Санкт-Петербургский государственный университет

**Халявин Максим Дмитриевич**

**Выпускная квалификационная работа бакалавра**

**Параметры черной дыры в рамках модели задачи двух тел**

Направление 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии»

ООП СВ.5003.2017: «Программирование и информационные технологии»

**Научный руководитель:**

доктор физ.-мат. наук,

профессор кафедры механики управляемого движения,

Бабаджанянц Левон Константинович

**Рецензент:**

ведущий инженер по контролю качества ПО,

ООО “Виз Софтвэр Консалтинг”,

магистр,

Брэгман Анна Михайловна

Санкт-Петербург

2021

**СОДЕРЖАНИЕ**

[**1 ВВЕДЕНИЕ** 4](#_Toc73548169)

[**1.1 Постановка задачи** 4](#_Toc73548170)

[**1.2 Структура ВКР** 4](#_Toc73548171)

[**1.3 О работах по траектории тел при движении к границе черной дыры** 5](#_Toc73548172)

[**1.3.1 AN IMPROVED DISTANCE AND MASS ESTIMATE FOR SGR A\* FROM A MULTISTAR ORBIT ANALYSIS** 5](#_Toc73548173)

[**1.3.2 An Update on Monitoring Stellar Orbits in the Galactic Center** 6](#_Toc73548174)

[**1.3.3 A geometric distance measurement to the Galactic Center black hole with 0.3% uncertainty** 7](#_Toc73548175)

[**1.3.4 Investigating the Binarity of S0-2: Implications for Its Origins and Robustness as a Probe of the Laws of Gravity around a Supermassive Black Hole** 7](#_Toc73548176)

[**1.3.5 The Post-periapsis Evolution of Galactic Center Source G1: The Second Case of a Resolved Tidal Interaction with a Supermassive Black Hole** 8](#_Toc73548177)

[**2 Основные уравнения теории возмущения** 10](#_Toc73548178)

[**2.1 Метод Брауэра** 10](#_Toc73548179)

[**2.2 Вывод уравнения для S и его решение** 15](#_Toc73548180)

[**3 Функционал** 17](#_Toc73548181)

[**3.1 Структура функционала** 17](#_Toc73548182)

[**3.2 Алгоритм вычисления функционала** 18](#_Toc73548183)

[**3.3 Эллиптическая задача движения двух тел и связанные с ней алгоритмы** 19](#_Toc73548184)

[**3.3.1 Общие сведения из задачи двух тел** 19](#_Toc73548185)

[**3.3.2 Алгоритм нахождения истинной аномалии** 22](#_Toc73548186)

[**3.3.3 Алгоритм нахождения радиус вектора** 23](#_Toc73548187)

[**3.4 Алгоритм вычисления s** 23](#_Toc73548188)

[**4 Численный эксперимент** 27](#_Toc73548189)

[**4.1 Постановка численного эксперимента** 27](#_Toc73548190)

[**4.2 Результаты численного эксперимента** 28](#_Toc73548191)

[**Cписок использованной литературы** 31](#_Toc73548192)

[**Приложения I - II** 33](#_Toc73548193)

[**Приложение I: Программы вычисления функционала** 33](#_Toc73548194)

[**Приложение II: Таблица результатов численного эксперимента** 35](#_Toc73548195)

# **1 ВВЕДЕНИЕ**

**1.1 Постановка задачи**

Целью работы является уточнение параметров черной дыры по известным данным по траектории движения звезд и приблизительным показателям массы и степени в законе тяготения.

Ставятся задачи:

* 1. Составить функционал для метода наименьших квадратов, зависящий от массы центрального тела и степени в гравитационном законе и позволяющий по следам движения звезды уточнить данные параметры.
	2. Написать соответствующую программу на языке Wolfram Mathematica.

**1.2 Структура ВКР**

Работа состоит из двух глав, раздела «Заключение и выводы», а также списка литературы из 13 наименований и приложения, содержащего в себе тексты всех программ.

Первая глава – введение. Она содержит обзор важных материалов обзор важных материалов по исследованию данного региона нашей галактики. В данной главе были использованы следующие материалы: [8,9,10,12,13]

Вторая глава посвящена специальным методам решения уравнений в вариациях. В [§](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%97%D0%BD%D0%B0%D0%BA_%D0%BF%D0%B0%D1%80%D0%B0%D0%B3%D1%80%D0%B0%D1%84%D0%B0)2.1 вводится метод Брауэра и его модификация. [§](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%97%D0%BD%D0%B0%D0%BA_%D0%BF%D0%B0%D1%80%D0%B0%D0%B3%D1%80%D0%B0%D1%84%D0%B0)2.2 рассматривается вывод специального уравнения входящего в модифицированный метод Брауэра. В данной главе были использованы следующие материалы: [1,3,6,11]

Во третьей главе описывается функционал для решения поставленной задачи и все алгоритмы, необходимые для его вычисления. В [§](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%97%D0%BD%D0%B0%D0%BA_%D0%BF%D0%B0%D1%80%D0%B0%D0%B3%D1%80%D0%B0%D1%84%D0%B0)2.1 на основе материалов предыдущей главы вводится функционал и приводится общий алгоритм его вычисления. В [§](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%97%D0%BD%D0%B0%D0%BA_%D0%BF%D0%B0%D1%80%D0%B0%D0%B3%D1%80%D0%B0%D1%84%D0%B0)2.2 рассматриваются некоторые сведения по решению уравнения движения материальной точки в центральном поле силы Ньютона и описываются алгоритмы определения истинной аномалии и длины радиус-вектора для невозмущенной орбиты, которые необходимы для вычисления функционала. В §2.3 рассматривается вывод специальной части решения уравнения в вариациях, для частного случая движения в центральном поле силы Ньютона с неизвестным показателем степени и дается алгоритм для его вычисления. В данной главе были использованы следующие материалы:[1,3,6,7,8,10,12]

В четвертой главе: производится постановка численного эксперимента, описание используемых данных и результатов, полученных в ходе его проведения. В данной главе были использованы следующие материалы: [5, 8,10,12]

**1.3 О работах по траектории тел при движении к границе черной дыры**

**1.3.1 AN IMPROVED DISTANCE AND MASS ESTIMATE FOR SGR A\* FROM A MULTISTAR ORBIT ANALYSIS**

В данной работе исследователями из обсерватории Кека был представлен новый метод анализа спекл изображений, который позволил идентифицировать следы звезд небольшой светимости на изображениях полученных до 2005 года. В частности, в данной работе показана работа данного метода на примере звезды S0-38, у которой до момента публикации статьи в ходе наблюдений за восемнадцать лет (период обращения данной звезды составляет чуть больше девятнадцати лет) было изучено только 40% ее орбиты. Благодаря этим данным ученые также существенно улучшили приближенные оценки для различных параметров черной дыры: массы, положения, скорости и расстояния. Данное улучшение стало возможным за счет использование в алгоритме MultiNest, который и подбирал эти параметры, информацию сразу о двух звездах с различными ориентациями орбит - S0-2 и S0-38.

**1.3.2 An Update on Monitoring Stellar Orbits in the Galactic Center**

Эта статья является результатом многолетней работы группы ученых из Института внеземной физики Общества Макса Планка по наблюдению за звездами в окрестностях черной дыры. В данной статье помимо обновленных данных по анализу изображений, предоставлены результаты по подбору параметров сорока звезд и обновленные оценки для массы и расстояния до черной дыры. Для определения всех этих параметров использовалась программа на языке Wolfram Mathematica, которая вычисляла положение и скорость точки в момент орбиты явным интегрированием орбиты и при помощи встроенных процедур минимизации подбирала параметры. А после при помощи методов Монте-Карло с марковскими цепями получают апостериорное распределение для данного параметра для исследования его неопределенности. Для определения массы и расстояния, полученные параметры орбит используются для получения радиальных скоростей, которые сравниваются с полученными наблюдениями. Наилучшие оценки для массы и расстояния были получены в ходе минимизации параметров одновременно семнадцати звезд, для чего в работе также были описаны специальные приемы.

**1.3.3 A geometric distance measurement to the Galactic Center black hole with 0.3% uncertainty**

Данная работа сосредоточена на исследовании движения одной из самых яркой звезды в том регионе – S0-2. В ходе нее исследователями суммируются наблюдения за орбитой накопленные за 27 лет (с 1992 по 2019), в которые также были включены данные с нового телескопа GRAVITY. Метод определения параметров использовался тот же самый, что и в предыдущей работе. Главной особенностью стало обработка неточностей измерений, связанных с положением звезды и ее радиальными скоростями, а также исправление корреляции между повторяющимися следами (период обращения орбиты составляет шестнадцать лет, а потому для некоторых участков орбиты появились дополнительные изображения). Для этого была использована специальная шумовая модель. Ее преимущество состоит в том, что она оценивает дополнительную величину ошибки и длину корреляции на основе самих данных, избегая любых предварительных решений о том, как обрабатывать данные. В результате были получены лучшие оценки для параметров орбиты и расстояния до черной звезды. Также в ходе работы был проведен анализ совместного эффекта, оказываемого гравитационным и допплеровским красным смещением, которые подтвердили ранее полученные предсказания общей теории относительности относительно радиальной скорости данной звезды.

**1.3.4 Investigating the Binarity of S0-2: Implications for Its Origins and Robustness as a Probe of the Laws of Gravity around a Supermassive Black Hole**

Как и в предыдущей работе, объектом исследования здесь является звезда s-02. В ходе работы рассматриваются вопрос наличия компаньона, способного оказывать влияние на движение этой звезды. Исследование проводилось с использованием периодограммы Ломба - Скаргла, который очень хорошо работает при определении двойных систем, движущихся по круговым орбитам. Тем не менее попытка применения этого метода не смогла определить возможный период обращения компаньона, который мог бы с достаточным уровнем достоверности объяснить изменения в радиальной скорости.

Также в ходе исследования на основе байесовского подхода были определены возможные параметры двойной звезды которые бы наилучшим образом подходили бы к системе с подобными радиальными скоростями. Помимо этого, важной частью данной работы было исследование возможного влияния двойственности звезды на красное смещение. Результаты данного исследования оказали влияние на предыдущую работу.

**1.3.5 The Post-periapsis Evolution of Galactic Center Source G1: The Second Case of a Resolved Tidal Interaction with a Supermassive Black Hole**

В данной статье рассматривается орбита газового облако G1, которое проходило на сверх эксцентричной орбите вокруг SgrA\*. Как и другое газовое облако G2, G1 является примером объекта, который взаимодействовал с приливными силами черной дыры. Долгое время считалось что G1 является частью одного газового потока с G2, однако данное исследование показало, что несмотря на то что оба объекта двигаются в одной плоскости, их орбиты отличаются друг от друга величиной большой полуоси, что в целом опровергает данную теорию. Также на основе информации по размерам и светимости G1, собранных в течение в течение 10 лет после прохождения перицентра, исследователями сделано предположение о возможной природе этого газового облака. В отличие от G2, которое вероятнее всего содержит внутри себя звезду, окруженную оболочкой из газа и пыли, G1 ввиду большего размера и светимости может содержать в себе результат слияния обоих компонентов двойной звезды.

# **2 Основные уравнения теории возмущения**

**2.1 Метод Брауэра**

Данный материал написан на основе [1,3] и использовался для построения функционала

При рассмотрении планетарных теорий обычно, для простоты, рассматривают задачу трех тел – Солнца и двух планет.

Рассмотрим неподвижную систему прямоугольных координат с началом в Солнце. Пусть в этой системе – координаты планеты  , а  – координаты возмущающей планеты . Пусть  и  их массы, и  - радиус-векторы,  - расстояние между  и . Массу Солнца обозначим за . Соответствующие обозначения для координат, радиус-векторов и вазимного расстояния в случае невозмущенного движения введем при помощи тех же букв, но с ноликом справа снизу.

Уравнения возмущенного и невозмущенного движения планеты в указанных обозначениях имеют следующий вид:

 (2.1)

 (2.2)

где  – пертурбационная функция,  - постоянная в гравитационном законе,  – постоянная Гаусса.

Рассмотрим также начальные условия:

 (2.3)

 (2.4)

В случае (2.3) и (2.4) совпадают будем говорить, что орбита является оскулирующей в эпоху .

Также введем обозначения:

 (2.5)

Вычитая уравнения (2.2) из уравнений (2.1), и после небольшого упрощения получаем:

 (2.6)

Второй член в левых частях уравнений (2.6) можно разложить по степеням относительно . Сделав это, перенесем члены выше первого порядка перенесены в правую часть уравнения, и в результате получим [3]:

 (2.7)

где 

 Также заметим, что

 (2.8)

Если  считать известными функциями времени, то уравнения (2.7) будут линейными с известными переменными коэффициентами. По теореме Пуанкаре [6] эти уравнения могут быть решены в квадратурах. Соответствующая (2.7) однородная система уравнений фундаментальная система решений будет иметь следующий вид:

 (2.9)

Где  – шесть элементов, от которых зависит решение невозмущенного уравнения движения планеты .

Однако при переходе от решения однородной системы к решению неоднородной системы (например, методом вариации постоянных) возникают проблемы. Исходные уравнения в системе зависят от решения друг друга, а потому выводы получаются крайне громоздкими. Брауэр предложил для решения этой проблемы фиксировать систему координат таким образом, чтобы . При фиксированных, как функций времени, величинах это приводит к тому, что третье уравнение в (2.7) становится независимых от двух предыдущих.

Выпишем окончательные выражения для , получаемые в методе Брауэра [3] (выражение для  получается аналогично):

 (2.10)

где  - средняя долгота,  - долгота перегилия,  - средняя аномалия,  - большая полуось,  - эксцентриситет, , , 

Здесь нолик снизу справа означает, что берется соответствующая величина в невозмущенном движении, выражения в круглых скобках под знаком интеграла должны рассматриваться как постоянные при интегрировании и переменные после интегрирования.

Уравнение, соответствующее третьему уравнению в (2.7), в методе Брауэра принимают следующий вид:

 (2.11)

Решение уравнений типа  дается Хиллом [11]:

 (2.12)

где  - параметры орбиты тела в невозмущенном движении,  - истинная аномалия.

Коэффициенты при возмущениях в выражениях для  и свободные члены могут быть разложены в двойные ряды Фурье с известными числовыми коэффициентами выбранных независимых переменных, например, средних, истинных или эксцентрических аномалий.

Для получения приближения, точного до первого порядка относительно возмущающих сил в системе (2.10), в выражениях для  следует положить возмущения равными нулю. Получающиеся возмущения должны быть подставлены в выражения для  для получения второго приближения. Если  содержат все члены до третьего порядка включительно относительно возмущающих сил, то указанный процесс можно продолжить и для получения возмущений, точных до третьего порядка, и т.д. Стоит отметить что на практике часто ограничиваются рассмотрением уравнений первых приближений.

Приведем здесь модификацию метода Брауэра, которая позволяет быстро вычислять приближения высших порядков.

Для удобства обозначим возмущения -ого порядка за . аналогично (единичкой справа снизу) будем отмечать и другие буквы при построении теории [1].

 (2.13)

где



# **2.2 Вывод уравнения для S и его решение**

В данном параграфе займемся выводом уравнения для , определенного в (2.7). Умножим каждое из уравнений на соответственно и сложив их, получаем:

 (2.14)

Учитывая случай оскулирующей орбиты, имеем:

 (2.115)

Дифференцируя выражение , используя (2.7) получаем:

 (2.16)

Дифференцируя (2.14) по  и используя (2.15), получаем следующее уравнение третьего порядка:

 (2.17)

Тогда проинтегрировав (2.16) от  до  можно записать новое уравнение второго порядка:

 (2.18)

Решение этого уравнения может быть найдено согласно (2.12):

 (2.19)

**3 Функционал**

# **3.1 Структура функционала**

Для построения функционала рассмотрим движение звезд вокруг черной дыры в рамках задачи возмущенного движения двух тел. Будем считать звезду за материальную точку движущеюся в центральном силовом поле  в трехмерном евклидовом пространстве относительно репера , где  – центр масс черной дыры. Пусть  – масса материальной точки, а  – ее координаты в этом репере, тогда движение точки при наличии возмущений будет удовлетворять следующим уравнениям:

,

,,, (3.1)



Ввиду того, что орбиты, полученные в работе [8,10,12] довольно схожи с кеплеровыми (случай движения ), но не являются полностью совпадающими с ними, мы предполагаем, что:

1. масса центрального тела в возмущенном движении отличается от невозмущенного на 
2. сила Ньютона имеет неизвестную степень в показателе закона тяготения.

 Тогда возмущающая сила будет имеет следующий вид:

 (3.2)

Исходя из (2.8) получаем, что для возмущений , (где  - решение невозмущенного уравнения) справедливо считать, что разность между  и  есть величина второго порядка малости по . Используя этот факт получаем следующий вид для функционала:

 (3.3)



Где P – какие-то параметры, от которых зависит возмущенное движение,  зависит от решения возмущенного уравнения,  - от решения невозмущенного, а  - известные данные о движение звезды в момент .

Далее будем рассматривать частный случай (3.2) для этого функционала:

 (3.4)

# **3.2 Алгоритм вычисления функционала**

Начальные данные:  – масса объекта движущегося в центральном поле сил, - масса центрального тела,  – координаты следов и соответствующие им временные отметки  относительно начального момента времени , - параметры невозмущенной кеплеровой орбиты, (все данные представляются в астрономической системе единиц: масса солнца, солнечные сутки, астрономические единицы расстояния).

Варьируемые параметры:  – неизвестная часть массы центрального тела,  – показатель степени в законе тяготения.

1. Вычисление истинной аномалии  в начальный момент времени (алгоритм CalcTTA).
2. В цикле для каждого следа в X.
	1. Вычисляем:
		1. Значение истинной  аномалии в соответствующий момент времени (алгоритм CalcTTA).
		2. Значение величины  (алгоритм CalcS).
		3. Длину радиус - вектора  невозмущенного движения (алгоритм CalcR0).
		4. Длину радиус - вектора текущего следа()
		5. Квадрат разности  и  прибавляем к значению функционала.

**3.3 Эллиптическая задача движения двух тел и связанные с ней алгоритмы**

# **3.3.1 Общие сведения из задачи двух тел**

Рассмотрим движение тела массы  вокруг центрального тела массы  по эллиптической орбите под действием силы Ньютона относительно декартовой системы координат :

 (3.5)

Движение точки по заданной орбите определяется при помощи шести параметров. Эксцентриситет () и большая полуось () определяют форму данной орбиты. Наклонение (), долгота восходящего узла (), аргумент перицентра () – ориентацию плоскости орбиты по отношению к базовой системе координат. Шестой параметр, аномалия, определяет положение тела на орбите. Различают истинную (), эксцентрическую () и среднюю () аномалию. Истинная и эксцентрическая аномалии, как и элементы орбиты показаны на следующих рисунках. А определение средней аномалии дается чуть позже.



**Рис. 3.1:** - *нормаль орбитальной плоскости,* *- вектор линии узлов (пересечение орбитальной и базовой (*) *плоскостей),* *- восходящий узел (точка орбиты, в которой координата  массы  меняет знак с – на +),**- перицентр (ближайшая к центральному телу точка орбиты), а*  *- угловые элементы орбиты*

**

**Рис. 3.2:** *C - центр эллипса,- перицентр,- апоцентр (самая удаленная от центрального тела точка орбиты),  - истинная аномалия,  - эксцентрическая аномалия.*

Далее выпишем формулы общего решения уравнения движения в эллиптическом случае для истинной аномалии и получим алгоритм нахождения координат тел [7]:

,

** (3.6)





Вычисление координат тела начинается с вычисления средней аномалии по формуле:

 (3.7)

Далее переходим к вычислению средней аномалии, которая связана со средней при помощи уравнения Кеплера:

 (3.8)

В общем виде уравнение Кеплера не решается в алгебраических функциях, однако для решения практических задач существуют численные методы, позволяющие получить приближенное решение. В данной работе мы будем использовать метод простой итерации [7].

 (3.9)

причем производим вычисления до тех пор, пока 

Истинная аномалия связана с эксцентрической при помощи следующей формулы:

 (3.10)

Также в ходе работы нам пригодятся следующие формулы[1,3,6]:

 ( 3.11)

# **3.3.2 Алгоритм нахождения истинной аномалии**

Алгоритм TTA (Time  True Anomaly, нахождение  по )

Начальные данные: Полагаем  («ноль»). Исходные данные в астрономической системе единиц (средние солнечные сутки, масса Солнца, астрономическая единица длины): 





.

# **3.3.3 Алгоритм нахождения радиус вектора**

Алгоритм СalcR0 (нахождение длины вектора  по истинной аномалии):

Для написания алгоритма воспользуемся (3.5)

Входные данные: 

**

# **3.4 Алгоритм вычисления s**

На основе параграфа 2.2 зададим алгоритм для вычисления . Как уже было сказано ранее, решение уравнения для s в случае оскулирующей орбиты задается при помощи (2.19). Рассмотрим частный случай (3.2) этого решения.

Так как (3.11):











Для удобства обозначим:

 (3.12)

Получаем общий вид решения:

 (3.12)

где .

Алгоритм CalcS (вычисление  по ):

 Для написания алгоритма воспользуемся формулами (3.11), (3.12).

Начальные данные: , для вычисления будем использовать описанный выше алгоритм



**4 Численный эксперимент**

# **4.1 Постановка численного эксперимента**

В данном параграфе мы опишем постановку численного эксперимента, проведенного в соответствии с материалами, изложенными выше. В качестве исходных данных будут использоваться данные о следах звезды S-02 используемые в работах [8,10]. Эти данные включают в себя наблюдения с двух обсерваторий за полный период обращения звезды вокруг черной дыры с 1999 по 2016 и представляют собой проекцию координат звезд на базовую плоскость системы координат (центром данной системы является положение центра масс черной дыры, первые две оси – прямые параллельные осям второй экваториальной системы координат, а третья – их декартово произведение). Данные были переведены в астрономическую систему единиц с использованием наилучшей оценки расстояния до черной дыры  [12].

Третью координату получим из соображения что все следы лежат на орбитальной плоскости, тогда третью координату можно получить при помощи следующей формулы:

 (4.1)

где: (параметры кеплеровой орбиты [12])

Прочие параметры, необходимые для определения невозмущенного движения:



За начальный момент времени  возьмем 2001.503. Положение звезды на невозмущенной кеплеровой орбите совпадает с исходными данными с учетом погрешности измерений в этот период.

С этого момента можно начинать поиск минимума нашего функционала. В нашей работе для этого используется функция пакета Wolfram Mathematica NMinimize. В качестве дополнительных параметров укажем метод проведения процедуры минимизации (метод имитации отжига) и количество начальных приближений (20).

Также мы ограничим возможные значения параметров: неизвестная вариация массы будет ограничена в соответствии с известными оценками указанными в работах [8,10,12] (), показатель степени ограничим исходя из предположения что возмущающая сила должна быть малой по сравнению с центральной силой ().

**4.2 Результаты численного эксперимента**

По результатам эксперимента была составлена таблица. Данная таблица состоит из промежутков значений варьируемых величин и соответствующих им наилучших значений функционала, найденных в ходе минимизации. По мере прохождения процедуры минимизации, промежуточные результаты записывались в соответствующие им ячейки таблицы. Если ячейка уже была заполнена, то текущее значение ячейки сравнивалось со значением функционала, и в результате в ячейке оказывалось наименьшее число.

Наилучший результат  соответствует значениям . Для сравнения значение функционала при отсутствии возмущений составляет . Такой результат может являться следствием погрешности в измерениях использованных данных и большому количеству локальных минимумов в указанной области. Также, ввиду того что вариация массы находится близко к границе рассматриваемой области, в будущем возможно проведение дополнительных экспериментов с увеличенными интервалами.

**Заключение и Выводы**

 Перечислим полученные в работе результаты и обсудим перспективы их дальнейшей разработки.

**Полученные автором результаты:**

1. В разделе 1.3 первой главы сделан обзор текущей ситуации в области исследования тел, движущихся на границе с черной дырой в центре галактики.
2. В разделе 3.1 на основе материалов второй главы предложен функционал для определения параметров черной дыры.
3. В разделе 3.2 и 3.3 и в приложении на основе формул для возмущений декартовых координат точки описаны алгоритмы и программы для вычисления функционала определения массы черной дыры и показателя степени в законе тяготения.
4. В разделе 4.2 и в приложении приведены результаты численного эксперимента по определению параметров черной дыры на основе данных по наблюдениям за звездой S0-2.

**Перспективы.** Говоря о перспективах продолжения настоящей работы, естественно отметить следующие направления:

– Создание функционала для определения дополнительных параметров черной дыры.

– Исследование глобального минимума функционала, например, при помощи программы данной в [2].

# **Cписок использованной литературы**

1. *Бабаджанянц, Л.* Аналитические методы вычисления возмущений в координатах планет. / Л. Бабаджанянц // Ленинградский университет, кандидатская диссертация, 1969. 104 с.
2. *Бабаджанянц, А.* Алгоритмы и программы метода градиентных уравненийи идентификация параметров кинетических моделей / А. Бабаджанянц // Санкт-Петербургский государственный университет, дипломная работа, 2002, 31 с.
3. *Брауэр, Д.*  Методы небесной механики / Д. Брауэр, Дж. Клеменс // М.: Мир, 1964. 515 с.
4. *Брэгман, А.* Движение малого тела в возмущенном центральном поле / А. Брэгман // Санкт-Петербургский государственный университет, Магистерская диссертация, 2017. 51 с.
5. *Гуревич, В.* Введение в сферическую астрономию / В. Гуревич // // М.: Наука, 1979. 128 c.
6. *Дубошин, Г.* Небесная механика. Основные задачи и методы. 3-е изд. / Г. Дубошин // М.: Наука, 1975. 800 c.
7. *Субботин, М.* Введение в теоретическую астрономию / М. Субботин // М.: Наука, 1968. 800 с.
8. *Boehle, A.* AN IMPROVED DISTANCE AND MASS ESTIMATE FOR SGR A\* FROM A MULTISTAR ORBIT ANALYSIS // The Astrophysical Journal, Volume 830, Number 1, 2016.
9. *Chu, D.* Investigating the Binarity of S0-2: Implications for Its Origins and Robustness as a Probe of the Laws of Gravity around a Supermassive Black Hole // The Astrophysical Journal, Volume 830, Number 1, 2018.
10. *Gillessen, S*. An Update on Monitoring Stellar Orbits in the Galactic Center // The Astrophysical Journal, Volume 837, Number 1, 2017.
11. *Hill, G.* A method of computing of absolute perturbations / G. Hill// Astr. Nachr. 83, 1874.
12. *The GRAVITY Collaboration*, A geometric distance measurement to the Galactic center black hole with 0.3% uncertainty// A&A, Volume 625, 2019.
13. *Witzel, G*. The Post-periapsis Evolution of Galactic Center Source G1: The Second Case of a Resolved Tidal Interaction with a Supermassive Black Hole // The Astrophysical Journal, Volume 847, Number 1, 2017.

# **Приложения I - II**

# **Приложение I: Программы вычисления функционала**

Здесь приведем тексты программных реализаций всех алгоритмов, описанных в ходе данной работы. Все программы, приведенные здесь, написаны на языке Wolfram Mathematica.

Алгоритм вычисления функционала (см 3.1)

Sumerr=Function[{dm0, \[Epsilon], R, Tdate},

m1 =dm0\*10^6;

Err=0;

v0=CalcTTA[m,m0,a,0,0,-303.652,e];

For [q = 1, q<=Length[Tdate],q++,

vq=CalcTTA[m,m0,a,0,0,Tdate[[q]],e];

Err +=(S[vq, v0,m1, \[Epsilon]]-r0[vq]\*(Sqrt[Total[R[[q]]^2]]-r0[vq]))^2;

(\*Print[(S[m1, \[Epsilon], vq, v0]-r0[vq]\*(Sqrt[Total[R[[q]]^2]]-r0[vq]))];\*)

];

Err];

Алгоритм CalcTTA (данная программа была предоставлена автором [3])

CalcAnomaly[e\_,M\_]:=Block[{\[Epsilon],E,Eprev},\[Epsilon]=10^-11;Eprev=M;E=M+e\*Sin[Eprev];

While[Abs[E-Eprev]>=\[Epsilon],Eprev=E;E=M+e\*Sin[Eprev]];E];

CalcTTA[m\_,m0\_?NumericQ,a\_,M0\_,t0\_,t\_,e\_]:=Block[{n,\[Alpha],\[Beta],v,E,M,\[Mu],k},k=0.01720209895;

\[Mu]=k^2\*(m+Abs[m0]);

n=Sqrt[\[Mu]/a^3];

M=M0+n\*(t-t0);

E=CalcAnomaly[e,M];

\[Alpha]=Sqrt[(1+e)/(1-e)]\*Tan[E/2];

\[Beta]=ArcSin[(2\*\[Alpha])/(1+\[Alpha]^2)];

v=If[0<=\[Alpha]<=1,\[Beta],If[\[Alpha]^2>=1,Pi-\[Beta],2\*Pi+\[Beta]]];

v];

Алгоритм CalcR0 (см. 3.3.2)

p=a\*(1-e^2);

r0[v\_?NumericQ]:= p/(1+e\*Cos[v]

Алгоритм CalcS(см. 3.4)

L[v\_?NumericQ,dm\_?NumericQ,\[Epsilon]\_?NumericQ]:=((-1-\[Epsilon]+r0[v]^\[Epsilon])\*k^2(m0+m)+(-1-\[Epsilon])\*dm\*k^2)/(m\* r0[v]^\[Epsilon])+((-1-\[Epsilon])\*(2+\[Epsilon])\*k^2(m0+dm+m)/m)\*(e/p)\*Sin[v]/ r0[v]^\[Epsilon]+(2\*k^2(m0+m)/m)\*(e/p)\*Sin[v];

G[v\_?NumericQ,v0\_?NumericQ,dm\_?NumericQ,\[Epsilon]\_?NumericQ]:=((-1-\[Epsilon]+r0[v]^\[Epsilon])\*k^2(m0+m)+(-1-\[Epsilon])\*k^2\*dm)/(m\*r0[v]^\[Epsilon])+2\*L[v,dm,\[Epsilon]]-2\*N[L[v0,dm,\[Epsilon]]];

S[Vq\_?NumericQ,V0\_?NumericQ,dm\_?NumericQ,\[Epsilon]\_?NumericQ]:= (r0[Vq]/(k^2\*(m0+m)\*p))\*(Sin[Vq]\*NIntegrate[G[v,V0,dm,\[Epsilon]]\*r0[v]^3\*Cos[v],{v,V0,Vq}]-Cos[Vq]\*NIntegrate[G[v,V0,dm,\[Epsilon]]\*r0[v]^3\*Sin[v],{v,V0,Vq}]);

# **Приложение II: Таблица результатов численного эксперимента**

Здесь приведем таблицу результатов численного эксперимента, описанного в четвертой главе.

Таблица 1 – Результаты численного эксперимента

|  |  |
| --- | --- |
|  | Показатель степени в законе тяготения,  |
| Вариация массы ,  | -0.5 | -0.4 | -0.3 | -0.2 | -0.1 | 0 | 0.1 | 0.2 |
| -0.6 | 5.31e10 | 3.42e11 | 5.53e10 | 4.96e10 | 7.12e10 | 3.92e10 | 5.3e10 | 1.06e11 |
| -0.5 | 6.02e10 | 4.86e10 | 4.92e10 | 7.15e10 | 5.38e10 | 3.87e10 | 5.19e10 | 6.32e10 |
| -0.4 | 3.26e11 | 5.51e10 | 4.91e10 | 5.3e10 | 6.53e10 | 4.07e10 | 1.31e11 | 7.99e10 |
| -0.3 | 5.3e10 | 5.43e10 | 1.05e11 | 6.29e10 | 6.1e10 | 4.26e10 | 2.79e11 | 5.07e10 |
| -0.2 | 4.9e10 | 6.43e10 | 4.78e10 | 2.41e11 | 5.02e10 | 4.47e10 | 2.57e11 | 5.3e10 |
| -0.1 | 3.35e11 | 4.94e10 | 6.85e11 | 6.55e11 | 9.21e10 | 4.51e10 | 1.87e11 | 2.79e11 |
| 0 | 5.2e10 | 6.65e10 | 9.97e10 | 5.46e10 | 7.2e10 | 4.7e10 | 5.52e10 | 7.1e10 |
| 0.1 | 6.91e10 | 3.45e11 | 5.88e10 | 1.24e11 | 7.77e10 | 6.47e10 | 8.83e10 | 5.e10 |
| 0.2 | 5.39e10 | 1.13e12 | 4.84e10 | 1.42e11 | 6.19e10 | 1.32e11 | 7.02e10 | 8.79e10 |
| 0.3 | 6.3e10 | 6.53e10 | 5.16e10 | 8.45e10 | 1.02e11 | 8.95e10 | 5.05e10 | 2.05e11 |
| 0.4 | 1.06e11 | 5.48e10 | 5.14e10 | 5.23e10 | 4.88e10 | 6.61e10 | 1.1e11 | 8.06e10 |
| 0.5 | 7.28e10 | 1.08e11 | 4.93e10 | 4.77e10 | 4.97e10 | 4.85e10 | 1.68e11 | 1.43e11 |
| 0.6 | 7.48e10 | 9.05e10 | 5.21e10 | 4.83e10 | 5.43e10 | 4.85e10 | 5.26e10 | 5.08e10 |

Таблица 1 – Результаты численного эксперимента

|  |  |
| --- | --- |
|  | Показатель степени в законе тяготения,  |
| Вариация массы ,  | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1 |
| -0.6 | 6.45e10 | 4.89e10 | 5.37e10 | 4.34e11 | 6.66e10 | 4.95e10 | 5.42e10 | 5.27e10 |
| -0.5 | 5.8e10 | 1.68e12 | 1.22e11 | 5.18e11 | 4.9e10 | 4.93e10 | 2.72e11 | 1.07e11 |
| -0.4 | 5.04e10 | 5.21e10 | 6.67e10 | 7.45e10 | 4.99e10 | 5.01e10 | 4.97e10 | 4.94e10 |
| -0.3 | 5.03e10 | 8.66e10 | 5.12e10 | 1.87e11 | 4.95e10 | 5.45e10 | 1.01e12 | 5.14e10 |
| -0.2 | 5.18e10 | 1.96e11 | 1.65e11 | 2.56e12 | 5.41e10 | 1.03e11 | 5.06e10 | 6.36e10 |
| -0.1 | 4.91e10 | 1.75e11 | 6.08e10 | 4.83e10 | 5.46e10 | 4.93e10 | 5.5e10 | 8.48e10 |
| 0 | 1.43e12 | 6.08e10 | 5.86e11 | 4.99e10 | 5.75e11 | 5.53e10 | 6.25e10 | 1.62e11 |
| 0.1 | 9.35e11 | 7.54e11 | 5.13e11 | 7.81e10 | 7.22e10 | 5.18e10 | 5.3e10 | 5.03e10 |
| 0.2 | 4.91e10 | 4.85e10 | 2.42e11 | 5.84e10 | 1.06e11 | 4.88e10 | 8.56e10 | 1.44e11 |
| 0.3 | 3.2e11 | 6.24e10 | 2.58e11 | 4.98e10 | 4.95e10 | 5.84e10 | 1.09e11 | 4.8e10 |
| 0.4 | 3.27e11 | 7.07e10 | 3.95e11 | 4.91e10 | 8.23e10 | 1.14e11 | 5.13e10 | 1.63e11 |
| 0.5 | 4.77e10 | 6.38e10 | 1.77e11 | 6.62e10 | 1.58e11 | 4.88e10 | 4.92e10 | 7.53e10 |
| 0.6 | 1.06e11 | 1.55e12 | 1.81e11 | 5.08e10 | 4.91e10 | 5.83e10 | 1.19e11 | 9.01e10 |

Таблица 1 – Результаты численного эксперимента

|  |  |
| --- | --- |
|  | Показатель степени в законе тяготения,  |
| Вариация массы ,  | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.4 | 1.5 | 1.6 | 1.7 | 1.8 |
| -0.6 | 4.96e10 | 5.02e10 | 2.04e11 | 9.12e10 | 7.83e10 | 5.34e10 | 8.28e11 | 1.5e11 |
| -0.5 | 8.2e10 | 3.76e11 | 4.88e10 | 3.76e11 | 1.53e11 | 1.48e11 | 5.17e10 | 1.83e11 |
| -0.4 | 5.7e10 | 4.89e10 | 5.31e10 | 6.53e10 | 4.97e10 | 3.19e11 | 9.07e10 | 5.34e10 |
| -0.3 | 5.19e10 | 8.74e11 | 9.09e10 | 3.47e11 | 6.45e10 | 6.26e10 | 9.53e10 | 1.07e11 |
| -0.2 | 4.89e10 | 7.01e10 | 5.1e11 | 5.22e10 | 6.3e10 | 4.85e10 | 6.12e10 | 4.89e10 |
| -0.1 | 3.69e12 | 1.92e11 | 1.4e11 | 9.1e10 | 5.54e10 | 7.26e10 | 1.35e12 | 1.73e11 |
| 0 | 7.46e10 | 6.07e10 | 5.69e10 | 6.07e10 | 1.25e11 | 9.26e10 | 1.01e11 | 7.28e10 |
| 0.1 | 4.78e10 | 5.45e11 | 4.9e10 | 1.29e11 | 1.28e11 | 6.05e10 | 6.06e10 | 6.79e11 |
| 0.2 | 7.13e10 | 6.89e10 | 7.14e10 | 5.47e10 | 7.74e10 | 5.11e10 | 4.81e10 | 9.53e10 |
| 0.3 | 8.05e10 | 5.56e10 | 7.85e10 | 5.18e10 | 6.98e10 | 1.2e11 | 6.41e11 | 7.9e11 |
| 0.4 | 5.03e10 | 1.83e11 | 5.27e10 | 6.96e10 | 5.72e10 | 9.04e11 | 4.93e10 | 9.03e10 |
| 0.5 | 2.83e12 | 1.5e11 | 5.83e10 | 1.89e11 | 1.57e11 | 4.72e11 | 1.22e11 | 8.35e11 |
| 0.6 | 4.96e10 | 7.83e10 | 1.3e11 | 4.88e10 | 5.33e10 | 2.47e12 | 5.16e10 | 7.e11 |

Таблица 1 – Результаты численного эксперимента

|  |  |
| --- | --- |
|  | Показатель степени в законе тяготения,  |
| Вариация массы ,  | 1.9 | 2 |
| -0.6 | 4.86e10 | 3.22e11 |
| -0.5 | 1.4e11 | 3.77e11 |
| -0.4 | 4.9e10 | 6.53e10 |
| -0.3 | 8.87e10 | 4.8e10 |
| -0.2 | 5.07e10 | 6.29e10 |
| -0.1 | 8.86e10 | 3.9e11 |
| 0 | 5.07e10 | 5.08e10 |
| 0.1 | 4.95e10 | 4.93e10 |
| 0.2 | 7.23e10 | 1.61e11 |
| 0.3 | 4.84e10 | 8.59e10 |
| 0.4 | 1.12e11 | 3.97e11 |
| 0.5 | 4.87e10 | 5.16e10 |
| 0.6 | 3.49e11 | 8.69e10 |