

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Математико-механический факультет

Кафедра прикладной кибернетики

Выпускная квалификационная работа

Анализ дискретной системы синхронизации

Уровень образования: бакалавриат

Направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Основная образовательная программа СВ.5004.2017 «Прикладная математика и информатика»

Профиль «Нелинейная динамика, информатика и управление»



Студент:
Гревцов Матвей Александрович



Научный руководитель:
Профессор кафедры прикладной кибернетики,
д.ф.-м.н. Юлдашев Ренат Владимирович

Рецензент:
Ведущий научный сотрудник кафедры прикладной кибернетики,
д.ф.-м.н. Киселева Мария Алексеевна

Санкт-Петербург 2021

Saint Petersburg State University
Faculty of Mathematics and Mechanics
DEPARTMENT OF APPLIED CYBERNETICS

Bachelor's Thesis

Discrete-time phase-locked loop analysis



Student:
Matvei Grevtsov



Scientific Supervisor:
Associate Professor, Department of Applied Cybernetics,
Dr of Sci
Renat Iuldashev

Reviewer:
Leading Researcher, Department of Applied Cybernetics,
Dr of Sci
Mariia Kiseleva

Saint Petersburg 2021

Содержание

1	Введение	3
2	Включение инвертора в сеть	3
3	Математическая модель СФС	3
3.1	Рабочий режим	4
3.2	Локальный анализ устойчивости и полоса удержания	4
4	Глобальный анализ	5
5	Приложения	12
5.1	Построение фазового портрета для заданных параметров	12
5.2	Функция, возвращающая ширину области притяжения	13
5.3	Параметры, рекомендуемые к использованию	14

1 Введение

Электрические сети — это сложные системы, на которые влияет множество факторов: постоянное включение и отключение нагрузок, неисправности, возникающие из-за ударов молний, а так же ошибки в эксплуатации электрооборудования. Поэтому параметры сети нельзя рассматривать как постоянные величины, их нужно постоянно контролировать, чтобы состояние сети было пригодным для корректной работы таких устройств, как конвертор мощности. Синхронизация с сетью является ключевой задачей при включении конвертора мощности в сеть, в противном случае возможны «скачки» напряжения, приводящие к нежелательным последствиям [7]. Для того, чтобы синхронизировать по частоте выходной сигнал конвертора мощности с эталонным сигналом в сети, на практике используются системы фазовой синхронизации (СФС) (также известны как системы фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ)) — это системы управления, широко распространённые в электросвязи и радиотехнике [3] - [5]. Принцип работы СФС: если частоты (фазы) подстраиваемого и эталонного генераторов не совпадают, то цепь управления, состоящая из фильтра и фазового детектора, меняет фазу подстраиваемого генератора таким образом, чтобы модуль расфазировки (разности фаз) уменьшался. При этом если модуль разности частот эталонного и подстраиваемого генераторов достаточно мал, а расфазировка близка к константе, то говорят, что СФС находится в стационарном режиме [8]. Данная работа посвящена анализу таких параметров для дискретной СФС (рис. 2).

2 Включение инвертора в сеть

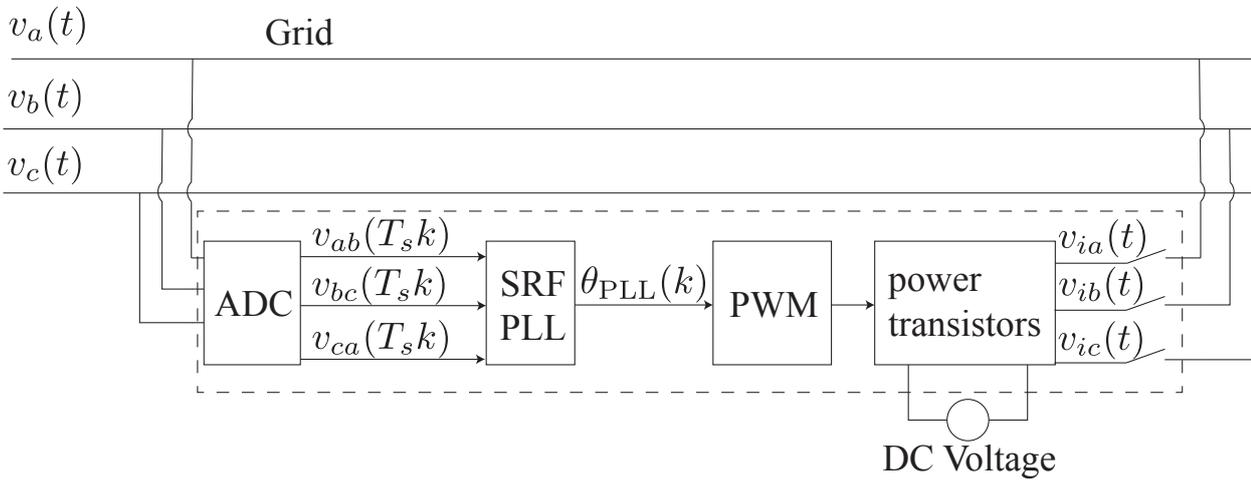


Рис. 1: Включение инвертора в сеть.

Рассмотрим инвертор (рис. 1), подключённый к трёхфазной сети. Перед началом своей работы, инвертор измеряет напряжение в сети: v_a, v_b, v_c . Затем линейные напряжения сети оцифровываются при помощи аналого-цифрового преобразователя (ADC) и подаются на вход СФС (SRF-PLL), которая регулирует фазу выходного напряжения инвертора. Выходная фаза СФС подаётся на вход блока широтно-импульсной модуляции (PWM), который генерирует трёхфазовое переменное напряжение v_{ia}, v_{ib}, v_{ic} путём включения и выключения транзисторов, подключенных к постоянному напряжению.

3 Математическая модель СФС

Рассмотрим модель СФС (рис. 2), где:

1. Входная фаза: $\theta_{ref}(k) = \omega_{ref} \cdot k \cdot T_{sw} \cdot 2\pi + \theta_{ref}(0)$;
2. Подстраиваемая фаза: $\theta_{nco}(k) = (\omega_{nco}^{free} + K_v u_{output}(k-1)) \cdot T_{sw} + \theta_{nco}(k-1)$;
3. Расфазировка: $\theta_e(k) = \theta_{ref}(k) - 2\pi \cdot \theta_{nco}(k)$;
4. Вход фильтра: $u_{input}(k) = \sin(\theta_e(k))$;

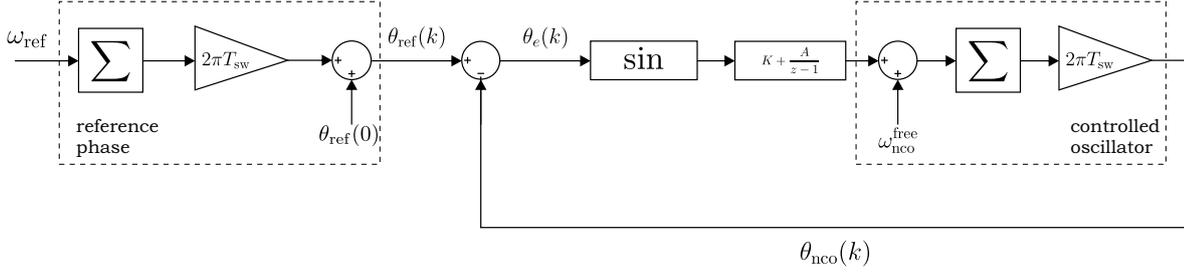


Рис. 2: СФС.

Передаточной функции фильтра:

$$F(z) = K + \frac{A}{z-1}$$

соответствует система, связывающая состояние фильтра x , входящий сигнал фильтра u_{input} , исходящий сигнал фильтра u_{output} :

$$\begin{cases} x(k+1) = x(k) + u_{\text{input}}(k), \\ u_{\text{output}}(k) = Ax(k) + Ku_{\text{input}}(k). \end{cases} \quad (1)$$

таким образом, получаем:

$$\begin{cases} x(k) = x(k-1) + \sin(\theta_e(k-1)), \\ \theta_e(k) = \theta_e(k-1) + 2\pi T_{\text{sw}} \cdot (\omega_e^{\text{free}} - Ax(k-1) - K \sin(\theta_e(k-1))). \end{cases} \quad (2)$$

введём обозначения:

$$a = -2\pi T_{\text{sw}} A, \quad b = -2\pi T_{\text{sw}} K \quad (3)$$

3.1 Рабочий режим

В системе (2) приравняем:

$$x_s := x(k) \equiv x(k-1), \quad \theta_s := \theta_e(k) \equiv \theta_e(k-1)$$

после несложных вычислений, получим состояния равновесия:

$$\theta_s = \pi m, \quad x_s = \frac{\omega_e^{\text{free}}}{A} \quad (\forall m \in \mathbb{Z}) \quad (4)$$

3.2 Локальный анализ устойчивости и полоса удержания

Определение 1. Для фиксированной собственной частоты подстраиваемого генератора $\omega_{\text{nco}}^{\text{free}}$ наибольший интервал разности частот $-\omega_{\text{hold-in}} < \omega_e^{\text{free}} < \omega_{\text{hold-in}}$, при котором ФАПЧ имеет асимптотически устойчивые состояния равновесия, называется полосой удержания, а граничное значение $\omega_{\text{hold-in}}$ определяет ширину такой полосы [8].

Запишем матрицу якоби системы (2):

$$J(\theta_e, x) = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\theta_e) \\ a & 1 + b \cos(\theta_e) \end{pmatrix}$$

характеристический полином:

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + (-b \cos(\theta_e) - 2)\lambda + 1 + (b - a) \cos(\theta_e)$$

воспользуемся «Jury's Stability test»:

$$\begin{cases} \chi(1) = -a \cos(\theta_e) > 0, \\ \chi(-1) = 4 + (2b - a) \cos(\theta_e) > 0, \\ |1 + (b - a) \cos(\theta_e)| < 1. \end{cases}$$

По виду состояний равновесия ясно, что $\cos(\theta_s) = \pm 1$. Поэтому существует 3 ситуации:

1. Если $A = 0$: устойчивые состояния отсутствуют.
2. Если $A > 0$: $(\theta_e = \pi + 2\pi m, x = \frac{\omega_e^{\text{free}}}{A})$ — неустойчиво $\forall m \in \mathbb{Z}$; $(\theta_e = 2\pi m, x = \frac{\omega_e^{\text{free}}}{A})$ — устойчиво $\forall m \in \mathbb{Z} \iff \begin{cases} 4 + (2b - a) \cos(\theta_e) > 0, \\ |1 + (b - a) \cos(\theta_e)| < 1. \end{cases}$
3. Если $A < 0$: $(\theta_e = 2\pi m, x = \frac{\omega_e^{\text{free}}}{A})$ — неустойчиво; $(\theta_e = \pi + 2\pi m, x = \frac{\omega_e^{\text{free}}}{A})$ — устойчиво $\forall m \in \mathbb{Z} \iff \begin{cases} 4 + (2b - a) \cos(\theta_e) > 0, \\ |1 + (b - a) \cos(\theta_e)| < 1. \end{cases}$

Ясно, что мы должны потребовать $A \neq 0$. В силу того, что $\chi(\lambda)$ не зависит от ω_e^{free} , полоса удержания имеет бесконечную ширину.

4 Глобальный анализ

На практике, при включении инвертора в сеть, для правильно работающих устройств отклонение частоты составляет не более 2Гц, а разность фаз напряжений может быть произвольной, поэтому нашей целью является поиск таких параметров схемы, для которых при любой начальной расфазировке θ_e и состоянии фильтра $|x| \leq W$, где $W > 2 \cdot 2\pi$, соответствующая траектория достаточно быстро притягивается к состоянию равновесия.

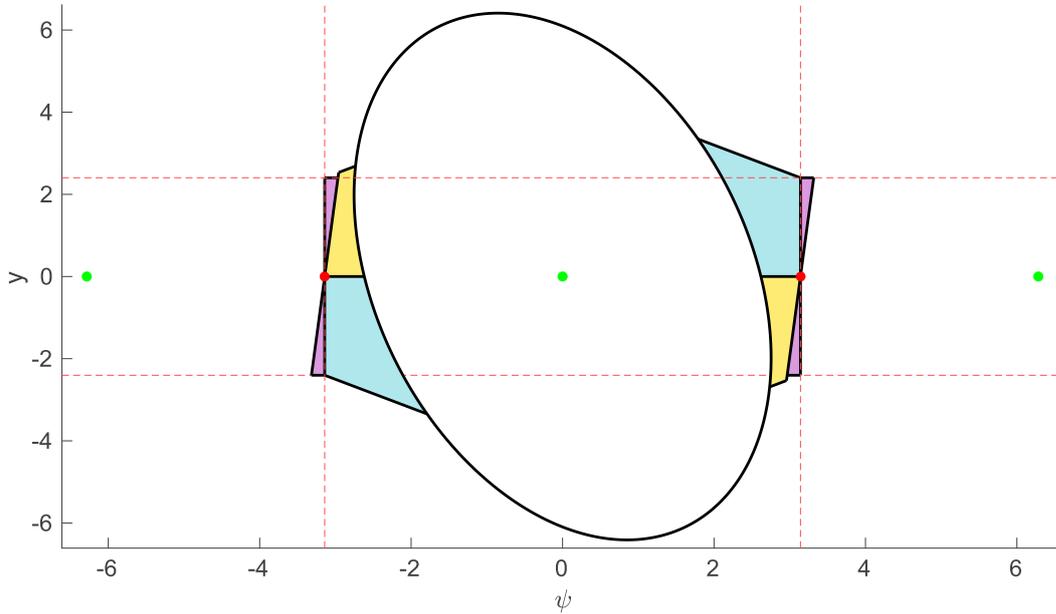


Рис. 3: Разметка фазового портрета. Синим цветом изображено множество Q_1 , жёлтым — Q_2 , розовым — Q_3 . Зелёным — устойчивые состояния равновесия, красным — неустойчивые.

Рассмотрим состояние равновесия (θ_s, x_s) , выполним замену: $\psi(k) := \theta_e(k) - \theta_s$, $y(k) := x(k) - x_s$, получим систему:

$$\begin{cases} \psi(k) = \psi(k-1) + ay(k-1) + b \sin(\psi(k-1) + \theta_s) =: f_\psi(\psi(k-1), y(k-1)), \\ y(k) = y(k-1) + \sin(\psi(k-1) + \theta_s) =: f_y(\psi(k-1), y(k-1)). \end{cases} \quad (5)$$

Для начала мы оценим нашу область притяжения эллипсом, а после расширим оценку до фигуры, которая при размножении по всем периодам даст желаемую полосу шириной W .

Итак, рассмотрим функцию:

$$V_{\text{oval}}(\psi, y) = \frac{(\psi \cos(\alpha) + y \sin(\alpha))^2}{0.4^2} + (-\psi \sin(\alpha) + y \cos(\alpha))^2. \quad (6)$$

Ясно, что уравнение $V_{\text{oval}}(\psi, y) = C$ (C - константа) задаёт эллипс, диагональ которого против часовой стрелки наклонена под углом α от вертикали. Из геометрических соображений мы диагональ эллипса сонаправим с одним из собственных векторов состояния равновесия. Матрица Якоби для системы (5) в точке $(0,0)$:

$$\begin{pmatrix} 1+b & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Собственные числа:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{4a+b^2} + b + 2 \right), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{4a+b^2} + b + 2 \right)$$

Собственные векторы:

$$v_1 = \left(\frac{1}{2} \left(b - \sqrt{4a+b^2} \right), 1 \right), \quad v_2 = \left(\frac{1}{2} \left(b + \sqrt{4a+b^2} \right), 1 \right)$$

Тогда угол α вычислим как угол между вектором v_2 и вертикалью:

$$\alpha(a, b) = \arctan \left(\frac{2}{(b + \sqrt{4a+b^2})} \right) + \frac{\pi}{2} \quad (7)$$

Функцию (6) также удобно рассматривать в виде:

$$V_{\text{oval}}(\psi, y) = Z(a, b)\psi^2 + J(a, b)y^2 + F(a, b)\psi y \quad (8)$$

где

$$Z(a, b) = \frac{\cos^2(\alpha(a, b))}{0.4^2} + \sin^2(\alpha(a, b)) \quad (9)$$

$$J(a, b) = \frac{\sin^2(\alpha(a, b))}{0.4^2} + \cos^2(\alpha(a, b)) \quad (10)$$

$$F(a, b) = 5.25 \sin(2\alpha) \quad (11)$$

Рассмотрим теперь приращение:

$$\begin{aligned} V_{\text{oval}}(f_\psi(\psi, y), f_y(\psi, y)) - V_{\text{oval}}(\psi, y) &= \underbrace{(aF + a^2Z)}_{A_1} y^2 + \underbrace{(2aZ\psi + \sin(\psi)(2abZ + 2J + aF + bF))}_{A_2(\psi)} y + \\ &+ \underbrace{(\sin^2(\psi)(b^2Z + J + bF) + \sin(\psi)(2bZ\psi + F\psi))}_{A_3(\psi)} =: \Delta(\psi, y) \end{aligned} \quad (12)$$

$\Delta(\psi, y)$ рассмотрим как квадратичную функцию от y с дискриминантом:

$$D(\psi) = A_2^2(\psi) - 4A_1A_3(\psi) \quad (13)$$

Заметим, что $D(0) = 0$:

$$D(0) = \underbrace{\sin^2(0)}_{=0} \left((2abZ + 2J + aF + bF)^2 - 4A_1(b^2Z + J + bF) \right)$$

А тогда, если дискриминант является выпуклой в нуле функцией:

$$D''(0) < 0, \quad (14)$$

то существует проколотая окрестность нуля с радиусом r : $U_\psi(0, r)$, в которой $D(\psi) < 0$. При этом ясно, что r — модуль наименьшего по модулю ненулевого корня $D(\psi)$. Если мы дополнительно потребуем:

$$A_1 < 0, \quad (15)$$

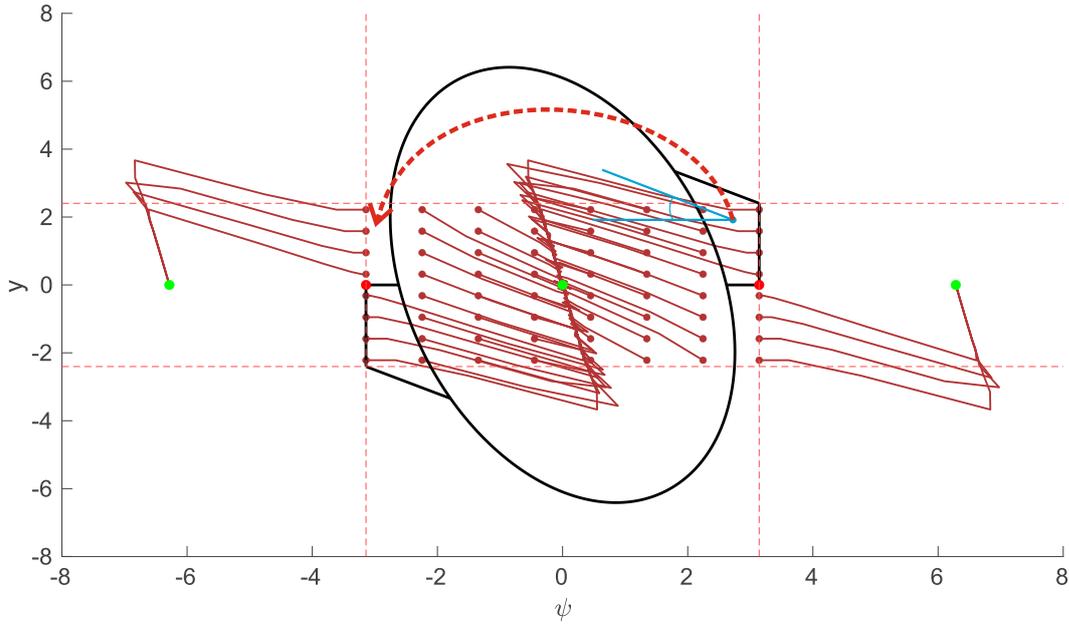


Рис. 4: Движение траекторий с начальными данными из Q_1 в сторону «овальной» оценки области притяжения. Красной пунктирной стрелкой показано ошибочное движение траекторий.

то, ввиду отрицательного дискриминанта, неравенство $\Delta(\psi, y) < 0$ будет выполнено $\forall y, \forall \psi \in U_\psi(0, r)$.

$$D''(\psi) = 2 \cdot (2abZ + 2J + aF + bF)^2 \cos(2\psi) - 4(2abZ + 2J + aF + bF)(aZ)(\psi \sin(\psi) - 2 \cos(\psi)) + 4 \cdot (aF + a^2Z)((2bZ + F)(\psi \sin(\psi) - 2 \cos(\psi)) - 2(b^2Z + J + Fb) \cos(2\psi)) + 8(aZ)^2. \quad (16)$$

Обозначим $\omega(a, b) := D''(0)$:

$$\omega(a, b) = 2b^2 (F(a, b))^2 + \left(a \left(16Z(a, b) J(a, b) - 4(F(a, b))^2 - 8F(a, b) Z(a, b) \right) + 8F(a, b) J(a, b) \right) \cdot b + \left(2(F(a, b))^2 + 8(Z(a, b))^2 - 8Z(a, b) J(a, b) \right) a^2 + 8(J(a, b))^2 + \left(16J(a, b) Z(a, b) - 8(F(a, b))^2 \right) a$$

Следовательно множество пар (a, b) , для которых можно применить «овальную» оценку имеет вид:

$$\Omega_{ab} = \{(a, b) : \omega(a, b) < 0, A_1(a, b) < 0\} \quad (17)$$

При этом область притяжения есть овал $O := \{(\psi, y) : V_{\text{oval}}(\psi, y) \leq R_{\text{oval}}\}$, где R_{oval} такое наибольшее значение «радиуса», что:

$$O \subseteq \{(\psi, y) : \Delta(\psi, y) < 0\} \quad (18)$$

Верхняя часть O ($y > 0$) описывается двумя кривыми:

$$y = \frac{-F\psi \pm \sqrt{(F^2 - 4JZ)\psi^2 + 4JR_{\text{oval}}}}{2J}$$

При увеличении R_{oval} овал O касается одной из кривых, описывающих множество (18):

$$y = \frac{\left(-A_2(\psi) + \sqrt{(A_2(\psi))^2 - 4A_1A_3(\psi)} \right)}{2A_1}$$

Как известно, графики функций касаются в некоторой точке, если в этой точке совпадают значения этих функций и значения их производных. Поэтому R_{oval} мы можем найти из системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{-F\psi \pm \sqrt{(F^2 - 4JZ)\psi^2 + 4JR_{\text{oval}}}}{2J} = \frac{\left(-A_2(\psi) + \sqrt{(A_2(\psi))^2 - 4A_1A_3(\psi)} \right)}{2A_1}, \\ \frac{d}{d\psi} \left(\frac{-F\psi \pm \sqrt{(F^2 - 4JZ)\psi^2 + 4JR_{\text{oval}}}}{2J} \right) = \frac{d}{d\psi} \left(\frac{\left(-A_2(\psi) + \sqrt{(A_2(\psi))^2 - 4A_1A_3(\psi)} \right)}{2A_1} \right). \end{array} \right. \quad (19)$$

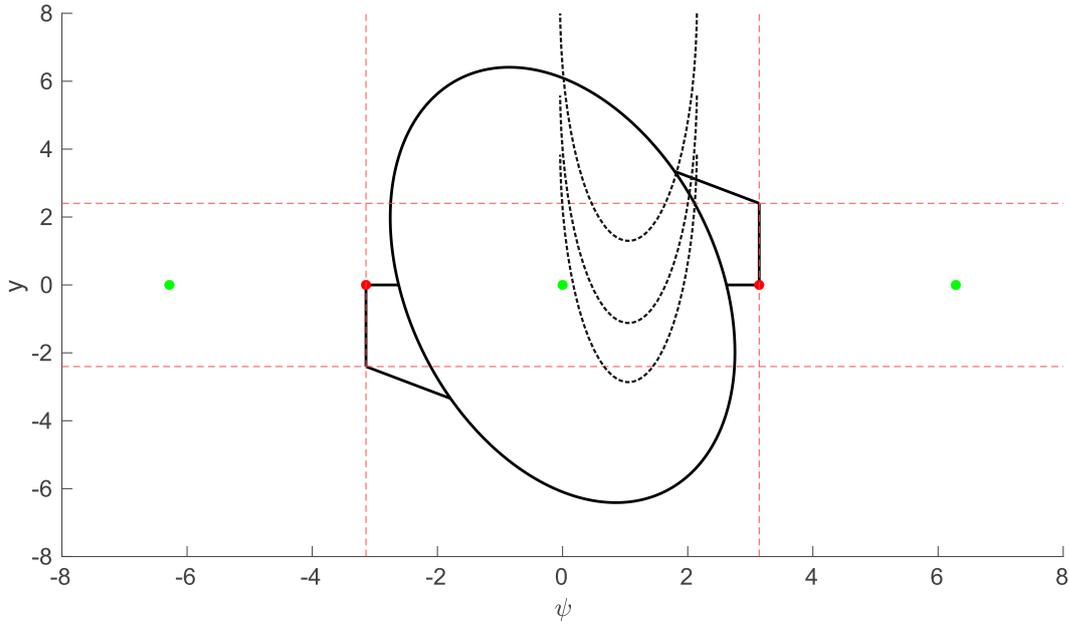


Рис. 5: Графическая интерпретация экстремальной задачи по поиску максимального смещения влево траектории с начальными данными из Q_1 .

Теперь из множества Ω_{ab} выделим прямоугольник:

$$a \in [-0.413, -0.195], \quad b \in [-1.5, -1.29] \quad (20)$$

Если мы для таких параметров выполним обратную замену (3), то получим, что значению $\theta_s = 2\pi k, \forall k \in \mathbb{Z}$ соответствуют асимптотически устойчивые состояния равновесия. Ввиду 2π -периодичности фазового портрета нам достаточно рассмотреть случай $\theta_s = 0$ и систему (5) переписать в более удобном виде:

$$\begin{cases} \psi(k) = \psi(k-1) + ay(k-1) + b \sin(\psi(k-1)), \\ y(k) = y(k-1) + \sin(\psi(k-1)). \end{cases} \quad (21)$$

Покажем, что для таких параметров наш овал можно расширить до желаемой полоски. Введём в рассмотрение ещё одну функцию:

$$V_{\text{rhombus}}(\psi, y) = |\psi| + T|y| \quad (22)$$

где

$$T(a, b) = \min \left(\frac{(a - b + \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab - 4a})}{2}, -b \right) \quad (23)$$

Разметим наш фазовый портрет на множества Q_1, Q_2, Q_3 (см. рис.3):

$$Q_1 : \begin{cases} V_{\text{oval}}(\psi, y) \geq R_{\text{oval}}, \\ V_{\text{rhombus}}(\psi, y) \leq V_{\text{rhombus}}(\psi_0, y_0), \\ \psi \cdot y \geq 0, \\ |\psi| \leq \pi. \end{cases} \quad (24)$$

$$Q_2 : \begin{cases} V_{\text{oval}}(\psi, y) \geq R_{\text{oval}}, \\ V_{\text{rhombus}}(\psi, y) \leq V_{\text{rhombus}}(\psi_0, y_0), \\ \psi \cdot y \leq 0, \\ \text{sign}(\psi) y \geq -\frac{b}{a} \sin(\psi) \text{sign}(\psi). \end{cases} \quad (25)$$

$$Q_3 : \begin{cases} \text{sign}(\psi) y \geq -\frac{b}{a} \sin(\psi) \text{sign}(\psi), \\ |y| \leq W, \\ \pi \leq |\psi| \leq \frac{3\pi}{2}. \end{cases} \quad (26)$$

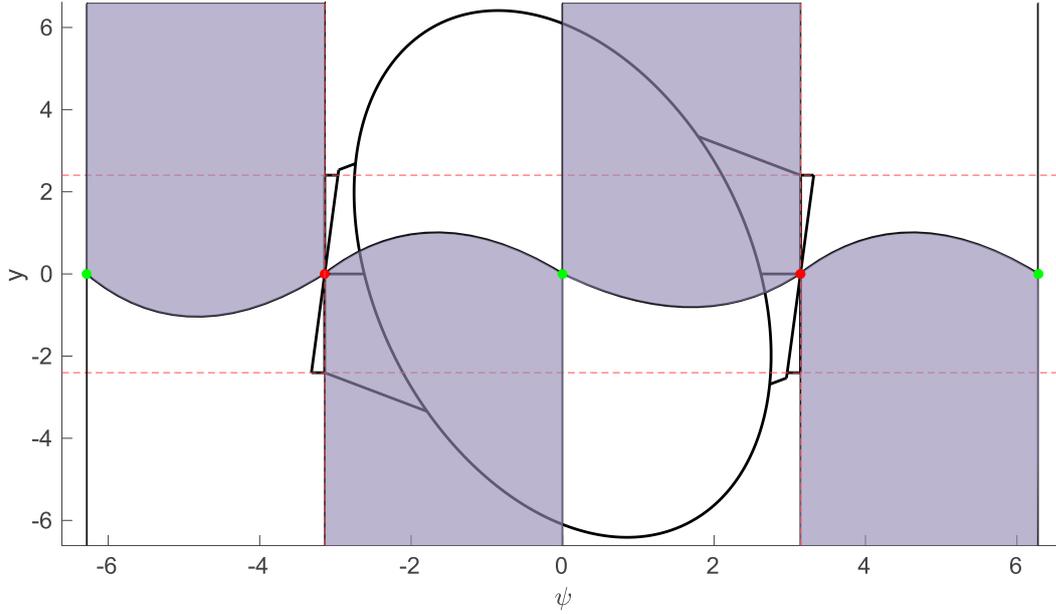


Рис. 6: $Q_1 \subset B_1$.

где (ψ_0, y_0) — решение системы:

$$\begin{cases} V_{\text{oval}}(\psi, y) = R_{\text{oval}}, \\ y = -\frac{2}{a}\psi + \frac{(T-b)}{a} \sin(\psi). \end{cases} \quad (27)$$

И покажем, что любая траектория с начальными данными из Q_1, Q_2 или Q_3 в некоторый момент времени попадает в O , а, следовательно, притягивается к состоянию равновесия.

Утверждение 1. Рассмотрим произвольные начальные данные $(\psi(0), y(0)) \in Q_1$. Тогда соответствующая траектория $\gamma = \{(\psi(0), y(0)), (\psi(1), y(1)), \dots\}$ притягивается к состоянию равновесия $(0, 0)$.

Доказательство. Введём функцию приращения по ψ , которая показывает на сколько траектория сместится влево в следующий момент времени, если в данный момент времени она находится в точке (ψ_0, y_0) :

$$\Delta_\psi(\psi_0, y_0) := ay_0 + b \sin(\psi_0) \quad (28)$$

Определим множество:

$$B_1 := \{(\psi, y) : \underbrace{|f_y(\psi, y)| - |y|}_{|y + \sin(\psi)| - |y|} \geq 0\}$$

такое множество ограничено двумя кривыми:

$$y = -0.5 \sin(\psi)$$

$$\sin(\psi) = 0$$

при этом ясно, что $Q_1 \subset B_1$ (см. рис.(6)).

Определим множество:

$$B_2 := \{(\psi, y) : \underbrace{V_{\text{rhombus}}(f_\psi(\psi, y), f_y(\psi, y)) - V_{\text{rhombus}}(\psi, y)}_{|\psi + ay + b \sin(\psi)| + T|y + \sin(\psi)| - |\psi| - T|y|} < 0\}$$

То, что $Q_1 \subset B_2$ тоже легко проверяется (см. рис. (7)). Т.к. $Q_1 \subset B_1 \cap B_2$, то каждая следующая точка траектории обязана иметь большую y -координату, чем предыдущая, но при этом обязана лежать в меньшем ромбе, чем предыдущая. Т.е. следующая точка траектории после $(\psi(0), y(0))$ обязана двигаться под углом $\beta = \arctan\left(\frac{1}{T(a,b)}\right)$ (угол между стороной ромба и горизонталью) в сторону овала (см. рис.(4)).

Покажем теперь, что γ не сможет «перепрыгнуть» из Q_1 через овал O (см. рис. (4)).

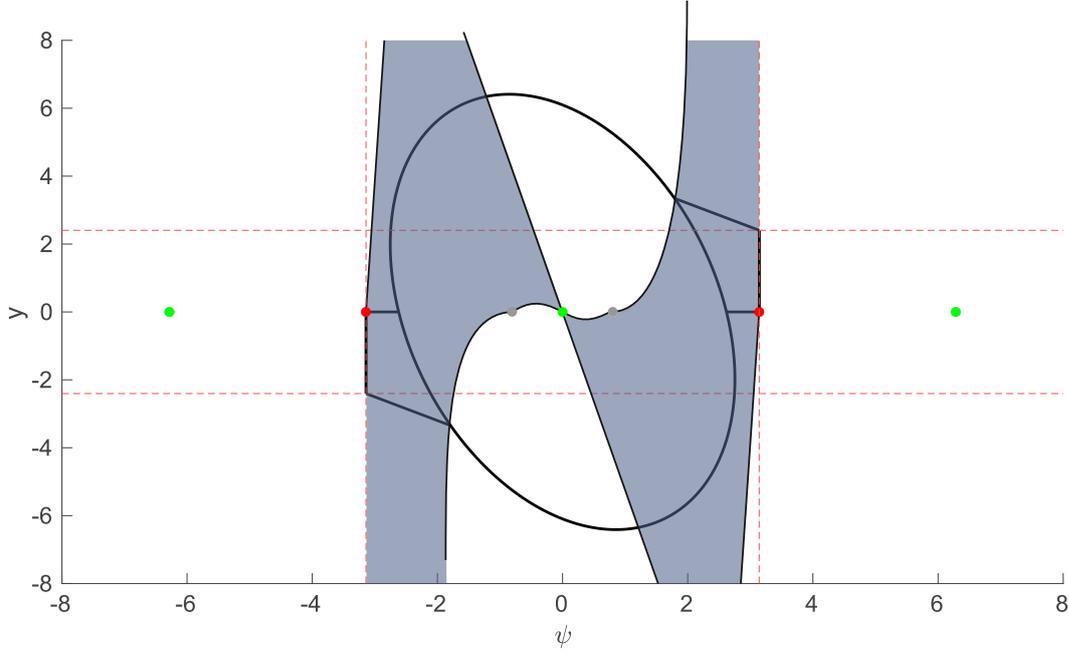


Рис. 7: $Q_1 \subset B_2$.

Для этого, очевидно, нужно найти $M := \sup_{(\psi_0, y_0) \in Q_1} |\Delta_\psi(\psi_0, y_0)|$. За $(\psi_{\text{sup}}, y_{\text{sup}})$ обозначим точку, в которой достигается супремум M . Рассмотрим уравнение:

$$\Delta_\psi(\psi, y) = M \iff ay + b \sin(\psi) = M \iff y = -\frac{b}{a} \sin(\psi) + \frac{M}{a}$$

$y = -\frac{b}{a} \sin(\psi) + \frac{M}{a}$ — это синус с амплитудой $-\frac{b}{a}$, смещённый вверх на $\frac{M}{a}$. Найти M — это всё равно, что найти максимальное значение смещения $\frac{M}{a}$, при котором функция $y = -\frac{b}{a} \sin(\psi) + \frac{M}{a}$ будет хотя бы в одной точке пересекать Q_1 . И графически видно (см. рис. (5)), что эта самая единственная точка — это крайняя точка (ψ_0, y_0) .

$$\Delta_\psi(\psi_0, y_0) = ay_0 + b \sin(\psi_0)$$

После «максимального прыжка» траектория будет находиться в точке:

$$(\psi_0 - ay_0 - b \sin(\psi_0), y_0)$$

такая точка будет принадлежать овалу O , если:

$$V_{\text{oval}}(\psi_0 - ay_0 - b \sin(\psi_0), y_0) \leq R_{\text{oval}}$$

последнее неравенство для параметров (20) будет выполнено. \square

Утверждение 2. Рассмотрим произвольные начальные данные $(\psi(0), y(0)) \in Q_2$, тогда соответствующая траектория $\gamma = \{(\psi(0), y(0)), (\psi(1), y(1)), \dots\}$ притягивается к равновесию $(0, 0)$.

Доказательство. Определим множество:

$$B_3 := \{(\psi, y) : \underbrace{|f_\psi(\psi, y)| - |\psi|}_{|\psi + ay + b \sin(\psi)| - |\psi|} < 0\}$$

$Q_2 \subset B_3$, т.к. у этих множеств есть общая граница $y = -\frac{b}{a} \sin(\psi)$. $Q_2 \subset B_2$, потому что если мы рассмотрим границу Q_2 : $y = -\frac{b}{a} \sin(\psi)$ и границу B_2 : $y = \frac{T(a,b)-b}{a} \sin(\psi)$, то заметим, что обе эти границы — синусы, причём амплитуда первого синуса меньше, чем у второго при наших параметрах: $-\frac{b}{a} < \frac{T(a,b)-b}{a}$. Таким образом, $Q_2 \subset B_2 \cap B_3$.

Следовательно, каждая последующая точка после (ψ_0, y_0) обязана лежать в меньшем шестиугольнике, чем предыдущая, тем самым попадая либо в Q_1 , либо в O . А это значит, что траектория притянется к $(0, 0)$. \square

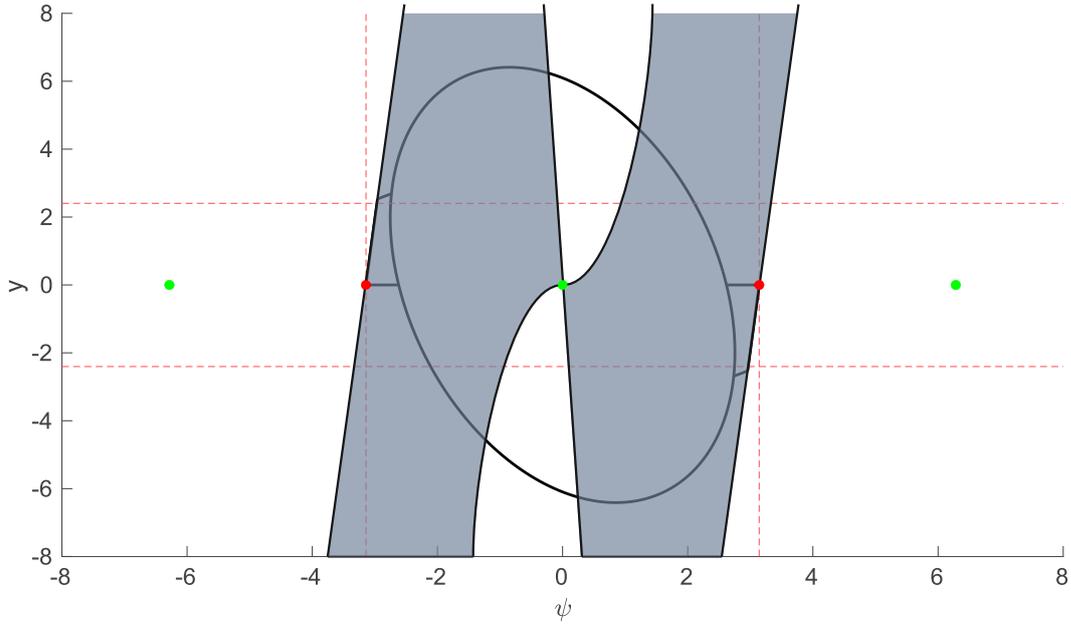


Рис. 8: $Q_2 \subset B_3$.

Утверждение 3. Рассмотрим произвольные начальные данные $(\psi(0), y(0)) \in Q_3$. Тогда соответствующая траектория $\gamma = \{(\psi(0), y(0)), (\psi(1), y(1)), \dots\}$ притягивается к состоянию равновесия $(0, 0)$.

Доказательство. Ясно, что $Q_3 \subset \overline{B_1}$ (см. рис. (6)). А это значит, что каждая последующая точка траектории имеет меньшую по модулю y -координату, чем предыдущая. Поэтому траектория в некоторый момент времени обязана покинуть Q_3 , иначе она притянется к неустойчивому состоянию, что невозможно. Покидая Q_3 , траектория попадает в одно из множеств Q_1, Q_2, O , а, следовательно, притягивается к состоянию равновесия $(0, 0)$. \square

Таким образом, мы можем записать алгоритм, позволяющий для заданных $a = -2\pi T_{sw}A$, $b = -2\pi T_{sw}K$, оценить ширину области притяжения:

1. Выбираем параметры (a, b) из множества (20).
2. Вычисляем угол между собственным вектором состояния равновесия и вертикалью по формуле (7).
3. Вычисляем коэффициенты F, Z, J, T по формулам (11), (9), (10), (23) соответственно.
4. Вычисляем радиус «овальной» оценки из системы (19).
5. Вычисляем (ψ^*, y^*) из системы (27).
6. Вычисляем ширину области притяжения по формуле:

$$W(a, b) = \max\left(\frac{|\psi^*| + T|y^*| - \pi}{T}, 0\right) \quad (29)$$

По данному алгоритму была составлена программа в «Matlab» (см. пункт 5.2 данной работы).

5 Приложения

5.1 Построение фазового портрета для заданных параметров

```
a = -0.213;
b = -1.5;
stopTime = 30;

hold on
F = gcf;
set(gca, 'FontSize', 25);
set(gcf, 'Name', 'Phase Portrait DPLL');
set(gcf, 'renderer', 'Painters');
xlabel('\psi');
ylabel('y');

psi = zeros(1, stopTime);
y = zeros(1, stopTime);

W = 2;

psi_start = -pi;
psi_end = pi;
y_start = -W;
y_end = W;
psi_number_of_points = 7;
y_number_of_points = 7;

for psi_0 = psi_start:((psi_end-psi_start)/psi_number_of_points):psi_end
    for y_0 = y_start:((y_end-y_start)/y_number_of_points):y_end
        psi(1) = psi_0;
        y(1) = y_0;
        for k=2:stopTime
            psi(k) = psi(k-1) + a*y(k-1) + b*sin(psi(k-1));
            y(k) = y(k-1) + sin(psi(k-1));
        end
        plot(psi, y, 'LineWidth', 2, 'Color', '[0.7 0.2 0.2]');
        plot(psi(1), y(1), '.', 'MarkerSize', 25, 'Color', '[0.7 0.2 0.2]');
    end
end

end

% Asymptotically stable equilibrium states:
plot(-2*pi, 0, '.', 'MarkerSize', 35, 'Color', 'g');
plot(0, 0, '.', 'MarkerSize', 35, 'Color', 'g');
plot(2*pi, 0, '.', 'MarkerSize', 35, 'Color', 'g');

% Asymptotically unstable equilibrium states:
plot(pi, 0, '.', 'MarkerSize', 35, 'Color', 'r');
plot(-pi, 0, '.', 'MarkerSize', 35, 'Color', 'r');

yline(W, '--r');
yline(-W, '--r');

hold off
```

5.2 Функция, возвращающая ширину области притяжения

```

function res = W(a, b)
    syms Psi;
    syms y;
    syms R;

    alpha = vpa(atan(2/(b+sqrt(4*a+b^2))) + pi/2);
    Z = vpa((cos(alpha)/0.4)^2 + (sin(alpha))^2);
    J = vpa((sin(alpha)/0.4)^2 + (cos(alpha))^2);
    F = vpa(5.25*sin(2*alpha));
    T = vpa(min((a-b+sqrt(a^2+b^2-2*a*b-4*a))/2,-b));

    [sol_Psi, R_oval] = vpasolve([diff((-2*a*Z*Psi+sin(Psi)*(2*a*b*Z+2*J+a*F+b*F))
+sqrt((2*a*Z*Psi+sin(Psi)*(2*a*b*Z+2*J+a*F+b*F))^2 - 4*(a*F+a^2*Z)*(sin(Psi)*(sin(Psi)
*(b^2*Z+J+F*b)+2*b*Z*Psi+F*Psi))))
/(2*(a*F+a^2*Z)),Psi)==diff((-F*Psi+sqrt((F^2-4*J*Z)*Psi^2+4*J*R))/(2*J),Psi),(-2*a*Z
*Psi+sin(Psi)*(2*a*b*Z+2*J+a*F+b*F))+
sqrt((2*a*Z*Psi+sin(Psi)
*(2*a*b*Z+2*J+a*F+b*F))^2 - 4*(a*F+a^2*Z)*(sin(Psi)*(sin(Psi)
*(b^2*Z+J+F*b)+2*b*Z*Psi+F*Psi))))/
(2*(a*F+a^2*Z))]==(-F*Psi+sqrt((F^2-4*J*Z)*Psi^2+4*J*R))/(2*J)], [Psi R], [-3.15 0; 0 50]);

if(length(R_oval)==0)
    [sol_Psi, R_oval] = vpasolve([diff((-2*a*Z*Psi+sin(Psi)*(2*a*b*Z+2*J+a*F+b*F))
+sqrt((2*a*Z
*Psi+sin(Psi)*(2*a*b*Z+2*J+a*F+b*F))^2
- 4*(a*F+a^2*Z)*(sin(Psi)
*(sin(Psi)*(b^2*Z+J+F*b)+2*b
*Z*Psi+F*Psi))))
/(2*(a*F+a^2
*Z)),Psi)==diff((-F*Psi-sqrt((F^2-4*J*Z)*Psi^2+4*J*R))/(2*J),Psi),(-2*a*Z*Psi
+sin(Psi)
*(2*a*b*Z+2*J+a*F+b*F))+sqrt((2*a*Z*Psi+sin(Psi)
*(2*a*b*Z
+2*J+a*F+b*F))^2 - 4*(a*F+a^2*Z)*(sin(Psi)*(sin(Psi)
*(b^2*Z+J+F*b)
+2*b*Z*Psi+F*Psi))))
/(2*(a*F+a^2
*Z))]==(-F*Psi-sqrt((F^2-4*J*Z)*Psi^2+4*J*R))/(2*J)], [Psi R], [-3.15 0; 0 50]);
end

[sol_Psi, sol_y] =
vpasolve([Z*Psi^2+J*y^2+F*Psi*y==R_oval, y==-2/a*Psi+(T-b)/a*sin(Psi)], [Psi y], [0 3.15; 0 50]);
res = vpa(max(0, (abs(sol_Psi)+T*abs(sol_y)-pi)/T));
end

```

5.3 Параметры, рекомендуемые к использованию

В таблице зелёным цветом отмечены параметры, для которых ширина области притяжения превосходит 2.

$b \backslash a$	-0.413	-0.393	-0.373	-0.353	-0.333	-0.313	-0.293	-0.273	-0.253	-0.233	-0.213
-1.5	0	0	0.044872	0.26633	0.5097	0.77518	1.0625	1.3709	1.6988	2.0441	2.4038
-1.48	0	0	0	0.21976	0.46224	0.72737	1.015	1.3243	1.6538	2.0016	2.3645
-1.46	0	0	0	0.17182	0.41336	0.67807	0.96586	1.2761	1.6073	1.9574	2.3236
-1.44	0	0	0	0.1224	0.36295	0.62718	0.91511	1.2262	1.559	1.9116	2.2809
-1.42	0	0	0	0.071403	0.3109	0.5746	0.86262	1.1745	1.5089	1.8639	2.2365
-1.4	0	0	0	0.018675	0.25711	0.52023	0.80828	1.1209	1.4569	1.8143	2.1901
-1.38	0	0	0	0	0.20142	0.46393	0.75198	1.0653	1.4028	1.7626	2.1417
-1.36	0	0	0	0	0.14366	0.40556	0.69358	1.0076	1.3466	1.7088	2.0913
-1.34	0	0	0	0	0.083615	0.34495	0.63293	0.9476	1.2881	1.6527	2.0385
-1.32	0	0	0	0	0.021032	0.28188	0.56986	0.8852	1.2272	1.5943	1.9834
-1.3	0	0	0	0	0	0.21609	0.50414	0.82019	1.1637	1.5332	1.9258

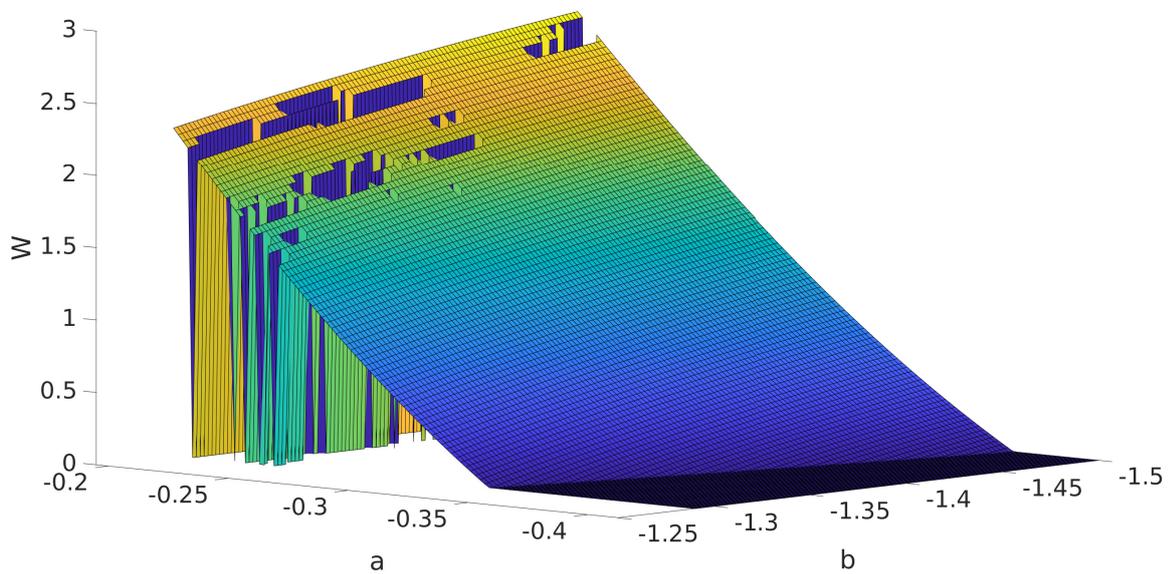


Рис. 9: Зависимость ширины области притяжения W от параметров a и b .

Список литературы

- [1] Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Yuldashev M.V., Yuldashev R.V «Solution of the Gardner problem on the lock-in range of phase-locked loop», arXiv:1705.05013v1 [math.DS] 14 May 2017.
- [2] Леонов Г.А, Селеджи С.М. «Системы фазовой синхронизации в аналоговой и цифровой схемотехнике», 2002.
- [3] Кузнецов Н.В. «Аналитико-численные методы исследования скрытых колебаний», 2016.
- [4] Линдсей В. «Системы синхронизации в связи и управлении. М.Ж Советское радио», 1978.
- [5] Шахгильдян В. В., Ляховкин А.А. «Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь», 1972.
- [6] Gennady A. Leonov, Nikolay V. Kuznetsov, Marat V. Yuldashev, Renat V. Yuldashev «Hold-In, Pull-In, and Lock-In Ranges of PLL Circuits: Rigorous Mathematical Definitions and Limitations of Classical Theory», 2015.
- [7] Remus Teodorescu, Marco Liserre and Pedro Rodríguez «Grid Converters for Photovoltaic and Wind Power Systems», 2011.
- [8] Кузнецов Н.В., Андриевский Б.Р., Юлдашев М.В., Юлдашев Р.В. «Математическое моделирование в проектировании управляемых систем», 2018.