Санкт-Петербургский государственный университет
Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН
Институт прикладной астрономии РАН

П.А. Тараканов, А.В. Веселова, М.И. Волобуева,
В.В. Григорьев, М.В. Костина, Б.Б. Эскин

Задачи XXVII Санкт-Петербургской Астрономической олимпиады

Санкт-Петербург
2020

Рецензенты:
доктор физ.-мат. наук, профессор Л.Л. Соколов (СПбГУ)
доктор физ.-мат. наук, профессор В.П. Пронин (РГПУ им. Герцена)

Печатается по постановлению
Учебно-методической комиссии по укрупненной группе направлений
и специальностей 03.00.00 «Физика и астрономия»

Тараканов П.А., Веселова А.В., Волобуева М.И.,
Григорьев В.В., Костина М.В., Эскин Б.Б.

Задачи XXVII Санкт-Петербургской Астрономической олимпиады:
учебно-методическое пособие — СПб, 2020. — 93 с.

Сборник содержит задачи, предлагавшиеся на XXVII Санкт-Петербургской Астрономической олимпиаде (2019–2020 учебный год) и решения задач. Сборник может быть использован как для углубленного изучения астрономии в средней школе (в том числе для подготовки к олимпиадам различных уровней), так и в рамках курса «Общая астрономия» студентов Астрономического отделения СПбГУ и других университетов, ведущих подготовку астрономов или учителей физики и астрономии.

1 Введение

В 1993 году в Санкт-Петербурге прошла первая экспериментальная городская олимпиада по астрономии. Она была настолько экспериментальной, что даже не получила порядкового номера. Правила ее проведения сильно отличались от последующих олимпиад, в частности не было разделения по возрастным группам.

Следующая олимпиада — 1994 года — проводилась уже по правилам, которые в своей основе сохранились до настоящего времени. Школьникам было предложено пять заданий, разбитых на две группы: для 8–9 и 10–11 классов. В 1995 году впервые появились задания для 6 и 7 классов, которые впоследствии стали обязательной составной частью олимпиад, а в 2009 году появилась и параллель 5 класса.

Олимпиада развивалась, увеличивалось количество участников олимпиады. Это привело к необходимости предварительного отбора участников, и к концу 90-х годов появился заочный отборочный (а затем, с 2010 года, и очный) тур, задача которого состояла в предварительном отборе участников теоретического тура олимпиады.

Постепенно сформировались традиции Санкт-Петербургской астрономической олимпиады. Среди этих традиций — задачи, максимально приближенные к реальной работе астронома, желательно на основе реальных астрономических событий и данных, составление практически непересекающихся комплектов заданий для различных возрастных параллелей, причем только «собственного производства». На Санкт-Петербургской астрономической олимпиаде запрещается пользоваться калькуляторами, чтобы приучать школьников проводить оценочные расчеты и корректно учитывать точность используемых данных.

С 2003 года олимпиада стала открытой, в ней начали принимать участие школьники из различных регионов РФ, а затем и других стран. Начиная с 2010 года туры олимпиады проводятся одновременно во многих городах. В последние годы олимпиада проходит примерно на 50 площадках в различных регионах России и 12 других стран.

Предлагаемые на Санкт-Петербургской астрономической олимпиаде задачи, как правило, обладают некоторыми специфическими особенностями. Первой особенностью является необычно большая доля задач астрофизической тематики, в том числе и тех разделов, которые, как правило, в традиционных курсах астрономии для школ и кружков практически не рассматриваются (физика межзвездной среды, космология, радиоастрономия и т.д.). В целом от участника олимпиады требуется не только умение решать задачи по астрономии «классического» типа, но и широкие знания по всем разделам астрономии и умение этими знаниями пользоваться.

Еще одной особенностью является необходимость оценки промежуточных данных, нужных для решения задач. Как правило, участникам олимпиады сообщаются только те числовые данные, которые школьники заведомо не могут оценить или получить из других известных им величин (по крайней мере, за отведенное на решение задач время). Основные физические константы также считаются известными участникам.

Как правило, задачи олимпиады требуют для решения повышенного уровня знаний по физике и математике. Например, уравнение, получившееся в процессе решения задачи, может оказаться нетривиальным, и для его решения потребуется либо воспользоваться каким-либо «олимпиадным» математическим приемом, либо аккуратно упростить его, воспользовавшись физически корректным приближением. В силу специфики предмета олимпиады необходимые дополнительные знания по физике и математике нередко выходят даже за пределы «классической» тематики физических и математических олимпиад. В качестве примеров можно упомянуть физику излучения (в т.ч. и квантовую), ядерную физику, некоторые разделы математического анализа и геометрии, теорию погрешностей и т.д.

По сложившейся традиции какими-либо вычислительными средствами (калькуляторами и т.п.) на заключительном этапе олимпиады (теоретическом и практическом турах) пользоваться запрещено, однако на олимпиадах практически отсутствуют задачи, решить которые без трудоемких вычислений невозможно. В то же время иногда встречаются задачи, существенным элементом решения которых является нахождение эффективных методов получения численного ответа.

На каждом из туров, кроме практического, участникам предлагается решить по 5 задач. На решение задач очного отборочного тура отводится 3 часа, при этом можно пользоваться калькуляторами, но не справочными данными и литературой. Заочный отборочный тур занимает около месяца, при выполнении его заданий можно пользоваться любыми данными (нередко для решения задачи нужно предварительно найти какие-либо дополнительные данные) и любой вычислительной техникой (в частности, одним из возможных методов решения задач может быть программное моделирование).

На турах заключительного этапа — теоретическом и практическом — запрещены уже любые справочные данные и вычислительная техника. На решение 5 задач теоретического тура у участников есть 4 часа, на практическом туре, продолжающемся 2.5 часа, в каждой параллели предлагается одна (иногда две) задачи, связанных с обработкой наблюдательных данных, их интерпретацией, разработкой методов наблюдений и т.п.

Туры	**Класс**						
	5	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
очный отборочный	1–5			6–10		11–15	16–20
заочный отборочный	21–25		26–30		31–35	36–40	41–45
теоретический	45–50		51–55		56–60	61–65	66–70
практический	71		72		73	74	75

В таблице указано, на каком из туров и каким классам предлагались задачи, включенные в сборник. По традиции задачи для младших возрастных параллелей общие для двух (иногда трех) классов, однако итоговый конкурс является раздельным и места победителей и призеров присуждаются в каждом классе отдельно.

В разделе 2 сборника для удобства самостоятельной работы с ним приведены только условия задач, раздел 3 содержит как условия, так и решения задач.

Авторами задач, включенных в сборник, являются С.В. Васильев, А.В. Веселова, М.И. Волобуева, В.В. Григорьев, В.А. Дмитриев, М.В. Костина, И.Д. Маркозов, А. Салганик, П.А. Тараканов, И.С. Тихоненко, Б.Б. Эскин.

2 Условия задач

Задача № 1

На написание районного тура Вам дано 3 часа. До каких планет за это время может дойти свет от Солнца, испущенный в момент начала тура? Свет распространяется со скоростью около 300 000 км/с.

Задача № 2

Восходящая Луна в фазе первой четверти находится в созвездии Тельца. В какой сезон года и в какое время суток можно наблюдать это явление?

Задача № 3

Сопоставьте объекты из нижней строки таблицы объектам из верхней строки. Объясните свой выбор и напишите, что это за объекты.

Геминиды	Персеиды	Аквариды	Леониды
Водолей	Лев	Близнецы	Персей

Задача № 4

20 ноября 2004 года запущена орбитальная обсерватория Swift, предназначенная для исследования космических гамма-всплесков. В какой день недели произошел запуск?

Задача № 5

Родившийся ровно 130 лет назад Эдвин Хаббл обнаружил, что другие галактики удаляются от нашей со скоростью, пропорциональной расстоянию до них, $v = H \cdot r$, где v — скорость удаления, r — расстояние до галактики, H — величина, называемая «постоянной Хаббла» и равная $H = 70$ км/с/Мпк (Мпк — это мегапарсеки). Соответствующее утверждение называется законом Хаббла.

Предположим, что закон Хаббла выполняется на любых расстояниях, в том числе и очень больших. Оцените расстояние, на котором должны находиться галактики, удаляющиеся от нашей Галактики со скоростью света.

Задача № 6

Марсианин и землянин живут по местному среднему солнечному времени каждый, используя для этого часы с обычным циферблатом, но идущие со скоростью, соответствующей продолжительности солнечных суток на данной планете. Как часто показания часов марсианина и землянина будут совпадать? Продолжительность сола (марсианских солнечных суток) считать равной 24 часам 40 минутам (земным).

Задача № 7

Две нейтронные звезды обращаются вокруг общего центра масс с периодом, равным 3 годам. Масса одной звезды составляет 1 массу Солнца, расстояние между звездами постоянно и составляет 3 а.е. Определите массу второй нейтронной звезды.

Задача № 8

Видимые размеры спиральной галактики NGC 6744 составляют $20' \times 12'$. Предполагая, что диск галактики идеально круглый, определите угол между лучом зрения и плоскостью диска галактики.

Задача № 9

Звезда δ Рыб имеет координаты $\alpha = 0^h50^m$, $\delta = 7°35'$. Звезда φ Водолея находится на 1^h36^m западнее и на $13°34'$ южнее. Определите координаты φ Водолея.

Задача № 10

20 ноября 1889 г. в США родился астроном Эдвин Хаббл, открывший существование других галактик и наблюдательно обнаруживший расширение Вселенной (закон Хаббла). В какой день недели он родился?

Задача № 11

Объект Солнечной системы (229762) Гкъкунлъ'хомдима обращается вокруг Солнца с периодом около 620 лет, а минимальное расстояние от него до Солнца составляет 38 а.е. Оцените, во сколько раз для земного наблюдателя отличаются максимальный и минимальный видимый угловой диаметр объекта.

Задача № 12

В планетной системе по круговым орбитам, лежащим в одной плоскости, в одном и том же направлении вокруг звезды движутся три планеты с периодами обращения 1.0, 1.1 и 2.0 года. В некоторый момент произошел парад планет (три планеты оказались на одной прямой по одну сторону от звезды). Через какой промежуток времени парад планет повторится?

Задача № 13

Каскад Кембла — астеризм в созвездии Жираф. Он представляет собой цепочку звезд, выстроившихся в почти прямую линию длиной в 5 диаметров Луны. Оцените линейное расстояние между крайними звездами цепочки, если одна из них находится на расстоянии 7 кпк от Земли, а другая — 5 кпк.

Задача № 14

Аппарат OSIRIS-REx в данный момент исследует околоземный астероид Бенну, обращаясь вокруг астероида на средней высоте 1.5 км над его поверхностью. Средний диаметр астероида составляет $5.6 \cdot 10^2$ метров, а его масса — $1.4 \cdot 10^{11}$ кг. Определите период обращения аппарата.

Задача № 15

Видимая звездная величина Проциона за пределами земной атмосферы составляет $0^m.40$. Найдите видимую звездную величину Проциона в момент верхней кульминации для наблюдателя в Петербурге, если известно, что склонение Проциона $\delta = +5°$, а изменение звездной величины объекта из-за поглощения в атмосфере Δm зависит от зенитного расстояния z как $\Delta m = 0^m.2/\cos z$.

Задача № 16

Блазар 6C 001403+811827 на данный момент считается самым ярким известным активным ядром галактики. Его светимость составляет около $1.2 \cdot 10^{41}$ Вт. На каком расстоянии от Земли он должен находиться, чтобы Земля получала от него в единицу времени столько же энергии, сколько от Солнца? Солнечная постоянная (суммарная мощность солнечного излучения, проходящего через единичную площадку, ориентированную перпендикулярно потоку, на расстоянии 1 а.е. от Солнца вне земной атмосферы) составляет 1.4 кВт/м^2.

Задача № 17

Известно, что полярные сияния возникают при столкновении быстро движущихся частиц солнечного ветра с атомами в земной атмосфере. Атомы каких из перечисленных химических элементов — кислород, азот, железо, уран — «ответственны» за возникновение полярных сияний? Почему?

Задача № 18

Сферический астероид диаметром 22 м на круговой орбите радиусом 1.3 а.е. вращается вокруг своей оси с периодом, равным 16 секундам. Во сколько раз скорость движения точек на его экваторе относительно центра отличается от скорости его движения по орбите?

Задача № 19

Радиус Плутона равен $1.2 \cdot 10^3$ км. Оцените максимальное расстояние, на котором объекты, находящиеся на поверхности Плутона, сможет увидеть наблюдатель, расположившийся на вершине самой высокой горы Плутона — горы Райт, высота которой равна 4 км.

Задача № 20

Астрономы, живущие в планетной системе другой звезды, наблюдая Солнце, открыли Юпитер по изменению видимой звездной величины Солнца при прохождении Юпитера по диску Солнца. Оцените зарегистрированное ими изменение видимой звездной величины Солнца, если известно, что средние плотности Юпитера и Солнца примерно одинаковы, а массы отличаются в 10^3 раз.

Задача № 21

Луна покрыла Альфу Змееносца 7 сентября. В какой при этом фазе была Луна?

Задача № 22

В июле 1972 года на Солнце произошла мощная вспышка и часть солнечного вещества достигла Земли всего за 14.6 часа. С какой средней скоростью (в км/с) двигалось солнечное вещество?

Задача № 23

Средние плотности Солнца и Юпитера практически совпадают. Но масса Юпитера в 10^3 раз меньше массы Солнца. Во сколько раз радиус Солнца больше радиуса Юпитера?

Задача № 24

В календаре майя использовался 9-дневный цикл, каждый день которого имел собственное название, 13-дневный цикл, в котором каждый день также имел собственное название (другое), и 20-дневный цикл, в котором каждый день имел еще одно дополнительное название. Сколько дней проходило между двумя последовательными повторениями полного названия дня (состоящего из всех трех частей)?

Задача № 25

Оцените, в каких пределах может изменяться продолжительность покрытия звезды Y Тельца Луной.

Задача № 26

Часы петербургского студента–астронома испортились: за сутки они уходят на 6 минут вперед. В 7 часов утра студент выставляет часы по точному местному времени для своего дома. В 6 часов вечера, вернувшись домой, студент снова посмотрел на часы. На каком расстоянии от дома студента на той же широте находится пункт, для которого увиденное время в этот момент окажется точным?

Задача № 27

Потерянный астероид 1995 SN_{55}, согласно вычисленной орбите, может подходить к Солнцу не ближе, чем на 7.9 а.е. Однако из-за малого количества наблюдений эта величина известна с ошибкой около 350 миллионов км. Может ли, согласно этим данным, астероид подойти к Земле ближе, чем на 10 радиусов лунной орбиты?

Задача № 28

Минимально возможная скорость движения некоторой планеты Солнечной системы относительно Юпитера составляет 22 км/с. Найдите максимально возможную скорость движения той же планеты относительно Юпитера и назовите эту планету. Можно считать, что орбиты обеих планет круговые и расположены в одной плоскости.

Задача № 29

Туманность Кольцо находится на расстоянии $2.6 \cdot 10^3$ световых лет от Солнца. За 100 лет ее видимые угловые размеры возрастают в среднем на $1''$. С какой линейной скоростью (в км/с) происходит расширение туманности?

Задача № 30

Комету одновременно наблюдают астрономы с Земли и Марса. Угловой размер хвоста кометы, видимого с Земли, равен 2°. Найдите угловой размер хвоста кометы, видимый с Марса, если известно, что Марс в момент наблюдения находится в квадратуре. Можно считать, что длина хвоста, видимого при наблюдениях с Земли и с Марса, одинакова.

Задача № 31

Какой из объектов быстрее проходит расстояние по орбите, равное своему диаметру, и во сколько раз: Земля или «горячий юпитер» с большой полуосью орбиты 0.05 а.е. и радиусом 90 тысяч км, обращающийся вокруг звезды с массой, равной массе Солнца?

Задача № 32

Определите высоту верхней кульминации одной из самых известных далеких галактик MACSJ0647+7015 (прямое восхождение $\alpha = 6^h47^m$, склонение $\delta = 70°15'$), находящейся в созвездии Жирафа, при наблюдении с сопки Халтиатунтури (граница Финляндии и Норвегии, широта $\varphi = 69°19'$, долгота $\lambda = 21°17'$).

Задача № 33

Наблюдатель на экваторе заметил, что некоторый спутник прошел через зенит в полночь, в 8 часов утра и в 16 часов вечера по местному времени. Определите радиус орбиты спутника, считая ее круговой.

Задача № 34

Планета движется вокруг звезды по круговой орбите радиусом 2 а.е. со скоростью 15 км/с. Во сколько раз масса звезды меньше массы Солнца?

Задача № 35

Некоторая звезда имеет годичный параллакс $\pi = 0''.0073$ и видимую звездную величину $m = 2^m.84$. Найдите ее абсолютную звездную величину.

Задача № 36

Карликовая сфероидальная галактика Лев V имеет видимую звездную величину 16^m и находится на расстоянии 570 тыс. световых лет от Солнца. Во сколько раз светимость данной галактики превышает солнечную?

Задача № 37

Компоненты двойной звезды вращаются друг вокруг друга по круговым орбитам, расположенным перпендикулярно лучу зрения. Угловое расстояние между компонентами составляет $0''.1$, расстояние до системы — 10 парсек. Известно, что соотношение масс компонент равно 1:3. Найдите линейные радиусы орбит компонент вокруг их общего центра масс.

Задача № 38

В некоторый момент звезда со склонением 30° находилась в кульминации для наблюдателя в Санкт-Петербурге. В тот же момент вторая звезда оказалась также в кульминации, причем сумма высот звезд составила 125°. Определите склонение второй звезды.

Задача № 39

Диаметр зеркала космического телескопа им. Джеймса Уэбба составляет 6.5 метров. Он будет наблюдать на длине волны 13 мкм. Сможет ли телескоп разрешить двойную систему, компоненты которой находятся на угловом расстоянии $0''.6$ друг от друга?

Задача № 40

Звезда, находящаяся на расстоянии 100 пк от Солнца, обладает собственным движением $0.1''$/год и лучевой скоростью -20 км/с. С какой пространственной скоростью звезда движется относительно Солнца? Приближается она к Солнцу или отдаляется от него?

Задача № 41

Два малых тела с массами, равными 1 кг, находятся на расстоянии 1 м друг от друга. Через какое время эти два тела столкнутся? Всеми силами, кроме гравитационных между самими телами, пренебречь.

Задача № 42

Тело Солнечной системы, вращающееся вокруг Солнца по круговой орбите в плоскости эклиптики, сближается с Сатурном на минимальное расстояние каждые 4 года. Чему равно это расстояние?

Задача № 43

Однажды максимальная северная либрация Луны по широте совпала с максимальной западной либрацией по долготе. Через сколько суток это произойдет в следующий раз?

Задача № 44

Недавно была зарегистрирована вспышка в радиодиапазоне от магнетара XTE J1810-197. Было обнаружено, что радиолиния на частоте $6.5 \cdot 10^2$ МГц расширена, сигнал регистрировался на частотах с $6.0 \cdot 10^2$ до $7.0 \cdot 10^2$ МГц. Считая, что уширение линии было вызвано вращением магнетара, оцените линейную скорость движения точек на экваторе магнетара.

Задача № 45

Некоторая звезда имеет температуру $48 \cdot 10^3$ K и радиус 1.5 радиуса Солнца, она находится на расстоянии 3.2 кпк от Солнца в направлении центра Галактики. Какую видимую звездную величину имеет звезда для наблюдателя с Земли, если поглощение света в плоскости Галактики составляет 2^m/кпк?

Задача № 46

Археолог Вася перевел надпись в древнем документе: «Когда тончайший серп, рогами обращенный на восход, близ яркой голубой звезды покажется на небосклоне, путь верный к храму он тебе укажет...» В какой сезон года и в какое время суток в северных широтах следует наблюдать указанное событие?

Задача № 47

Считается, что облако G2 теряет в год массу, равную $5 \cdot 10^{-7} M_{\odot}$. Оцените, во сколько раз масса, теряемая облаком за секунду, меньше или больше общей массы людей на Земле? Масса Солнца равна $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30}$ кг.

Задача № 48

В Древнем Египте использовался календарь, продолжительность года в котором составляла ровно 365 суток. Кроме этого, древние египтяне использовали т.н. «год Сириуса» (начало которого было привязано к первой возможности наблюдения Сириуса в лучах утренней зари), продолжительность которого составляла $365\frac{1}{4}$ суток. Интервал времени между двумя последовательными совпадениями дат начала календарного года и «года Сириуса» назывался «Великим годом».

Во время появления такой календарной традиции начало «года Сириуса» совпадало с началом разлива Нила. Допустим, что в этот же момент начался очередной «Великий год». Раньше или позже начала следующего «Великого года» произойдет разлив Нила, и на сколько примерно суток?

Задача № 49

В 2020 году состоится 2 солнечных и 4 лунных затмения. Известно, что в конце декабря 2019 года было кольцеобразное солнечное затмение, а в начале января 2020 года — полутеневое лунное. Какого типа будут остальные затмения этого года? В какой последовательности они произойдут? В какие месяцы года они произойдут? Поясните свой ответ.

Задача № 50

Звезда δ Цефея известна тем, что она пульсирует: у нее регулярно меняются размеры. Она имеет массу, равную 5 массам Солнца, а ее средний радиус — 40 радиусов Солнца. Полное изменение диаметра составляет 7 миллионов километров, период пульсаций — 5.4 дня. Определите, во сколько раз отличаются максимальная и минимальная плотности звезды, найдите средние скорости, с которыми поверхность звезды движется по отношению к ее центру при расширении и сжатии звезды, если известно, что сжатие длится в три раза меньше по времени, чем расширение. Радиус Солнца равен 700 тысяч километров.

Задача № 51

В первой половине сентября 2019 года произошло противостояние Нептуна. Петербургский астроном хотел в том же сентябре удаленно пронаблюдать Нептун на телескопе, установленном в Чили. Часовой пояс телескопа — UT−3. В какое приблизительно время по времени Санкт-Петербурга следовало вести наблюдения?

Задача № 52

Шаровое звездное скопление ω Центавра — самое большое подобное скопление в Галактике, его радиус составляет 90 световых лет. В скоплении настолько много звезд, что среднее расстояние между соседними звездами составляет всего 1 световой год. Если считать, что все звезды похожи на Солнце, то сможет ли цепочка из этих звезд, размещенных вплотную друг к другу, дотянуться от Солнца до ближайшей к Солнцу звезды Галактики?

Задача № 53

26 декабря Луна покрыла Юпитер. В тот же день состоялось кольцеобразное солнечное затмение. На утреннем или вечернем небе можно увидеть Юпитер сегодня? Оцените широты, на которых Юпитер в принципе не может быть виден сегодня.

Задача № 54

По данным одного из исследований масса пояса Койпера составляет около 1% от массы Земли. При моделировании динамики объектов Солнечной системы пояс Койпера для упрощения представили плоским очень тонким кольцом с внутренним радиусом 30 астрономических единиц (а.е.) и внешним радиусом 50 а.е. Сколько граммов приходится на каждый квадратный метр поверхности такого кольца?

Задача № 55

Можно ли в каком-нибудь одном пункте на территории России наблюдать звезды Альтаир и Альнаир? Известно, что в Санкт-Петербурге Альтаир опускается под горизонт не более, чем на 25°, а на экваторе максимальная высота над горизонтом звезды Альнаир равна 43°. Крайняя северная точка России имеет широту 82° с.ш., крайняя южная точка России имеет широту 41° с.ш.

Задача № 56

Первым сахаром, обнаруженным в межзвездных облаках, стал гликольальдегид CH_2OHCHO. В некотором облаке с радиусом 2 парсека лучевая концентрация (количество молекул в столбике/колонке с площадью основания 1 см^2) в направлении на центр облака составляет $2.8 \cdot 10^{14}$ молекул на см^2. Оцените общую массу молекул гликольальдегида в облаке.

Задача № 57

Космический корабль с фантастическим двигателем, который обладает пренебрежимо малым расходом топлива и способен годами разгонять корабль с ускорением 1 g, совершает перелет между околоземной орбитой и околомарсианской орбитой. Оцените, в каких пределах может меняться продолжительность такого перелета, если известно, что и около Земли, и около Марса корабль должен иметь нулевую скорость относительно Солнца.

Задача № 58

Звезда R Андромеды из-за сильного звездного ветра теряет 10^{-6} масс Солнца в год. Считая, что звездный ветер уносится от звезды прямолинейно и равномерно со скоростью $3 \cdot 10^2$ км/с, оцените концентрацию частиц звездного ветра от этой звезды в окрестности Солнечной системы. Годичный параллакс R And равен $0''.004$.

Задача № 59

Каждый телескоп системы KELT (Kilodegree Extremely Little Telescope) оснащен линзовым объективом с диаметром 42 мм и ПЗС-матрицей размером 37×37 мм, содержащей 4096×4096 пикселей. Поле зрения телескопа составляет $26^\circ \times 26^\circ$. Максимальная чувствительность матрицы достигается на длине волны 600 нм. Определите предельное угловое разрешение такого инструмента.

Задача № 60

Рентгеновский источник в созвездии Лебедя Cyg X-3 является переменным. Было замечено, что из областей, находящихся на небе на угловом расстоянии $16''$ от Cyg X-3, также приходит переменное излучение с тем же периодом, однако максимумы и минимумы блеска наблюдаются с задержкой (по сравнению с Cyg X-3) на 2.7 года. Оцените, на каком расстоянии Cyg X-3 находится от Солнца. А от центра нашей Галактики?

Задача № 61

Звезда R Андромеды — пульсирующая звезда, меняющая свой блеск с периодом 409 суток. Ее можно увидеть невооруженным глазом только в максимуме блеска, в минимуме блеска ее видимая звездная величина равна 16^m, при этом в один из этих моментов звезда имеет радиус, равный $5 \cdot 10^2$ радиуса Солнца. Считая, что во время пульсаций температура звезды не меняется, оцените среднюю скорость движения оболочки звезды.

Задача № 62

Кислородная атмосфера Реи содержит $(2.5 \pm 0.5) \times 10^{29}$ молекул. Оцените давление этой атмосферы у поверхности Реи, если радиус Реи равен 764 км, а ее средняя плотность равна 1.24 г/см^3.

Задача № 63

Известно, что за последние 20 лет моменты прохождения Землей перигелия своей орбиты менялись в пределах от 4 часов 2 января до 11 часов 5 января (по московскому времени). А в каком примерно году в последний раз это событие могло случиться в новогоднюю полночь по тому же времени? Период вращения линии апсид орбиты Земли составляет около 112 тыс. лет.

Задача № 64

Абсолютной звездной величиной объекта Солнечной системы называется видимая величина, которую имел бы объект, если бы он находился на расстоянии 1 а.е. и от Солнца, и от наблюдателя и имел полную фазу. Предположим, что в некоторый момент шарообразный астероид оказался на расстоянии 1 а.е. от Солнца и от Земли. На сколько звездных величин будут отличаться его видимая и абсолютная звездные величины? Считайте, что блеск астероида прямо пропорционален площади освещенной части диска.

Задача № 65

На поверхности Луны находится модуль, готовый ко взлету для стыковки с основным кораблем на круговой орбите (запас топлива ограничен). На горизонте появился главный корабль. Через какое время необходимо лунному модулю стартовать, в каком направлении и с какой скоростью, чтобы добраться до главного корабля и состыковаться с ним, потратив как можно меньше топлива? Все импульсы считать мгновенными. Высота орбиты основного корабля над поверхностью Луны равна 70 км.

Задача № 66

Гномон (палочка в центре) горизонтальных солнечных часов расположен вертикально. Длина полуденной тени гномона в течение года изменяется на две длины гномона. Определите широту, на которой находятся солнечные часы.

Задача № 67

В 2003 году у пульсара XTE J1807-294 (масса 1.4 масс Солнца) был обнаружен спутник с периодом обращения 0.03 суток и массой 14.5 масс Юпитера. Что можно сказать про вещество, из которого состоит спутник? Обоснуйте свою точку зрения.

Задача № 68

Гравитационные телескопы LIGO в Ливингстоне ($30°33'$ с.ш., $90°47'$ з.д.) и Хэнфорде ($46°27'$ с.ш., $119°25'$ з.д.), а также гравитационный телескоп VIRGO ($43°38'$ с.ш., $10°30'$ в.д.) 31 декабря в 22^h00^m UT (Всемирного времени) зарегистрировали гравитационный сигнал, причем моменты регистрации на всех трех телескопах отличались не более чем на $3 \cdot 10^{-3}$ секунды. Затем в течение получаса в Специальной Астрофизической обсерватории РАН ($43°40'$ с.ш., $41°26'$ в.д.) было зарегистрировано оптическое послесвечение гамма-всплеска, связанного с гравитационным сигналом. Определите примерные экваториальные координаты источника гравитационного сигнала.

Задача № 69

В спектре звезды наблюдается линия поглощения оксида титана. Лабораторная длина волны данной линии равна 5170.7 Å, в центре диска наблюдаемая длина волны равна 5174.1 Å, а на краю диска на экваторе линия имеет длину волны 5174.2 Å. Плотность звезды известна и равна 0.7 г/см^3. Оцените наименьшую возможную светимость данной звезды.

Задача № 70

Протопланетный диск — достаточно тонкий газовый диск, вращающийся вокруг молодой звезды. Считая диск находящимся в термодинамическом и гидростатическом равновесии, найдите зависимость плотности вещества от высоты над плоскостью симметрии диска для радиуса r от звезды, отсчитываемого в плоскости симметрии. Масса звезды M, температура диска T и молярная масса газа диска μ известны.

Задача № 71

Вам дана фотография (негатив), сделанная космическим аппаратом, на которой запечатлен Юпитер и два его спутника: Европа (ближе) и Ио (дальше). На Юпитере видны тени, отбрасываемые спутниками. Оцените расстояние между космическим аппаратом и Европой, а также между Европой и Ио.

Известно, что Ио находится на расстоянии 420 тысяч километров от центра Юпитера. Экваториальный радиус Юпитера в 11 раз больше радиуса Земли, радиусы Европы и Ио можно считать одинаковыми и равными 1/4 радиуса Земли.

Задача № 72

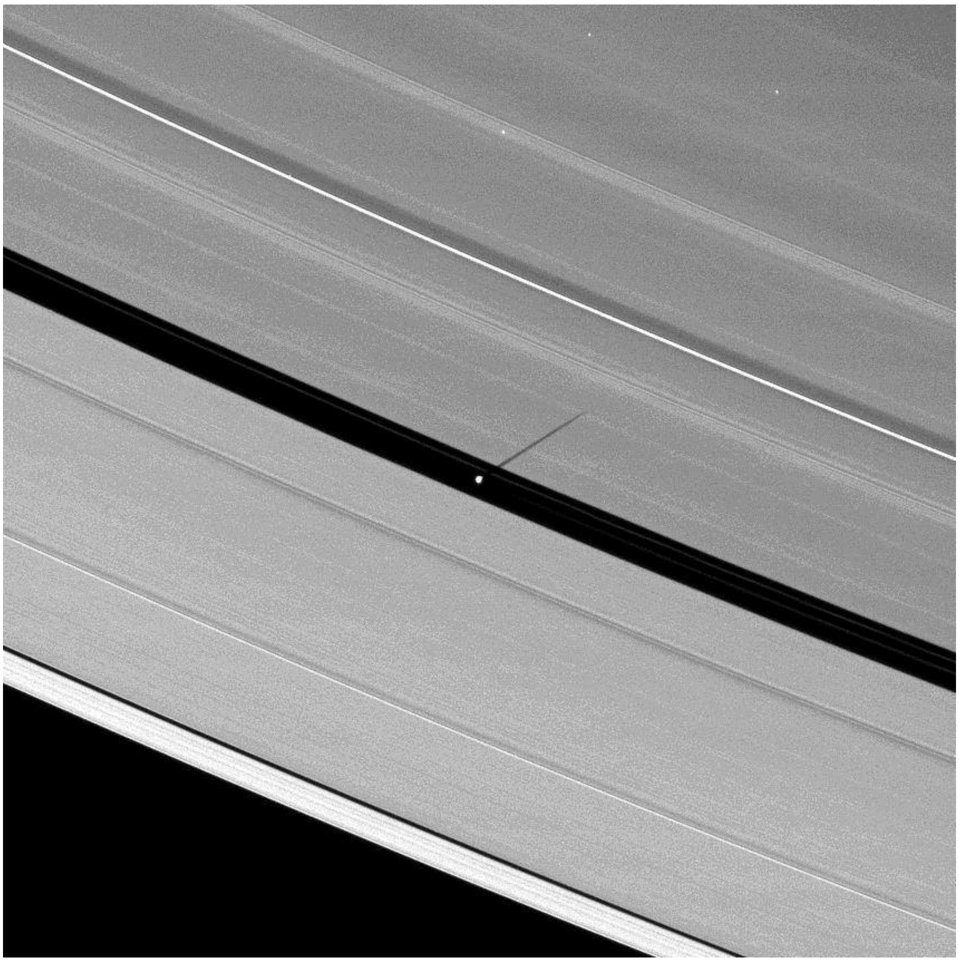
Движущейся группой звезд называют группу звезд, обладающих близкими значениями скоростей и движущихся как единое целое в пространстве. В таблице представлены расстояния до объектов (r), экваториальные координаты (α, δ), координаты относительно плоскости Млечного Пути (галактические долгота l и широта b), а также три компоненты пространственной скорости звезд в декартовой системе координат (V_x, V_y, V_z). На основе имеющихся данных выделите движущиеся группы звёзд, а также оцените их характерные пространственные размеры.

Номер	r, пк	α	δ	l	b	V_x, км/с	V_y, км/с	V_z, км/с
1	88.1	$9^h31^m16^s$	$-64°14'27''$	283.2°	−9.3°	−16.08	−30.4	−0.94
2	10.5	$23^h7^m54^s$	$+75°23'15''$	116.4°	+13.9°	8.31	−11.2	−2.415
3	98.0	$8^h5^m3^s$	$-60°38'41''$	277.6°	−10.0°	−19.44	−27.8	−2.22
4	89.1	$21^h14^m32^s$	$+63°35'35''$	101.5°	+10.0°	−7.313	−19.12	4.6
5	18.8	$4^h2^m36^s$	$-0°16'8''$	190.7°	−36.9°	−7.85	−28	−11.79
6	91.7	$9^h20^m37^s$	$-63°10'0''$	281.6°	−9.4°	−16.59	−27.9	−0.70
7	77.2	$9^h48^m19^s$	$-64°3'22''$	284.5°	−8.0°	−16.28	−28.32	−0.903
8	36.5	$3^h33^m13^s$	$+46°15'26''$	149.9°	−8.0°	−6.53	−27.84	−16.57
9	156.8	$23^h18^m38^s$	$+68°06'40''$	114.2°	+6.5°	−10.15	−15.2	−3.7
10	32.3	$14^h47^m33^s$	$-0°16'53''$	353.2°	+51.0°	−9.66	−28.07	−10.7
11	80.4	$9^h10^m58^s$	$-58°58'3''$	277.6°	−7.4°	−1.53	−18.3	0.34
12	87.1	$8^h58^m45^s$	$-69°8'1''$	284.9°	−15.1°	−16.59	−27.5	−1.44
13	174.0	$23^h30^m2^s$	$+58°32'56''$	112.5°	−2.6°	−9.3	−30.1	−1.2
14	24.4	$1^h16^m29^s$	$+42°56'22''$	127.8°	−19.7°	28.2	1.7	7.2
15	22.1	$4^h15^m26^s$	$+6°11'59''$	186.7°	−30.5°	24.5	3.9	−1.6
16	33.3	$2^h12^m15^s$	$+23°57'30''$	145.7°	−35.3	−8.22	−27.41	−12.52
17	23.0	$15^h34^m41^s$	$+26°42'53''$	41.9°	+53.8°	24.2	8.3	−0.3
18	38.8	$3^h9^m42^s$	$-9°34'36''$	191.3°	−53.0°	−5.24	−27.92	−9.75
19	82.3	$10^h20^m51^s$	$-58°32'49''$	284.7°	−1.3°	−14.44	−26.6	−3.772
20	34.5	$22^h20^m7^s$	$+49°30'12''$	99.3°	−6.3°	−9.65	−23.44	−4.86
21	21.4	$21^h31^m1^s$	$+23°20'7''$	74.3°	−20.1°	−6.5	−29.07	−13.15
22	23.6	$1^h49^m23^s$	$-10°42'13''$	165.4°	−68.7°	27.6	4.7	3.5
23	18.8	$4^h9^m35^s$	$+69°32'29''$	139.2°	+13.0°	−7.8	−24.02	−17.15
24	22.4	$7^h49^m55^s$	$+27°21'47''$	193.3°	+24.1°	23.8	7.6	−0.5
25	22.8	$1^h36^m43^s$	$+7°49'54''$	142.0°	−53.3°	−2.13	5.3	−12.8
26	160.2	$23^h3^m21^s$	$+58°33'50''$	109.2°	−1.3°	−25.6	−18.1	7.4
27	28.3	$0^h18^m20^s$	$+30°57'22''$	114.6°	−31.4°	−4.43	−27.8	−15.7
28	22.2	$6^h39^m50^s$	$-61°28'43''$	271.2°	−25.0°	−7.71	−28.32	−14.37
29	1132	$20^h25^m27^s$	$-28°39'48''$	14.5°	−32.0°	5.61	−15.22	−4.84
30	1231	$19^h35^m57^s$	$-53°0'31''$	344.4°	−27.9°	−4.13	−18.24	7.5

Задача № 73

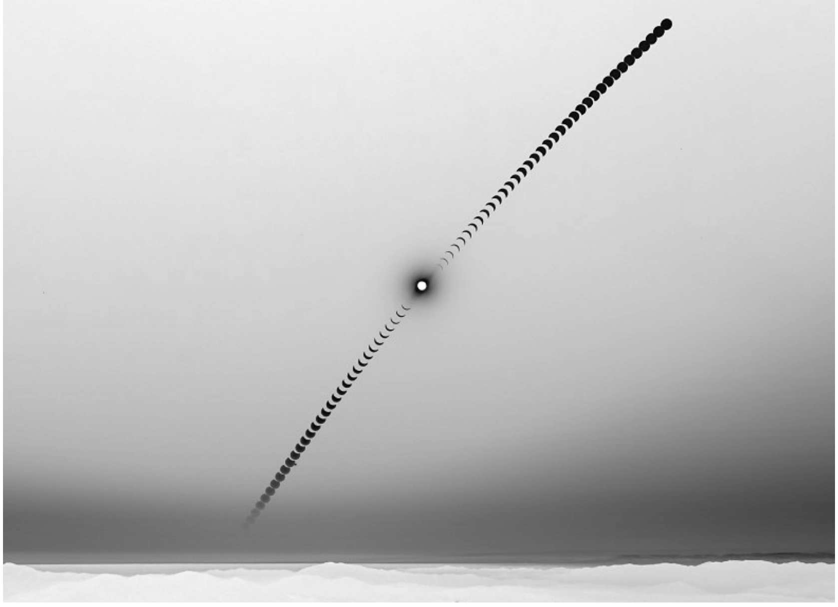
На двух фотографиях ниже представлены спутник Сатурна, движущийся во внешней области колец, и сам Сатурн (негатив). Известно, что в момент съемки спутник находился в плоскости, перпендикулярной кольцам и проходящей через центры Солнца и Сатурна. Угол между плоскостью колец и направлением на Солнце при наблюдении со спутника составляет 1°. Радиус Сатурна в 9 раз больше радиуса Земли.

Оцените диаметр спутника, а также период его обращения вокруг Сатурна. Как часто этот спутник бывает в соединении с другим спутником Сатурна — Титаном? Титан делает один оборот вокруг Сатурна по орбите радиусом 1.2 миллиона километров за 16 дней. Опишите, что произойдет, если поместить Титан на орбиту этого спутника.



Задача № 74

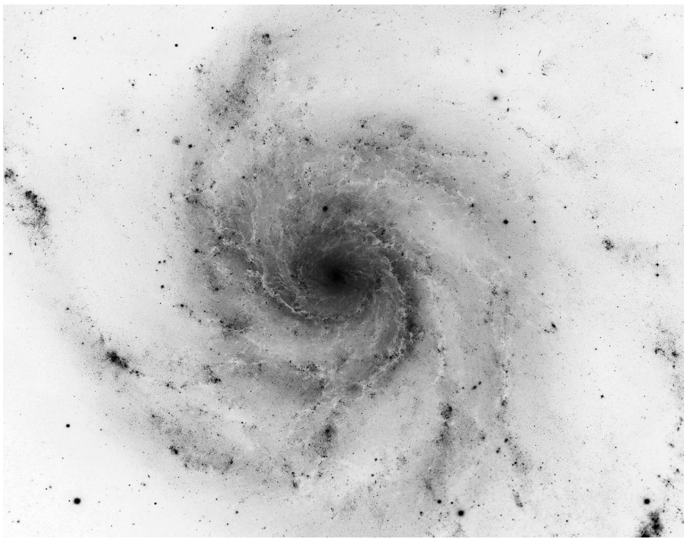
Вам дана серия фотографий полного солнечного затмения, наложенных друг на друга (негативов). Затмение произошло на закате Солнца 2 июля. Максимальная фаза затмения наблюдалась в 20 часов 40 минут по Всемирному времени. На фотографии видна линия горизонта. Определите как можно точнее географические координаты места наблюдения.



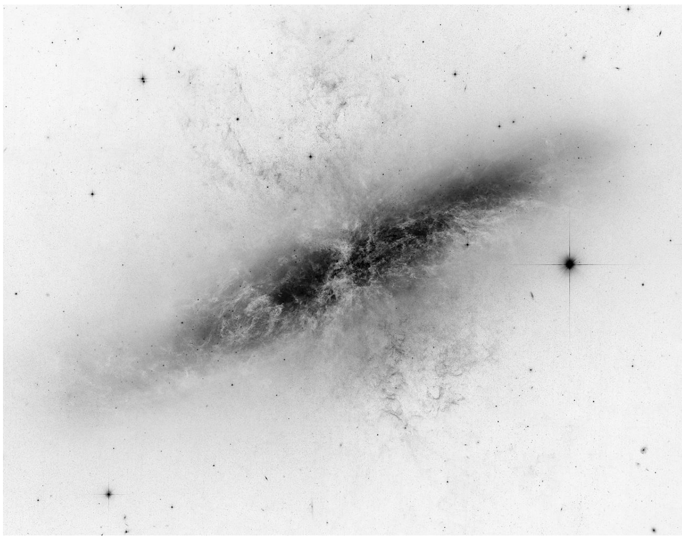
Задача № 75

Вам даны кривые блеска в полосах B, V и R двух сверхновых типа Ia, вспыхнувших в двух спиральных галактиках. На графиках по оси абсцисс отложены даты наблюдений в формате месяц/день, по оси ординат — видимые звездные величины в соответствующих полосах. Изображения галактик (негативы) и их экваториальные координаты представлены ниже.

Галактика	α	δ
1	$14^{\mathrm{h}}\,03^{\mathrm{m}}$	$+54^\circ\,21'$
2	$09^{\mathrm{h}}\,56^{\mathrm{m}}$	$+69^\circ\,41'$

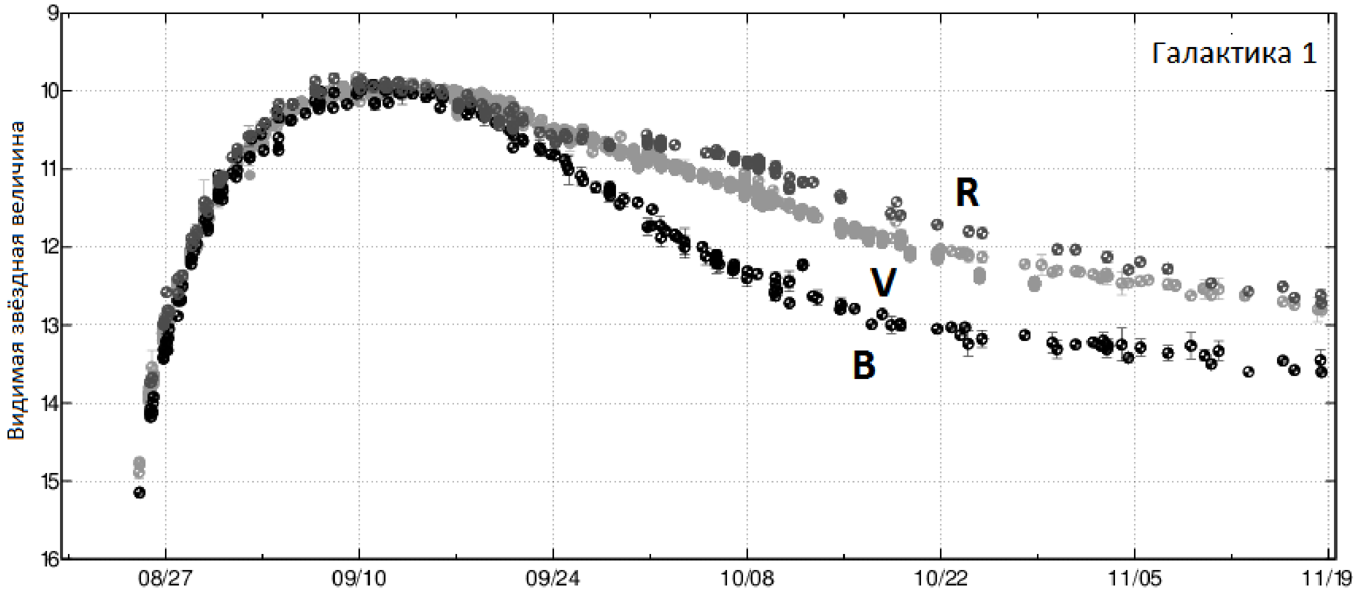


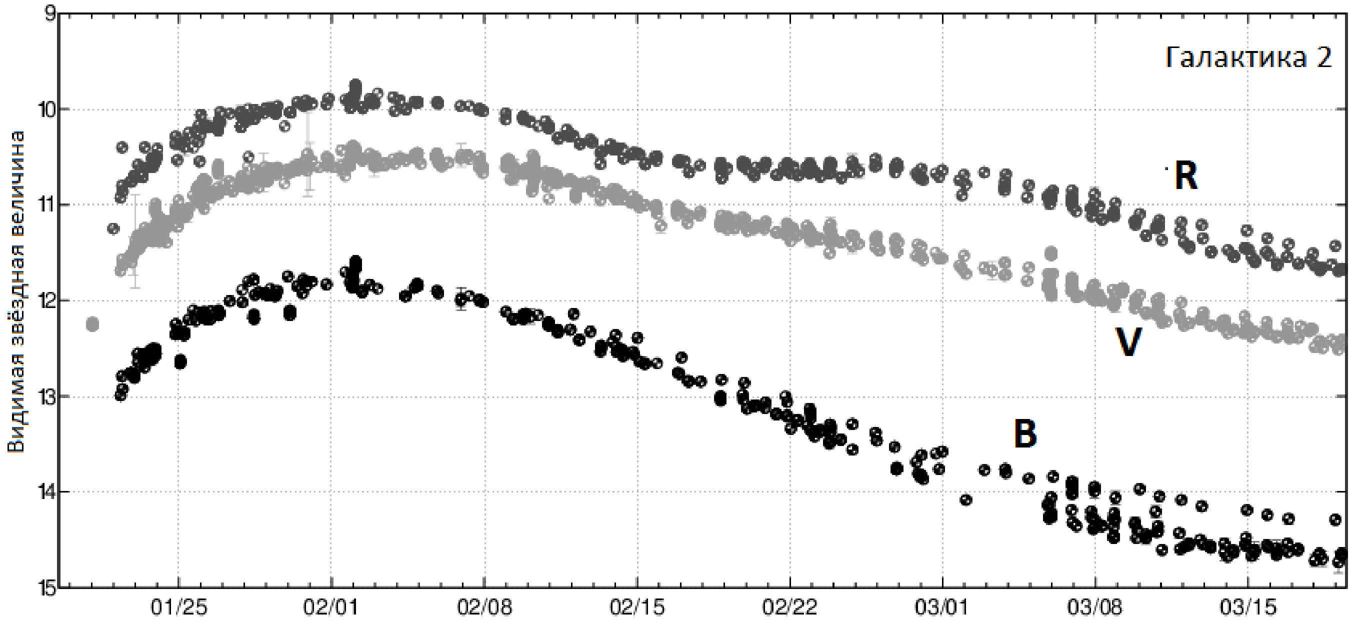
Галактика 1



Галактика 2

Определите расстояния до обеих галактик, если известно, что абсолютная звёздная величина сверхновых типа Ia в максимуме блеска в полосе V составляет -19^m.


Галактика 1
Видимая звёздная величина
9
10
11
12
13
14
15
16
08/27
09/10
09/24
10/08
10/22
11/05
11/19
R
V
B


Галактика 2
Видимая звёздная величина
9
10
11
12
13
14
15
01/25
02/01
02/08
02/15
02/22
03/01
03/08
03/15
R
V
B

3 Решения задач

Задача № 1

На написание районного тура Вам дано 3 часа. До каких планет за это время может дойти свет от Солнца, испущенный в момент начала тура? Свет распространяется со скоростью около 300 000 км/с.

Решение. Свет распространяется со скоростью $3 \cdot 10^5$ км/с. Тогда за 3 часа свет пройдет

$$3 \cdot 3600 \cdot 3 \cdot 10^5 = 3.2 \cdot 10^9 \text{ км.}$$

1 астрономическая единица равна $1.5 \cdot 10^8$ км, тогда в астрономических единицах полученное расстояние равно 21 а.е. Это чуть больше, чем среднее расстояние от Солнца до Урана (19 а.е.).

Задачу можно решить немного по-другому. От Солнца до Земли свет идет приблизительно 8 минут, то есть 1 астрономическую единицу свет преодолевает за 8 минут. 3 часа — это 180 минут, что соответствует расстоянию $180/8 \approx 22.5$ а.е. Орбита Урана имеет радиус около 19 а.е., то есть до Урана свет успеет добраться.

Как следствие, свет успеет дойти и до всех планет, которые ближе к Солнцу, чем Уран: Меркурия, Венеры, Земли, Марса, Юпитера и Сатурна.

А.В.Веселова

Задача № 2

Восходящая Луна в фазе первой четверти находится в созвездии Тельца. В какой сезон года и в какое время суток можно наблюдать это явление?

Решение. Если Луна находится в первой четверти, это означает, что она отстает от Солнца на 90° в видимом движении по небу. Если при этом Луна восходит, то Солнце находится около верхней кульминации, то есть описываемая ситуация происходит днем, примерно в солнечный полдень. В течение года Солнце движется по эклиптике в сторону, противоположную суточному движению, т.е. в описываемый момент находится в том зодиакальном созвездии, которое на четверть года отстоит от Тельца в прошлое.

Далее можно либо вспомнить, что в Тельце Солнце находится примерно в мае (конце весны), следовательно, описанная ситуация происходит примерно в феврале (конце зимы), или, вспомнив порядок созвездий, найти третье по порядку от Тельца «назад» созвездие (это Водолей), сделав тот же вывод о примерной дате наблюдения.

В.В.Григорьев

Задача № 3

Сопоставьте объекты из нижней строки таблицы объектам из верхней строки. Объясните свой выбор и напишите, что это за объекты.

Геминиды	Персеиды	Aквариды	Леониды
Водолей	Лев	Близнецы	Персей

Решение. В таблице приведены названия созвездий и метеорных потоков. Название потока образовано от латинского названия созвездия, в котором расположен радиант этого потока. Таким образом, сопоставление такое:

Геминиды	Персеиды	Aквариды	Леониды
Близнецы	Персей	Водолей	Лев

В.В. Григорьев

Задача № 4

20 ноября 2004 года запущена орбитальная обсерватория Swift, предназначенная для исследования космических гамма-всплесков. В какой день недели произошел запуск?

Решение. С момента запуска до дня тура прошло ровно 15 лет, из которых 3 (2008, 2012 и 2016 годы) были високосными и 12 — невисокосными. Каждый невисокосный год день недели, соответствующий некоторому числу некоторого месяца, смещается на 1 вперед по сравнению с предыдущим годом, а каждый високосный — на 2 (поскольку остаток при делении 365 на 7 равен 1, а при делении 366 на 7 — 2). Следовательно, за прошедшие годы день недели, соответствующий 20 ноября, сместился на $12 + 3 \cdot 2 = 18$, т.е. на 2 недели и 4 дня вперед. Тогда от дня недели для 2019 года надо отсчитать назад 4 дня. Так как в 2019 году 20 ноября — это среда, то в 2004 году 20 ноября было субботой.

М.В.Костина

Задача № 5

Родившийся ровно 130 лет назад Эдвин Хаббл обнаружил, что другие галактики удаляются от нашей со скоростью, пропорциональной расстоянию до них, $v = H \cdot r$, где v — скорость удаления, r — расстояние до галактики, H — величина, называемая «постоянной Хаббла» и равная $H = 70$ км/с/Мпк (Мпк — это мегапарсеки). Соответствующее утверждение называется законом Хаббла.

Предположим, что закон Хаббла выполняется на любых расстояниях, в том числе и очень больших. Оцените расстояние, на котором должны находиться галактики, удаляющиеся от нашей Галактики со скоростью света.

Решение. Из условия задачи следует, что расстояние должно удовлетворять равенству $c = H \cdot r$, где c — скорость света. Ее значение известно (например, из условия задачи № 1), поэтому остается только вычислить

$$r = \frac{c}{H} = \frac{300000 \text{ км/с}}{70 \text{ км/с/Мпк}} \approx 4300 \text{ Мпк} = 4.3 \text{ Гпк}.$$

П.А.Тараканов

Задача № 6

Марсианин и землянин живут по местному среднему солнечному времени каждый, используя для этого часы с обычным циферблатом, но идущие со скоростью, соответствующей продолжительности солнечных суток на данной планете. Как часто показания часов марсианина и землянина будут совпадать? Продолжительность сола (марсианских солнечных суток) считать равной 24 часам 40 минутам (земным).

Решение. Период обращения стрелок на часах землянина составляет 12 часов, а на часах марсианина — 12 часов 20 минут. Период повторения одинаковых положений стрелок часов (в том числе и совпадения) можно вычислить как соответствующий синодический период: $1/T_s = 1/T_\oplus - 1/T_{\male}$. Поскольку (если измерять время в земных часах) $T_\oplus = 12$, а $T_{\male} = 12\frac{1}{3}$, получаем, что $T_s = 444$ часа, или 18.5 земных суток.

А.Салганик

Задача № 7

Две нейтронные звезды обращаются вокруг общего центра масс с периодом, равным 3 годам. Масса одной звезды составляет 1 массу Солнца, расстояние между звездами постоянно и составляет 3 а.е. Определите массу второй нейтронной звезды.

Решение. Для решения задачи воспользуемся III законом Кеплера, используя систему единиц «годы – а.е. – массы Солнца» (т.е., фактически, сравнивая двойную систему с Землей, движущейся вокруг Солнца). Массы нейтронных звезд обозначим как M_1 и M_2, период обращения — T, расстояние между компонентами — a. Тогда

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{1}{M_1 + M_2},$$

откуда

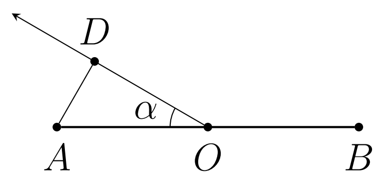
$$M_2 = \frac{a^3}{T^2} - M_1 = \frac{3^3}{3^2} - 1 = 2 \text{ массы Солнца}.$$

В.В.Григорьев

Задача № 8

Видимые размеры спиральной галактики NGC 6744 составляют $20' \times 12'$. Предполагая, что диск галактики идеально круглый, определите угол между лучом зрения и плоскостью диска галактики.

Решение. Если на окружность смотреть под углом, то в проекции мы увидим эллипс. Изобразим плоскость галактики отрезком AB, ее центр — O. Искомый угол α можно вычислить, рассмотрев прямоугольный треугольник ADB, где AB — видимый нам меньший радиус галактики, а AO равен видимому нам большому радиусу галактики (но не является им, т.к. видимый нам большой радиус перпендикулярен картинной плоскости).



Из чертежа следует, что

$$\frac{AD}{AO} = \sin\alpha,$$

отношение видимых радиусов равно отношению видимых диаметров, так что

$$\alpha = \arcsin\frac{12}{20} \approx 40^\circ.$$

Если участник не умеет пользоваться методами тригонометрии, ответ также можно получить, просто построив чертеж аккуратно и измерив угол транспортиром.

В.В.Григорьев

Задача № 9

Звезда δ Рыб имеет координаты $\alpha = 0^h50^m$, $\delta = 7^\circ35'$. Звезда φ Водолея находится на 1^h36^m западнее и на $13^\circ34'$ южнее. Определите координаты φ Водолея.

Решение. Раз вторая звезда находится западнее, значит ее прямое восхождение должно быть меньше. При этом мы пересекаем круг склонений с $\alpha = 0^h00^m$, проходящий через точку весеннего равноденствия. Тогда $\alpha_\varphi = 0^h50^m - 1^h36^m + 24^h00^m = 23^h14^m$. Склонение второй звезды также должно быть меньше, а сама звезда расположена в южном небесном полушарии: $\delta_\varphi = 7^\circ35' - 13^\circ34' = -5^\circ59'$.

В.В.Григорьев

Задача № 10

20 ноября 1889 г. в США родился астроном Эдвин Хаббл, открывший существование других галактик и наблюдательно обнаруживший расширение Вселенной (закон Хаббла). В какой день недели он родился?

Решение. США в XIX веке жили по григорианскому календарю (действующему сейчас и в России), поэтому переходить от юлианского к григорианскому календарю нам не придется. Рассмотрим сначала простой случай.

Известно, что каждый невисокосный год день недели, соответствующий некоторому числу некоторого месяца, смещается на 1 вперед по сравнению с предыдущим годом, каждый високосный — на 2 (поскольку остаток при делении 365 на 7 равен 1, а при делении 366 на 7 — 2). Период полного повторения распределения дней недели по числам года составляет 28 лет — это общее кратное 7 (число дней в неделе) и 4 (число лет в високосном цикле).

Со дня рождения Хаббла до дня тура прошло ровно 130 лет. Остаток от деления 130 на 28 равен 18. Таким образом, календарь на 1889 год должен повториться через 10 лет ($28 - 18$), т.е. в 2029 году, когда со дня рождения Хаббла исполнится 140 лет. Следовательно, 20 ноября 2029 г. будет тем же днем недели, что и 20 ноября 1889 г. Из 10 лет, которые пройдут от дня тура до 20 ноября 2020 года 3 года (2020, 2024 и 2028) будут високосными и 7 — простыми. Следовательно, день недели по сравнению с 2019 годом сдвинется на $7+3\cdot2 = 13$, т.е. 2 недели без одного дня. Так как 20 ноября 2019 года — это среда, то в 2029 году 20 ноября будет вторником.

Однако в этом решении мы не учли важную особенность григорианского календаря: годы, номера которых делятся на 100, но не делятся на 400, в нем високосными не являются. За прошедшее время такой год был один — 1900, и это означает, что наши предыдущие рассуждения верны для всех годов XX и XXI века, но не для XIX века. Все дни в XIX веке по сравнению с полученным нами результатом должны быть сдвинуты на один день недели вперед (поскольку 29 февраля 1900 года в григорианском календаре не существовало), и это означает, что Эдвин Хаббл родился в среду.

М.В.Костина

Задача № 11

Объект Солнечной системы (229762) Гкъкунлъ'хомдима обращается вокруг Солнца с периодом около 620 лет, а минимальное расстояние от него до Солнца составляет 38 а.е. Оцените, во сколько раз для земного наблюдателя отличаются максимальный и минимальный видимый угловой диаметр объекта.

Решение. Поскольку период обращения, а, следовательно, и большая полуось орбиты объекта существенно больше соответствующих значений для орбиты Земли, то наибольший видимый угловой диаметр будет достигаться в окрестности перигелия орбиты, а наименьший — вблизи афелия (вне зависимости от положения плоскости орбиты относительно эклиптики и положения Земли на орбите).

По третьему закону Кеплера определим большую полуось объекта. Если период T выражен в годах, а большая полуось орбиты a — в астрономических единицах, то

$$T^2 = a^3,$$

откуда

$$a^3 = \left(6.2 \cdot 10^2\right)^2 = 3.8 \cdot 10^5 \Rightarrow a \approx 73 \text{ а.е.}$$

Определим расстояние до астероида в афелии. Сумма расстояний в афелии и перигелии равно удвоенному значению большой полуоси, тогда афелийное расстояние составляет $r_\alpha = 2 \cdot a - r_\pi = 2 \cdot 73 - 38 = 108$ а.е.

Отношение угловых диаметров будет обратно пропорционально отношению расстояний:

$$\frac{d_\pi}{d_\alpha} = \frac{r_\alpha}{r_\pi} = \frac{108}{38} = 2.8.$$

А.В.Веселова

Задача № 12

В планетной системе по круговым орбитам, лежащим в одной плоскости, в одном и том же направлении вокруг звезды движутся три планеты с периодами обращения 1.0, 1.1 и 2.0 года. В некоторый момент произошел парад планет (три планеты оказались на одной прямой по одну сторону от звезды). Через какой промежуток времени парад планет повторится?

Решение. Перейдем в систему отсчета наиболее далекой от звезды планеты. В момент парада две другие планеты должны оказаться с ней на одной линии, то есть для обеих планет должна повториться конфигурация (внутренние планеты оказываются в нижнем соединении). Тогда искомый промежуток времени должен содержать целое число синодических периодов обращения для внутренних планет относительно внешней.

Синодический период первой планеты относительно третьей равен

$$\frac{1}{S_{13}} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_3}, \quad S_{13} = \frac{T_1 T_3}{T_3 - T_1} = \frac{1 \cdot 2}{2 - 1} = 2.$$

Синодический период второй планеты относительно третьей равен

$$\frac{1}{S_{23}} = \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_3}, \quad S_{23} = \frac{T_2 T_3}{T_3 - T_2} = \frac{1.1 \cdot 2}{2 - 1.1} = \frac{22}{9}.$$

Должно выполняться равенство

$$S = mS_{13} = nS_{23}, \quad m \cdot 2 = n \cdot \frac{22}{9}, \quad m = n \cdot \frac{11}{9}, \quad 9m - 11n = 0.$$

Поскольку m должно делиться на 11, минимально возможное значение $m = 11$, а тогда $n = 9$. Тогда период повторения парада планет составит 22 года.

А.В.Веселова

Задача № 13

Каскад Кембла — астеризм в созвездии Жираф. Он представляет собой цепочку звезд, выстроившихся в почти прямую линию длиной в 5 диаметров Луны. Оцените линейное расстояние между крайними звездами цепочки, если одна из них находится на расстоянии 7 кпк от Земли, а другая — 5 кпк.

Решение. Угловое расстояние между крайними звездами каскада равно $2^\circ.5$, т.к. известно, что угловой диаметр диска Луны на небе равен $0^\circ.5$. Линейное расстояние между звездами можно вычислить по теореме косинусов, но, в виду малости угла, косинус с точностью до двух знаков после запятой равен единице. Тогда расстояние можно вычислить как разность данных в условии расстояний: $7 - 5 = 2$ кпк.

В.В.Григорьев

Задача № 14

Аппарат OSIRIS-REx в данный момент исследует околоземный астероид Бенну, обращаясь вокруг астероида на средней высоте 1.5 км над его поверхностью. Средний диаметр астероида составляет $5.6 \cdot 10^2$ метров, а его масса — $1.4 \cdot 10^{11}$ кг. Определите период обращения аппарата.

Решение. Запишем третий закон Кеплера для аппарата и астероида (при этом массой аппарата можно пренебречь), обозначив T искомый период, радиус орбиты $a = h + D/2 = 15 \cdot 10^2 + 2.8 \cdot 10^2 = 1.8 \cdot 10^3$ метров, M — масса астероида:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

Отсюда

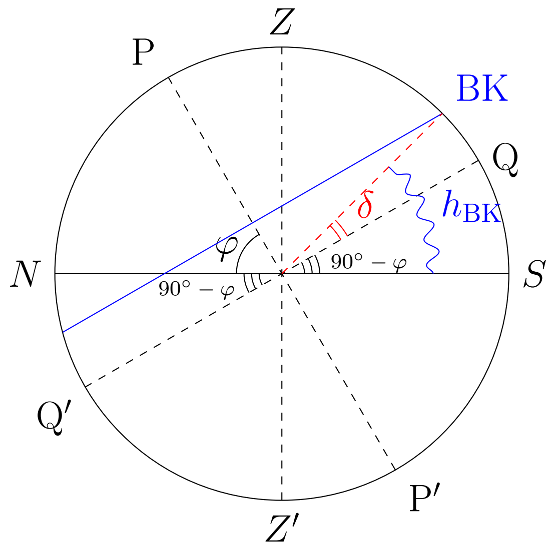
$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (1.8 \cdot 10^3)^3}{6.7 \cdot 10^{-11} \cdot 1.4 \cdot 10^{11}}} \approx 1.6 \cdot 10^5 \text{ секунд} \approx 1.8 \text{ суток}.$$

В.В.Григорьев

Задача № 15

Видимая звездная величина Проциона за пределами земной атмосферы составляет $0^m.40$. Найдите видимую звездную величину Проциона в момент верхней кульминации для наблюдателя в Петербурге, если известно, что склонение Проциона $\delta = +5°$, а изменение звездной величины объекта из-за поглощения в атмосфере Δm зависит от зенитного расстояния z как $\Delta m = 0^m.2/\cos z$.

Решение. Вспомнив формулу высоты объекта в верхней кульминации или построив чертеж, аналогичный изображенному ниже (φ — широта места наблюдения),



запишем $h_{\text{ВК}} = 90° - \varphi + \delta$. Отсюда зенитное расстояние в верхней кульминации $z_{\text{ВК}} = 90° - h_{\text{ВК}} = \varphi - \delta$. Подставляя сюда широту города и известное из условия склонение Проциона, получаем $z_{\text{ВК}} = 55°$, откуда поглощение в атмосфере $\Delta m = 0^m.2/\cos 55° \approx 0^m.35$. Поскольку поглощение света (т.е. его ослабление) увеличивает звездную величину, Процион в верхней кульминации окажется равной $0^m.40 + 0^m.35 = 0^m.75$.

П.А. Тараканов

Задача № 16

Блазар 6C 001403+811827 на данный момент считается самым ярким известным активным ядром галактики. Его светимость составляет около $1.2 \cdot 10^{41}$ Вт. На каком расстоянии от Земли он должен находиться, чтобы Земля получала от него в единицу времени столько же энергии, сколько от Солнца? Солнечная постоянная (суммарная мощность солнечного излучения, проходящего через единичную площадку, ориентированную перпендикулярно потоку, на расстоянии 1 а.е. от Солнца вне земной атмосферы) составляет 1.4 кВт/м^2.

Решение. Освещенность E, создаваемая точечным объектом, обратно пропорциональна квадрату расстояния до него и равна

$$E = \frac{L}{4\pi r^2},$$

где L — светимость объекта, r — расстояние до него. Поскольку освещенность, создаваемая блазаром, должна по условию совпадать с солнечной постоянной, то расстояние до него можно выразить как

$$r = \sqrt{\frac{L}{4\pi E}} = \sqrt{\frac{1.2 \cdot 10^{41}}{4 \cdot 3.1 \cdot 1.4 \cdot 10^3}} = 2.6 \cdot 10^{18} \text{ м} = 84 \text{ пк.}$$

В.В.Григорьев

Задача № 17

Известно, что полярные сияния возникают при столкновении быстро движущихся частиц солнечного ветра с атомами в земной атмосфере. Атомы каких из перечисленных химических элементов — кислород, азот, железо, уран — «ответственны» за возникновение полярных сияний? Почему?

Решение. Атмосфера Земли по массе на 76% состоит из азота и 23% кислорода (остальное — аргон, углекислый газ и т.д.). Поэтому именно эти химические элементы (и, соответственно, их атомы, ионы и молекулы) в первую очередь за полярные сияния. Соединения железа и урана в атмосфере практически отсутствуют и участвовать в образовании полярных сияний, как следствие, не могут.

В.В.Григорьев

Задача № 18

Сферический астероид диаметром 22 м на круговой орбите радиусом 1.3 а.е. вращается вокруг своей оси с периодом, равным 16 секундам. Во сколько раз скорость движения точек на его экваторе относительно центра отличается от скорости его движения по орбите?

Решение. Скорость вращения астероида на экваторе равна $2\pi R/P$, где R — радиус астероида, P — период его обращения. Радиус астероида равен $22/2 = 11$ м, тогда скорость движения точек на его экваторе

$$v = \frac{2\pi R}{P} \approx \frac{2 \cdot 3.14 \cdot 11}{16} = 4.3 \text{ м/с.}$$

Для определения орбитальной скорости вычислим период обращения астероида по орбите с помощью III закона Кеплера для Солнечной системы: если выразить большую полуось в астрономических единицах, а период обращения в годах, то

$$T^2 = a^3 \implies T = \sqrt{a^3} = 1.5 \text{ года}.$$

Скорость обращения планеты по круговой орбите можно определить как отношение длины орбиты к периоду обращения:

$$V = \frac{2\pi a}{T} = \frac{2\pi \cdot 1.3 \cdot 1.5 \cdot 10^8\,\text{км}}{1.5 \cdot 3.2 \cdot 10^7\,\text{с}} \approx 26 \text{ км/с}.$$

Тогда отношение скоростей равно

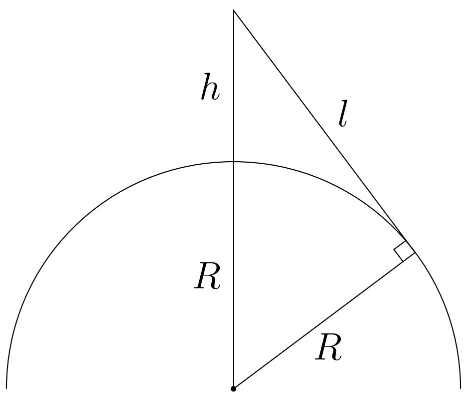
$$\frac{V}{v} = \frac{26 \cdot 10^3}{4.3} = 6 \cdot 10^3.$$

А.В.Веселова

Задача № 19

Радиус Плутона равен $1.2 \cdot 10^3$ км. Оцените максимальное расстояние, на котором объекты, находящиеся на поверхности Плутона, сможет увидеть наблюдатель, расположившийся на вершине самой высокой горы Плутона — горы Райт, высота которой равна 4 км.

Решение. Искомое расстояние ищется с помощью теоремы Пифагора, примененной к треугольнику центр Плутона — самая дальняя видимая точка — вершина горы.



Обозначим искомое расстояние l, радиус Плутона R, а высоту горы — h. Тогда

$$l^2 + R^2 = (R+h)^2$$

и

$$l = \sqrt{(R+h)^2 - R^2} = \sqrt{(R+h-R)\cdot(R+h+R)} = \sqrt{h\cdot(2R+h)}.$$

Поскольку высота горы много меньше радиуса Плутона, $h \ll R$, можно записать приближенное равенство $l = \sqrt{2Rh}$, откуда $l = \sqrt{2 \cdot 1.2 \cdot 10^3 \cdot 4} \approx 10^2$ км.

В.В.Григорьев

Задача № 20

Астрономы, живущие в планетной системе другой звезды, наблюдая Солнце, открыли Юпитер по изменению видимой звездной величины Солнца при прохождении Юпитера по диску Солнца. Оцените зарегистрированное ими изменение видимой звездной величины Солнца, если известно, что средние плотности Юпитера и Солнца примерно одинаковы, а массы отличаются в 10^3 раз.

Решение. В оптическом диапазоне Юпитер самосветящимся объектом не является, поэтому можно считать, что при прохождении по диску Солнца он просто перекрывает часть излучения Солнца, пропорциональную закрытой им доле диска.

Поскольку плотности Юпитера и Солнца примерно совпадают, то отношение их масс совпадает с отношением объемов, а это означает, что линейные размеры отличаются в $\sqrt[3]{10^3} = 10$ раз. Следовательно, для удаленного наблюдателя Юпитер перекрывает $1/10^2$ долю диска Солнца, что в среднем приводит к изменению освещенности, создаваемой Солнцем, на 1%.

Поскольку видимая звездная величина объекта m связана с создаваемой им освещенностью E как $m = -2.5 \lg E + \text{const}$, изменение звездной величины Солнца составит $\Delta m = 2.5 \lg(1 - 0.01) = 2.5 \lg 0.99 \approx 0^m.01$.

П.А.Тараканов

Задача № 21

Луна покрыла Альфу Змееносца 7 сентября. В какой при этом фазе была Луна?

Решение. Сразу нужно отметить, что Альфа Змееносца находится далеко, почти в 36°, от эклиптики (видимого пути Солнца по небу), в чем можно убедиться, найдя сведения про эту звезду в справочнике или компьютерном планетарии. При этом Луна, двигаясь по своей орбите, максимально может отходить от эклиптики чуть больше, чем на 5 градусов. Таким образом, Луна никогда не сможет покрыть Альфу Змееносца. Тем самым вопрос о ее фазе 7 сентября неизвестного года (не 2019!) остается открытым.

Однако, если этот факт участником замечен не был, он мог решить задачу следующим образом (верным для тех звезд созвездия Змееносца, которые могут покрываться Луной, например, Теты). Солнце находится в созвездии Змееносца в первой половине декабря. Тогда с момента наблюдения до того, как Солнце окажется в Змееносце, пройдет примерно четверть года (3 месяца). При этом Луна в видимом годичном движении опережает Солнце на четверть года, то есть находится вблизи фазы первой четверти.

Оба решения засчитывались как правильные.

А.В.Веселова

Задача № 22

В июле 1972 года на Солнце произошла мощная вспышка и часть солнечного вещества достигла Земли всего за 14.6 часа. С какой средней скоростью (в км/с) двигалось солнечное вещество?

Решение. Средняя скорость v равна отношению пройденного расстояния l ко времени t, которое было затрачено на движение. Среднее расстояние от Земли до Солнца равно 1 астрономической единице (около 150 млн. км). Время нужно перевести в секунды, чтобы итоговая скорость имела размерность км/с:

$$v = \frac{l}{t} = \frac{150 \cdot 10^6}{14.6 \cdot 60 \cdot 60} \approx 2850 \text{ км/с} \approx 2.9 \cdot 10^3 \text{ км/с}.$$

При вычислениях участники могли учесть также, что в июле Земля находится в афелии своей орбиты, т.е. расстояние между Землей и Солнцем самое большое и равно примерно 152 млн. км. Это приводит к ответу ≈ 2890 км/с, т.е. с нужной точностью ответ не изменится и останется равным $2.9 \cdot 10^3$ км/с.

А.В.Веселова

Задача № 23

Средние плотности Солнца и Юпитера практически совпадают. Но масса Юпитера в 10^3 раз меньше массы Солнца. Во сколько раз радиус Солнца больше радиуса Юпитера?

Решение. Масса — это произведение средней плотности на объем, следовательно, раз плотности одинаковы, то объем Юпитера в 10^3 раз меньше объема Солнца. Объем двух тел одинаковой формы пропорционален третьей степени их размеров, следовательно, радиус Солнца больше радиуса Юпитера в $\sqrt[3]{1000} = 10$ раз.

П.А.Тараканов

Задача № 24

В календаре майя использовался 9-дневный цикл, каждый день которого имел собственное название, 13-дневный цикл, в котором каждый день также имел собственное название (другое), и 20-дневный цикл, в котором каждый день имел еще одно дополнительное название. Сколько дней проходило между двумя последовательными повторениями полного названия дня (состоящего из всех трех частей)?

Решение. Период повторения одинаковых названий — это наименьшее общее кратное трех периодов. Поскольку все три числа взаимно простые, повторения будут происходить с периодом, равным $9 \times 13 \times 20 = 2340$ дней.

П.А.Тараканов

Задача № 25

Оцените, в каких пределах может изменяться продолжительность покрытия звезды Y Тельца Луной.

Решение. Минимальная продолжительность покрытия может оказаться нулевой (поскольку Луна может либо вообще не пройти по звезде, либо только коснуться ее краем диска). Максимальная же продолжительность будет достигаться тогда, когда по звезде пройдет центр диска Луны, поскольку в этом случае за время покрытия центр диска Луны должен будет пройти относительно звезд угловое расстояние, равное диаметру Луны. Так как требуется только оценка, то можно считать орбиту Луны круговой и вычислить среднюю угловую скорость, с которой движется Луна. Сидерический период Луны составляет 27.3 суток, за это время Луна проходит относительно звезд 360°. Следовательно, собственный диаметр, который в 720 раз меньше, она пройдет за в 720 раз меньшее время, т.е. за $27.3/720 \approx 0.038$ суток, что составляет около 0.9 часа.

Надо отметить, что Y Тельца — это одна из немногих звезд, у которой был измерен видимый диаметр именно во время покрытий ее Луной.

М.В.Костина

Задача № 26

Часы петербургского студента–астронома испортились: за сутки они уходят на 6 минут вперед. В 7 часов утра студент выставляет часы по точному местному времени для своего дома. В 6 часов вечера, вернувшись домой, студент снова посмотрел на часы. На каком расстоянии от дома студента на той же широте находится пункт, для которого увиденное время в этот момент окажется точным?

Решение. Поскольку часы уходят вперед, то пункт окажется восточней Петербурга. Определим, насколько различаются долготы двух пунктов. Так как часы уходят на 6 минут за сутки, то в час они уходят на $6/24 = 0.25$ минуты. С 7 утра до 6 часов вечера проходит 11 часов, тогда часы убегут на $11 \cdot 0.25 = 2.75$ минуты. Посмотрим, какому расстоянию на широте $60°$ соответствует такая разница во времени.

Составим пропорцию для промежутков времени и для расстояний:

$$\frac{2.75}{24 \cdot 60} = \frac{r}{l},$$

здесь l — длина параллели при широте $60°$. Заметим, что длина этой параллели ровно вдвое меньше длины экватора, то есть равна 20 тыс. км. Тогда расстояние r равно

$$r = 2 \cdot 10^4 \,\text{км} \cdot \frac{2.75}{24 \cdot 60} = 38 \,\text{км}.$$

А.В.Веселова

Задача № 27

Потерянный астероид 1995 SN_{55}, согласно вычисленной орбите, может подходить к Солнцу не ближе, чем на 7.9 а.е. Однако из-за малого количества наблюдений эта величина известна с ошибкой около 350 миллионов км. Может ли, согласно этим данным, астероид подойти к Земле ближе, чем на 10 радиусов лунной орбиты?

Решение. Переведем значение ошибки наблюдений в а.е.:

$$350 \cdot 10^6 \,\text{км} = \frac{350 \cdot 10^6}{1.5 \cdot 10^8} \,\text{а.е.} \approx 2.3 \,\text{а.е.}$$

Тогда минимальное расстояние, на которое астероид может подойти к Солнцу, равно $7.9 - 2.3 = 5.6$ а.е. Поскольку Земля удалена от Солнца на 1 а.е., то к Земле астероид может подойти на расстояние $5.6 - 1 = 4.6$ а.е. Радиус лунной орбиты равен $3.8 \cdot 10^5$ км, 10 радиусов лунной орбиты составляют $3.8 \cdot 10^6$ км, что существенно меньше чем даже 1 а.е.

А.В.Веселова

Задача № 28

Минимально возможная скорость движения некоторой планеты Солнечной системы относительно Юпитера составляет 22 км/с. Найдите максимально возможную скорость движения той же планеты относительно Юпитера и назовите эту планету. Можно считать, что орбиты обеих планет круговые и расположены в одной плоскости.

Решение. Орбитальная скорость Юпитера составляет около 13 км/с, что можно вычислить или найти, воспользовавшись справочными данными. Поскольку планеты движутся вокруг Солнца в одной плоскости и в одном направлении, минимальная скорость движения другой планеты относительно Юпитера будет достигаться тогда, когда планета находится в нижнем соединении (для наблюдателя на Юпитере), а максимальная — когда планета находится в верхнем соединении.

Поскольку минимальная относительная скорость больше, чем орбитальная скорость Юпитера, планета должна быть внутренней по отношению к Юпитеру. Это означает, что ее орбитальная скорость равна сумме орбитальной скорости Юпитера и минимальной относительной скорости, т.е. составляет около 35 км/с. Тогда максимальная относительная скорость будет равна сумме орбитальных скоростей планет и составит 48 км/с.

Поскольку орбитальная скорость такой планеты больше скорости Земли, этой планетой может быть либо Меркурий, либо Венера. Сверка со справочными данными или вычисление радиуса орбиты показывают, что речь идет именно о Венере.

П.А.Тараканов

Задача № 29

Туманность Кольцо находится на расстоянии $2.6 \cdot 10^3$ световых лет от Солнца. За 100 лет ее видимые угловые размеры возрастают в среднем на $1''$. С какой линейной скоростью (в км/с) происходит расширение туманности?

Решение. Определим линейное расстояние, на которое за 100 лет увеличивается диаметр туманности. При малых углах видимый диаметр, выраженный в радианах, равен отношению линейного диаметра и расстояния:

$$d = \frac{D}{r}; \quad \frac{1''}{57.3 \cdot 3600} = \frac{D}{2.6 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^5\,\text{км/с} \cdot 3.2 \cdot 10^7\,\text{с}}; \quad D = 1.2 \cdot 10^{11}\ \text{км}.$$

Это расстояние соответствует времени расширения $100 \cdot 3.2 \cdot 10^7\,\text{с} = 3.2 \cdot 10^9\,\text{с}$, тогда скорость расширения туманности равна

$$\frac{1.2 \cdot 10^{11}\ \text{км}}{3.2 \cdot 10^9\,\text{с}} = 38\ \text{км/с}.$$

Проще решить задачу, если перевести расстояние до туманности в парсеки. Поскольку 1 пк ≈ 3.26 св.лет, то расстояние до туманности составляет ≈ 800 пк. По определению парсека 1 астрономическая единица видна с расстояния 1 пк под углом $1''$, поэтому с расстояния 800 пк под углом $1''$ видно расстояние 800 а.е. Следовательно, линейная скорость расширения туманности составляет 8 а.е./год. Поскольку 1 а.е./год равна примерно 4.74 км/с, получаем, что скорость расширения туманности составляет около $8 \cdot 4.74 \approx 38$ км/с, что совпадает с уже полученным ранее ответом.

А.В.Веселова

Задача № 30

Комету одновременно наблюдают астрономы с Земли и Марса. Угловой размер хвоста кометы, видимого с Земли, равен 2°. Найдите угловой размер хвоста кометы, видимый с Марса, если известно, что Марс в момент наблюдения находится в квадратуре. Можно считать, что длина хвоста, видимого при наблюдениях с Земли и с Марса, одинакова.

Решение. Поскольку хвост кометы направлен в противоположную от Солнца сторону, а в момент нахождения Марса в квадратуре Солнце, Земля и Марс не находятся на одной прямой, наблюдатели с Земли и с Марса смотрят на хвост с разных направлений. В результате угловой размер хвоста при наблюдении с Марса может оказаться практически произвольным.

Можно легко получить два крайних случая. Если комета, Марс и Солнце находятся на одной прямой, то для наблюдателя с Марса угловой размер хвоста кометы будет нулевым, если Марс не находится в хвосте кометы, и составит 180° в противном случае. Поскольку орбиты комет не обязательно располагаются в плоскости эклиптики и могут быть любым образом наклонены к ней, то хвост, который находится на расстоянии, равном расстоянию от Солнца до Марса, и лежит в плоскости, проходящей через Солнце и Марс и перпендикулярной плоскости эклиптики, при наблюдении с Марса может иметь любые промежуточные угловые размеры. Таким образом, итоговый ответ — угловой размер может быть любым в пределах от 0° до 180°.

В.В.Григорьев

Задача № 31

Какой из объектов быстрее проходит расстояние по орбите, равное своему диаметру, и во сколько раз: Земля или «горячий юпитер» с большой полуосью орбиты 0.05 а.е. и радиусом 90 тысяч км, обращающийся вокруг звезды с массой, равной массе Солнца?

Решение. Средняя скорость обращения Земли по орбите составляет около 30 км/с. Рассчитать эту величину несложно, если разделить длину земной орбиты на продолжительность года:

$$v_\oplus = \frac{2\pi a_\oplus}{T_\oplus} \approx \frac{2 \cdot 3.14 \cdot 1.5 \cdot 10^8}{365.24 \cdot 86400} \approx 29.8 \text{ км/с}.$$

Диаметр Земли равен приблизительно $2 \cdot 6400 = 12800$ км, тогда промежуток времени, за который Земля проходит свой диаметр, равен

$$\Delta T_{\oplus} = \frac{12800}{30} \approx 4.3 \cdot 10^2 \text{ с.}$$

Определим скорость вращения горячего юпитера. По третьему закону Кеплера, записанному для системы единиц «год — а.е. — масса Солнца», определим период обращения планеты

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{1}{1} \implies T = \sqrt{a^3} = \sqrt{0.05^3} \approx 0.011 \text{ г.}$$

Средняя скорость движения планеты

$$v = \frac{2\pi a}{T} \approx \frac{2 \cdot 3.14 \cdot 0.05 \cdot 1.5 \cdot 10^8}{0.11 \cdot 365.24 \cdot 86400} \approx 1.4 \cdot 10^2 \text{ км/с.}$$

Время, за которое планета проходит свой диаметр:

$$\Delta T = \frac{2 \cdot 90000}{140} \approx 12.9 \cdot 10^2 \text{ с.}$$

Таким образом, Земля проходит свой диаметр быстрее в $12.9/4.3 \approx 3$ раза.

А.В.Веселова

Задача № 32

Определите высоту верхней кульминации одной из самых известных далеких галактик MACSJ0647+7015 (прямое восхождение $\alpha = 6^h47^m$, склонение $\delta = 70°15'$), находящейся в созвездии Жирафа, при наблюдении с сопки Халтиатунтури (граница Финляндии и Норвегии, широта $\varphi = 69°19'$, долгота $\lambda = 21°17'$).

Решение. Так как склонение галактики по модулю превышает широту места наблюдения, это означает, что верхняя кульминация будет происходить к северу от зенита. Значит, высота верхней кульминации вычисляется как:

$$h_{\max} = 90° + \varphi - \delta = 90° + 69°19' - 70°15' = 89°04'.$$

В.В.Григорьев

Задача № 33

Наблюдатель на экваторе заметил, что некоторый спутник прошел через зенит в полночь, в 8 часов утра и в 16 часов вечера по местному времени. Определите радиус орбиты спутника, считая ее круговой.

Решение. Синодический период S спутника относительно наблюдателя равен 8 часам. Обозначим сидерический период его обращения через T, период обращения Земли вокруг своей оси через $T_\oplus$, тогда верно равенство

$$S = \frac{TT_\oplus}{T_\oplus \pm T} \quad \text{или} \quad T = \frac{ST_\oplus}{T_\oplus \pm S} = 6 \text{ или } 12 \text{ часов.}$$

Соответствующие радиусы орбит можно найти из III закона Кеплера, например, сравнив спутник с Луной:

$$a = a_{☾} \cdot \left(\frac{T}{T_{☾}}\right)^{2/3}.$$

Подставляя числа, получаем ответы: 16.8 и 26.7 тысяч километров.

А.В.Веселова

Задача № 34

Планета движется вокруг звезды по круговой орбите радиусом 2 а.е. со скоростью 15 км/с. Во сколько раз масса звезды меньше массы Солнца?

Решение. Наиболее быстро эту задачу можно решить, сопоставив параметры движения планеты и Земли. Средняя скорость движения Земли по орбите составляет около 30 км/с. При этом для круговой орбиты центростремительное ускорение равно ускорению вследствие гравитации:

$$a_c = a_g \quad \Longrightarrow \quad \frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2} \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}},$$

здесь r — расстояние от планеты до звезды, M — масса звезды.

Отсюда отношение скоростей планеты и Земли

$$\frac{v}{v_\oplus} = \frac{\sqrt{\frac{GM}{r}}}{\sqrt{\frac{GM_\odot}{r_\oplus}}} = \sqrt{\frac{M}{M_\odot}} \cdot \sqrt{\frac{r_\oplus}{r}}.$$

Тогда масса звезды равна

$$M = \frac{v^2}{v_\oplus^2} \cdot \frac{r}{r_\oplus} M_\odot = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot M_\odot = 0.5 M_\odot.$$

Таким образом, звезда имеет вдвое меньшую массу, чем Солнце.

Задачу можно было решать и иначе: после того, как была получена формула связи круговой скорости, массы звезды и радиуса орбиты, можно было подставить в нее данные в условиях значения в одинаковой системе единиц (например, в СИ), то есть вычислить

$$M = \frac{v^2 r}{G},$$

а затем поделить полученное значение на массу Солнца ($2 \cdot 10^{30}$ кг).

А.В.Веселова

Задача № 35

Некоторая звезда имеет годичный параллакс $\pi = 0''.0073$ и видимую звездную величину $m = 2^m.84$. Найдите ее абсолютную звездную величину.

Решение. Абсолютная звездная величина звезды M, видимая звездная величина m и расстояние до звезды r, выраженное в парсеках, связаны зависимостью

$$M = m - 5 \lg r + 5.$$

Поскольку годичный параллакс звезды в секундах π и расстояние до нее в парсеках обратны друг другу, $r = 1/\pi$, то

$$M = m + 5 \lg \pi + 5 \approx -2^m.8.$$

П.А.Тараканов

Задача № 36

Карликовая сфероидальная галактика Лев V имеет видимую звездную величину 16^m и находится на расстоянии 570 тыс. световых лет от Солнца. Во сколько раз светимость данной галактики превышает солнечную?

Решение. Выразим расстояние D до галактики в килопарсеках. В одном парсеке примерно 3.26 световых лет, тогда $D = 570/3.26 = 175$ кпк. Связь видимой звездной величины m, абсолютной звездной величины M и расстояния до объекта d задается выражением $m = M - 5 + 5 \lg r$, отсюда

$$M = 16 + 5 - 5 \lg(1.75 \cdot 10^5) = 21 - 5 \cdot (\lg 1.75 + 5),$$

$$\lg 1.75 = \ln 1.75 / \ln 10 \approx 0.5/2.3 \approx 0.2,$$

тогда $M = 21 - 1 - 25 = -5$. Запишем формулу Погсона для абсолютных звездных величин в применении к данной галактике и к Солнцу: $M_{\odot} - M = 2.5 \lg(L/L_{\odot})$. Абсолютная звездная величина Солнца равна +4.8, тогда отношение светимости галактики к светимости Солнца равно $10^{(4.8+5)/2.5} = 10^{3.9} \approx 10^4$.

А.В.Веселова

Задача № 37

Компоненты двойной звезды вращаются друг вокруг друга по круговым орбитам, расположенным перпендикулярно лучу зрения. Угловое расстояние между компонентами составляет $0''.1$, расстояние до системы — 10 парсек. Известно, что соотношение масс компонент равно 1:3. Найдите линейные радиусы орбит компонент вокруг их общего центра масс.

Решение. Из определения парсека следует, что 1 астрономическая единица видна с расстояния 1 пк под углом $1''$. Тогда линейный размер системы будет $0.1'' \cdot 10\ \text{пк} = 1$ а.е. Далее воспользуемся соотношением для центра масс: $M_1 \cdot a_1 = M_2 \cdot a_2$, где a_i — расстояния до центра масс, M_i — массы компонент. Отсюда следует, что соотношение барицентрических расстояний равно соотношению масс 1:3. Тогда барицентрическое расстояние для более массивной звезды равно 0.25 а.е., менее массивной — 0.75 а.е.

А. Салганик

Задача № 38

В некоторый момент звезда со склонением 30° находилась в кульминации для наблюдателя в Санкт-Петербурге. В тот же момент вторая звезда оказалась также в кульминации, причем сумма высот звезд составила 125°. Определите склонение второй звезды.

Решение. Посмотрим, в какой кульминации — верхней или нижней — находилась первая звезда. Высота в нижней кульминации составляет

$$\varphi + \delta - 90^\circ = 0^\circ.$$

В данном случае мы пренебрегаем рефракцией. Таким образом, высота второй звезды должна быть равной 125°, но по определению. высота не может превосходить по модулю 90°. Таким образом, первая звезда находится в верхней кульминации. В таком случае ее высота равна

$$90^\circ - \varphi + \delta = 60^\circ.$$

Отсюда высота второй звезды равна 65°. Такую высоту звезда может иметь только в верхней кульминации: высота нижней кульминации не превосходит высоту полюса мира над горизонтом, равную широте места наблюдения. Значит, вторая звезда также находится в верхней кульминации. При этом она может кульминировать как к югу, так и к северу от зенита. Пусть кульминация происходит к югу от зенита. Тогда

$$h = 90^\circ - \varphi + \delta \Rightarrow \delta = 35^\circ.$$

Если кульминация происходит к северу от зенита, то высота определяется как

$$h = 90^\circ - \delta + \varphi \Rightarrow \delta = 85^\circ.$$

А.В.Веселова

Задача № 39

Диаметр зеркала космического телескопа им. Джеймса Уэбба составляет 6.5 метров. Он будет наблюдать на длине волны 13 мкм. Сможет ли телескоп разрешить двойную систему, компоненты которой находятся на угловом расстоянии $0''.6$ друг от друга?

Решение. Дифракционный предел телескопа вычисляется на основании данных в условии диаметра зеркала D и рабочей длины волны λ:

$$\varphi = \frac{\lambda}{D} = \frac{13 \times 10^{-6}}{6.5} \times 206265'' = 2 \times 10^{-6} \times 2 \times 10^{5} = 4 \times 10^{-1} = 0''.4.$$

Так как дифракционный предел телескопа получился меньше, чем расстояние между компонентами двойной системы, значит, телескоп сможет разрешить систему.

В.В.Григорьев

Задача № 40

Звезда, находящаяся на расстоянии 100 пк от Солнца, обладает собственным движением $0.1''$/год и лучевой скоростью -20 км/с. С какой пространственной скоростью звезда движется относительно Солнца? Приближается она к Солнцу или отдаляется от него?

Решение. Отрицательное значение лучевой скорости означает, что объект приближается к Солнцу. Если разложить полную скорость на перпендикулярные компоненты — лучевую v_r и тангенциальную v_τ скорость — то полная скорость будет равна $v = \sqrt{v_r^2 + v_\tau^2}$. Лучевая скорость дана в условиях, тангенциальная скорость определяется по данным о расстоянии r до объекта и о его собственном движении μ:

$$v_\tau = 4.74 r\mu = 4.74 \cdot 100 \cdot 0.1 = 47.4\,\text{км/с}.$$

Тогда полная скорость объекта

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\tau^2} = \sqrt{20^2 + 47.4^2} \approx 51\,\text{км/с}.$$

А.В.Веселова

Задача № 41

Два малых тела с массами, равными 1 кг, находятся на расстоянии 1 м друг от друга. Через какое время эти два тела столкнутся? Всеми силами, кроме гравитационных между самими телами, пренебречь.

Решение. Можно, конечно, строго записать уравнения движения для этой задачи, но делать это вовсе не нужно — это обыкновенная задача двух тел, решение которой известно. Рассмотрим любое из двух тел. Оно будет двигаться по вырожденному эллипсу, один из фокусов которого — центр масс двух тел. Время сближения равно половине периода. Запишем III закон Кеплера:

$$\frac{T^2}{A^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_1+M_2)} \Rightarrow \frac{(2t)^2}{\left(\frac{R}{2}\right)^3} = \frac{4\pi^2}{2GM_1}$$

$$t = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{R^3}{GM_1}} \approx 27^h.$$

В.А.Дмитриев

Задача № 42

Тело Солнечной системы, вращающееся вокруг Солнца по круговой орбите в плоскости эклиптики, сближается с Сатурном на минимальное расстояние каждые 4 года. Чему равно это расстояние?

Решение. С одной стороны, можно сказать, что 4 года — это период повторений одинакового взаимного положения данного тела и Сатурна (синодический период), и по этим данным вычислить сидерический период тела для двух случаев — когда движение тела вокруг Солнца является прямым или ретроградным. Однако можно и упростить решение, если учесть, что орбитальный период Сатурна существенно превышает 4 года (около 30 лет), а это означает, что для интересующего нас тела синодический и сидерический периоды с достаточной точностью совпадают.

Тогда радиус орбиты тела составляет $4^{2/3} = 2.5$ а.е. и, поскольку большая полуось орбиты Сатурна составляет около 9.5 а.е., минимальное расстояние — 7 а.е. Давать ответ с большей точностью бессмысленно, поскольку из-за эксцентриситета орбиты Сатурна расстояние от Солнца до Сатурна меняется в пределах от 9.0 а.е. до 10.1 а.е., тем самым минимальное расстояние может меняться в пределах 1 а.е.

Б.Б.Эскин, П.А.Тараканов

Задача № 43

Однажды максимальная северная либрация Луны по широте совпала с максимальной западной либрацией по долготе. Через сколько суток это произойдет в следующий раз?

Решение. Либрация Луны по широте вызвана тем, что ось вращения Луны наклонена к плоскости ее орбиты. Следовательно, период повторения «одноименных» либраций по широте равен периоду прохождения Луны через один и тот же узел ее орбиты. Этот период носит название «драконический месяц» и равен примерно $T_d = 27.21222$ средних солнечных суток.

Причиной либрации Луны по долготе является эллиптичность лунной орбиты. Таким образом, период либраций по долготе равен промежутку времени между последовательными прохождениями Луны через перигей орбиты. Этот промежуток равен примерно $T_a = 27.55455$ средних солнечных суток и называется «аномалистический месяц».

Вычислим синодический период для этих двух периодов:

$$S = \left| \frac{1}{T_d} - \frac{1}{T_a} \right|^{-1} = 2190.344 \text{ суток.}$$

По прошествии синодического периода оба колебания положения Луны снова совпадут по фазе. Но нам недостаточно выполнения этого условия — по условию задачи надо, чтобы при этом фаза каждого колебания совпала с исходной. Вычислив, сколько драконических и аномалистических месяцев пройдет за синодический период, получим около 80.5 и 79.5. Это означает, что после истечения одного синодического периода совпадут максимальная южная либрация по широте и восточная по долготе, а совпадение исходных фаз произойдет через два синодических периода, т.е. примерно через 4381 сутки (почти точно через 12 лет).

М.В.Костина

Задача № 44

Недавно была зарегистрирована вспышка в радиодиапазоне от магнетара XTE J1810-197. Было обнаружено, что радиолиния на частоте $6.5 \cdot 10^2$ МГц расширена, сигнал регистрировался на частотах с $6.0 \cdot 10^2$ до $7.0 \cdot 10^2$ МГц. Считая, что уширение линии было вызвано вращением магнетара, оцените линейную скорость движения точек на экваторе магнетара.

Решение. Когда мы смотрим на вращающееся тело, то один край от нас удаляется (и сигнал от него смещается для нас в «красную» сторону), а другой — приближается (вызывая смещение сигнала в «синюю» сторону). Так как линейная скорость краев магнетара одинаковая, то можно записать формулу эффекта Допплера:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v}{c},$$

где $\Delta\nu$ — смещение сигнала в одну сторону (в нашем случае 50 МГц в «красную» и столько же в «синюю» сторону), ν — лабораторная частота сигнала, v — скорость движения края магнетара, c — скорость света ($3 \cdot 10^5$ км/с). Отсюда выражаем скорость:

$$v = c\frac{\Delta\nu}{\nu} = 3 \cdot 10^5 \cdot \frac{50}{650} \approx 2 \times 10^4 \text{ км/с}.$$

Однако это только нижняя оценка возможной скорости, оказывающаяся точной только в том случае, если ось вращения магнетара перпендикулярна к лучу зрения. Если это условие не выполнено, то найденная величина — это только проекция искомой скорости на луч зрения, а сама скорость, как следствие, может оказаться и больше. Поэтому ответ — не менее $2 \cdot 10^4$ км/с.

В принципе, при решении можно использовать и формулу релятивистского эффекта Допплера, однако при имеющейся точности данных это излишне, ответ получается с указанной точностью таким же.

В.В.Григорьев

Задача № 45

Некоторая звезда имеет температуру $48 \cdot 10^3$ К и радиус 1.5 радиуса Солнца, она находится на расстоянии 3.2 кпк от Солнца в направлении центра Галактики. Какую видимую звездную величину имеет звезда для наблюдателя с Земли, если поглощение света в плоскости Галактики составляет 2^m/кпк?

Решение. Определим светимость звезды по закону Стефана–Больцмана:

$$L = 4\pi R^2\sigma T^4, \quad \frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^2 \left(\frac{T}{T_\odot}\right)^4 = (1.5)^2 \left(\frac{48000}{5800}\right)^4 \approx 1.1 \cdot 10^4.$$

Сопоставим звезду с Солнцем, определим ее абсолютную звездную величину:

$$M - M_\odot = -2.5 \lg \frac{L}{L_\odot} \approx -10.$$

Отсюда $M = -10 + 4.8 = -5.2$. Видимая звездная величина связана с абсолютной звездной величиной и расстоянием до звезды:

$$m = M - 5 + 5 \lg r + A \cdot \frac{r}{10^3} = -5.2 - 5 + 5 \lg 3.2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 3.2 \approx 14^m.$$

А.В.Веселова

Задача № 46

Археолог Вася перевел надпись в древнем документе: «Когда тончайший серп, рогами обращенный на восход, близ яркой голубой звезды покажется на небосклоне, путь верный к храму он тебе укажет…» В какой сезон года и в какое время суток в северных широтах следует наблюдать указанное событие?

Решение. Яркие голубые звезды на земном небе наблюдаются в созвездии Ориона и Большого Пса. Поскольку серп Луны назван тончайшим, то Луна вблизи фазы новолуния, при этом, поскольку рога серпа обращены на восход, то Луна растущая и недавно прошла новолуние, поэтому находится рядом с Солнцем. Орион и Большой Пес находятся ниже плоскости эклиптики ниже созвездий Близнецов и Тельца. Солнце в Тельце и Близнецах находится с середины мая до последней трети июля. Так как Луна растущая, то она наблюдается вечером после захода Солнца. Поэтому нужно в летние месяцы наблюдать Луну вечером.

А.В.Веселова

Задача № 47

Считается, что облако G2 теряет в год массу, равную $5 \cdot 10^{-7} M_\odot$. Оцените, во сколько раз масса, теряемая облаком за секунду, меньше или больше общей массы людей на Земле? Масса Солнца равна $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ кг.

Решение. Определим массу в килограммах, которую облако теряет за секунду:

$$5{\cdot}10^{-7} M_\odot/\text{год} = 5{\cdot}10^{-7}{\cdot}2{\cdot}10^{30}\ \text{кг/год} = 10^{24}\ \text{кг/год} = 10^{24}/(3{\cdot}10^{7})\ \text{кг/с} = 3{\cdot}10^{16}\ \text{кг/с}.$$

Население Земли к настоящему моменту превышает 7 миллиардов человек, но для оценки возьмем это значение. Поскольку нас интересует ответ с точностью до порядка, оценим среднюю массу человека как 60 кг. Тогда оценка массы человечества окажется такой: $7 \cdot 10^9 \cdot 6 \cdot 10^1 = 4 \cdot 10^{11}$ кг.

Отношение теряемой облаком массы к массе людей равно

$$\frac{3 \cdot 10^{16}}{4 \cdot 10^{11}} \approx 8 \cdot 10^4.$$

А.В.Веселова

Задача № 48

В Древнем Египте использовался календарь, продолжительность года в котором составляла ровно 365 суток. Кроме этого, древние египтяне использовали т.н. «год Сириуса» (начало которого было привязано к первой возможности наблюдения Сириуса в лучах утренней зари), продолжительность которого составляла $365\frac{1}{4}$ суток. Интервал времени между двумя последовательными совпадениями дат начала календарного года и «года Сириуса» назывался «Великим годом».

Во время появления такой календарной традиции начало «года Сириуса» совпадало с началом разлива Нила. Допустим, что в этот же момент начался очередной «Великий год». Раньше или позже начала следующего «Великого года» произойдет разлив Нила, и на сколько примерно суток?

Решение. Начало «года Сириуса» отставало от начала египетского календарного года на $1/4$ суток ежегодно, поэтому в следующий раз начала годов должны были совпасть через $365 \cdot 4 = 1460$ «лет Сириуса» (по египетскому календарю за это время должен был пройти 1461 год), это и есть продолжительность «Великого года».

Однако реальная продолжительность года (точнее, тропического года, с которым на Земле повторяются календарные сезоны и к которому, как следствие, «привязаны» разливы Нила) чуть меньше «года Сириуса». Тут можно вспомнить продолжительность тропического года (примерно $365.2422\ldots$ суток) или, что проще, вспомнить ошибку юлианского календаря (3 суток за 400 лет), средняя продолжительность года в котором совпадает с «годом Сириуса». За 1460 лет накопится ошибка $1460/400 \cdot 3 \approx 11$ суток, причем, поскольку тропический год короче «года Сириуса» (и юлианского года), связанные с тропическим годом события будут происходить раньше. Следовательно, Нил разольется ориентировочно на 11 суток раньше начала следующего «Великого года».

П.А. Тараканов

Задача № 49

В 2020 году состоится 2 солнечных и 4 лунных затмения. Известно, что в конце декабря 2019 года было кольцеобразное солнечное затмение, а в начале января 2020 года — полутеневое лунное. Какого типа будут остальные затмения этого года? В какой последовательности они произойдут? В какие месяцы года они произойдут? Поясните свой ответ.

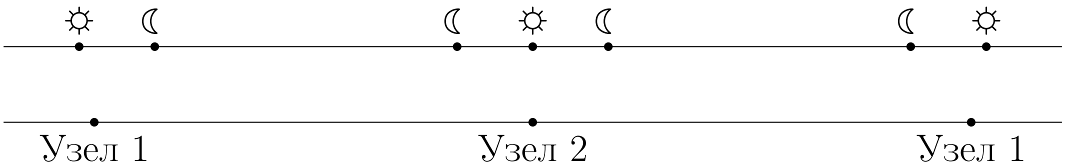
Решение. Как известно, причиной того, что мы не наблюдаем каждое новолуние солнечное затмение, а каждое полнолуние — лунное, является то, что орбита Луны наклонена к плоскости орбиты Земли — плоскости эклиптики (по линии эклиптики Солнце совершает свой годичный путь по небу, отражая движение Земли вокруг него). Вследствие этого затмения могут наблюдаться только тогда, когда Луна в подходящей фазе находится рядом с точкой пересечения своей орбиты с эклиптикой. Такая точка называется узлом орбиты и их, очевидно, 2.

Представим, что в некоторый момент Луна, скажем, в новолунии, оказалась точно в одном из узлов. Таким образом, Луна находится точно на эклиптике (так как точка пересечения принадлежит одновременно и орбите Луны, и эклиптике) и при этом, поскольку она в новолунии, то в том же самом направлении с Земли видно Солнце, которое также находится на эклиптике (оно всегда находится на эклиптике). В этот момент мы видим Солнце и Луну как бы в одной точке неба. Происходит солнечное затмение, причем полное (или кольцеобразное, если, например, Луна при этом в апогее своей орбиты). Ясно, что примерно через полмесяца (более точно, через половину сидерического (звездного) месяца) Луна придет ко второму узлу орбиты (и та же картина будет примерно полумесяцем раньше). Так как период смены фаз Луны немного длиннее того промежутка, за который Луна делает полный оборот вокруг Земли, то, дойдя до узла, она еще не будет в полнолунии, то есть в противоположной Солнцу точке неба, так как Солнце за эти полмесяца уйдет по эклиптике от того узла, в котором произошло затмение. Полнолуние наступит чуть больше, чем через сутки, за которые Луна тоже отойдет от узла. Так что затмение в данном случае лунное, хоть и произойдет (поскольку Луна не очень далеко успела отойти от узла), но уже будет частным, а то и полутеневым. Еще через полмесяца, когда Луна снова подойдет к узлу, в котором было солнечное затмение, Солнце успеет отойти от этого узла настолько далеко, что в это новолуние затмение уже не состоится. Придется ждать примерно полгода, чтобы Солнце по эклиптике пришло уже к другому узлу лунной орбиты и затмения повторились уже там.

Таким образом, в промежуток длиной примерно в год бывает 2 «сезона», благоприятных для затмений. Продолжается каждый из них чуть больше месяца (Луне не обязательно быть совсем точно в узле, чтобы было затмение), а промежуток между ними составляет чуть меньше полугода. Строго говоря, ровно 2 периода затмений приходятся на промежуток, равный драконическому году — периоду прохода Солнца через один и тот же узел лунной орбиты, продолжительность которого немного меньше календарного.

Так как «затменные сезоны» продолжаются около месяца, то каждый из них происходит по 2 затмения, одно солнечное, одно лунное, а максимально может произойти 3 затмения: в самом начале, в середине и в самом конце. В таком случае те затмения, лунные или солнечные, которые оказываются на краях промежутка, будут частными с малой фазой (долей затененной площади от всей площади диска), а в случае лунных могут быть и вовсе полутеневыми. А то затмение, лунное или солнечное, которое произойдет посередине между ними, наоборот, будет полным (в случае солнечного может быть кольцеобразным) и, скорее всего, довольно продолжительным. «Идеальный» вариант с таким солнечным затмением описан выше.

Вернемся к ситуации 2020 года. Одно полутеневое лунное затмение состоялось в начале января, а полный «затменный сезон», в котором было это затмение, был, в основном, в декабре 2019 года, т.к. там было кольцеобразное солнечное затмение (которое должно быть близко к середине «сезона»). Так что в январе затмений больше не будет. Таким образом, на 2020 год придется еще один полный «затменный сезон», который наступит примерно через полгода, т.е. в июне, и еще один, или его часть (это зависит от точных дат затмений), который придется на декабрь. В эти два оставшихся сезона должно произойти 2 солнечных и 3 оставшихся лунных затмения. Так как всего оставшихся затмений 5, то на один из «сезонов» придется 3 затмения, а на другой — 2. Лунные и солнечные затмения в пределах «сезона» чередуются, так что очевидно, что 2 солнечных придутся на июнь и декабрь, а лунные распределятся между «сезонами» так: 2 и 1. Осталось понять, в июне или в декабре произойдет 3 затмения. В любом случае то солнечное затмение, которое придется на «сезон» из трех затмений, будет полным или кольцеобразным. Логично предположить, что поскольку промежуток между сезонами не сильно отличается от полугода, а период смены лунных фаз мало отличается от продолжительности среднего месяца, то условия возникновения затмений будут меняться плавно и следующее солнечное затмение тоже будет полным или кольцеобразным. Следовательно, все лунные будут не более, чем частными с малой фазой, а, скорее даже полутеневыми (как в начале года). Но понять, в июне или декабре будет 2 лунных затмения — самая сложная часть задачи. Можно рассуждать так. Так как промежуток между «затменными сезонами» немного короче 6 лунных месяцев, то весь «сезон» как целое смещается назад по времени относительно момента, когда Солнце приходит к узлу лунной орбиты (см. рис., где ☼ отмечает новолуние и солнечное затмение, а ☾ — полнолуние и лунное). Так что, если в декабрьско-январском «сезоне» за солнечным затмением следовало лунное, то далее смещение сезонов должно привести к тому, что лунное затмение будет предшествовать солнечному. Значит, скорее всего, в июне лунные затмения будут «окружать» солнечное с обеих сторон, а в декабре лунное будет перед солнечным.



Таким образом, скорее всего, в июньском «сезоне» будет 3 затмения: в середине произойдет полное (или кольцеобразное) солнечное затмение, а по краям — лунные, которые, скорее всего будут полутеневыми. Аналогично, скорее всего, в начале декабрьского «сезона» произойдет полутеневое лунное затмение, а в середине — полное (или кольцеобразное) солнечное.

Точные даты и типы затмений 2019 года:

- 10 января — полутеневое лунное;
- 5 июня — полутеневое лунное;
- 21 июня — кольцеобразное солнечное;

- 5 июля — полутеневое лунное;
- 30 ноября — полутеневое лунное;
- 14 декабря — полное солнечное.

М.В.Костина

Задача № 50

Звезда δ Цефея известна тем, что она пульсирует: у нее регулярно меняются размеры. Она имеет массу, равную 5 массам Солнца, а ее средний радиус — 40 радиусов Солнца. Полное изменение диаметра составляет 7 миллионов километров, период пульсаций — 5.4 дня. Определите, во сколько раз отличаются максимальная и минимальная плотности звезды, найдите средние скорости, с которыми поверхность звезды движется по отношению к ее центру при расширении и сжатии звезды, если известно, что сжатие длится в три раза меньше по времени, чем расширение. Радиус Солнца равен 700 тысяч километров.

Решение. Сперва переведем изменение диаметра рассматриваемой звезды из километров в радиусы Солнца: 7 миллионов км — это 10 радиусов Солнца. Соответственно, радиус меняется на 5 радиусов Солнца, то есть от среднего значения от отстоит на 2.5 радиуса Солнца. Тогда самый большой радиус звезды будет равняться 42.5 радиусов Солнца, а самый маленький — 37.5.

Разберемся с первым вопросом задачи: найдем отношение плотностей. По определению плотность ρ есть отношение массы тела M к его объему V:

$$\rho = \frac{M}{V}$$

Объем любого тела пропорционален третьей степени его линейного размера (в данном случае — радиусу): $V \sim R^3$.

Заметим, что масса звезды в ходе рассматриваемых процессов не изменяется, форма звезды — тоже. Изменяется лишь ее размер. Понятно, что если объект больше при той же массе, то его плотность будет меньше. Обозначим индексом max состояние звезды, когда ее плотность максимальна, и индексом min, когда минимальна. Запишем это:

$$\rho_{\max} = \frac{M}{V_{\max}} \sim \frac{M}{R^3_{\max}}; \qquad \rho_{\min} = \frac{M}{V_{\min}} \sim \frac{M}{R^3_{\min}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\rho_{\max}}{\rho_{\mathrm{mim}}} = \left(\frac{R_{\min}}{R_{\max}}\right)^3$$

Осталось не перепутать радиусы и посчитать результат. Значения радиусов можно подставлять в радиусах Солнца, т.к. их отношение будет одинаковым независимо от того, выражено оно в метрах, миллиметрах и т.д.

$$\frac{\rho_{\mathrm{max}}}{\rho_{\mathrm{mim}}} = \left(\frac{42.5}{37.5}\right)^3 = \left(\frac{17}{15}\right)^3 = \frac{4913}{3375} \approx 1.5.$$

Разберемся со вторым вопросом задачи. Расширение звезды длится в три раза дольше, чем сжатие, значит (исходя из периода), звезда расширяется в течение 4.05 суток, а сжатие — 1.35 суток. Получить это можно из тех соображений, что сжатие занимает $1/4$ долю от всего периода пульсаций. Соответственно, скорости также должны отличаться в три раза.

И при сжатии, и при расширении поверхность звезды проходит 5 радиусов Солнца. Считая, что каждая точка поверхности движется прямолинейно и равномерно относительно центра звезды, можно найти средние скорости расширения и сжатия. Скорость расширения v:

$$v = \frac{5\text{ радиусов Солнца}}{4.05\text{ суток}} = \frac{5 \times 700000\text{ км}}{4.05\text{ суток}} \approx 36\text{ тыс. км/ч} = 10\text{ км/с}.$$

Аналогично считается скорость сжатия v':

$$v' = \frac{5\text{ радиусов Солнца}}{1.35\text{ суток}} \approx 108\text{ тыс. км/ч} = 30\text{ км/с}.$$

В.В.Григорьев

Задача № 51

В первой половине сентября 2019 года произошло противостояние Нептуна. Петербургский астроном хотел в том же сентябре удаленно пронаблюдать Нептун на телескопе, установленном в Чили. Часовой пояс телескопа — UT−3. В какое приблизительно время по времени Санкт-Петербурга следовало вести наблюдения?

Решение. Поскольку Нептун находится в противостоянии с Солнцем, то он находится в противоположной точке неба по сравнению с Солнцем для земного наблюдателя. Тогда Нептун оказывается выше всего над горизонтом в ночное время суток (выше всего — в истинную солнечную полночь). Значит, в Чили в момент наблюдения время должно быть около полуночи. Часовой пояс Петербурга — +3. Таким образом, разность во времени между Петербургом и Чили составляет 6 часов. Чили находится западнее Санкт-Петербурга, поэтому во время полуночи в Чили в Петербурга уже 6 утра.

А.В.Веселова

Задача № 52

Шаровое звездное скопление ω Центавра — самое большое подобное скопление в Галактике, его радиус составляет 90 световых лет. В скоплении настолько много звезд, что среднее расстояние между соседними звездами составляет всего 1 световой год. Если считать, что все звезды похожи на Солнце, то сможет ли цепочка из этих звезд, размещенных вплотную друг к другу, дотянуться от Солнца до ближайшей к Солнцу звезды Галактики?

Решение. Вычислим объем скопления V, считая его шаром радиуса R:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 90^3 \approx 3 \times 10^6 \text{ св.лет}^3$$

Так как среднее расстояние между звездами составляет 1 св. год, значит, можно считать, что каждая звезда занимает объем в виде шарика с таким диаметром или кубика с такой стороной. Второй вариант проще с точки зрения вычислений, воспользуемся им и будем считать, что на одну звезду приходится объем $V_0 = 1$ св.год^3.

Если поделить объем всего скопления на объем, приходящийся на одну звезду, то мы получим количество звезд N:

$$N = \frac{V}{V_0} = \frac{3 \times 10^6}{1} = 3 \times 10^6 \text{ звезд.}$$

Диаметр Солнца составляет примерно 1.5×10^6 км, значит, длина цепочки будет равна 4.5×10^{12} км $=$ 0.15 пк $=$ 0.45 св.лет. Это расстояние меньше, чем расстояние до Проксимы Центавра — ближайшей к Солнцу звезды (до нее 1.4 пк или 4.3 св. лет), значит, цепочка до нее не дотянется.

В.В.Григорьев

Задача № 53

26 декабря Луна покрыла Юпитер. В тот же день состоялось кольцеобразное солнечное затмение. На утреннем или вечернем небе можно увидеть Юпитер сегодня? Оцените широты, на которых Юпитер в принципе не может быть виден сегодня.

Решение. Так как 26 декабря было затмение, то Луна была в одной точке неба с Солнцем, а раз в тот же день произошло покрытие, то там же находился и Юпитер. 2 февраля Юпитер остался примерно на том же месте среди звезд (он движется по отношению к звездам в 12 раз медленнее Солнца), а Солнце за прошедшие 38 дней еще сместилось к востоку от Юпитера примерно на 30° (так как прошел примерно месяц, т.е. 1/12 часть года; впрочем, для решения задачи это несущественно). Если Солнце восточнее, то оно встает и заходит немного позже Юпитера, следовательно Юпитер виден на утреннем небе.

Так как Юпитер сегодня находится примерно в той точке, в которой Солнце было 26 декабря, он находится вблизи точки зимнего солнцестояния на эклиптике. Таким образом, Юпитер не должен подниматься над горизонтом в тех местах, где Солнце не поднимается над горизонтом в день зимнего солнцестояния, а именно севернее примерно северного полярного круга, т.е. от примерно 67° до 90° с.ш.

М.В.Костина

Задача № 54

По данным одного из исследований масса пояса Койпера составляет около 1% от массы Земли. При моделировании динамики объектов Солнечной системы пояс Койпера для упрощения представили плоским очень тонким кольцом с внутренним радиусом 30 астрономических единиц (а.е.) и внешним радиусом 50 а.е. Сколько граммов приходится на каждый квадратный метр поверхности такого кольца?

Решение. Иными словами, в условии задачи требуется оценить поверхностную плотность кольца. Определим сначала массу кольца в граммах. Масса Земли равна $6 \cdot 10^{24}$ кг или $6 \cdot 10^{27}$ г, тогда масса кольца равна $0.01 \cdot 6 \cdot 10^{27} = 6 \cdot 10^{25}$ г.

Площадь кольца определяем как разность площади круга с внешним радиусом и круга с внутренним радиусом:

$$S = \pi R_2^2 - \pi R_1^2 = \pi(R_2^2 - R_1^2) \approx 3.14 \cdot (50^2 - 30^2) \cdot (1.5 \cdot 10^{11})^2 = \\ = 3.14 \cdot 1.6 \cdot 10^3 \cdot 2.25 \cdot 10^{22} = 1.1 \cdot 10^{26}\,\text{м}^2.$$

Поверхностная плотность будет равна

$$\frac{6 \cdot 10^{25}}{1.1 \cdot 10^{26}} = 0.5\,\text{г/м}^2.$$

А.В.Веселова

Задача № 55

Можно ли в каком-нибудь одном пункте на территории России наблюдать звезды Альтаир и Альнаир? Известно, что в Санкт-Петербурге Альтаир опускается под горизонт не более, чем на 25°, а на экваторе максимальная высота над горизонтом звезды Альнаир равна 43°. Крайняя северная точка России имеет широту 82° с.ш., крайняя южная точка России имеет широту 41° с.ш.

Решение. Оценим склонения звезд. По условию высота Альтаира в нижней кульминации для наблюдателя в Санкт–Петербурге не менее $-25°$:

$$-25° \leqslant \varphi + \delta - 90° = 60° + \delta - 90° = \delta - 30°.$$

Отсюда $\delta \geqslant 30° - 25° = 5°$. Таким образом, склонение Альтаира положительно (настоящее значение составляет почти $9°$), то есть Альтаир лежит в северной части неба относительно небесного экватора и, следовательно, доступен для наблюдения во всем Северном полушарии Земли и, в частности, на всей территории России.

Максимальная высота над горизонтом соответствует верхней кульминации светила:

$$43° = 90° - |\varphi - \delta| = 90° - |\delta|,$$

отсюда $|\delta| = 90° - 43° = 47°$. Осталось определиться со знаком склонения. Если знать, что Альнаир — это α Журавля, ответ становится очевидным — склонение отрицательное. Но можно догадаться об этом же, если участник припомнит, доводилось ли ему видеть эту известную звезду (и если да — в какой местности). Для подавляющего большинства участников олимпиады вид Альнаира должен быть достаточно экзотическим (в некоторых местах проведения олимпиады он виден, но около горизонта), а это означает, что Альнаир — звезда южного неба. Поэтому $\delta = -47°$.

Для того, чтобы звезда была доступна для наблюдения, необходима ее положительная высота над горизонтом хотя бы в верхней кульминации:

$$0° \leqslant 90° - \varphi + \delta = 90° - \varphi - 47°, \quad \varphi \leqslant 90° - 47° = 43°.$$

Таким образом, Альнаир можно наблюдать только при широтах менее $43°$, что соответствует наиболее южным областям России.

А.В.Веселова

Задача № 56

Первым сахаром, обнаруженным в межзвездных облаках, стал гликольальдегид CH_2OHCHO. В некотором облаке с радиусом 2 парсека лучевая концентрация (количество молекул в столбике/колонке с площадью основания 1 см^2) в направлении на центр облака составляет $2.8 \cdot 10^{14}$ молекул на см^2. Оцените общую массу молекул гликольальдегида в облаке.

Решение. Определим молярную массу молекул гликольальдегида: в одной молекуле 2 атома углерода, 4 атома водорода, 2 атома кислорода, тогда молярная масса равна $\mu = 2 \cdot 12 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 16 = 60$ г/моль.

Вычислим объемную концентрацию молекул. Объем колонки представим в виде прямоугольного параллелепипеда с высотой, равной диаметру облака:

$$V = Sh = 1 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 10^{18}) = 1.2 \cdot 10^{19}\ \text{см}^3.$$

Тогда объемная концентрация (в предположении, что молекулы в облаке распределены равномерно; но, поскольку мы получаем оценку, это предположение оправдано) равна

$$n = \frac{\sigma}{V} = \frac{2.8 \cdot 10^{14}}{1.2 \cdot 10^{19}} = 2 \cdot 10^{-5}\,\text{см}^{-3}.$$

Определим объем облака, считая его шаром:

$$V_c = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi (2 \cdot 3 \cdot 10^{18})^3 = 9 \cdot 10^{56}\,\text{см}^3.$$

Количество молекул гликольальдегида в облаке:

$$N = V_c n = 9 \cdot 10^{56} \cdot 2 \cdot 10^{-5} = 18 \cdot 10^{51}\,\text{штук}.$$

Тогда количество гликольальдегида в молях равно

$$\nu = \frac{N}{N_A} = \frac{18 \cdot 10^{51}}{6 \cdot 10^{23}} = 3 \cdot 10^{28}\,\text{моль}.$$

Следовательно, масса гликольальдегида равна

$$M = \nu\mu = 3 \cdot 10^{28} \cdot 60 \approx 2 \cdot 10^{30}\,\text{г}.$$

Заметим, что это примерно 10^{-3} массы Солнца.

А.В.Веселова

Задача № 57

Космический корабль с фантастическим двигателем, который обладает пренебрежимо малым расходом топлива и способен годами разгонять корабль с ускорением 1 g, совершает перелет между околоземной орбитой и околомарсианской орбитой. Оцените, в каких пределах может меняться продолжительность такого перелета, если известно, что и около Земли, и около Марса корабль должен иметь нулевую скорость относительно Солнца.

Решение. Для начала поймем, что ускорение 1 g в окрестностях Земной орбиты (и за ней) — величина весьма значительная, она на порядки больше гравитационного ускорения, создаваемого Солнцем. В этом несложно убедиться (данные выражены в СИ):

$$a = \frac{GM}{R^2} = \frac{7 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{(1.5 \cdot 10^{11})^2} = 6 \cdot 10^{-3}\ \text{м/с}^2 \ll 10^1\ \text{м/с}^2$$

Это значит, что в первом приближении можно считать, что Солнце (а планеты — тем более) не влияют на полет космического корабля. Таким образом, его полет — обыкновенное равноускоренное движение.

Так как Марс является конечной целью полета, корабль по прибытии должен затормозить, то есть первую половину пути корабль ускоряется, вторую — тормозит. Тогда:

$$\frac{d}{2} = \frac{a(\frac{t}{2})^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{4d}{a}}$$

Ускорение $a = 10$ м/с^2, расстояние d принимает значения от $a_M - a_E = 0.5$ а.е. до $a_M + a_E = 2.5$ а.е. Подставив числа, получим, что время полета лежит в диапазоне от 2 суток до 4.5 суток, что довольно быстро для космических перелетов.

Справедливости ради отметим, что пролететь через Солнце корабль не может, поэтому в случае соединения планет ему придется облететь Солнце по чуть более длинному пути, но на оценочный ответ эта поправка не повлияет.

В.А.Дмитриев

Задача № 58

Звезда R Андромеды из-за сильного звездного ветра теряет 10^{-6} масс Солнца в год. Считая, что звездный ветер уносится от звезды прямолинейно и равномерно со скоростью $3 \cdot 10^2$ км/с, оцените концентрацию частиц звездного ветра от этой звезды в окрестности Солнечной системы. Годичный параллакс R And равен $0''.004$.

Решение. 1 парсек — это расстояние, с которого 1 астрономическая единица видна под углом $1''$. Тогда можно вычислить расстояние до R Андромеды. Переведем параллакс в расстояние: $r = 1/0''.004 = 250$ пк.

В случае изотропного распространения вещества по закону сохранения массы, если через поверхность звезды за один год прошло какое-то количество вещества, то за это же время через любую сферу радиуса r, окружающую звезду, пройдет ровно то же количество вещества. Значит, произведение

$$4\pi r^2 v\rho = \dot{m} = \mathrm{const},$$

где r — радиус сферы, v — скорость распространения вещества, ρ — плотность вещества, $\dot{m}$ — темп потери массы. Отсюда получаем плотность вещества звездного ветра (при этом учитывая, что масса Солнца равна 2×10^{30} кг, а год длится 3.15×10^7 секунд, а 250 пк составляют 750×10^{16} м):

$$\dot{m} = \frac{10^{-6} \cdot 2 \times 10^{30}\ \text{кг}}{3.15 \times 10^7\ \text{с}} = 0.6 \times 10^{17}\ \text{кг/с};$$

$$\rho = \frac{\dot{m}}{4\pi r^2 v} = \frac{0.6 \times 10^{17}}{4 \cdot \pi \cdot (7.5 \times 10^{18})^2 \cdot 3 \times 10^5} \approx 3 \times 10^{-4} \times 10^{17-18\cdot 2-5} = 3 \times 10^{-28}\ \text{кг/м}^3$$

Считая, что звездный ветер состоит из ионизованного водорода (что для реального звездного ветра весьма близко к действительности), поделим полученную плотность на массу атома водорода m_0 для получения концентрации атомов водорода n:

$$n = \frac{\rho}{m_0} = \frac{3 \times 10^{-28}}{1.67 \times 10^{-27}} \approx 2 \times 10^{-1}\ \text{частиц/м}^3.$$

Осталось учесть, что ионизованный атом водорода состоит из двух частиц (протона и электрона), поэтому итоговый ответ больше в два раза: около 0.4 м$^{-3}$.

В.В. Григорьев

Задача № 59

Каждый телескоп системы KELT (Kilodegree Extremely Little Telescope) оснащен линзовым объективом с диаметром 42 мм и ПЗС-матрицей размером 37×37 мм, содержащей 4096×4096 пикселей. Поле зрения телескопа составляет $26^\circ \times 26^\circ$. Максимальная чувствительность матрицы достигается на длине волны 600 нм. Определите предельное угловое разрешение такого инструмента.

Решение. На квадратную матрицу проецируется участок неба с угловыми размерами $26^\circ \times 26^\circ$. С учетом количества пикселей по одной стороне получаем, что на один пиксель проецируется кусочек неба шириной d:

$$d = \frac{26 \times 3600''}{4096} \approx 23''.$$

Рассчитаем дифракционный предел телескопа θ на длине волны $\lambda = 600$ нм:

$$\theta \approx 1.22 \cdot \frac{\lambda}{D} = 1.22 \cdot \frac{600 \times 10^{-9} \times 206265''}{42 \times 10^{-3}} \approx 4''.$$

Здесь в качестве D был подставлен диаметр объектива в метрах.

Сравнивая θ и d, можно заметить, что угловое разрешение телескопа определяется исключительно размерами пикселей, то есть ответ: $23''$.

В.В.Григорьев

Задача № 60

Рентгеновский источник в созвездии Лебедя Cyg X-3 является переменным. Было замечено, что из областей, находящихся на небе на угловом расстоянии $16''$ от Cyg X-3, также приходит переменное излучение с тем же периодом, однако максимумы и минимумы блеска наблюдаются с задержкой (по сравнению с Cyg X-3) на 2.7 года. Оцените, на каком расстоянии Cyg X-3 находится от Солнца. А от центра нашей Галактики?

Решение. Рентгеновское излучение, испущенное объектом, проходит некоторое расстояние до окружающего его вещества и рассеивается на нем. Поэтому задержка вызвана тем, что излучению требуется время для достижения вещества. Свет за 2.7 года проходит расстояние, немного меньшее 1 пк (который, как известно, равен примерно 3.26 световым годам), точнее, $2.7/3.3 = 0.8$ пк.

Это расстояние мы видим под углом $\theta = 16''$. Значит, Солнце и Cyg X-3 разделяет расстояние r:

$$r = \frac{l}{\theta} = 0.8 \text{ пк} \cdot \frac{206265''}{16''} \approx 10 \text{ кпк}.$$

Здесь угол θ был переведен в радианы.

Как следует из условия задачи, объект находится в созвездии Лебедя, через которое проходит Млечный Путь. Вспомнив расположение созвездий, можно оценить, что угловое расстояние между Лебедем и Стрельцом (в нем находится центр Галактики) составляет примерно $90°$ (в реальности галактическая долгота Cyg X-3 равна $79°$, что практически не влияет на результат).

Таким образом, получаем прямоугольный треугольник с вершинами в Cyg X-3, Солнце и центром Галактики, где второе искомое расстояние D является гипотенузой. Расстояние от Солнца до центра Млечного Пути равно 8 кпк, следовательно

$$D = \sqrt{10^2 + 8^2} \approx 13 \text{ кпк}.$$

В.В.Григорьев

Задача № 61

Звезда R Андромеды — пульсирующая звезда, меняющая свой блеск с периодом 409 суток. Ее можно увидеть невооруженным глазом только в максимуме блеска, в минимуме блеска ее видимая звездная величина равна 16^m, при этом в один из этих моментов звезда имеет радиус, равный $5 \cdot 10^2$ радиуса Солнца. Считая, что во время пульсаций температура звезды не меняется, оцените среднюю скорость движения оболочки звезды.

Решение. Человек с нормальным зрением может видеть звезды до 6^m, значит блеск меняется на 10^m. Соответственно, светимость звезды меняется в $(10^2)^2 = 10^4$ раз.

Понятно, что чем больше площадь поверхности звезды, тем больше ее светимость. Площадь поверхности пропорциональна радиусу в квадрате, значит, радиус при прочих равных должен меняться в 100 раз. Таким образом заключаем, что либо максимальный радиус звезды равен 50000 радиусов Солнца (т.е. около 250 а.е.), либо минимальный радиус звезды равен 5 радиусов Солнца. Первый вариант совершенно нереалистичен, так как это слишком много даже для красных сверхгигантов, следовательно, правилен второй вариант.

Будем считать, что звезда половину времени уменьшается в размерах, а половину времени — расширяется. Тогда достаточно поделить 495 радиусов Солнца на 204.5 дня и получить ответ:

$$v = \frac{495}{204.5} = 2.4 \text{ радиуса Солнца/сутки} \approx 20 \text{ км/с}.$$

В.В.Григорьев

Задача № 62

Кислородная атмосфера Реи содержит $(2.5 \pm 0.5) \times 10^{29}$ молекул. Оцените давление этой атмосферы у поверхности Реи, если радиус Реи равен 764 км, а ее средняя плотность равна 1.24 г/см^3.

Решение. Давление, создаваемое атмосферой у поверхности, можно получить, если вычислить силу тяжести, действующую на столб газа в атмосфере с единичной площадью основания. Поскольку характерные высоты атмосфер («высота однородной атмосферы») всегда сравнительно невелики (в противном случае атмосфера очень быстро улетит от объекта, рядом с которым находилась), можно считать, что гравитационное ускорение, действующее на все молекулы атмосферы, примерно одинаково и совпадает с ускорением свободного падения на поверхности Реи. Тогда искомое давление можно выразить как

$$p = \frac{M_a g}{4\pi R^2},$$

где M_a — масса атмосферы, g — гравитационное ускорение на поверхности (вращение Реи, как у всех крупных спутников планет в Солнечной системе, синхронизировано с обращением вокруг планеты, так что «центробежной» частью ускорения свободного падения можно пренебречь), R — радиус Реи.

Отсюда

$$p = \frac{M_a G M}{4\pi R^4} = \frac{NmG4\pi R^3 \rho}{3 \cdot 4\pi R^4} = \frac{NmG\rho}{3R} = \frac{N\mu G\rho}{3RN_A}.$$

Тут G — гравитационная постоянная, M — масса Реи, ρ — ее средняя плотность, m — масса молекулы кислорода, $\mu = 32$ г/моль — молярная масса молекулярного кислорода и $N_A = 6 \cdot 10^{23}$/моль — число Авогадро.

Осталось вычислить ответ, не забыв при этом, что по крайней мере один из сомножителей (число молекул кислорода в атмосфере Реи) известен нам с очень плохой точностью, возможная ошибка составляет 20% величины, а это означает, что более одной значащей цифры в вычислениях нам заведомо не потребуется. В итоге получим 5×10^{-10} Па.

А.В.Веселова

Задача № 63

Известно, что за последние 20 лет моменты прохождения Землей перигелия своей орбиты менялись в пределах от 4 часов 2 января до 11 часов 5 января (по московскому времени). А в каком примерно году в последний раз это событие могло случиться в новогоднюю полночь по тому же времени? Период вращения линии апсид орбиты Земли составляет около 112 тыс. лет.

Решение. Для начала попробуем понять причину столь сильного изменения момента прохождения перигелия за последние 20 лет. Первый же напрашивающийся ответ — високосные годы (и их отсутствие), смещающие момент максимум на 18 часов. Однако разброс моментов явно больше, и очевидно, что линия апсид (соединяющая перицентр и апоцентр орбиты) для орбиты Земли не меняет свое положение с такой скоростью (тем более что из условия не следует, что дата/время прохождения перигелия систематически уменьшались или увеличивались), следовательно, причина в чем-то другом. Единственным фактором, который может мешать Земле летать строго по эллиптической орбите на таких масштабах времени, является Луна, и именно из-за нее Земля подходит на минимальное расстояние к Солнцу не очень регулярно. Однако одинаковое взаимное расположение Земли, Солнца и Луны повторяется с периодом около 18 лет («сарос»), поэтому разброс за 20 лет — это максимум того, что может обеспечить Луна, и этого фактора очевидно не хватает для нужного нам результата. Нужно что-то другое, систематически меняющее момент прохождения перигелия.

Следующий по значимости фактор — прецессия оси вращения Земли. Из-за нее тропический год короче, чем сидерический год (период обращения Земли вокруг Солнца), недаром слово «прецессия» означает «предварение» (равноденствий). Поэтому если бы средний период между прохождениями перигелия (аномалистический год) совпадал бы с сидерическим годом, то момент каждого очередного прохождения перигелия в среднем смещался бы на все более позднюю дату/время по нашей школе времени, привязанной к тропическому году. Величину смещения за год можно оценить, вспомнив, что период прецессии равен около 26 тысяч лет, или используя т.н. «постоянную прецессии» (около $50''$/год). Смещение за год составит $\approx 1/(26 \cdot 10^3)$ года, это около 20 минут времени.

Второй из нужных нам факторов — указанное в условии вращение линии апсид. Оно происходит в том же направлении, что и обращение Земли вокруг Солнца, поэтому аномалистический год на самом деле несколько длиннее сидерического. Как следствие, этот эффект складывается с предыдущим, хотя он и в несколько раз меньше. Его легче всего оценить, зная, что период вращения линии апсид в $112/26 = 4.3$ раза больше, чем период прецессии, соответственно, смещение, связанное с этим эффектом, в то же число раз меньше и составляет около $20/4.3 \approx 5$ минут. В итоге при смещении на один год в прошлое момент прохождения перигелия приближается примерно на 25 минут к новогодней полуночи.

На этом физически значимые эффекты заканчиваются (все остальное существенно слабее), но возникает дополнительная неприятность, о которой тоже следовало бы подумать. Все выкладки выше получены в предположении, что тропический и календарный год — это одно и то же. Однако на самом деле это не так, поскольку средняя продолжительность календарного года даже в григорианском календаре на достаточно больших интервалах времени (до века, а иногда — и двух) больше продолжительности тропического. Разница, как известно, составляет около 3 суток за 400 лет, поэтому такой календарный год в среднем на $3 \cdot 24 \cdot 60/400 = 11$ минут длиннее тропического, и этот фактор работает в другую сторону, чем предыдущие (хотя и не компенсирует их полностью). Поэтому в среднем смещение момента прохождения перигелия составляет всего $25 - 11 = 14$ минут в год.

Вычислим результат. Самый близкий за последние 20 лет момент прохождения перигелия отстоял от новогодней полуночи на 28 часов, т.е. 1680 минут, $1680/14 = 120$, следовательно, подобное событие могло произойти около 120 лет назад плюс-минус 20 лет. Как раз тогда григорианский календарный год в последний (пока) раз отличался от юлианского, так что оценка средней продолжительности календарного года была вполне правомерной.

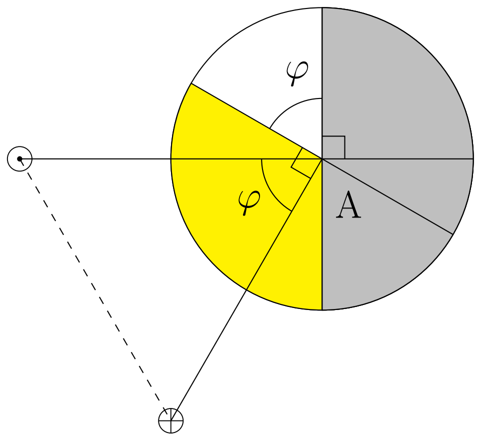
Есть, впрочем, еще одно обстоятельство, которое, если относиться к понятию «московское время» буквально, добавляет сложностей в получении ответа: можно задуматься над тем, что такое «московское время» более 100 лет тому назад. Если вспомнить, что 102 года назад Россия перешла с юлианского календаря на григорианский, то можно отметить, что с большой вероятностью при этом момент прохождения перигелия, не успев попасть на новогоднюю ночь, «проскочил» на декабрь, и в следующий раз попадет на новогоднюю ночь очень не скоро (причем возникнет вопрос, где эта ночь будет располагаться — начало года было перенесено на 1 января Петром I, до этого год начинался 1 сентября...). С учетом этого обстоятельства ответ становится таким: данное событие могло произойти в новогоднюю полночь, начиная с 1919 года и до примерно 1975 года. Нижняя граница обусловлена средней оценкой и устройством календаря (появлявшееся по дороге декретное время мало что изменит), а верхняя возникнет при максимальном везении — когда за счет удачного расположения високосных лет 18 часов из необходимого сдвига в 28 часов будут убраны и останется сдвинуться только на 10 часов, что соответствует $10 \cdot 60/14 \approx 43$ годам.

П.А.Тараканов

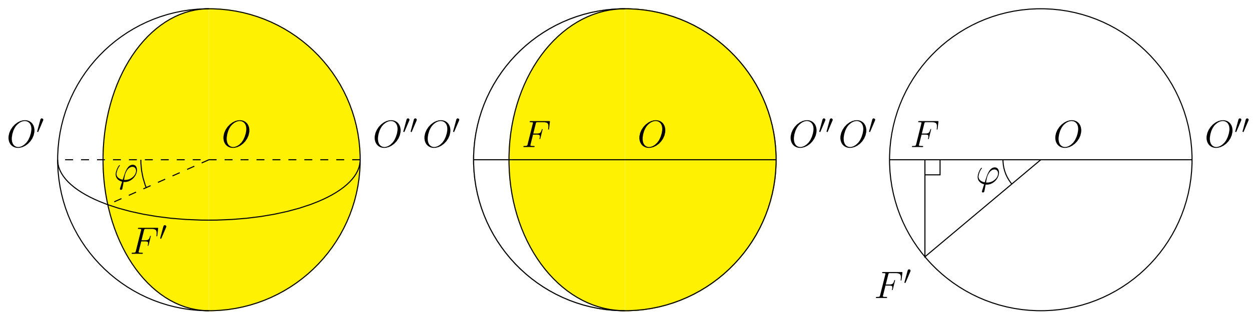
Задача № 64

Абсолютной звездной величиной объекта Солнечной системы называется видимая величина, которую имел бы объект, если бы он находился на расстоянии 1 а.е. и от Солнца, и от наблюдателя и имел полную фазу. Предположим, что в некоторый момент шарообразный астероид оказался на расстоянии 1 а.е. от Солнца и от Земли. На сколько звездных величин будут отличаться его видимая и абсолютная звездные величины? Считайте, что блеск астероида прямо пропорционален площади освещенной части диска.

Решение. Так как астероид находится на 1 а.е. как от Солнца, так и от Земли, а Земля также находится на расстоянии 1 а.е. от Солнца, то Солнце, Земля и астероид образуют равносторонний треугольник, все углы в котором равны 60°. Следовательно, и т.н. фазовый угол (угол при астероиде) равен $\varphi = 60°$. Для определения фазы Φ (отношения освещенной части диаметра к полному диаметру) через фазовый угол можно воспользоваться готовой формулой, а можно и вывести эту формулу, например, так, как показано ниже (астероид A для наглядности сильно увеличен).



Угол, стягивающий сектор, закрашенный белым на рисунке, а, следовательно, и двугранный угол, «вырезающий» часть площади, освещенную Солнцем и не видимую с Земли, равен φ (см. ниже рис. а).



а б в

При проецировании изображения астероида на небесную сферу получится «овал», изображенный на рис. б, наибольшая ширина освещенной части которого $O''F$ определяется как $OO'' + OF$ (рис. в). $OO'' = OO' = OF' = R_A$, где R_A — радиус изображения астероида на небе.

$$O''F = OO'' + OF = OO'' + OF' \cos\varphi = R_A(1 + \cos\varphi).$$

Фаза Φ — это отношение освещенной части диаметра к полному диаметру, следовательно,

$$\Phi = \frac{R_A(1+\cos\varphi)}{2R_A} = \frac{1+\cos\varphi}{2}.$$

Таким образом, фаза астероида в момент наблюдения равна $\Phi = (1+\cos 60^\circ)/2 = 0.75$.

Согласно условию, блеск астероида прямо пропорционален площади освещенной части диска. При фазе Φ отношение площади освещенной части к полной площади диска равно Φ. Этим фактом можно воспользоваться как известным, но можно и доказать его.

Из рис. б очевидно, что площадь «овала», который представляет собой изображение освещенной части диска астероида, видимой с Земли, равна сумме половины площади круга (полного диска) и половины площади эллипса, большой полуосью которого является радиус изображения астероида, а малой полуосью отрезок OF. Следовательно, отношение площади «овала» к полной площади диска равно

$$\frac{1/2\,\pi R_A^2 + 1/2\,\pi R_A \cdot OF}{\pi R_A^2} = \frac{R_A^2 + R_A \cdot R_A\cos\varphi}{2R_A^2} = \frac{1+\cos\varphi}{2} = \Phi.$$

Следовательно, отношение блеска освещенной части астероида в фазе 0.75, соответствующего видимой звездной величине m_v, к блеску астероида в полной фазе, соответствующего абсолютной звездной величине m_a, равно 0.75. Таким образом, звездные величины отличаются на

$$\Delta m = m_v - m_a = -2.5\lg 0.75.$$

Осталось разобраться с тем, как вычислить логарифм без калькулятора. Сделать это можно несколькими способами, приведем некоторые из них.

Во-первых, сразу отметим, что звездные величины — это на самом деле логарифмы освещенности (с точностью до константы) по основанию, равному $\sqrt[5]{100} = 10^{2/5} \approx 2.512\ldots$. Поэтому можно записать

$$\Delta m = -2.5\lg 0.75 = -\log_{2.512} 0.75 = -\log_{2.512}\frac{7.5}{10} = \log_{2.512} 10 - \log_{2.512} 7.5 =$$
$$= 2.5 - \log_{2.512}(3\cdot 2.5) \approx 2.5 - 2 = 0.5.$$

Более точный ответ можно получить, заметив, что $\sqrt[5]{100} \approx e = 2.718\ldots$, поэтому

$$\Delta m \approx -\ln 0.75 = -\ln(1-0.25) \approx 0.25,$$

так как $\ln(1+x) \approx x$ для $|x| \ll 1$.

Этот результат можно еще улучшить, если аккуратно перейти от основания логарифма для шкалы звездных величин к основанию натуральных логарифмов, а не просто приравнять их. Переходный коэффициент равен $1/\ln\sqrt[5]{100} = 1.086\ldots$, и это число настолько часто встречается в разнообразных вычислениях, связанных с звездными величинами, что его полезно запомнить (впрочем, достаточно представлять, что это примерно 1.1, что легко можно вычислить уже изложенным выше способом). В интересующем нас случае уже полученный ответ нужно будет умножить на этот коэффициент (завысив основание логарифма, мы занизили его значение), в результате получится

$$\Delta m \approx 0.25 \cdot 1.1 = 0.275 \approx 0^m.3.$$

Добравшись до калькулятора и вычислив «точное» значение, мы получим $0^m.312\ldots$, так что наши вычисления логарифма в конечном счете оказались весьма неплохи — итоговая погрешность оказывается меньше $0^m.04$.

М.В.Костина

Задача № 65

На поверхности Луны находится модуль, готовый ко взлету для стыковки с основным кораблем на круговой орбите (запас топлива ограничен). На горизонте появился главный корабль. Через какое время необходимо лунному модулю стартовать, в каком направлении и с какой скоростью, чтобы добраться до главного корабля и состыковаться с ним, потратив как можно меньше топлива? Все импульсы считать мгновенными. Высота орбиты основного корабля над поверхностью Луны равна 70 км.

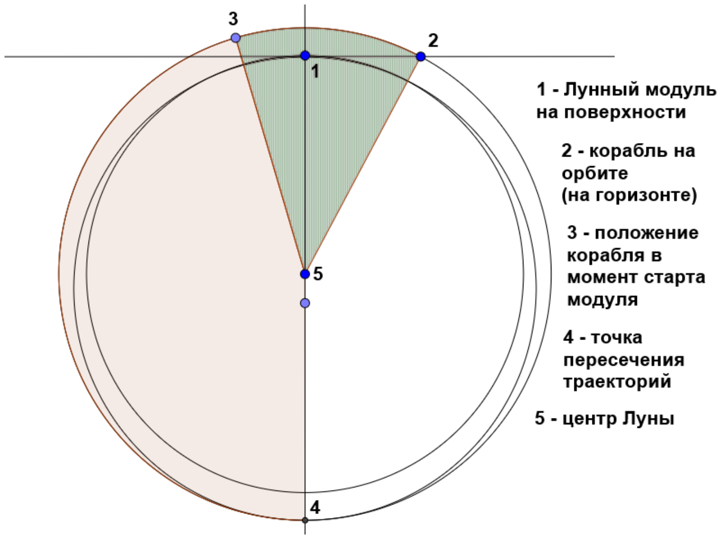
Решение. Наиболее выгодная траектория взлета — сразу поднять апоцентр орбиты до высоты орбиты основного корабля (аналогично ситуации с Гомановским эллипсом). В этом случае когда модуль будет в апоцентре, основной корабль окажется там же (конечно же, для успешной и безопасной стыковки лунный модуль должен будет в апоцентре разогнаться до первой космической скорости). Время, которое пройдет между взлетом и сближением — половина периода обращения по траектории взлета (эллипс с апоцентром на высоте орбиты корабля и перицентром на поверхности).

Для начала найдем период обращения основного корабля на орбите:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2(R+h)^3}{GM}} = \sqrt{\frac{39.48 \cdot (1.81 \cdot 10^6)^3}{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 7.36 \cdot 10^{22}}} \approx 6.9 \cdot 10^3 \text{ с}$$

Сразу заметим, что это в несколько сотен раз меньше, чем период обращения Луны вокруг своей оси, поэтому вращением Луны можно пренебречь. Теперь найдем тот промежуток времени, за который лунный модуль достигнет точки рандеву (см. рисунок). Считая, что разгон был мгновенным, найдем время полета от поверхности до точки рандеву:

$$\Delta t_1 = \sqrt{\frac{\pi^2(R+\frac{h}{2})^3}{GM}} = \sqrt{\frac{9.87 \cdot (1.77 \cdot 10^6)^3}{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 7.36 \cdot 10^{22}}} \approx 3.35 \cdot 10^3 \text{ с}$$



Тогда $\angle 354$ равен $\frac{\Delta t_1}{T} \approx 175°$. Время, за которое основной корабль переместится из точки 2 в точку 3, и есть промежуток времени, через который после появления корабля на горизонте модулю нужно стартовать.

$$\angle 152 = \arccos\frac{R}{R+h} \approx 16°; \angle 351 = 180° - 175° = 5°$$
$$\angle 352 = \angle 351 + \angle 152 = 16° + 5° = 21°$$

И наконец получим ответ на первый вопрос задачи:

$$\Delta t_0 = \frac{\angle 352}{360°} T \approx 4 \cdot 10^2 \text{ с} \approx 7 \text{ мин}$$

Осталось лишь найти скорость старта — скорость в перицентре орбиты, но прежде найдем эксцентриситет орбиты:

$$e = \frac{r_a}{a} - 1 = \frac{R+h}{R+\frac{h}{2}} - 1 \approx 2 \cdot 10^{-2}$$

$$v_{start} = \sqrt{\frac{GM(1+e)}{a(1-e)}} = \sqrt{\frac{GM(1+e)}{(R+\frac{h}{2})(1-e)}} \approx 1.7 \cdot 10^3 \text{ м/с}$$

В.А.Дмитриев

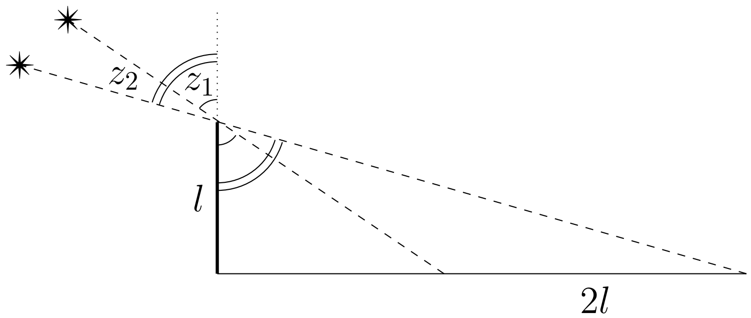
Задача № 66

Гномон (палочка в центре) горизонтальных солнечных часов расположен вертикально. Длина полуденной тени гномона в течение года изменяется на две длины гномона. Определите широту, на которой находятся солнечные часы.

Решение. Сразу же заметим, что приэкваториальные области (в пределах тропиков, где Солнце бывает в зените) нас не интересуют. В них минимальная длина тени равна нулю, поэтому максимальная равна двум длинам гномона. Это означает, что в день, когда длина тени окажется максимальной, Солнце поднимается над горизонтом на высоту, тангенс которой не превосходит 1/2 (а соответствующая высота оказывается меньше по крайней мере 30°). В приэкваториальных областях подобное невозможно. Также нас не интересуют и и приполярные области (в этом случае во время зимнего солнцестояния будет полярная ночь, а максимальная длина тени может оказаться сколь угодно большой).

Будем решать задачу для какого-нибудь одного полушария (например, северного) с учетом того, что в южном полушарии должен будет получиться «парный» ответ — с такой же по модулю, но противоположной по знаку широтой.

Как известно (или легко выводится), высота объекта в верхней кульминации равна $h = 90° - \varphi + \delta$, где φ — широта места наблюдения, а δ — склонение объекта (случаи кульминации к северу от зенита и т.п. по уже указанным выше причинам нас не интересуют). Тогда зенитное расстояние в верхней кульминации будет равно $z = 90° - h = \varphi - \delta$. Склонение Солнца в течение года меняется в пределах $-\varepsilon \leqslant \delta_\odot \leqslant \varepsilon$, где $\varepsilon = 23°.4$, поэтому минимальная и максимальная длина полуденной тени будут достигаться при зенитных расстояниях Солнца, равных $z_1 = \varphi - \varepsilon$ и $z_2 = \varphi + \varepsilon$ соответственно.



Построим чертеж и запишем соотношение из условия задачи:

$$l \operatorname{tg} z_2 - l \operatorname{tg} z_1 = 2l.$$

Длина гномона l сразу же сокращается и в дальнейшем решении не участвует, поэтому задача сводится к решению уравнения

$$\operatorname{tg}(\varphi + \varepsilon) - \operatorname{tg}(\varphi - \varepsilon) = 2$$

относительно φ.

Вспоминая, чему равна разность тангенсов, записываем уравнение в виде

$$\frac{\sin(\varphi + \varepsilon - (\varphi - \varepsilon))}{\cos(\varphi + \varepsilon) \cdot \cos(\varphi - \varepsilon)} = 2,$$

откуда (раскладывая косинусы суммы и разности)

$$\frac{\sin 2\varepsilon}{2} = (\cos\varphi\cdot\cos\varepsilon - \sin\varphi\cdot\sin\varepsilon)\cdot(\cos\varphi\cdot\cos\varepsilon + \sin\varphi\cdot\sin\varepsilon)$$

и

$$\frac{\sin 2\varepsilon}{2} = \cos^2\varphi\cdot\cos^2\varepsilon - \sin^2\varphi\cdot\sin^2\varepsilon.$$

Преобразуя правую часть равенства, получаем

$$\frac{\sin 2\varepsilon}{2} = \cos^2\varphi\cdot\cos^2\varepsilon - \left(1-\cos^2\varphi\right)\cdot\sin^2\varepsilon = \cos^2\varphi - \sin^2\varepsilon,$$

откуда

$$\cos\varphi = \sqrt{\sin^2\varepsilon + \frac{\sin 2\varepsilon}{2}}.$$

Теперь можно заняться подсчетами. $\sin\varepsilon$ можно достаточно точно оценить, считая, что синус для углов от 0° до 30° линейно зависит от угла, но эта величина настолько часто встречается в астрономических задачах, что многие, наверное, сразу вспомнят оценку $\sin\varepsilon \approx 0.4$. Поскольку $2\varepsilon = 46^\circ.8 \approx 45^\circ$, то можно считать, что $\sin 2\varepsilon \approx \sqrt{2}/2 \approx 0.7$, однако тут удобнее будет воспользоваться в действительности даже более точной оценкой $\sin 2\varepsilon \approx 0.72$:

$$\cos\varphi \approx \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{72}{100}} = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{5}.$$

Извлекая корень с точностью до второй значащей цифры (это можно сделать даже подбором), получаем, что $\sqrt{13} \approx 3.6$, поэтому $\cos\varphi \approx 0.72$, а это означает, что $\varphi \approx 45^\circ$ или чуть меньше (в действительности — 44°). Следовательно, солнечные часы могут находиться либо на 44° северной, либо на 44° южной широты.

Заметим, что результат можно получить и многими другими способами. Например, можно было бы начать с грубой оценки широты (построив чертежи для 3–4 вариантов и убедившись, что ответ должен быть близким к 45°), а затем, записав искомую широту как $\varphi = 45^\circ + \Delta\varphi$, вычислить малую поправку $\Delta\varphi$. Подобный подход позволяет получить весьма точный результат ($43^\circ.73$) даже без использования вычислительной техники.

С.В.Васильев, П.А.Тараканов

Задача № 67

В 2003 году у пульсара XTE J1807-294 (масса 1.4 масс Солнца) был обнаружен спутник с периодом обращения 0.03 суток и массой 14.5 масс Юпитера. Что можно сказать про вещество, из которого состоит спутник? Обоснуйте свою точку зрения.

Решение. Заметим, что объект такой массы мог бы быть бурым (коричневым) карликом, так как согласно современным моделям минимальная масса объекта, в котором могут происходить нерегулярные термоядерные реакции — 13 масс Юпитера. Но поскольку спутник обращается вокруг пульсара, то, вероятно, система пережила вспышку сверхновой, и бурый карлик, скорее всего, не вынес бы подобных пертурбаций.

Ввиду малости периода обращения T можно сразу заметить, что среднее расстояние между спутником и пульсаром будет крайне мало. При малых средних расстояниях орбиты достаточно быстро становятся круговыми из-за приливного взаимодействия, поэтому можно смело считать, что орбита спутника круговая с радиусом a. Рассчитаем радиус орбиты спутника по третьему закону Кеплера (все величины подставляются в СИ, масса Солнца равна 2×10^{30} кг):

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)} \qquad \Rightarrow$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{G(M+m)T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{7 \times 10^{-11} \cdot 1.4 \cdot 2 \times 10^{30} \cdot (0.03 \cdot 86400)^2}{4\pi^2}} \approx 3 \times 10^8 \text{ м},$$

где масса пульсара M, масса спутника — m, G — гравитационная постоянная. Результат получается очень малым, хотя он все равно больше радиуса пульсара (характерный радиус пульсаров порядка 10 км).

Чем может быть чревата такая близость спутника к пульсару? Например тем, что спутнику может быть «не очень комфортно» существовать так близко. Однако, спутник довольно долго обращается вокруг пульсара, значит, он все еще целый.

Для понимания природы вещества, из которого состоит спутник, необходимо оценить его плотность. Для этого нужно оценить его радиус, т.к. масса нам известна. Сделать это можно несколькими путями, которые приведут к ответам с разной степенью точности.

Для самой простой оценки максимального размера спутника r можно рассчитать, на каком расстоянии от центра спутника гравитационное притяжение пульсара и спутника сравняются, если последний считать материальной точкой:

$$\frac{GM}{(a-r)^2} = \frac{Gm}{r^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{M}{r^2(a/r-1)^2} = \frac{m}{r^2} \qquad \Rightarrow$$

$$r = \frac{a}{\sqrt{M/m}+1} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{1.4/0.0145}+1} = \frac{3 \times 10^8}{11} \approx 3 \times 10^7 \text{ м} \approx 0.5\ R_{♃},$$

где $R_{♃} = 7 \times 10^4$ км — радиус Юпитера.

Существенно точнее получатся расчеты в случае учета вращения системы (период достаточно малый, поэтому этот эффект значим) и вычислить положение точки Лагранжа L_1. В этом случае в выражении выше в правой части должен появиться член, отвечающий за центробежное ускорение $\omega^2(a-r)$, где

$\omega = 2\pi/T = \sqrt{G(M+m)/r^3}$. Можно заметить, что в этом случае оценка радиуса спутника будет больше, чем без учета вращения, но все равно будут меньше радиуса Юпитера.

С учетом того, что объект по размерам в два раза меньше, чем Юпитер, а по массе в 14.5 раз больше, это дает оценку плотности в $8 \cdot 14.5 = 116$ раз больше, чем у Юпитера, то есть около 160 г/см^3. Если же аккуратно учитывать приливные силы и предел на разрыв вещества спутника, то оценка плотности окажется еще больше — примерно 250 г/см^3 (см. работу *https://arxiv.org/pdf/1908.11191.pdf*, по мотивам которой появилась эта задача).

Такая большая средняя плотность не соответствует обычным планетам (как планетам-гигантам, так и «обычным» каменным) и их спутникам, чрезмерно велика она и для бурых карликов и обычных звезд. Так что остается лишь либо вырожденное вещество (фактически кусочек белого карлика или нейтронной звезды), либо более экзотическая кварковая материя. Заметим, что в этом случае размер такого спутника будет существенно меньше сделанных оценок, но определить его из имеющихся данных пока не удалось.

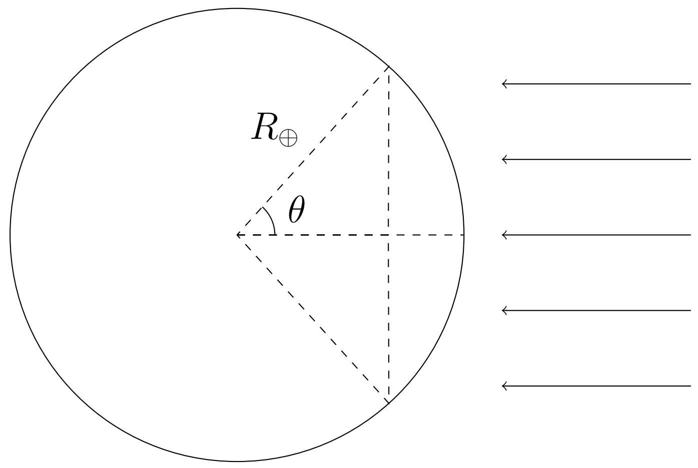
В.В.Григорьев

Задача № 68

Гравитационные телескопы LIGO в Ливингстоне ($30°33'$ с.ш., $90°47'$ з.д.) и Хэнфорде ($46°27'$ с.ш., $119°25'$ з.д.), а также гравитационный телескоп VIRGO ($43°38'$ с.ш., $10°30'$ в.д.) 31 декабря в 22^h00^m UT (Всемирного времени) зарегистрировали гравитационный сигнал, причем моменты регистрации на всех трех телескопах отличались не более чем на $3 \cdot 10^{-3}$ секунды. Затем в течение получаса в Специальной Астрофизической обсерватории РАН ($43°40'$ с.ш., $41°26'$ в.д.) было зарегистрировано оптическое послесвечение гамма-всплеска, связанного с гравитационным сигналом. Определите примерные экваториальные координаты источника гравитационного сигнала.

Решение. Поскольку гравитационные волны распространяются со скоростью света, одновременная их регистрация на всех трех телескопах означает, что источник сигнала находился на одном и том же расстоянии от каждого из детекторов. Поскольку источник находится очень далеко, можно переформулировать это иначе — направление на источник перпендикулярно плоскости, проходящей через все три телескопа. В принципе, после этого остается лишь чисто техническая деятельность: перейти от географических координат телескопов в некоторую декартову систему координат, найти плоскость, проходящую через телескопы, найти перпендикуляр к ней, перевести полученное направление обратно в сферические координаты (или сразу найти точку на поверхности Земли, расстояние до которой от каждого из телескопов будет одинаковым — в этой точке источник гравитационных волн будет находиться в зените или в надире)...но это явно достаточно длительное и не очень легкое занятие. Поэтому начнем с более простого вопроса: с какой точностью имеющиеся у нас данные позволяют получить ответ?

Выполнить оценку погрешности результата можно многими способами, приведем один из них.



Построим чертеж и найдем центральный угол θ такой, что гравитационные телескопы, находящиеся в соответствующих точках поверхности, зарегистрируют сигнал на время τ позже, чем телескоп, для которого источник находится в зените. По построению для таких точек $c \cdot \tau = R_\oplus - R_\oplus \cos\theta = R_\oplus \cdot (1 - \cos\theta)$, где $R_\oplus$ — радиус Земли, c — скорость света.

Отсюда получаем

$$\cos\theta = 1 - \frac{c \cdot \tau}{R_\oplus} = 1 - \frac{3 \cdot 10^5\ \text{км/с} \times 3 \cdot 10^{-3}\ \text{с}}{6.4 \cdot 10^3\ \text{км}} = 1 - \frac{9}{64} \approx 0.86.$$

Отсюда можно оценить угол θ. Достаточной будет очень грубая оценка, поэтому можно просто заметить, что полученное число близко к $\sqrt{3}/2$, а это значит, что $\theta \approx 30^\circ$. Тем самым мы можем сделать важный вывод: склонение источника сигнала имеет смысл определять с погрешностью $\pm 30^\circ$, а прямое восхождение — *не лучше чем* $\pm 2^h$ (поскольку в околополярных областях неба круг с угловым размером 30° будет занимать существенно больший диапазон значений по прямому восхождению).

Теперь остается сделать немногое. Посмотрев на координаты гравитационных телескопов, можно заметить, что все три телескопа находятся примерно на одной и той же широте (максимальная разница не превышает 15°), а это означает, что точки, в которых источник гравитационных волн находился в зените или надире — это географические полюса Земли (а сам источник, соответственно, находится в одном из полюсов мира). Поскольку при этом оптическое послесвечение наблюдалось в обсерватории, находящейся в северном полушарии Земли, источник находился в окрестностях северного полюса мира (оптическое излучение, в отличие от гравитационных волн, сквозь Землю не проходит).

Чуть более аккуратная попытка учесть, что телескоп в Ливингстоне находится чуть южнее двух других, приведет к смещению точки на поверхности Земли примерно в сторону этого телескопа (или, что точнее, куда-то в район Гренландии, поскольку расстояние по долготе до телескопа VIRGO больше, чем до телескопа в Хэнфорде) примерно на те же 15°–20°, что даст в качестве оценки склонения источника $\delta \approx +70°$. Прямое восхождение в этом случае можно оценить, считая, что точка на поверхности Земли будет находиться западнее гринвичского меридиана на 4^h–6^h, следовательно, полночь в ней наступит через 6–8 часов после момента наблюдения. В новогоднюю ночь местное звездное время обгоняет солнечное примерно на 6^h40^m (если этот факт неизвестен, его легко получить, зная, что обе шкалы времени совпадают в момент осеннего равноденствия, а затем каждый месяц звездное время обгоняет солнечное на 2 часа), поэтому во время регистрации сигнала в точке, в которой источник сигнала находится в зените (и, следовательно, в верхней кульминации) будет примерно 0^h звездного времени. В момент верхней кульминации звездное время совпадает с прямым восхождением кульминирующего объекта, следовательно, прямое восхождение источника сигнала $\alpha \approx 0^h$ (хотя и с очень большой погрешностью).

П.А.Тараканов

Задача № 69

В спектре звезды наблюдается линия поглощения оксида титана. Лабораторная длина волны данной линии равна 5170.7 Å, в центре диска наблюдаемая длина волны равна 5174.1 Å, а на краю диска на экваторе линия имеет длину волны 5174.2 Å. Плотность звезды известна и равна 0.7 г/см^3. Оцените наименьшую возможную светимость данной звезды.

Решение. Светимость пропорциональна площади поверхности звезды, а также ее температуре в степени 4:

$$L = 4\pi^2\sigma R^2 T^4.$$

Поскольку плотность известна, то мы можем определить минимально возможный радиус как такой, при котором скорость вращения звезды равна первой космической скорости на экваторе.

Определим лучевую скорость данной звезды в соответствии с наблюдаемым эффектом Доплера для центра диска:

$$\frac{v}{c} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda} = \frac{5174.1 - 5170.7}{5170.7} \Longrightarrow v = 197 \text{ км/с}.$$

Край диска удаляется от наблюдателя со скоростью

$$v_l = \frac{5174.2 - 5170.7}{5170.7} = 203 \text{ км/с}.$$

Скорость вращения звезды тогда равна $203 - 197 = 6$ км/с. Будем считать, что в предельном случае эта скорость сравнима с первой космической скоростью на экваторе:

$$v_l = v_I = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot \frac{G\pi R^3 \rho}{R}} = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot G\pi\rho} \cdot R,$$

отсюда оценка радиуса

$$R = \frac{v_I}{\sqrt{\frac{4}{3} \cdot G\pi\rho}} = \frac{6 \cdot 10^3}{\sqrt{\frac{4}{3} \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 3.14 \cdot 0.7 \cdot 10^3}} = 1.4 \cdot 10^4 \text{ км}.$$

Можно отметить, что эта оценка радиуса заведомо сильно занижена (не только потому, что мы рассматривали звезду на пороге устойчивости, но и просто из тех соображений, что радиусы звезд подобного типа (см. ниже) не бывают настолько малыми).

Оценим температуру звезды. Поскольку в ее спектре есть линии поглощения оксида титана, то эта звезда принадлежит спектральному классу M, тогда минимальную температуру можно считать равной $2 \cdot 10^3$ K. Теперь оценим минимальную светимость:

$$L = 4\pi\sigma R^2 T^4 = 4 \cdot 3.14 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot (1.4 \cdot 10^4 \cdot 10^3)^2 (2 \cdot 10^3)^4 =$$
$$= 2.2 \cdot 10^{21} \text{ Вт} \sim \cdot 10^{-5} L_{\odot}.$$

А.В.Веселова

Задача № 70

Протопланетный диск — достаточно тонкий газовый диск, вращающийся вокруг молодой звезды. Считая диск находящимся в термодинамическом и гидростатическом равновесии, найдите зависимость плотности вещества от высоты над плоскостью симметрии диска для радиуса r от звезды, отсчитываемого в плоскости симметрии. Масса звезды M, температура диска T и молярная масса газа диска μ известны.

Решение. Так как диск находится в равновесии, то можно записать уравнение гидростатического равновесия, в котором градиент давления газа будет уравновешивать силу тяжести. Выделим маленький цилиндрик газа массой dm, шириной основания ds и длиной dl на радиусе r и высоте z и запишем условие равновесия:

$$0 = (p + dp)\, ds - p\, ds + \frac{GM\, dm}{r^2 + z^2} = dp\, ds + \frac{GM\rho(z)\, dl\, ds}{r^2 + z^2},$$

где p — давление газа на одно основание цилиндра на расстоянии l (против силы гравитации), $p+dp$ — давление на другую стенку цилиндра (сонаправлено с силой гравитации). Перепишем это равенство:

$$\frac{dp}{dl} = -\frac{GM\rho(z)}{r^2 + z^2}.$$

Здесь $\frac{dp}{dl}$ - градиент давления, направленный вдоль силы тяжести. Спроецировав на вертикальную ось z, получим

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{GM\rho(z)z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Запишем давление идеального газа с помощью уравнения состояния $p = \frac{\rho RT}{\mu}$ и подставим в последнее уравнение. Получим:

$$\frac{RT}{\mu}\frac{d\rho}{dz} = -\frac{GM\rho(z)z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

или

$$\frac{RT}{\mu GM}\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{zdz}{(r^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Проинтегрируем обе части получившегося равенства:

$$\frac{RT}{\mu GM}\ln\frac{\rho}{\rho_0} = -\int_0^z \frac{z'dz'}{(r^2 + z'^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2}\int_0^z \frac{d(z'^2 + r^2)}{(r^2 + z'^2)^{3/2}} = -\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}}\right).$$

Тогда искомая зависимость имеет следующий вид:

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{\mu GM}{RT}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}}\right]\right)$$

И.Д.Маркозов

Задача № 71

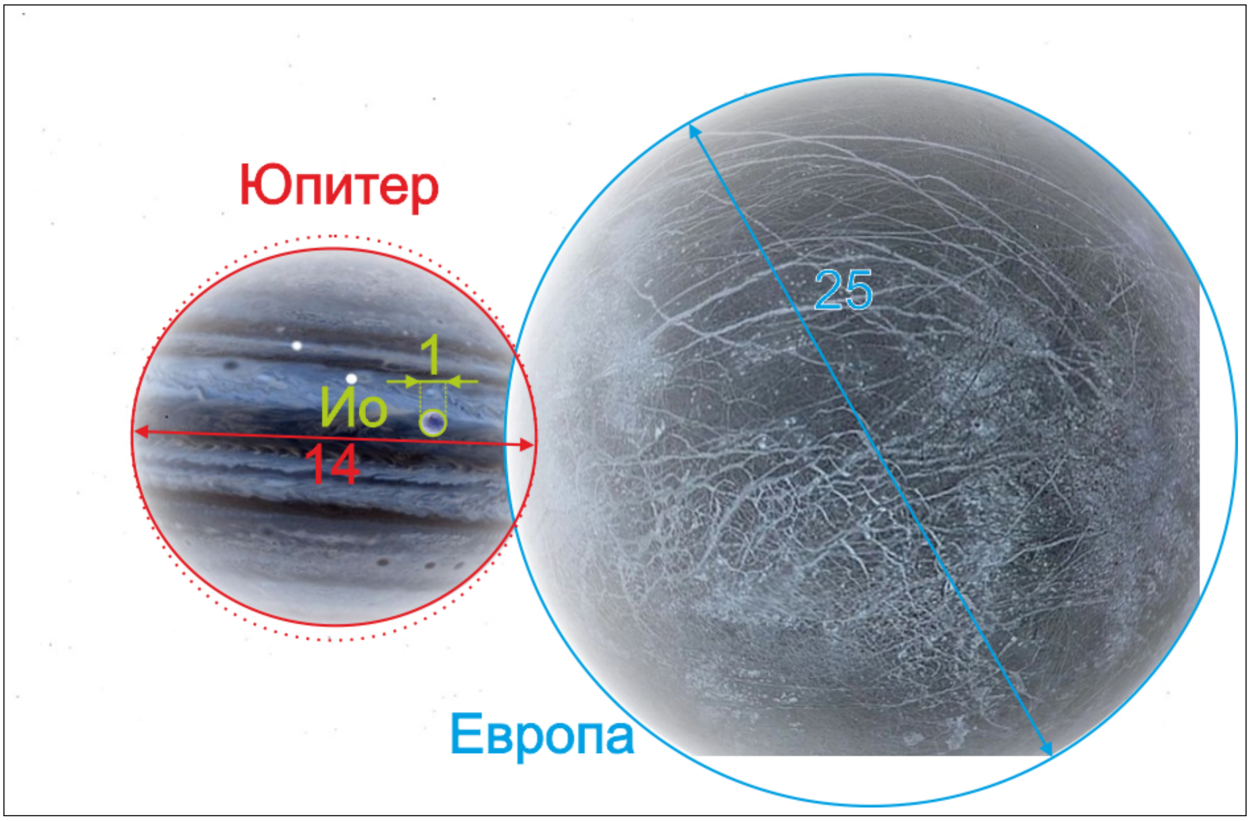
Вам дана фотография (негатив), сделанная космическим аппаратом, на которой запечатлен Юпитер и два его спутника: Европа (ближе) и Ио (дальше). На Юпитере видны тени, отбрасываемые спутниками. Оцените расстояние между космическим аппаратом и Европой, а также между Европой и Ио.

Известно, что Ио находится на расстоянии 420 тысяч километров от центра Юпитера. Экваториальный радиус Юпитера в 11 раз больше радиуса Земли, радиусы Европы и Ио можно считать одинаковыми и равными 1/4 радиуса Земли.

Решение. Из условия задачи следует, что линейный диаметр Юпитера в 44 раза больше, чем линейный диаметр Ио или Европы, что можно записать как $d_J = 44d_I$, $d_I = d_E$. Однако космический аппарат (КА) находится на некотором расстоянии от рассматриваемых в задаче объектов, т.е. «видит» их под некоторыми углами. Соответственно, по фотографии мы можем измерить лишь угловые диаметры планеты и спутников.

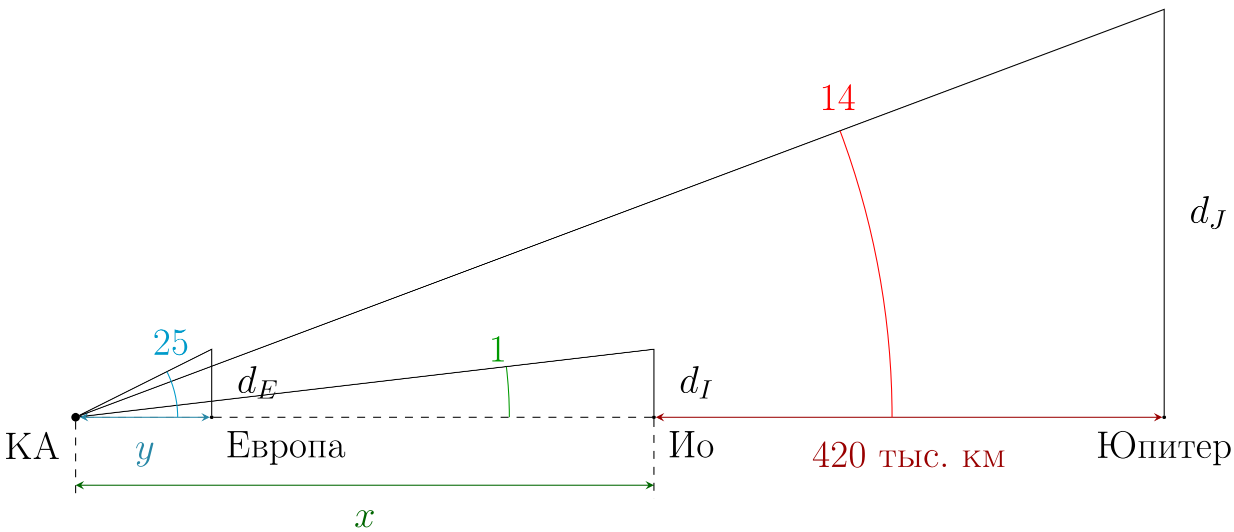
На фото хорошо видно полярное сжатие Юпитера (из-за быстрого вращения вокруг своей оси он сплюснут у полюсов), поэтому для измерения экваториального диаметра Юпитер необходимо «дорисовать». Если измерять линейкой полярный радиус Юпитера и считать его равным экваториальному, то это повлечет небольшие ошибки в определении расстояний.

Также необходимо измерить диаметры спутников. С Ио проблем не возникает: он достаточно отчетливо выделяется на фоне Юпитера, а вот с Европой есть небольшая загвоздка. Спутник освещен Солнцем справа, а слева виднеется неосвещенная часть, однако поскольку Европа загораживает Юпитер, то ее левая граница видна отчетливо. Но правый край Европы не попал в поле зрения, так что наиболее точным способом измерения диаметра этого спутника является измерение по диагонали, что показано на изображении ниже. Специально обозначено отличие «шарообразного» Юпитера (красная пунктирная окружность) и реального (красный сплошной эллипс).



Примем угловой диаметр Ио за единицу: $\alpha_I = 1$. Тогда угловой экваториальный диаметр Юпитера составит 14 единиц ($\alpha_J = 14\alpha_I$) (полярный — 12.5), а Европы — 25 ($\alpha_E = 25\alpha_I$). Поэтому если при измерениях на картинке из условия размер Ио на фото получился 4 мм, то экваториальный диаметр Юпитера должен получиться 56 мм (полярный, соответственно, 50 мм), а Европы — 100 мм.

Для облегчения расчетов будем считать, что все четыре объекта (Юпитер, спутники и космический аппарат) находятся на одной линии. Тогда можно нарисовать схему (масштаб не соблюден):



Вертикальными линиями обозначены экваториальные диаметры рассматриваемых объектов, горизонтальными — расстояния между этими объектами. Цветными дугами и числами рядом с ними — угловые размеры объектов по отношению к Ио (его угловой размер мы договорились считать за единицу). Для краткости обозначим расстояние от КА до Ио за x, а от КА до Европы — за y и будем измерять эти расстояния также в тысячах километров. Очевидно, что в таком случае расстояние от Европы до Ио будет равно $(x - y)$ тысяч километров.

Будем считать, что все углы на фото небольшие (меньше 30 градусов), поэтому можно пользоваться простым приближением:

$$\frac{\alpha}{57.3^\circ} = \frac{d}{L},$$

где α — угловой диаметр объекта в градусах, 57.3° — количество градусов в одном радиане (можно считать равным 60°), d — линейный диаметр объекта, L — расстояние до объекта. Эту формулу можно использовать как известную в том или ином виде (например, когда речь идет не о градусах, а об угловых секундах, соответственно, в знаменателе будет $206265''$ или $2 \cdot 10^5$ секунд).

Запишем эту пропорцию для Ио и для Юпитера, а также вспомним соотношение между их угловыми размерами:

$$\frac{\alpha_I}{57.3^\circ} = \frac{d_I}{x}; \qquad \frac{\alpha_J}{57.3^\circ} = \frac{d_J}{x + 420}; \qquad \alpha_J = 14\alpha_I.$$

Тогда, выразив из первого и второго уравнений угловые размеры и подставив их в третье соотношение, получим пропорцию:

$$\frac{14 d_I}{x} = \frac{d_J}{x + 420}.$$

Мы помним, что $d_J = 44 d_I$, значит, приходим к окончательному уравнению относительно x и решаем его:

$$\frac{14}{x} = \frac{44}{x + 420} \quad \Rightarrow \quad 14x + 14 \cdot 420 = 44x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{14}{30} \cdot 420 = 196 \text{ тыс. км.}$$

Аналогичным образом составим пропорции для Ио и Европы (их линейные диаметры одинаковы), получим уравнение и решим его:

$$\frac{\alpha_I}{57.3^\circ} = \frac{d_I}{x}; \qquad \frac{\alpha_E}{57.3^\circ} = \frac{d_E}{y}; \quad \Rightarrow \quad \frac{25}{x} = \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x}{25} \approx 7.8 \text{ тыс. км.}$$

Тогда расстояние между Европой и Ио составляет $x - y = 188.2$ тыс. км.

На всякий случай проверим (во время олимпиады этого было делать не обязательно), что приближение малых углов, использованное нами, действительно выполняется. Считая, согласно условию задачи, диаметр Европы равным 3200 км, можно заключить (по той же самой формуле), что ее угловой размер на фото равен $\alpha_E = 23^\circ.5$, что удовлетворяет нашему приближению, поскольку остальные объекты имеют меньшие угловые размеры.

В.В.Григорьев

Задача № 72

Движущейся группой звезд называют группу звезд, обладающих близкими значениями скоростей и движущихся как единое целое в пространстве. В таблице представлены расстояния до объектов (r), экваториальные координаты (α, δ), координаты относительно плоскости Млечного Пути (галактические долгота l и широта b), а также три компоненты пространственной скорости звезд в декартовой системе координат (V_x, V_y, V_z). На основе имеющихся данных выделите движущиеся группы звёзд, а также оцените их характерные пространственные размеры.

Номер	r, пк	α	δ	l	b	V_x, км/с	V_y, км/с	V_z, км/с
1	88.1	$9^h31^m16^s$	$-64°14'27''$	283.2°	−9.3°	−16.08	−30.4	−0.94
2	10.5	$23^h7^m54^s$	$+75°23'15''$	116.4°	+13.9°	8.31	−11.2	−2.415
3	98.0	$8^h5^m3^s$	$-60°38'41''$	277.6°	−10.0°	−19.44	−27.8	−2.22
4	89.1	$21^h14^m32^s$	$+63°35'35''$	101.5°	+10.0°	−7.313	−19.12	4.6
5	18.8	$4^h2^m36^s$	$-0°16'8''$	190.7°	−36.9°	−7.85	−28	−11.79
6	91.7	$9^h20^m37^s$	$-63°10'0''$	281.6°	−9.4°	−16.59	−27.9	−0.70
7	77.2	$9^h48^m19^s$	$-64°3'22''$	284.5°	−8.0°	−16.28	−28.32	−0.903
8	36.5	$3^h33^m13^s$	$+46°15'26''$	149.9°	−8.0°	−6.53	−27.84	−16.57
9	156.8	$23^h18^m38^s$	$+68°06'40''$	114.2°	+6.5°	−10.15	−15.2	−3.7
10	32.3	$14^h47^m33^s$	$-0°16'53''$	353.2°	+51.0°	−9.66	−28.07	−10.7
11	80.4	$9^h10^m58^s$	$-58°58'3''$	277.6°	−7.4°	−1.53	−18.3	0.34
12	87.1	$8^h58^m45^s$	$-69°8'1''$	284.9°	−15.1°	−16.59	−27.5	−1.44
13	174.0	$23^h30^m2^s$	$+58°32'56''$	112.5°	−2.6°	−9.3	−30.1	−1.2
14	24.4	$1^h16^m29^s$	$+42°56'22''$	127.8°	−19.7°	28.2	1.7	7.2
15	22.1	$4^h15^m26^s$	$+6°11'59''$	186.7°	−30.5°	24.5	3.9	−1.6
16	33.3	$2^h12^m15^s$	$+23°57'30''$	145.7°	−35.3	−8.22	−27.41	−12.52
17	23.0	$15^h34^m41^s$	$+26°42'53''$	41.9°	+53.8°	24.2	8.3	−0.3
18	38.8	$3^h9^m42^s$	$-9°34'36''$	191.3°	−53.0°	−5.24	−27.92	−9.75
19	82.3	$10^h20^m51^s$	$-58°32'49''$	284.7°	−1.3°	−14.44	−26.6	−3.772
20	34.5	$22^h20^m7^s$	$+49°30'12''$	99.3°	−6.3°	−9.65	−23.44	−4.86
21	21.4	$21^h31^m1^s$	$+23°20'7''$	74.3°	−20.1°	−6.5	−29.07	−13.15
22	23.6	$1^h49^m23^s$	$-10°42'13''$	165.4°	−68.7°	27.6	4.7	3.5
23	18.8	$4^h9^m35^s$	$+69°32'29''$	139.2°	+13.0°	−7.8	−24.02	−17.15
24	22.4	$7^h49^m55^s$	$+27°21'47''$	193.3°	+24.1°	23.8	7.6	−0.5
25	22.8	$1^h36^m43^s$	$+7°49'54''$	142.0°	−53.3°	−2.13	5.3	−12.8
26	160.2	$23^h3^m21^s$	$+58°33'50''$	109.2°	−1.3°	−25.6	−18.1	7.4
27	28.3	$0^h18^m20^s$	$+30°57'22''$	114.6°	−31.4°	−4.43	−27.8	−15.7
28	22.2	$6^h39^m50^s$	$-61°28'43''$	271.2°	−25.0°	−7.71	−28.32	−14.37
29	1132	$20^h25^m27^s$	$-28°39'48''$	14.5°	−32.0°	5.61	−15.22	−4.84
30	1231	$19^h35^m57^s$	$-53°0'31''$	344.4°	−27.9°	−4.13	−18.24	7.5

Решение. Движущиеся группы, как следует из определения, должны как минимум обладать сходными компонентами скорости и не должны быть разнесены в пространстве на значительные по меркам Галактики расстояния (но относительно друг друга вполне могут находиться на расстояниях около 20 пк). В целом звезды в таблице условно делятся по расстоянию на несколько групп: близкие (до ∼40 пк), средние (от ∼70 до ∼100 пк) и далекие (более 150 пк).

Сразу заметим, что у трех далеких звезд (номера 9, 13, 26) при близких положениях на небе скорости существенно различны, поэтому звезды вряд ли входят в одну движущуюся группу, а у звезд (29) и (30) расстояния на порядок превосходят значения для других объектов, а скорости отличаются друг от друга. Поэтому указанные 5 звезд мы сразу исключаем из рассмотрения.

В средней группе большинство звезд (1, 3, 6, 7, 12, 19) имеет сходные компоненты скорости V_x и V_y, при этом указанные объекты находятся на близких друг к другу расстояниях (80–90 пк) и почти в одном направлении на небе. Звезда (11) имеет значимо отличную скорость, а звезда (4) находится в противоположной области неба, то есть на расстоянии около 160 пк от выделенной группы.

Также можно, опираясь на сходство компонент скорости, разделить объекты на «кинематические» группы. Такое деление представлено в следующей таблице. В первом блоке представлены звезды средней группы. Видно сходство как позиционных, так и кинематических характеристик.

Номер	r, пк	α	δ	l	b	V_x, км/с	V_y, км/с	V_z, км/с
1	88.1	$9^h31^m16^s$	$-64°14'27''$	283.2°	−9.3°	−16.08	−30.4	−0.94
3	98.0	$8^h5^m3^s$	$-60°38'41''$	277.6°	−10.0°	−19.44	−27.8	−2.22
6	91.7	$9^h20^m37^s$	$-63°10'0''$	281.6°	−9.4°	−16.59	−27.9	−0.70
7	77.2	$9^h48^m19^s$	$-64°3'22''$	284.5°	−8.0°	−16.28	−28.32	−0.903
12	87.1	$8^h58^m45^s$	$-69°8'1''$	284.9°	−15.1°	−16.59	−27.5	−1.44
19	82.3	$10^h20^m51^s$	$-58°32'49''$	284.7°	−1.3°	−14.44	−26.6	−3.772
5	18.8	$4^h2^m36^s$	$-0°16'8''$	190.7°	−36.9°	−7.85	−28	−11.79
8	36.5	$3^h33^m13^s$	$+46°15'26''$	149.9°	−8.0°	−6.53	−27.84	−16.57
10	32.3	$14^h47^m33^s$	$-0°16'53''$	353.2°	+51.0°	−9.66	−28.07	−10.7
16	33.3	$2^h12^m15^s$	$+23°57'30''$	145.7°	−35.3	−8.22	−27.41	−12.52
18	38.8	$3^h9^m42^s$	$-9°34'36''$	191.3°	−53.0°	−5.24	−27.92	−9.75
20	34.5	$22^h20^m7^s$	$+49°30'12''$	99.3°	−6.3°	−9.65	−23.44	−4.86
21	21.4	$21^h31^m1^s$	$+23°20'7''$	74.3°	−20.1°	−6.5	−29.07	−13.15
23	18.8	$4^h9^m35^s$	$+69°32'29''$	139.2°	+13.0°	−7.8	−24.02	−17.15
27	28.3	$0^h18^m20^s$	$+30°57'22''$	114.6°	−31.4°	−4.43	−27.8	−15.7
28	22.2	$6^h39^m50^s$	$-61°28'43''$	271.2°	−25.0°	−7.71	−28.32	−14.37
14	24.4	$1^h16^m29^s$	$+42°56'22''$	127.8°	−19.7°	28.2	1.7	7.2
15	22.1	$4^h15^m26^s$	$+6°11'59''$	186.7°	−30.5°	24.5	3.9	−1.6
17	23.0	$15^h34^m41^s$	$+26°42'53''$	41.9°	+53.8°	24.2	8.3	−0.3
22	23.6	$1^h49^m23^s$	$-10°42'13''$	165.4°	−68.7°	27.6	4.7	3.5
24	22.4	$7^h49^m55^s$	$+27°21'47''$	193.3°	+24.1°	23.8	7.6	−0.5
2	10.5	$23^h7^m54^s$	$+75°23'15''$	116.4°	+13.9°	8.31	−11.2	−2.415
25	22.8	$1^h36^m43^s$	$+7°49'54''$	142.0°	−53.3°	−2.13	5.3	−12.8

Среди оставшихся звезд, принадлежащих группе близких звезд, можно выделить две крупные подгруппы с разными скоростями. В первой из них значения компоненты V_y группируются вблизи $-25 \div -28$ км/с, во второй, заметно меньшей, значения компоненты V_x группируются вблизи $24 \div 28$ км/с, а компоненты V_y при этом небольшие и положительные. Также остаются две звезды — (2) и (25), которые явно отличаются по скоростям от обеих групп.

Теперь определим пространственные размеры групп. Для объектов первого блока это сделать проще всего: они расположены по одну сторону от наблюдателя (об этом говорят почти одинаковые как экваториальные, так и галактические координаты). Посмотрим на галактические координаты: широта по модулю небольшая, объекты находятся недалеко от галактической плоскости. По долготе они простираются примерно на 7° при среднем расстоянии 87 пк, что соответствует приблизительному линейному размеру

$$\frac{7}{57} \cdot 87 = 11\,\text{пк}.$$

Со второй группой ситуация обстоит несколько сложнее. Можно заметить, что как долгота l, так и прямое восхождение α могут отличаться друг от друга очень заметно, звезды (10) и (16) расположены почти в противоположных направлениях относительно Солнца, расстояние между этими звездами можно оценить примерно как $32 + 33 = 65$ пк. Сопоставление других пар звезд внутри этой группы даст приблизительно такой же максимальный размер группы.

В третьей группе можно в качестве пары наиболее удаленных друг от друга звезд выбрать (17) и (22), тоже почти противоположные по направлению от Солнца объекты. Расстояние между ними составляет около 47 пк.

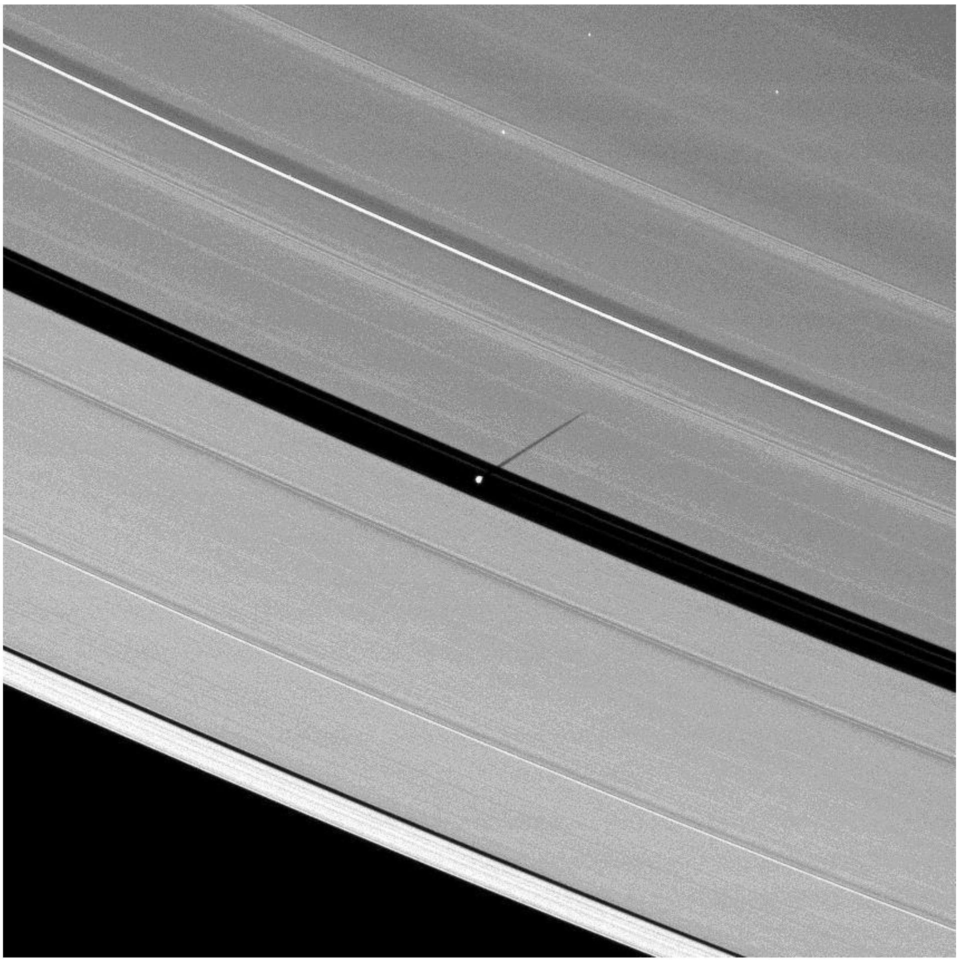
В дополнение заметим, что объекты первого блока по современным данным принадлежат движущейся группе Летучей Рыбы – Киля (Volans-Carina Moving Group), второго блока — движущейся группе AB Золотой Рыбы (AB Dorado Moving Group), третьего блока — ассоциации Большой Медведицы (Ursa Major Association). В условиях задачи использовалась лишь малая доля известных представителей групп, поэтому полученные оценки размеров групп существенно меньше их реальных размеров.

А.В.Веселова

Задача № 73

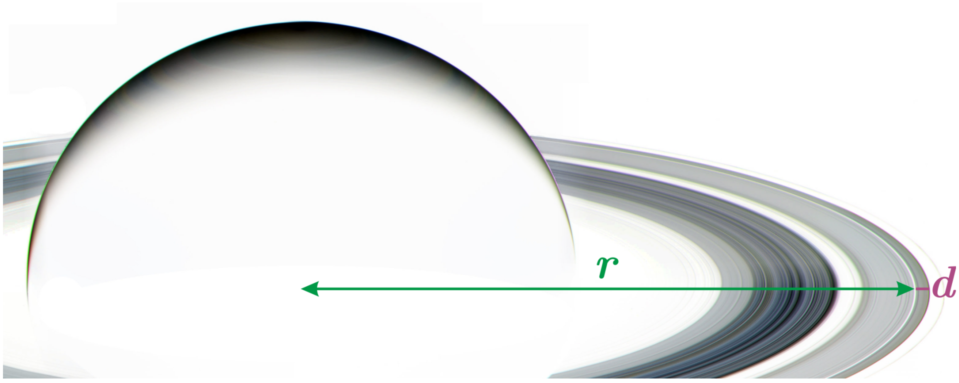
На двух фотографиях ниже представлены спутник Сатурна, движущийся во внешней области колец, и сам Сатурн (негатив). Известно, что в момент съемки спутник находился в плоскости, перпендикулярной кольцам и проходящей через центры Солнца и Сатурна. Угол между плоскостью колец и направлением на Солнце при наблюдении со спутника составляет 1°. Радиус Сатурна в 9 раз больше радиуса Земли.

Оцените диаметр спутника, а также период его обращения вокруг Сатурна. Как часто этот спутник бывает в соединении с другим спутником Сатурна — Титаном? Титан делает один оборот вокруг Сатурна по орбите радиусом 1.2 миллиона километров за 16 дней. Опишите, что произойдет, если поместить Титан на орбиту этого спутника.

Решение. Первый снимок позволяет сказать, что спутник (Пан) обращается совсем близко к внешнему кольцу Сатурна (в так называемой «щели Энке»), поскольку слева внизу четко виден край колец, а сама щель достаточно широка. На втором фото также видна эта щель у внешнего края колец, но она белого цвета, так как вторая фотография — негатив. Поскольку кольцо представляет собой окружность, значит, и щель тоже, то есть спутник имеет круговую орбиту.

Радиус орбиты можно определить по фотографии Сатурна. Границы экватора Сатурна в плоскости колец определяются довольно надежно, радиус самой планеты нам дан в условии (9 радиусов Земли дают 57600 км), значит можно определить масштаб снимка. На основании масштаба необходимо получить две вещи: радиус щели Энке r (он же радиус орбиты Пана) и ширину d сплошного кольца от этой щели до внешнего края системы колец Сатурна. Центр Сатурна лучше всего определить так: соединить противоположные наиболее удаленные точки колец и построить к этой линии перпендикуляр от верхней точки Сатурна.



Верное значение $r \approx 125$ тыс.км. Отсюда период обращения Пана T вокруг Сатурна (по III закону Кеплера, в сравнении с Титаном):

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{T_{\text{Titan}}^2}{r_{\text{Titan}}^3} \qquad \Rightarrow \qquad T = T_{\text{Titan}} \cdot \left(\frac{r}{r_{\text{Titan}}}\right)^{3/2}$$

$$T = 16^d \cdot \left(\frac{125 \times 10^3 \text{ км}}{1200 \times 10^3 \text{ км}}\right)^{3/2} \approx 16^d \cdot \frac{1}{10^{3/2}} = \frac{16^d}{\sqrt{1000}} \approx \frac{16^d}{\sqrt{1024}} = \frac{16^d}{32} = 12^h.$$

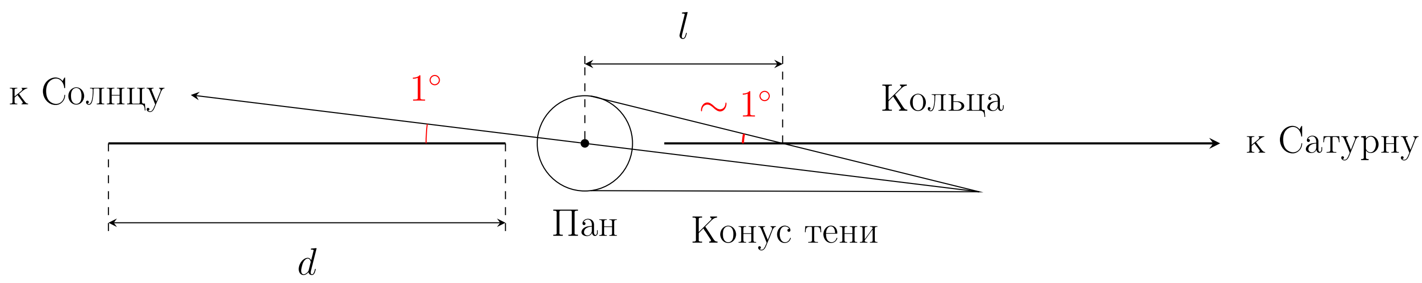
Точный ответ (при точно полученном радиусе орбиты Пана в 133 тыс. км.): 13 часов 48 минут.

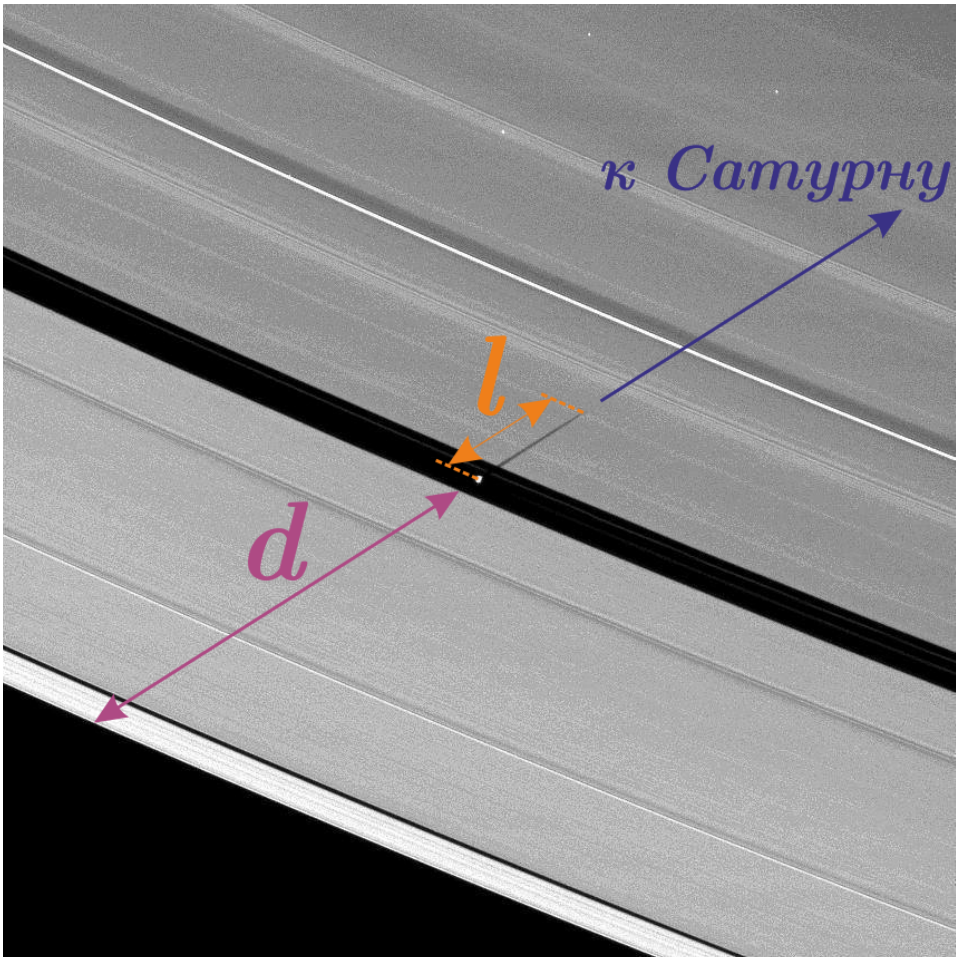
Рассчитаем синодический период S спутников друг относительно друга:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{0.5^d} - \frac{1}{16^d} \qquad S = \frac{0.5^d \cdot 16^d}{16^d - 0.5^d} \approx 0.52^d \approx 12.5^h.$$

Расстояние d от внешнего края щели Энке до внешнего края кольца определяется также по фотографии Сатурна: $d \approx 2800$ км. Собственно, уже на основании этого значения можно уверенно сказать, что Титан в щель Энке не поместится, т.к. он является вторым по размерам спутником в Солнечной системе (в частности, он больше Луны, имеющей диаметр 3500 км). Тем самым при движении Титана щель станет явно шире (произойдет аккреция вещества на Титан), а в кольцах Сатурна образуются дополнительные щели из-за резонансного влияния более массивного спутника. Этой аккрецией, кстати, объясняется форма Пана — шар с сильным экваториальным уширением (спутник выглядит как своеобразный космический «пельмень»).

Зная d, мы можем определить масштаб на квадратном фото и получить длину тени спутника: длина тени l составляет около 30% от ширины d, т.е. примерно 900 км. Важно измерять длины **вдоль направления тени**, т.к. Солнце, Пан и центр Сатурна лежат в одной плоскости, вдоль которой вытянулась тень.



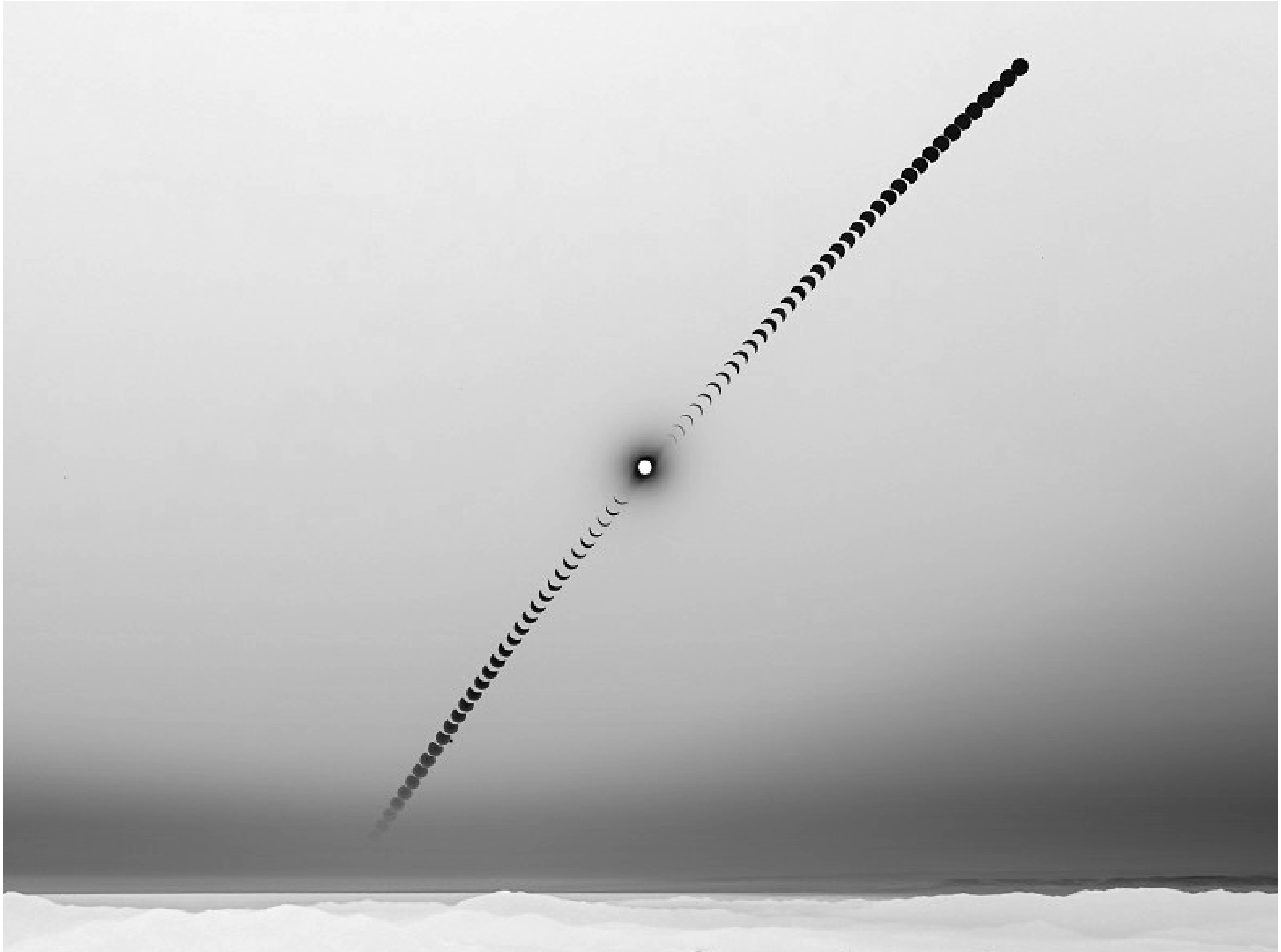


Тень заканчивается там, где Солнце уже не затмевается спутником, то есть конус тени продолжается «под» кольца. Значит, можно считать, что на краю тени угловой радиус спутника равен высоте Солнца (отличие — угловой радиус Солнца при наблюдении с Сатурна — примерно $1.6'$). Значит, линейный радиус Пана получается $900 \cdot 1°/57.3° \approx 16$ км.

В.В.Григорьев

Задача № 74

Вам дана серия фотографий полного солнечного затмения, наложенных друг на друга (негативов). Затмение произошло на закате Солнца 2 июля. Максимальная фаза затмения наблюдалась в 20 часов 40 минут по Всемирному времени. На фотографии видна линия горизонта. Определите как можно точнее географические координаты места наблюдения.

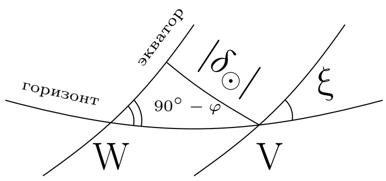


Решение. Сразу нужно отметить, что фотографии сделаны в южном полушарии, поскольку из условия, что наблюдается закат Солнца, следует, что движение небесной сферы происходит справа налево.

На фотографии хорошо прослеживается часть суточной параллели Солнца, которую оно прошло за время затмения. Очевидно, что для определения широты необходимо измерить угол между горизонтом и касательной к суточной параллели, проведенной через точку их пересечения. Измерения показывают, что этот угол равен около 58°.

Простейший метод определения широты φ состоит в том, чтобы измеренный угол приравнять к $90° - \varphi$, т.е. углу между экватором и горизонтом. Тогда $\varphi = 32°$ южной широты.

Этот метод, очевидно, не очень точен, т.к. в день затмения, 2 июля, Солнце двигалось не по небесному экватору, т.е. большому кругу, а по малому кругу, отстоящему от экватора на угол, по модулю равный склонению Солнца в этот день. Это видно даже по фотографии, поскольку трек Солнца представляет собой не прямую, как было бы в случае движения по большому кругу, а изогнутую линию. Так как дело происходит в южном полушарии, то суточная параллель Солнца располагается под экватором.

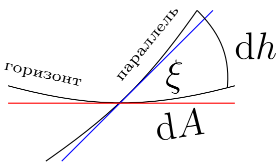


Угол между горизонтом и суточной параллелью ξ Солнца в точке захода V меньше, чем угол между экватором и горизонтом, так что при решении, учитывающем этот факт, итоговая широта получится меньше. Однако интуитивно ясно, что разность приближенного и точного значений широты будет мала, т.к. склонение Солнца $\delta_\odot$ 2 июля практически равно $\varepsilon = 23^\circ.4$ — углу наклона эклиптики к экватору, который достаточно мал, а искомое значение широты около 30°, что также достаточно малый угол. Можно предположить, что разность углов не будет превышать погрешности измерения угла на изображении (которая составляет несколько градусов, поскольку, например, на картинке нет фотографии Солнца прямо в момент захода, что не позволяет достаточно точно провести касательную к суточной траектории Солнца в точке захода).

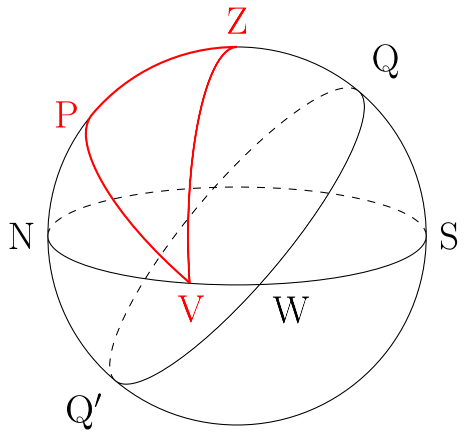
Теперь рассмотрим более точный метод решения этой части задачи. Для этого надо понять, как найти угол между горизонтом и суточной параллелью. Обойтись только стандартными методами решения сферических треугольников в этом случае нельзя, поскольку суточная параллель — малый круг. Сразу сделаем оговорку, что все дальнейшие рисунки и выводы формул мы будем делать для Северного полушария, что привычно для всех участников олимпиады, которые живут в Северном полушарии. Очевидно, что ситуация абсолютно симметрична при одновременной замене φ на $-\varphi$ и $\delta_\odot$ на $-\delta_\odot$. Поэтому все последующие рассуждения приведены для Северного полушария (и, вообще говоря, абсолютных значений широты и склонения).

Склонение Солнца (по модулю) мы знаем, это $\delta_\odot \approx 23^\circ.4$, хотя его можно оценить немного точнее. 2 июля на 11 дней отстоит от летнего солнцестояния. Следовательно, после того как Солнце имело максимальное склонение, оно с хорошей точностью прошло около 11° по эклиптике (точнее считать не имеет смысла, так как нам неизвестно точное время момента летнего солнцестояния). Склонение Солнца в течение года меняется по синусоиде с периодом 1 год и амплитудой $23^\circ.4$. В данном случае, если взять за начало отсчета летнее солнцестояние, склонение можно вычислить по формуле: $\delta_\odot = 23^\circ.4 \cdot \cos(11^\circ)$. Известно, что косинус малого угла, выраженного в радианах, можно представить как $\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$. Тогда $\delta_\odot \approx 23^\circ.4 - 23^\circ.4 \cdot \frac{0.2^2}{2} \approx 23^\circ$.

Рассмотрим окрестности точки пересечения. Нам нужно найти угол ξ между касательной к суточной параллели и касательной к горизонту, которая, по определению, является горизонтальной прямой.



Зависимость высоты от азимута можно получить из т.н. параллактического треугольника (выделен красным).



В этом треугольнике:

$$\mathrm{PZ} = 90^\circ - \varphi;$$

$$\mathrm{PV} = 90^\circ - \delta;$$

$$\mathrm{ZV} = z_\odot = 90^\circ - h;$$

$$\angle\,\mathrm{Z} = 180^\circ - A.$$

$$\angle\,\mathrm{P} = t.$$

Запишем сферическую теорему косинусов для этого треугольника:

$$\cos\left(90^\circ - \delta\right) = \cos\left(90^\circ - h\right)\cdot\cos\left(90^\circ - \varphi\right)+\sin\left(90^\circ - h\right)\cdot\sin\left(90^\circ - \varphi\right)\cdot\cos\left(180^\circ - A\right).$$

Преобразуя, получаем:

$$\cos A = \frac{\sin h\cdot\sin\varphi - \sin\delta}{\cos h\cdot\cos\varphi}.$$

Вычислим дифференциалы обеих частей равенства:

$$-\sin A\,\mathrm{d}A = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\cos^2 h\cdot\sin\varphi + \sin h(\sin h\cdot\sin\varphi - \sin\delta)}{\cos^2 h}\,\mathrm{d}h.$$

Отсюда после преобразований получаем:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}A} = \frac{\sin A\cdot\cos^2 h\cdot\cos\varphi}{\sin h\cdot\sin\delta - \sin\varphi)}.$$

$$\operatorname{tg}\xi = \left.\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}A}\right|_{h=0} = -\frac{\sin A}{\operatorname{tg}\varphi}$$

Видно, что, для того, чтобы найти φ по значению ξ, надо знать азимут захода. Его можно найти из того же параллактического треугольника, положив в теореме косинусов, записанной выше, $h = 0$:

$$\cos A = -\frac{\sin\delta}{\cos\varphi}.$$

Получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными, из которой принципиально возможно найти искомую широту. Сделать это можно, например, следующим образом. Перепишем уравнения, выразив из них синус и косинус азимута

$$\begin{cases}\sin A = -\operatorname{tg}\xi\operatorname{tg}\varphi,\\ \cos A = -\frac{\sin\delta}{\cos\varphi},\end{cases}$$

возведем оба уравнения в квадрат и сложим. Получим

$$\operatorname{tg}^2\xi\operatorname{tg}^2\varphi + \frac{\sin^2\delta}{\cos^2\varphi} = 1.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}^2\xi\sin^2\varphi + \sin^2\delta = \cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi$$

и

$$\left(\operatorname{tg}^2\xi + 1\right)\sin^2\varphi + \sin^2\delta = 1,$$

откуда

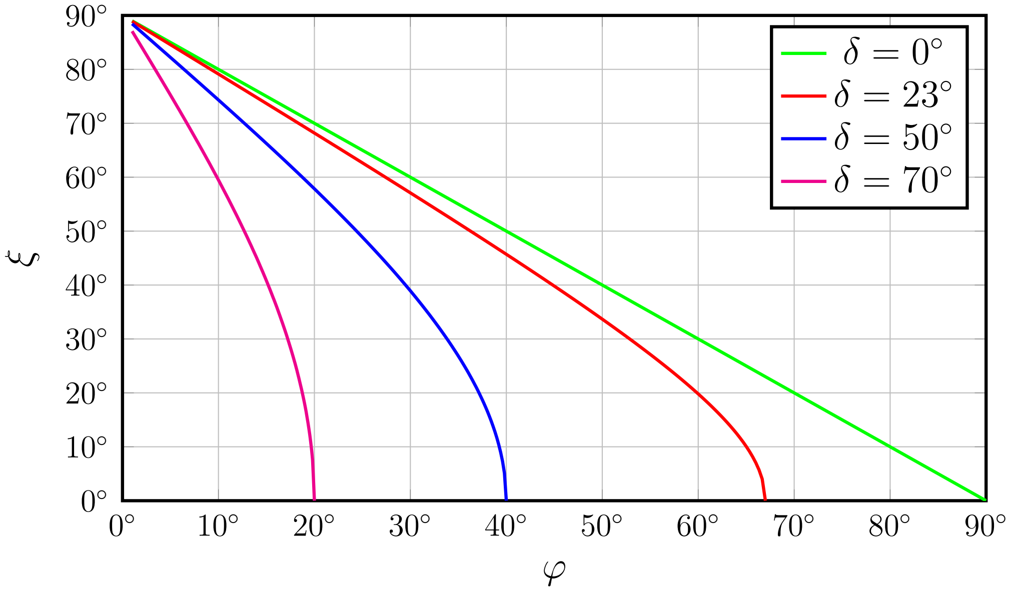
$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{1-\sin^2\delta}{\operatorname{tg}^2\xi + 1}}.$$

Выражение удобнее оставить именно в таком виде, это удобнее для вычислений.

Непосредственно из измерений по рисунку можно получить $\operatorname{tg}\xi$ (сам угол при этом измерять не обязательно), при этом должно получиться 1.6 (естественно, с некоторой погрешностью). Значение $\sin\delta_\odot \approx \sin\varepsilon = \sin 23^\circ.4$ настолько часто встречается в задачах, что может быть просто известно заранее, но его можно оценить, считая угол малым (или даже построив прямоугольный треугольник с углом нужной величины с помощью транспортира и измерив его стороны линейкой). Получится около 0.4 (более точное значение, учитывающее, что затмение происходило не в момент солнцестояния — 0.39). Тогда

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{1-0.39^2}{1.6^2+1}} \approx \sqrt{\frac{1-0.15}{2.6+1}} = \sqrt{\frac{0.85}{3.6}} = \sqrt{0.24}.$$

Можно остановиться на этом, заметив, что $\varphi = 30^\circ$ (не забыв, что на самом деле мы избавились от знака, но речь идет о южном полушарии), но можно и отметить, что реальное значение чуть меньше, т.е. затмение наблюдалось примерно на $29° - 30°$ южной широты (счет с большей точностью явно лишен смысла, поскольку измерять углы с точностью лучше $1°$ транспортир не позволяет).



Как видим, полученный ответ близок к полученному более простым методом, однако отличается от него примерно на $2°$. В принципе можно рассмотреть и общий случай для разных склонений объектов (не обязательно Солнца), результат приведен на графике зависимости ξ от δ и φ. Приблизительная широта нам известна. По графику видно, что для интересующих нас широты и склонения отличие угла ξ от $90° - \varphi$ не превышает $3°$ (что мы фактически и получили, решая задачу более аккуратно).

Теперь, зная широту, можно определить и долготу. Из условия известно, что максимальная фаза затмения наблюдалась в этом месте в $t_{UT}^{max} = 20^h 40^m$ UT. Это среднее солнечное время гринвичского меридиана в этот момент. Если найти часовой угол Солнца в момент максимальной фазы $t_{\odot}^{max}$, то $t_{\odot}^{max} + 12^h$ это будет местное истинное солнечное время в тот же момент времени. Разность $t_{\odot}^{max} - t_{UT}^{max}$ с точностью до уравнения времени равна долготе места наблюдения. Уравнение времени (среднее-истинное) в этот день меньше $+5$ минут (точнее, около 3.7 минуты). Его можно учесть (если решающий задачу может получить или вспомнить эту оценку), но сначала надо понять, с какой точностью можно определить часовой угол Солнца в момент максимальной фазы.

Для определения часового угла светила в некоторый момент времени необходимо знать широту места, склонение светила и его высоту над горизонтом в данный момент. Первые две величины уже известны, осталось найти высоту.

Можно пойти двумя путями. Первый состоит в том, чтобы измерить высоту Солнца в момент максимальной фазы по рисунку, используя в качестве масштаба четкие изображения Солнца, а затем с помощью формулы косинусов найти связь между высотой и часовым углом из параллактического треугольника:

$$\sin h^{max} = \sin\varphi \cdot \sin\delta_{\odot} + \cos\varphi \cdot \cos\delta_{\odot} \cdot \cos t_{\odot}^{max}$$

Второй путь, пожалуй, несколько проще вычислительно. Можно измерить длину той части суточной параллели Солнца, которую ему осталось пройти до захода, перевести ее в единицы времени и вычесть из часового угла захода, который находится по более простой формуле (получающейся подстановкой $h = 0$ в предыдущую):

$$\cos t^0_\odot = -\operatorname{tg}\delta_\odot \cdot \operatorname{tg}\varphi.$$

При вычислении разности во времени между моментами максимальной фазы и захода необходимо учесть, что суточная параллель в $\cos\delta_\odot$ раз меньше, чем экватор, и Солнце проходит ее со скоростью не 15°/час, а $15° \cdot \cos\delta_\odot$/час. Соответствующие измерения и вычисления показывают, что максимальная фаза наблюдалась за 1.3 часа до захода. Большей точности при имеющихся измерительных возможностях и вычислениях без калькулятора явно не добиться, так что учет уравнения времени лишен смысла.

$$\cos t^0_\odot = -\operatorname{tg}\delta_\odot \cdot \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}23° \cdot \operatorname{tg}30° \approx \frac{0.4}{1.7} \approx 0.24$$

Так как $\sin(\pi/2 - t^0_\odot) \approx \pi/2 - t^0_\odot \approx 0.24$, то $t^0_\odot \approx 76° \approx 5$ часов, т.е. в 17 часов истинного местного солнечного времени Солнце зайдет, а за 1.3 часа до этого, т.е. примерно в 15^h40^m была максимальная фаза затмения. Отсюда получаем, что долгота места равна примерно -5^h или 75° западной долготы

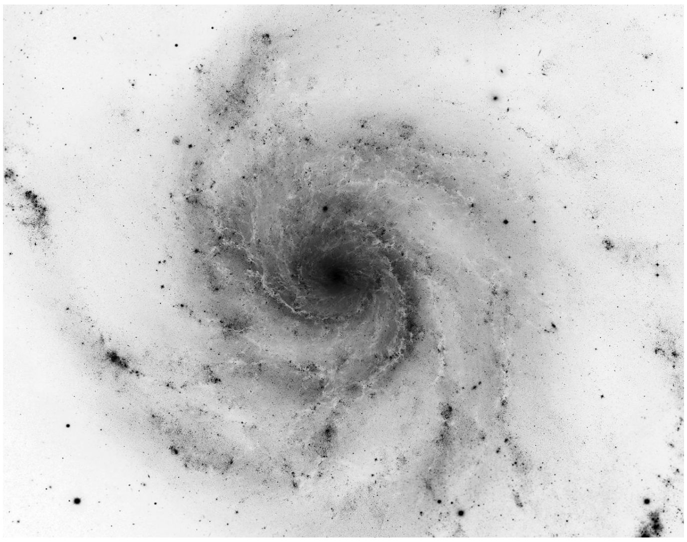
На самом деле фотографии были сделаны в высокогорной обсерватории Ла-Силья в чилийской пустыне Атакама. Точные координаты обсерватории: $29°15'$ ю.ш., $70°44'$ з.д. Ла-Силья находилась немного севернее середины полосы затмения, поэтому ясное небо немного ярче на севере (справа на картинке). Оригинальная фотография размещена ниже.

М.В.Костина, П.А.Тараканов

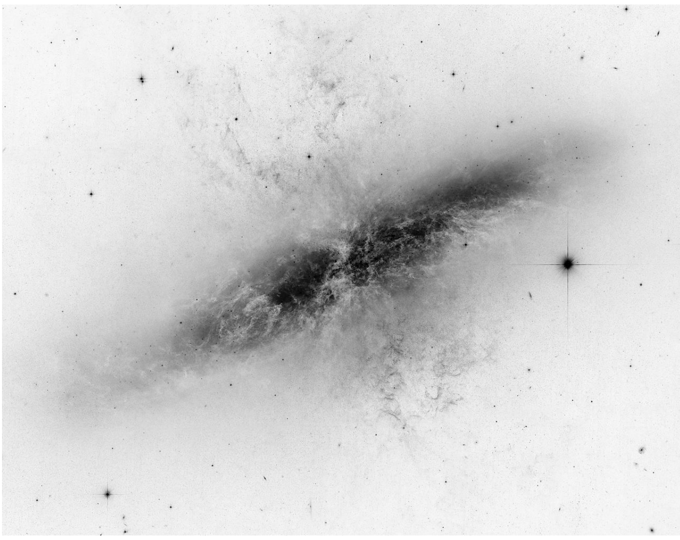
Задача № 75

Вам даны кривые блеска в полосах B, V и R двух сверхновых типа Ia, вспыхнувших в двух спиральных галактиках. На графиках по оси абсцисс отложены даты наблюдений в формате месяц/день, по оси ординат — видимые звездные величины в соответствующих полосах. Изображения галактик (негативы) и их экваториальные координаты представлены ниже.

Галактика	α	δ
1	$14^{\mathrm{h}}\,03^{\mathrm{m}}$	$+54^\circ\,21'$
2	$09^{\mathrm{h}}\,56^{\mathrm{m}}$	$+69^\circ\,41'$



Галактика 1



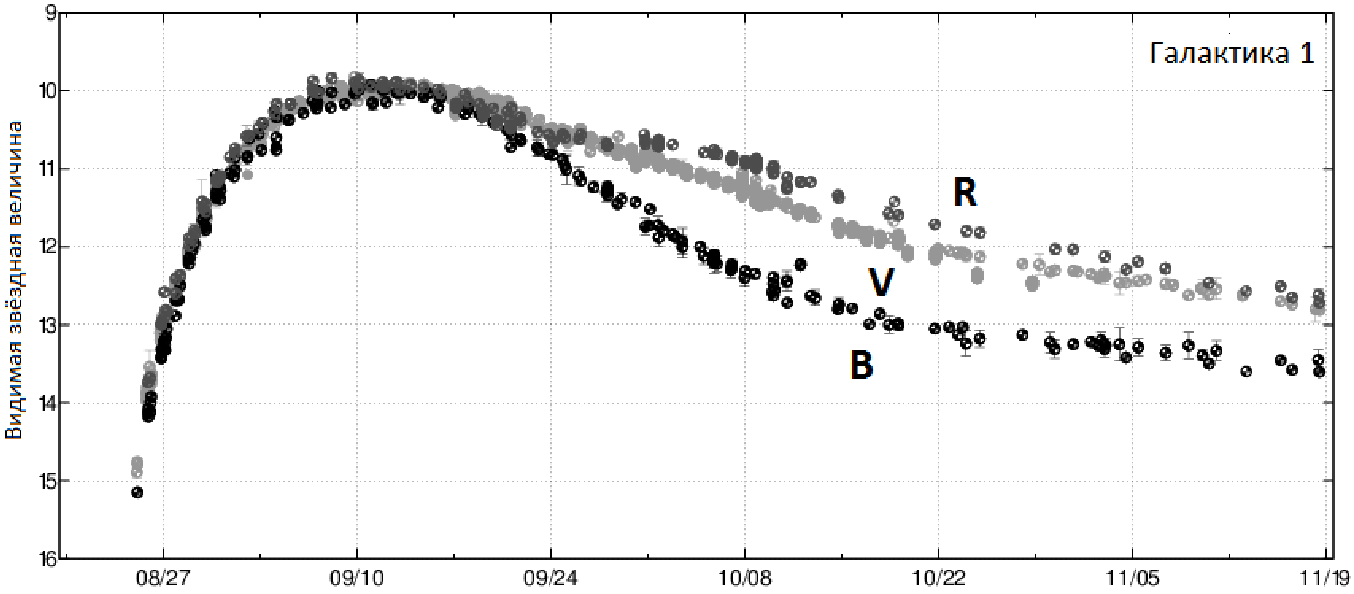
Галактика 2

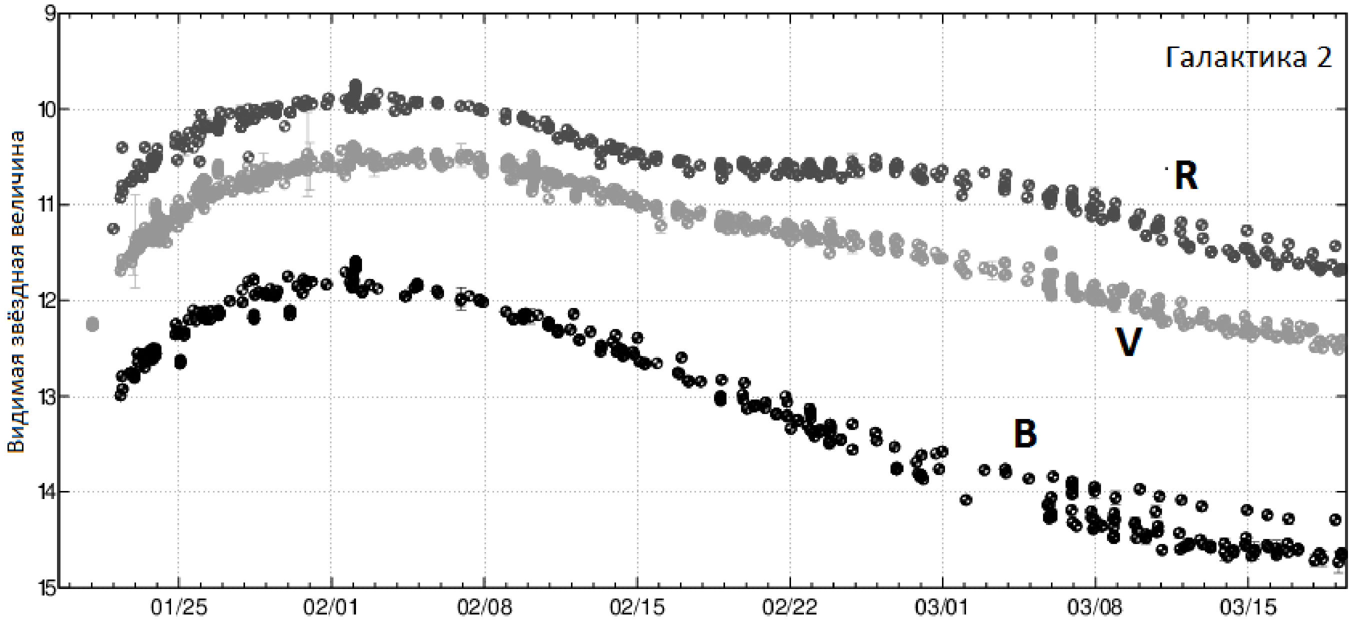
Определите расстояния до обеих галактик, если известно, что абсолютная звёздная величина сверхновых типа Ia в максимуме блеска в полосе V составляет -19^m.

Решение. Сверхновая типа Ia — результат взрыва белого карлика, достигшего предельной массы (так называемого предела Чандрасекара) вследствие аккреции окружающего вещества. Как следствие, кривые блеска сверхновых этого типа очень похожи между собой и могут служить «стандартными свечами».

Однако мы видим, что представленные кривые блеска довольно сильно отличаются. Первая сверхновая в максимуме блеска является практически «белой» (то есть показатели цвета близки к нулю), а потом она «краснеет». Вторая же сверхновая даже в максимуме заметно «красная». Можно предположить, что свет от второй сверхновой испытывает сильное поглощение.

Посмотрим на изображения галактик. Первая из них (M 101, Вертушка) видна плашмя, вторая (M 82, Сигара) — практически с ребра. Отсюда можно сделать вывод, что, по всей видимости, поглощение света от сверхновой в Вертушке (непосредственно в самой галактике, в которой произошла вспышка) достаточно мало, в то время свет от сверхновой в Сигаре прошел через значительную


Галактика 1
Видимая звёздная величина
R
V
B
08/27
09/10
09/24
10/08
10/22
11/05
11/19


Галактика 2
Видимая звёздная величина
R
V
B
01/25
02/01
02/08
02/15
02/22
03/01
03/08
03/15

толщу газа и пыли в родительской галактике. По координатам галактик видно, что они обе находятся далеко от плоскости Млечного Пути (в созвездии Большой Медведицы). Соответственно, поглощением в нашей Галактике мы можем пренебречь.

В максимуме блеска первая сверхновая имела блеск около 10^{m}, отсюда получаем расстояние до Вертушки:

$$M - m = 5 - 5\lg d,$$
$$d = 10^{(5-M+m)/5} = 10^{(5+19+10)/5} = 10^{6.8} \approx 6.3 \cdot 10^6 \text{ пк} = 6.3 \text{ Мпк},$$

что совпадает с реальным значением расстояния до галактики.

Вторая сверхновая в максимуме блеска имела звездную величину $10^m.5$ в полосе V и показатель цвета $(B - V) = 1^m.3$. Если истинный показатель цвета $(B - V)$ равен нулю, то избыток цвета $E_{B-V} = 1^m.3$.

Мы не знаем, по какому закону происходит поглощение света — это зависит от характеристик межзвездной среды в Сигаре, например, от размера пылевых частиц. Для оценки предположим, что поглощение аналогично среднему в Млечном Пути. Тогда мы можем оценить поглощение в полосе V:

$$A_V = R_V \cdot E_{B-V}$$

и в среднем в Галактике $R_V \approx 3$. Поэтому

$$A_V \approx R_V \cdot E_{B-V} = 3^m.9,$$

и истинная видимая звездная величина в полосе V равна $10^m.5 - 3^m.9 = 6^m.6$. В этом случае расстояние до галактики Сигара получается равным

$$d = 10^{(5+19+6.6)/5} = 10^{6.12} \approx 1.3 \cdot 10^6 \text{ пк} = 1.3 \text{ Мпк}.$$

Но на самом деле даже в Галактике для различных областей величина R_V может быть существенно разной. Как правило, она варьируется в пределах $2 \leqslant R_V \leqslant 5$. Перепишем выражение для расстояния в более общем виде:

$$d = 10^{(5+19+10.5-1.3\cdot R_V)/5} \approx 10^7 \cdot 10^{-R_V/4} = 10^{1-R_V/4} \text{ Мпк}$$

и вычислим приближенно расстояния, соответствующие предельным значениям R_V. Получим, что расстояние меняется в пределах от 0.4 Мпк (что очевидно неверно, поскольку ближайшая к нам крупная спиральная галактика — M 31 — находится дальше, на расстоянии около 0.8 Мпк, и на изображении явно не она) до 2.4 Мпк.

Отметим, что даже максимальная оценка расстояния получилась заниженной: на данный момент расстояние до Сигары оценивается в 3.5 – 3.8 Мпк. Связано это с тем, что Сигара — галактика со вспышкой звездообразования, вследствие чего свойства межзвездного поглощения для нашей Галактики применимы к M 82 лишь в первом приближении. Еще одной возможной причиной отклонения результата от правильного являются возможные вариации показателя цвета в максимуме блеска, для отдельных сверхновых они отмечались.

И.С.Тихоненко, М.И.Волобуева