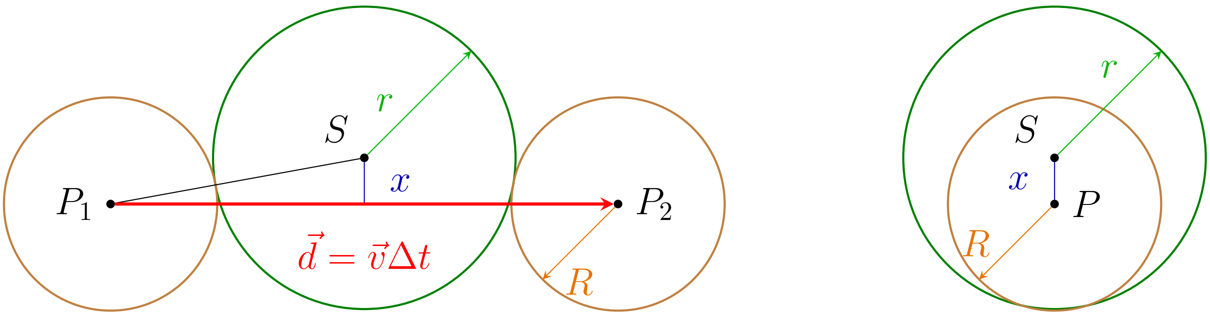
Пусть угол между лучом зрения и плоскостью орбиты равен $i = 90° - 88°.8 = 1°.2$. Тогда $\sin i \approx 1°.2/60° = 1/50 = 0.02$. Пусть x — расстояние между лучом, соединяющим наблюдателя и центр звезды, и центром планеты. Тогда

$$x = a \sin i = 3 \times 10^6 \cdot 0.02 = 6 \times 10^4 \text{ км}.$$

Рассмотрим первый вариант: $R < r$, $k > 1$. Обозначим центр планеты как P, а центр звезды — S и нарисуем три схемы:



Вид «сбоку», планета движется на нас



Вид с Земли, планета движется вправо *Вид с Земли, макс. фаза затмения*

В случае, когда планета касается звезды внутренним образом в момент максимальной фазы, мы можем написать крайнее соотношение на радиусы из тех соображений, что поток падает в два раза (т.е. уменьшение видимой светящейся площади звезды падает в два раза): $k = \sqrt{2}$. Данная величина k является максимальной, т.к. при меньшем радиусе планеты невозможно получить падение блеска в два раза только из геометрических соображений. Получаем уравнение относительно радиуса звезды:

$$x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = (r+R)^2 = r^2\left(1 + \frac{1}{k}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\sqrt{x^2 + d^2/4}}{1 + 1/k} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r \approx 41 \times 10^3 \text{ км} \\ R \approx 29 \times 10^3 \text{ км}. \end{cases}$$

Планета получилась примерно размером с Уран или Нептун, а принадлежность звезды к каким либо классам не очень ясна. Данная величина слишком мала для звезды Главной последовательности (строго говоря, это значение можно приписать красному карлику с массой менее 0.1 массы Солнца, но это противоречит полученной ранее массе звезды) и слишком велика для белого карлика. Таким образом, можно заключить, что этот вариант ($R < r$) не может объяснить данную кривую блеска.

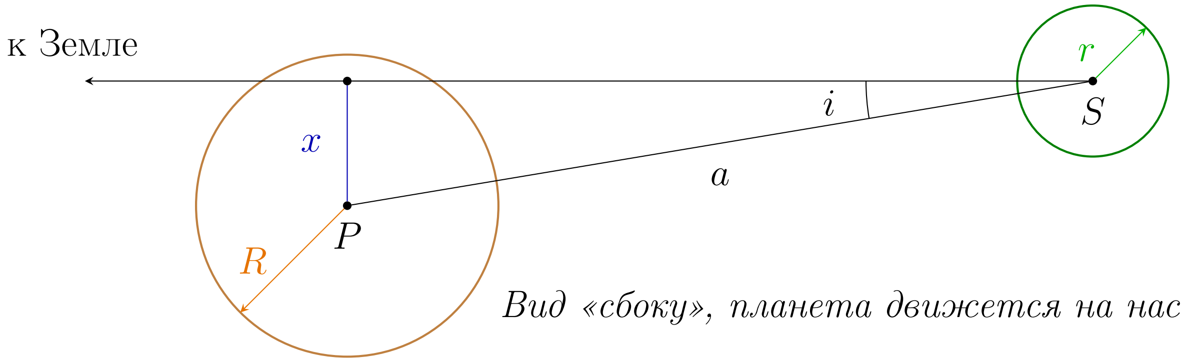
Отметим, что с уменьшением величины k радиус звезды r будет также уменьшаться, значит звезда скорее всего будет принадлежать белым карликам.

Рассмотрим пограничный вариант, когда звезда и планета совпадают по размерам: $R = r$, $k = 1$. Из уже написанной теоремы Пифагора получаем:

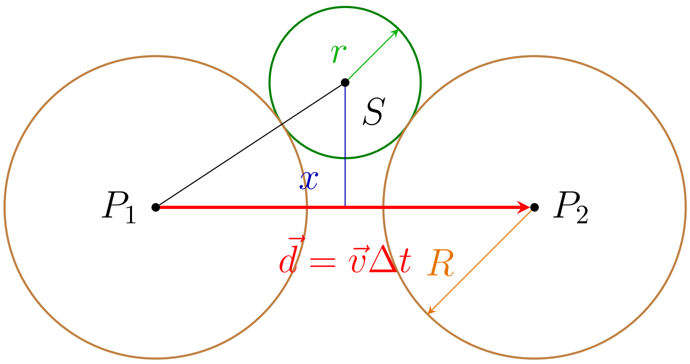
$$x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = (r+R)^2 = 4r^2 \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{\sqrt{60^2 + (72/2)^2}}{2} \approx 35 \times 10^3 \text{ км.}$$

Все равно звезда пока что слишком велика для белого карлика.

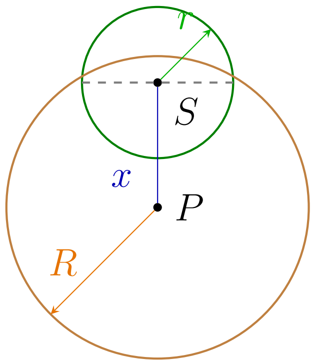
Осталось рассмотреть третий вариант: $R > r$. Снова изобразим три схемы:



Вид «сбоку», планета движется на нас



Вид с Земли, планета движется вправо



Вид с Земли, макс. фаза затмения

Точный подсчет площади пересечения двух кругов при известных радиусах и расстоянии между центрами хоть и относительно несложен, но довольно длинный и требует аккуратных вычислений (сумма сегментов двух кругов). При этом обратная задача (нахождение радиусов при известной площади) требует решения трансцендентного уравнения. Разумеется, его можно свести к кубическому (разложив синус в ряд до второго члена) хотя бы благодаря тому, что центральный угол около точки S неизбежно будет близок к $180°$, но это излишние сложности.

Поэтому для простоты будем считать, что точки пересечения коричневой и зеленой окружностей (см. схему справа снизу) лежат на диаметре (серый пунктир) меньшей окружности. По графику видно, что поток упал чуть-чуть больше, чем в два раза (погрешность измерений позволяет рассматривать подобное приближение), то есть половина диска звезды точно должна быть закрыта. Оставшееся «чуть-чуть» как раз будет зависеть от отношения радиусов окружностей: чем больше R, тем ближе к половине диска звезды будет закрыто.

Таким образом, получаем соотношение между радиусами в виде очередной теоремы Пифагора:

$$r^2 + x^2 = R^2.$$

Проще составить систему уравнений относительно k и решить ее:

$$\begin{cases} R^2\left(1+k\right)^2 = x^2 + \frac{d^2}{4} \\ R^2\left(1-k^2\right) = x^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{(1+k)^2}{1-k^2} = 1 + \frac{d^2}{4x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1+k}{1-k} = 1 + \frac{d^2}{4x^2}$$

$$k = \frac{d^2}{8x^2 + d^2} = \frac{1}{8\left(x/d\right)^2 + 1} = \frac{1}{8\cdot(60/72)+1} = \frac{3}{23}.$$

Теперь, зная k, можно найти и сами радиусы:

$$r = \frac{x}{\sqrt{(23/3)^2 - 1}} \approx 7.9\times 10^3 \text{ км}; \qquad R \approx 6\cdot 10^4 \text{ км}.$$

Итак, для радиуса звезды мы получили значение, соответствующее маломассивному белому карлику (его масса ≈ 0.5 масс Солнца). Планета похожа на Сатурн — газовый гигант.

Доподлинно известно, что белый карлик входит в тройную звездную систему и, поэтому, скорее всего, данная планета пережила стадию сброса оболочки красным гигантом и мигрировала к белому карлику из-за приливного воздействия соседних звезд.

Весьма точный анализ данной системы был проведен в статье, опубликованной в журнале Nature (*https://www.nature.com/articles/s41586-020-2713-y*, именно из нее и были взяты исходные данные для задачи), где было получено, что $r = 9150$ км, а $R \approx 65\times 10^3$ км.

В.В.Григорьев