Санкт-Петербургский государственный университет

Водолага Вероника Вадимовна

Выпускная квалификационная работа

Управление движением манипулятора в пространстве координат инструмента

Уровень образования: бакалавриат

Направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Основная образовательная программа СВ.5005.2017 «Прикладная математика, фундаментальная информатика и программирование»

Профиль «Механика управляемого движения»

Научный руководитель:

доцент, кафедра механики управляемого движения,

к.ф. –м.н., Шиманчук Дмитрий Викторович

Рецензент:

главный администратор CRIS-системы PURE

СПбГУ, к.ф.-м.н., Лепихин Тимур Андреевич

Санкт-Петербург

2021

Оглавление

Введение

Применение автоматизированных решений набирает огромную популярность на действующих производственных предприятиях. Современные промышленные роботы-манипуляторы применимы для замены человеческого труда. Традиционно они используются, например, для точечной сварки, для фасовки и упаковки продукции в фармацевтической промышленности. Применение роботов особенно эффективно на вредных производствах, оказывающих негативное влияние на человека, например, в химической промышленности.

Рис. 1 Робот FANUC M-710iC Рис. 2 Робот ABB IRB 7600

На Рис. 1 изображен 6-осевой робот грузоподъемностью до 70 кг одной из ведущих компаний по производству роботов FANUC Robotics. Его используют для погрузочно-разгрузочных работ, сборки и передачи деталей.

На Рис. 2 изображен 6-осевой робот грузоподъемностью до 500 кг шведско-швейцарской компании ABB, используемый для точечной сварки и обслуживания станков.

Но применение роботов-манипуляторов не ограничивается промышленной сферой.

Например, на марсоходе третьего поколения Curiosity, разработанном для исследования кратера Гейла на Марсе в рамках миссии NASA, установлен трехсуставный манипулятор, благодаря которому обеспечиваются многие исследовательские возможности марсохода, такие как детализированные цветные макрофотографии, буровые работы, загрузка грунта во внутренние исследовательские приборы.

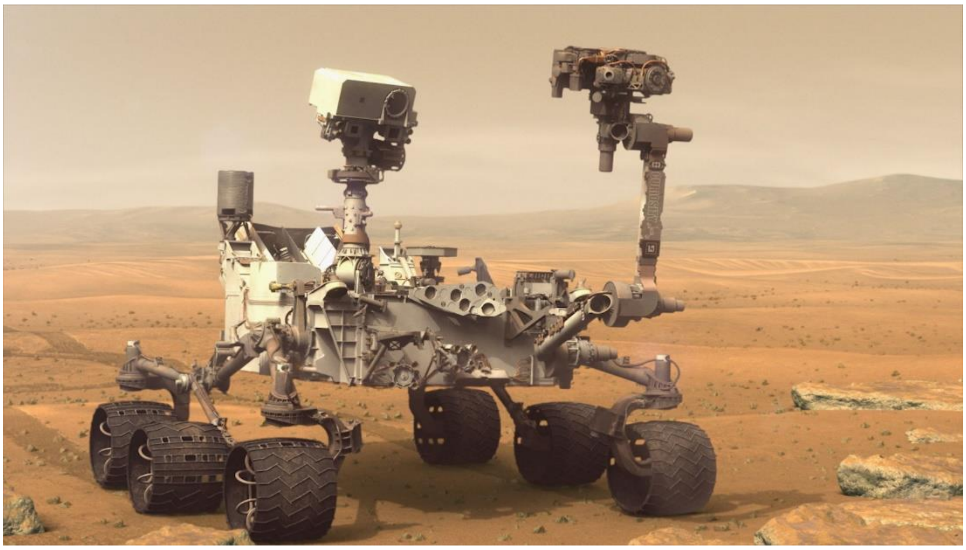


Рис. 3 Марсоход Curiosity

В связи с большим интересом к робототехнике, в настоящее время ставится и решается немало задач об управлении движением роботов-манипуляторов.

Постановка задачи

Объектом исследования в данной работе является робот-манипулятор, кинематическая схема которого изображена на Рис.1.

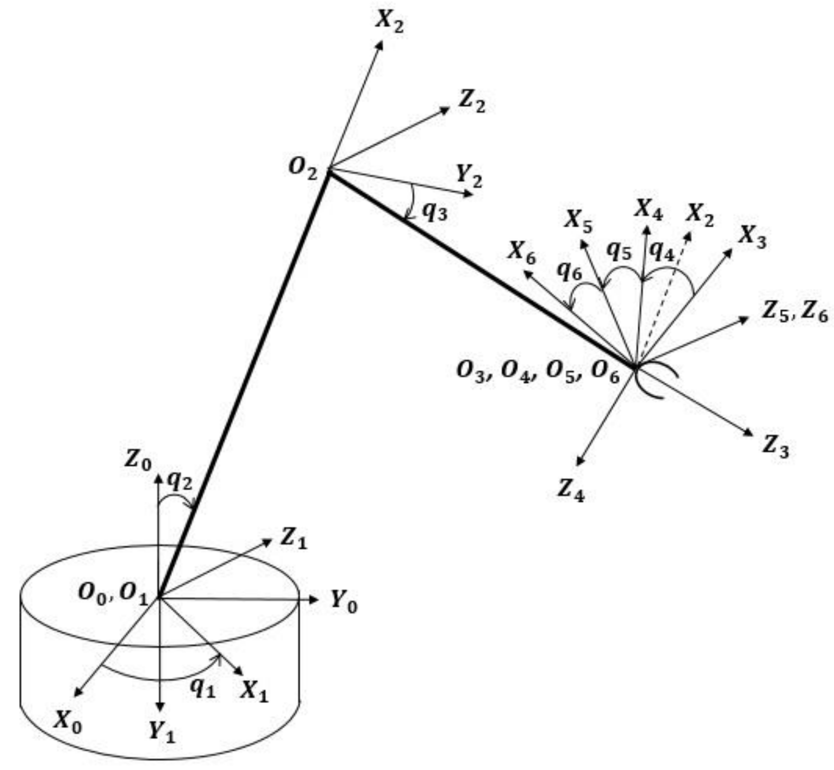


Рис. 4. Кинематическая схема робота-манипулятора

Для наглядности рассмотрим ориентирующие системы координат на Рис. 5.

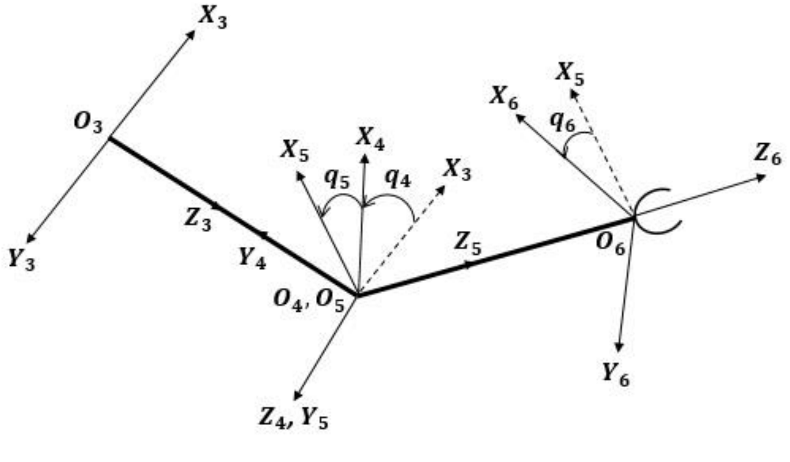


Рис. 5 Ориентирующие системы координат

Система $O_0X_0Y_0Z_0$ – система координат основания. Звено O_1O_2 связано с основанием шаровым шарниром [1], способным вращаться по двум осям: вращение вокруг вертикальной оси Z_0 и наклон в сторону от нее. На схеме данные вращения заданы как два сочленения, центры вращения которых: точки O_0 и O_1, совпадают. Длины звеньев O_1O_2 и O_2O_3 заданы, постоянны и равны соответственно l_1 и l_2. Длины звеньев O_3O_4, O_4O_5 и O_5O_6 возьмем равными нулю.

Обобщенными координатами перехода из нулевой в первую и из первой во вторую системы координат являются углы – q_1, отвечающий за поворот вокруг оси O_0Z_0, и q_2, отвечающий за поворот вокруг оси O_1Z_1. Обобщенная координата перехода из второй в третью систему координат – угол q_3 поворота звена O_2O_3 вокруг оси O_2Z_2. Обобщенными координатами перехода из третьей в четвертую, из четвертой в пятую и из пятой в шестую системы координат являются углы q_4, q_5, q_6 поворота вокруг осей O_3Z_3, O_4Z_4 и O_5Z_5 соотвественно.

Целью данной работы является определение программного движения рассматриваемого манипулятора на основании программного движения инструмента.

Обзор источников

Множество работ [1–6] посвящено проблемам управления движением робота-манипулятора, что свидетельствует о высоком интересе к данной области со стороны как промышленности, так и современных научных сообществ.

Задачей кинематики является аналитическое описание пространственного расположения манипулятора в зависимости от времени, и, в частности, установление связи между значениями обобщенных координат манипулятора и положением и ориентацией его схвата в декартовом пространстве.

Кинематика манипулятора отвечает на два основных вопроса, связанных с особенностями геометрии манипулятора [1-3]:

1. Какими будут конечные положение и ориентация инструмента манипулятора при заданных углах в сочленениях? Ответ на этот вопрос даёт решение прямой задачи кинематики.
2. Какими должны быть углы в сочленениях, чтобы рабочий орган принял требуемые положение и ориентацию? Ответ на этот вопрос даёт решение обратной задачи кинематики.

Когда кинематическая модель построена, можно перейти к решению проблемы управления этой моделью [4-6]. Кинематическое управление можно реализовать в два этапа:

1. Планирование траектории, т. е. предварительное определение программного движения степеней подвижности $\boldsymbol{q}^*(t)$ на некотором временном промежутке $t \in [t_0, t_1]$ [3],[9].
2. Отработка полученной программной траектории приводами подвижных сочленений [5],[6].

Кинематическая модель манипулятора

Решение прямой задачи о положении и ориентации

Постановка прямой задачи: по заданному вектору обобщенных координат $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)^T$ найти положение и ориентацию схвата $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q})$.

Положение и ориентацию схвата будем искать в форме матрицы однородного преобразования:

$$T = \begin{bmatrix} R_{3\times3} & p_{1\times3} \\ f_{1\times3} & 1\times1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Поворот} & \text{Сдвиг} \\ \text{Перспектива} & \text{Масштаб} \end{bmatrix}.$$

Пусть A_i, $i = 1,2,\dots,N$ – матрицы, задающие переход от системы координат $(i-1)$-го звена к системе координат i –го звена. Тогда, очевидно, матрица

$$T_N = A_1 A_2 \dots A_N$$

является решением поставленной задачи.

Для начала вводим матрицы A_i в соответствии с алгоритмом Денавита-Хартенберга [1]:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & 0 & -\sin(q_1) & 0 \\ \sin(q_1) & 0 & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 & l_1\sin(q_2) \\ -\cos(q_2) & \sin(q_2) & 0 & -l_1\cos(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} \cos(\mathrm{q}_3) & 0 & -\sin(\mathrm{q}_3) & -l_2\sin(q_3) \\ \sin(\mathrm{q}_3) & 0 & \cos(\mathrm{q}_3) & l_2\cos(q_3) \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} \cos(q_4) & 0 & -\sin(q_4) & 0 \\ \sin(q_4) & 0 & \cos(q_4) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} \cos(q_5) & 0 & \sin(q_5) & 0 \\ \sin(q_5) & 0 & -\cos(q_5) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} \cos(q_6) & -\sin(q_6) & 0 & 0 \\ \sin(q_6) & \cos(q_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для решения прямой задачи достаточно найти матрицу:

$$T_6 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 = \begin{bmatrix} R^* & \boldsymbol{p}^* \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение обратной задачи о положении и ориентации

Постановка задачи: при заданном положении и ориентации схвата $T_S = T_S^*$ найти обобщенные координаты $\boldsymbol{q}^* = (q_1^*, q_2^*, \dots, q_S^*)^T$.

Если обозначить $T_S = \boldsymbol{f}_T(\boldsymbol{q})$, то искомые углы $\boldsymbol{q}^*$ будут задаваться соотношением $\boldsymbol{q}^* = \boldsymbol{f}_T^{-1}(T_S^*)$.

В данном случае, обратную задачу можно разделить на обратную задачу о положении и обратную задачу об ориентации и рассмотреть каждую из них отдельно [3].

1. *Решение обратной задачи о положении*

Для дальнейших вычислений, нам понадобятся матрицы, обратные к матрицам A_i, имеющие следующий вид:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T\boldsymbol{p} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Откуда получаем:

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & \sin(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A_2^{-1} = \begin{bmatrix} \sin(q_2) & -\cos(q_2) & 0 & -l_1 \\ \cos(q_2) & \sin(q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A_3^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\mathrm{q}_3) & \sin(\mathrm{q}_3) & 0 & -\mathrm{l}_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\sin(\mathrm{q}_3) & \cos(\mathrm{q}_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пусть задана матрица $T_6 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, описывающая желаемое положение и ориентацию инструмента. Домножим ее слева на A_1^{-1}:

$$A_1^{-1}T_6 = A_2A_3A_4A_5A_6.$$

Приравняв элементы четвертого столбца последнего матричного равенства, получим систему:

$$\begin{cases} l_2\cos(q_2+q_3) + l_1\sin(q_2) = p_2\sin(q_1) + p_1\cos(q_1)\,, \\ l_2\sin(q_2+q_3) - l_1\cos(q_2) = -p_3, \\ 0 = p_2\cos(q_1) - p_1\sin(q_1). \end{cases}$$

Из третьего уравнения системы выражаем: $tg(q_1) = \frac{p_2}{p_1}$.

Учитывая то, что $\sin(q_5) = \frac{p_2}{\sqrt{p_1^2+p_2^2}}$, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} l_1\sin(q_2) + l_2\cos(q_2+q_3) = \sqrt{p_1^2+p_2^2}, \\ l_1\cos(q_2) - l_2\sin(q_2+q_3) = p_3, \\ tg(q_1) = \dfrac{p_2}{p_1}. \end{cases}$$

Подобным образом выразив элементы четвертого столба из следующего матричного уравнения:

$$A_2^{-1}A_1^{-1}T_6 = A_3A_4A_5A_6$$

и учитывая $tg(q_1) = \frac{p_2}{p_1}$ получается система:

$$\begin{cases} l_1 - \sin(q_2)\sqrt{p_1^2+p_2^2} - p_3\cos(q_2) = l_2\sin(q_3)\,, \\ \cos(q_2)\sqrt{p_1^2+p_2^2} - p_3\sin(q_2) = l_2\cos(q_3)\,, \\ tg(q_1) = \dfrac{p_2}{p_1}. \end{cases}$$

В итоге решение обратной задачи о положении принимает вид:

$$q_1 = atan2(p_2, p_1),$$

$$q_2 = atan2\left(\sqrt{p_1^2 + p_2^2}, p_3\right) - \arccos\left(\frac{l_1^2+p_1^2+p_2^2+p_3^2-l_2^2}{2l_1\sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2}}\right),$$

$$q_3 = arcsin\left(\frac{l_1^2+l_2^2-p_1^2-p_2^2-p_3^2}{2l_1l_2}\right).$$

Функция $atan2$ определяется следующим образом:

$$atan2(a,b) = \begin{cases} arctg\left(\frac{a}{b}\right), b > 0, \\ arctg\left(\frac{a}{b}\right) + \pi, b > 0, a > 0, \\ arctg\left(\frac{a}{b}\right) - \pi, b < 0, a < 0. \end{cases}$$

2. *Решение обратной задачи об ориентации*

Введем $\tilde{T}_6 = A_3^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1}T_6 = A_4A_5A_6$.

Сопоставляя элементам матрицы $\tilde{R}$ выражения с q_4, q_5, q_6, получаем систему:

$$\begin{cases} \cos(q_4)\cos(q_5)\cos(q_6) - \sin(q_4)\sin(q_6) = r_{11}, \\ -\cos(q_4)\cos(q_5)\sin(q_6) - \sin(q_4)\cos(q_6) = r_{12}, \\ \cos(q_4)\sin(q_5) = r_{13}, \\ \sin(q_4)\cos(q_5)\cos(q_6) - \cos(q_4)\sin(q_6) = r_{21}, \\ -\sin(q_4)\cos(q_5)\sin(q_6) + \cos(q_4)\cos(q_6) = r_{22}, \\ \sin(q_4)\sin(q_6) = r_{23}, \\ -\sin(q_5)\cos(q_6) = r_{31}, \\ \sin(q_5)\sin(q_6) = r_{32}, \\ \cos(q_5) = r_{33}. \end{cases}$$

Далее необходимо рассмотреть несколько случаев в зависимости от значения r_{33} [3]:

- $r_{33} \neq \pm 1$

  В этом случае $\sin(q_5) \neq 0$. Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством для нахождения $\sin(q_5)$:

$$\sin(q_5) = \pm\sqrt{1 - cos^2(q_5)} = \pm\sqrt{1 - r_{33}^2}.$$

Тогда из уравнений для r_{13}, r_{23} и r_{31}, r_{32} легко найти q_4 и q_5 соответственно.

В итоге, решение обратной задачи об ориентации имеет вид:

$$q_4 = atan2(\pm r_{23}, \pm r_{13}),$$

$$q_5 = atan2(\pm\sqrt{1 - r_{33}^2}, r_{33}),$$

$$q_6 = atan2(\pm r_{32}, \mp r_{31}).$$

- $r_{33} = 1$

  В этом случае $\cos(q_5) = 1, \sin(q_5) = 0$, следовательно $q_5 = 0$.

  Такой случай ведет к неоднозначности решения, поскольку может быть определена только сумма $q_4 + q_6$:

$$q_4 + q_6 = atan2(r_{21}, r_{11}).$$

- $r_{33} = -1$

  В этом случае $\cos(q_5) = -1, \sin(q_5) = 0$, следовательно $q_5 = \pi$.

  Данный случай тоже ведет к неоднозначности решения, поскольку может быть определена только разность $q_4 - q_6$:

$$q_4 - q_6 = atan2(-r_{12}, -r_{11}).$$

Замечание. При $r_{33} = \pm 1$ возникает неоднозначность определения q_4 и q_6. Для определенности в таких случаях принимают, например, $q_6 = 0$ и вычисляют q_4 согласно приведенным выше формулам.

Задание границы рабочей зоны

Будем считать, что выпрямленное положение манипулятора, то есть сумма его звеньев $(l_1 + l_2)$, является радиусом сферы, внутри и на границе которой находится рабочая зона манипулятора. Тогда можно задать следующее ограничение:

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \le (l_1 + l_2)^2.$$

Ограничения на обобщенные координаты:

$$0 \le q_1 \le 2\pi,$$
$$-{}^{\pi}/_{2} \le q_2 \le {}^{\pi}/_{2},$$
$$-{}^{\pi}/_{2} \le q_3 \le {}^{\pi}/_{2},$$
$$-{}^{\pi}/_{2} \le q_4 \le {}^{\pi}/_{2},$$
$$-{}^{\pi}/_{2} \le q_5 \le {}^{\pi}/_{2},$$
$$-{}^{\pi}/_{2} \le q_6 \le {}^{\pi}/_{2}.$$

Кинематическое управление манипулятором

Планирование траектории в пространстве обобщенных координат

Планирование траектории – процедура получения программного движения звеньев манипулятора $\boldsymbol{q}^*(t), t \in [t_0, t_1]$, либо схвата $\boldsymbol{s}^*(t), t \in [t_0, t_1]$.

Одним из методов планирования траектории является режим разгона – торможения.

Обозначим $Q = q_1 \times q_2 \times q_3 \times q_4 \times q_5 \times q_6$ – пространство состояний системы. Пусть в момент времени t_0 манипулятор находится в точке $\boldsymbol{q}_0$. Необходимо определить такую функцию $\boldsymbol{q}(t)$, для которой в момент времени t_1 манипулятор находится в точке $\boldsymbol{q}_1$:

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(t), t \in [t_0, t_1],$$
$$\boldsymbol{q}(t_0) = \boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{q}(t_1) = \boldsymbol{q}_1,$$
$$\boldsymbol{q} \in Q.$$

Введем дополнительные ограничения.

Пусть $\boldsymbol{q}(t)$ имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}_0 + \lambda(\mathrm{t})(\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_0).$$

При этом требуем, чтобы $\lambda(t_0) = 0, \lambda(t_1) = 1$.

Тогда для обобщённых скоростей справедливо:

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t) = \dot{\lambda}(\mathrm{t})(\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_0).$$

$\dot{\lambda}(\mathrm{t})$ называют профилем скорости.

Возьмем $\dot{\lambda}(\mathrm{t}) = \frac{2}{t_1 - t_0} sin^2 \frac{\pi t}{t_1 - t_0}$. Тогда интегрируя его от $t_0 = 0$ до t получаем закон изменения $\boldsymbol{q}(t)$, удовлетворяющий заданным граничным условиям:

$$\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}_0 + \left(\frac{t}{t_1 - t_0} - \frac{\sin\left(\frac{2\pi t}{t_1 - t_0}\right)}{2\pi} \right) (\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_0).$$

Формирование программного движения манипулятора в пространстве координат инструмента

Пусть T_0, T_1 — однородные матрицы положения инструмента в начальной и конечной точках:

$$T_0 = \begin{pmatrix} R_0 & \boldsymbol{p}_0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}, T_1 = \begin{pmatrix} R_1 & \boldsymbol{p}_1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix},$$

и задано время $t_1 - t_0$ перемещения инструмента из начального положения в конечное.

Требуется построить непрерывную траекторию инструмента в виде $T = T(t)$, которая обеспечивает режим разгона – торможения:

$$T(t) = T_0 A(\mathbf{e}, \varphi(t), \boldsymbol{\rho}(t)),$$

где A – матрица 4×4, зависящая от параметров: $\mathbf{e}$ – вектор 3×1, вокруг которого осуществляется поворот инструмента, $\varphi(t)$ — угол поворота, $\boldsymbol{\rho}(t)$ – вектор переноса 3×1.

Матрица A имеет ту же структуру, что и матрица T:

$$A(t) = \begin{pmatrix} R(t) & \boldsymbol{\rho}(t) \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}.$$

Граничные условия для элементов матрицы A:

$$R(t_0) = E, \boldsymbol{\rho}(t_0) = \mathbf{0},$$

$$R(t_1) = R_0' R_1, \boldsymbol{\rho}(t_1) = R_0'(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_0).$$

Вектор, вокруг которого осуществляется поворот имеет вил:

$$\mathbf{e} = \left(\frac{r_{32} - r_{23}}{2\sin\varphi(t_1)}, \frac{r_{13} - r_{31}}{2\sin\varphi(t_1)}, \frac{r_{21} - r_{12}}{2\sin\varphi(t_1)}\right)',$$

где $r_{ij}, i = 1,2,3, j = 1,2,3$ – элементы матрицы $R(t_1)$.

Матрица поворота ищется в форме:

$$R(t) = \cos\varphi(t)E + \big(1 - \cos\varphi(t)\big)\mathbf{ee}' + \sin\varphi(t)\Lambda(\mathbf{e}),$$

где $\Lambda(\mathbf{e}) = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{e_z} & \mathrm{e_y} \\ \mathrm{e_z} & 0 & -\mathrm{e_x} \\ -\mathrm{e_y} & \mathrm{e_x} & 0 \end{pmatrix}$ [2].

Функции $\varphi(t)$ и $\boldsymbol{\rho}(t)$ строятся из условия обеспечения режима разгона – торможения.

Граничные условия для $\varphi(t)$:

$$\varphi(t_0) = 0,$$

$$\varphi(t_1) = \arccos\left(\frac{1}{2}(r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1)\right).$$

Профиль скорости по прежнему берем равным $\frac{2}{t_1 - t_0} sin^2 \frac{\pi t}{t_1 - t_0}$. Тогда получаем следующее:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{2}(r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1)\right)\left(\frac{2}{t_1 - t_0}\ sin^2 \frac{\pi t}{t_1 - t_0}\right).$$

Аналогичным образом ищется $\boldsymbol{\rho}(t)$:

$$\boldsymbol{\rho}(t) = \frac{1}{2}(p_1 - p_0)\left(\frac{2}{t_1 - t_0}\ sin^2 \frac{\pi t}{t_1 - t_0}\right).$$

Таким образом строится $T(t)$, описывающая программную траекторию инструмента в декартовом пространстве и обладающая необходимыми свойствами. Используя решение обратной задачи кинематики для $T(t)$, можно построить программную траекторию движения манипулятора.

Оценка энергетических затрат

На пространстве состояний системы Q введем функционал для оценки затрат энергии манипулятора при режиме разгона – торможения в пространстве обобщенных координат:

$$J_1 = min \sum_{i=1}^{6} \omega_i \left| q_i^0 - q_i^* \right|,$$

где, например, $\boldsymbol{\omega} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{18}, \frac{1}{18}\right)$ – вектор весовых коэффициентов, определенный исходя из динамических характеристик и кинематической схемы манипулятора, $\boldsymbol{q}^0$ – начальное положение манипулятора, $\boldsymbol{q}^*$ – желаемое положение манипулятора.

При формировании программной траектории в пространстве координат инструмента при обеспечении режима разгона – торможения возможны скачки в $\boldsymbol{q}(t)$, тогда оценка таким функционалом будет неверной.

В этом случае, учитывая возможность наличия локальных экстремумов значения q_i на рассматриваемом промежутке времени – $q_{ij}^{ext}, j = 1{:}\,k$, функционал для оценки энергетических затрат будет выглядеть следующим образом:

$$J_2 = min \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{k} \omega_i \left| q_{ij-1}^{ext} - q_{ij}^{ext} \right|,$$

где $q_{i0}^{ext} = q_i^0, q_{ik}^{ext} = q_i^*$. Если локальных экстремумов обобщенных координат нет на рассматриваемом промежутке времени, то $k = 2$ и функционал J_1 равняется функционалу J_2.

Программная реализация

Программа принимает следующие входные данные:

- T_0, T_1 – матрицы положения схвата в начальной и конечных точках,
- t_0, t_1 – начальный и конечный момент времени.

Краткое описание алгоритма:

1. Решить обратную задачу кинематики для T_0 и T_1;
2. Получить программное движение – $\boldsymbol{q}(t)$ из обеспечения режима разгона – торможения;
3. Найти $\mathbf{e}$, $\varphi(t)$, $\boldsymbol{\rho}(t)$, необходимые для построения программной траектории инструмента;
4. Найти программную траекторию инструмента – $T(t)$;
5. Получить программное движение – $\boldsymbol{q}(t)$ из решения обратной задачи для $T(t)$;
6. Сравнить полученные движения $\boldsymbol{q}(t)$ для разных типов формирования программной траектории (п. 2 – 1-ый тип, п. 5 – 2-ой тип).

Выходными данными являются:

- Значения функционала для оценки затрат энергии,
- Положение полюса,
- Графики изменения обобщенных координат.

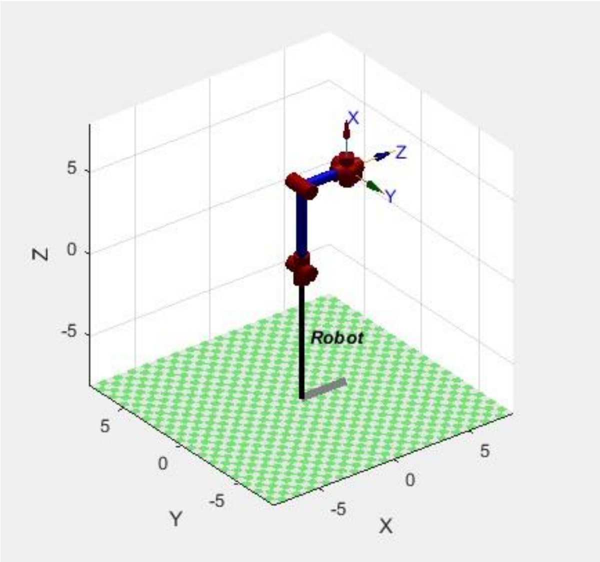
Рассмотрим пример применения реализуемого алгоритма.

Начальные данные:

$$T_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$t_0 = 0, t_1 = 10.$$

Результаты выполнения программы:



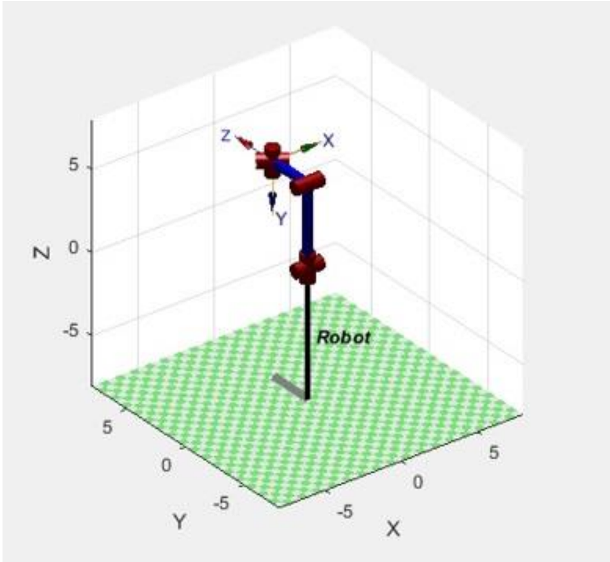


Рис. 6 Начальное положение

Рис. 7 Конечное положение

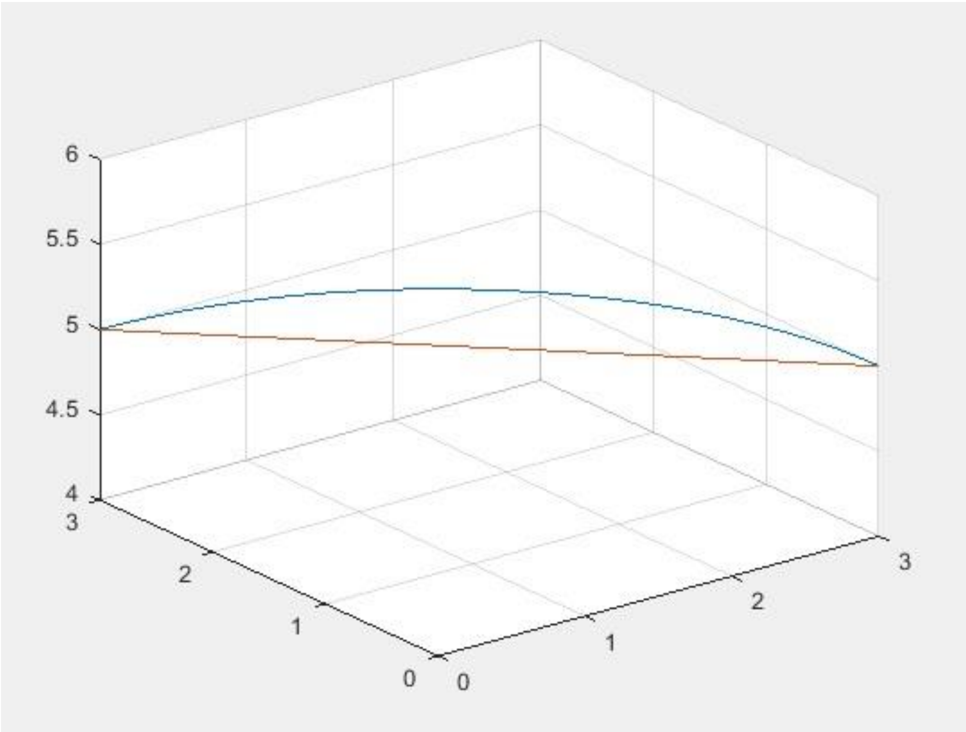


Рис. 8 Координаты полюса

Здесь и далее синим обозначены результаты, полученные при режиме разгона – торможения в пространстве обобщенных координат, а красным – при режиме разгона – торможения в пространстве координат инструмента.

Значение функционала в первом случае: $J = 0.6981$, во втором: $J = 1.3307$.

Ниже представлены графики изменения обобщенных координат.

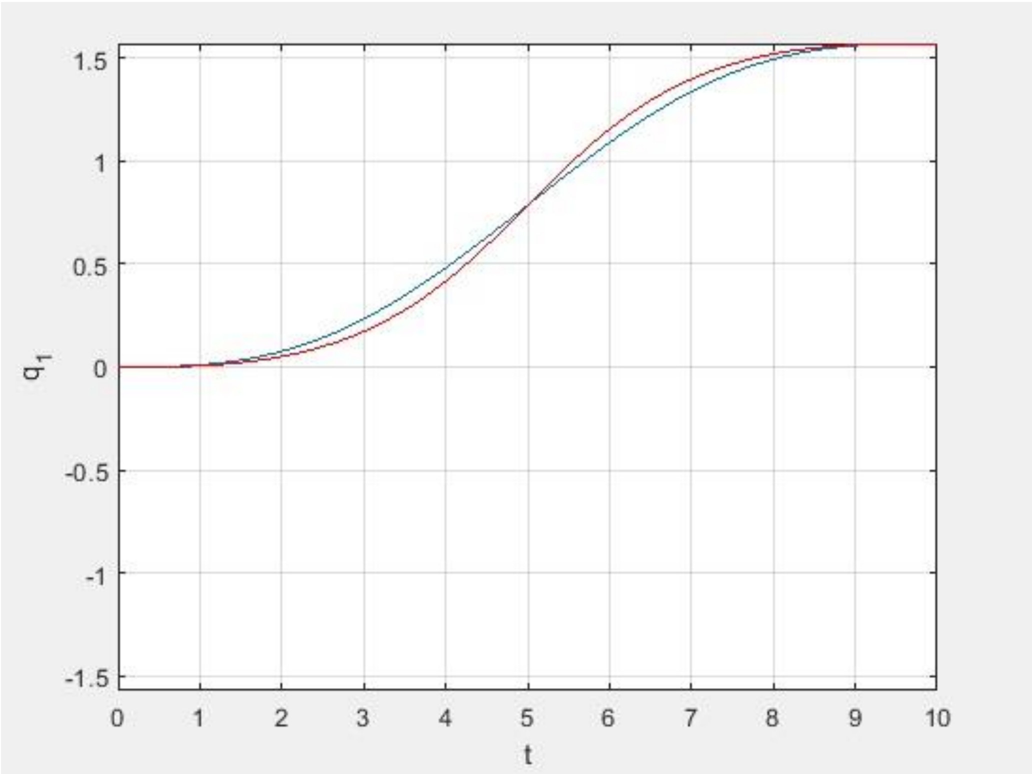


Рис. 9 График изменения q_1

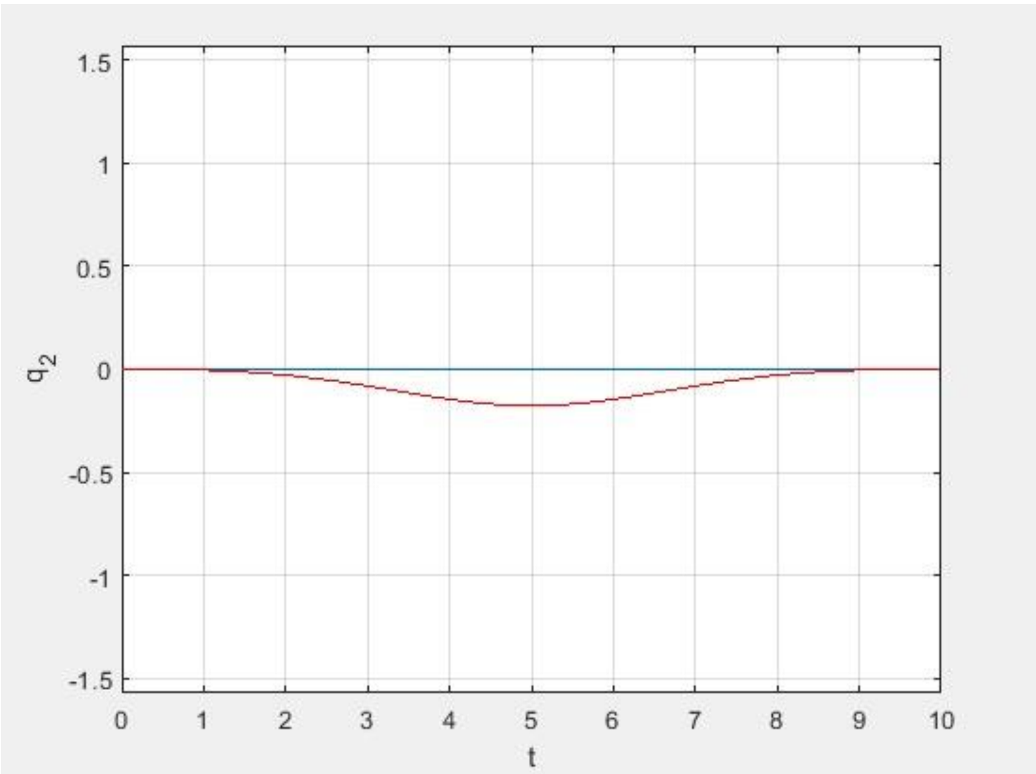


Рис. 10 График изменения q_2

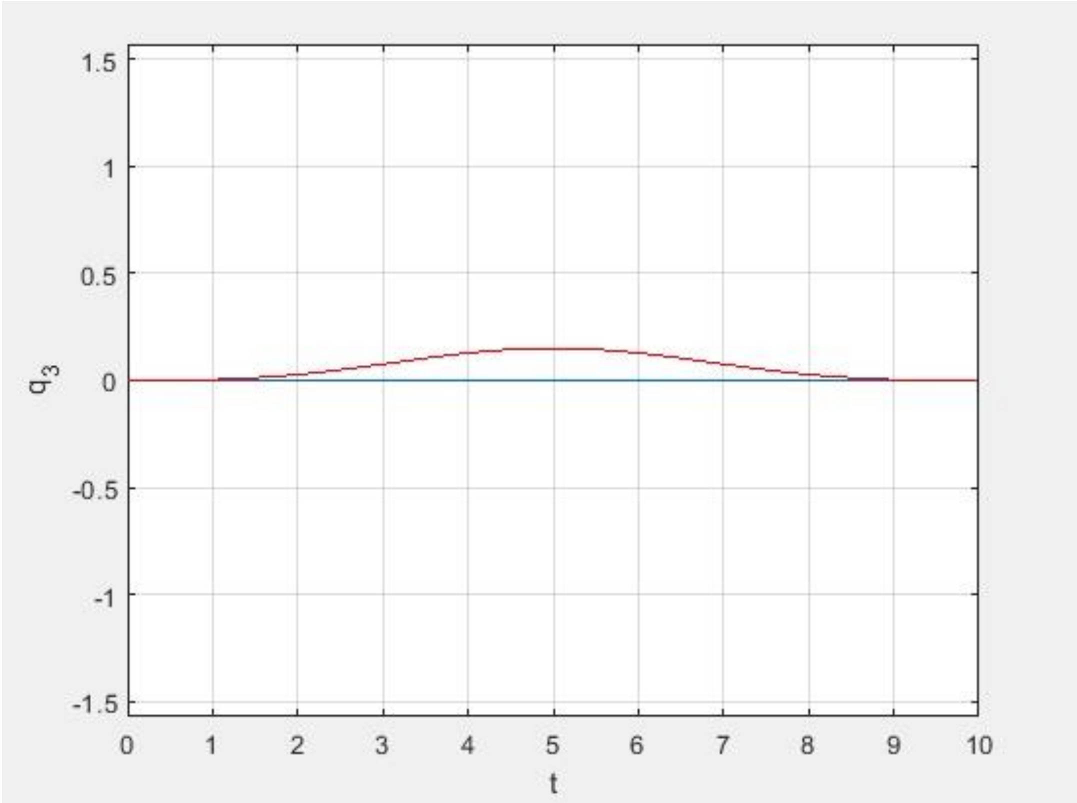


Рис. 11 График изменения q_3

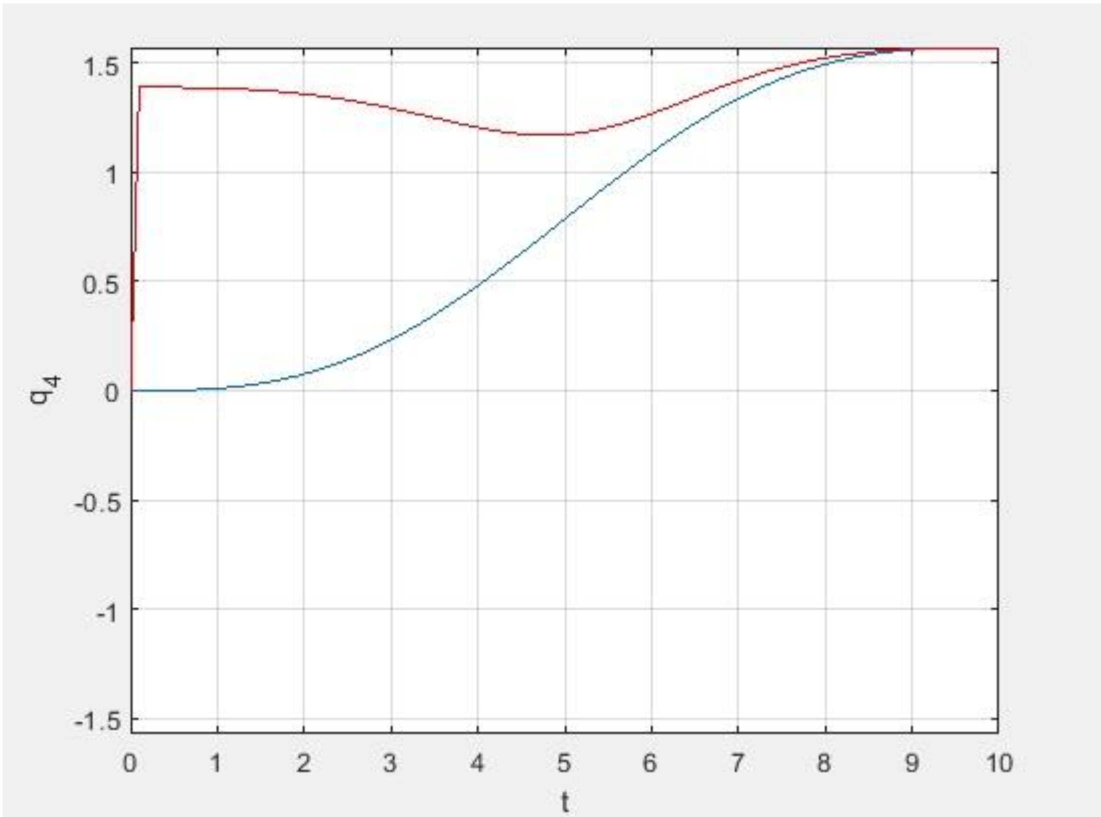


Рис. 12 График изменения q_4

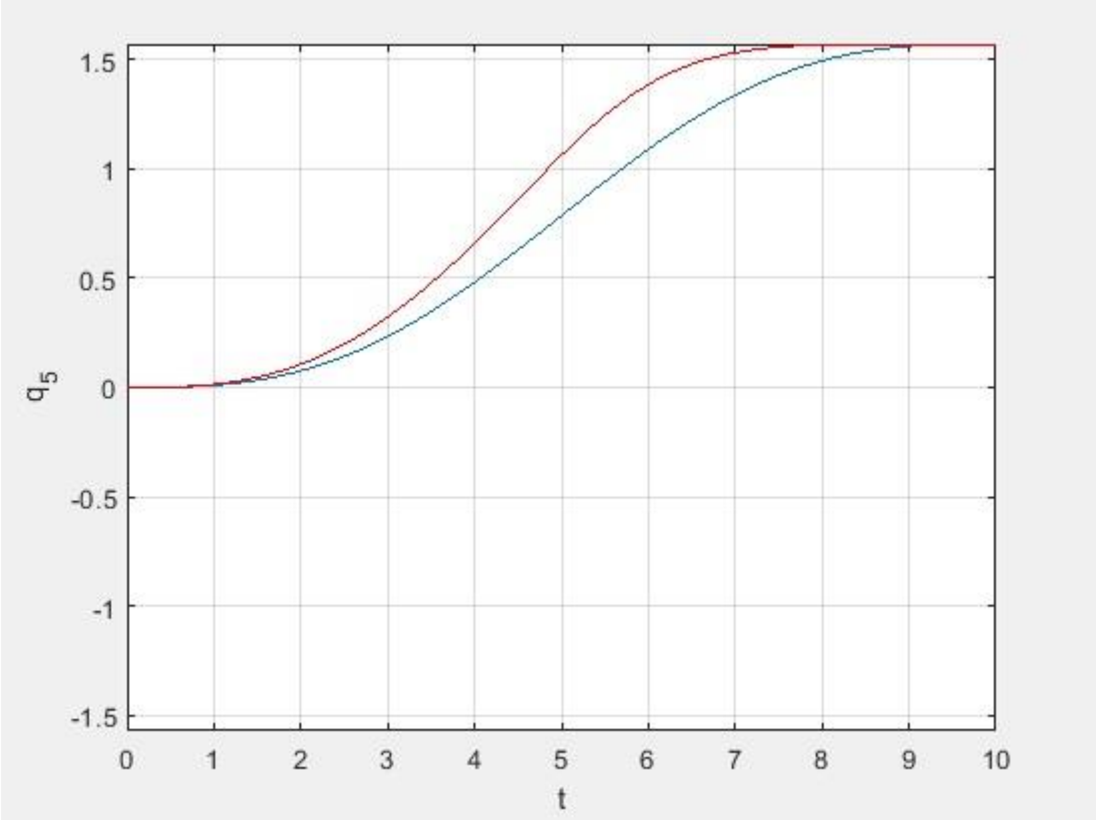


Рис. 13 График изменения q_5

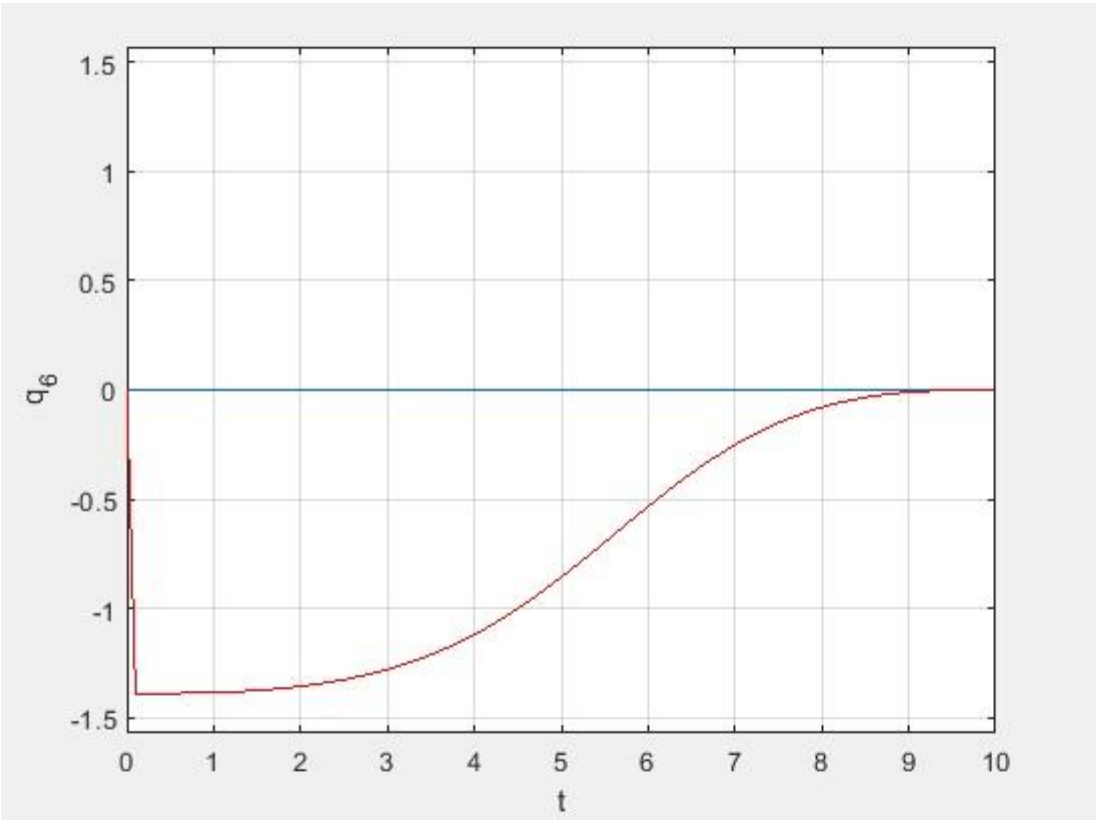


Рис. 14 График изменения q_6

Следует заметить, что в данной задаче для второго типа построения программного движения осуществляется поворот вокруг вектора $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 0.5774 \\ -0.5774 \\ 0.5774 \end{pmatrix}$, причем угол поворота $\varphi(t_1) = 120°$.

Заключение

По итогам проделанной работы:

1. Аналитически решены прямая и обратная задачи о положении и ориентации;
2. Решена задача планирования траектории манипулятора в пространстве обобщенных координат;
3. Сформирована программная траектория в пространстве координат инструмента;
4. Построена программная траектория движения манипулятора на основе программной траектории инструмента;
5. Произведена оценка энергетических затрат манипулятора.

Результаты данной работы были использованы в отчете по научно-исследовательской практики, а именно для решения следующих задач:

1. Задача «*сбора*». Имея координаты начальной точки, рассматриваемой как контейнер, и набор координат целевых точек, рассматриваемых как объекты, требуется определить:
   - последовательность объектов для сбора с точки зрения энергетических затрат;
   - максимальное количество объектов, которые можно подобрать и сложить в контейнер за заданное время.
2. Задача «*посещения*». Имея координаты начальной точки и набор координат целевых точек, требуется определить:
   - последовательность обхода точек с точки зрения энергетических затрат;
   - максимальное количество целевых точек, через которое можно успеть провести инструмент за заданное время.

Полученные результаты составляют основу для решения задач кинематического управления манипулятором.

Список источников

1. Зенкевич С. Л., Ющенко А. С. «Основы управления манипуляционными роботами: Учебник для вузов» – 2-е изд., исправ. и доп. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. – 480 с.:
2. Шиманчук Д.В. «Введение в современную робототехнику». – Санкт-Петербург, 2021. – 233 с.
3. Борисов О.И., Громов В.С., Пыркин А.А., «Методы управления робототехническими приложениями. Учебное пособие» — СПб.: Университет ИТМО, 2016. — 108 с.
4. Климчик А.С., Гомолицкий Р.И., Фурман Ф.В., Сёмкин К.И. «Разработка управляющих программ промышленных роботов». – Минск, 2008. – 131 с.
5. Егоров Е.Е. «Моделирование работы манипуляционного робота в программном пакете Matlab Robotics Toolbox.» Политехнический молодежный журнал, 2020, № 01(42).
6. В.С. Щербаков, И.А. Реброва, М.С. Корытов. «Автоматизация моделирования оптимальной траектории движения рабочего органа строительного манипулятора: монография» – Омск : Изд-во СибАДИ, 2009. – 106 с.
7. Corke P. «Robotics, vision and control: fundamental algorithms in MATLAB.» petercorke.com: веб-сайт. URL: http://www.petercorke.com/RVC1/
8. Терентьева Е.И. «Анализ современного состояния применения роботов в промышленности». – Nauka-Rastudent.ru, 2015 г. № 10. - С. 20.
9. Богданова Ю.В., Гуськов А.М. «Численное моделирование задачи позиционирования инструмента хирургического робота-манипулятора при движении по заданной траектории». – Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013 г. № 6. С. 181-210.

Приложения

Приложение 1. Основные функции

1.
```
function T = forward_fun(q)

l1 = 5; l2 = 3;

A1 = [cos(q(1)) 0 -sin(q(1)) 0; sin(q(1)) 0 cos(q(1)) 0; 0 -1 0 0; 0 0 0 1];
A2 = [sin(q(2)) cos(q(2)) 0 l1*sin(q(2)); -cos(q(2)) sin(q(2)) 0 -
l1*cos(q(2)); 0 0 1 0; 0 0 0 1];
A3 = [cos(q(3)) 0 -sin(q(3)) -l2*sin(q(3)); sin(q(3)) 0 cos(q(3))
l2*cos(q(3)); 0 -1 0 0; 0 0 0 1];
A4 = [cos(q(4)) 0 -sin(q(4)) 0; sin(q(4)) 0 cos(q(4)) 0; 0 -1 0 0; 0 0 0 1];
A5 = [cos(q(5)) 0 sin(q(5)) 0; sin(q(5)) 0 -cos(q(5)) 0; 0 1 0 0; 0 0 0 1];
A6 = [cos(q(6)) -sin(q(6)) 0 0; sin(q(6)) cos(q(6)) 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1];

T = A1*A2*A3*A4*A5*A6;
end
```

2.
```
function q = inverse_fun(T)

l_1 = 5; l_2 = 3;
q(1) = atan2(T(2,4), T(1,4));
q(2) = atan2(sqrt((T(1,4))^2+(T(2,4))^2),T(3,4))-
acos(((l_1)^2+(T(1,4))^2+(T(2,4))^2+(T(3,4))^2-
(l_2)^2)/(2*l_1*sqrt((T(1,4))^2+(T(2,4))^2+(T(3,4))^2)));
q(3) = asin(((l_1)^2+(l_2)^2-(T(1,4))^2-(T(2,4))^2-(T(3,4))^2)/(2*l_1*l_2));

A1 = [cos(q(1)) 0 -sin(q(1)) 0; sin(q(1)) 0 cos(q(1)) 0; 0 -1 0 0; 0 0 0 1];
A2 = [sin(q(2)) cos(q(2)) 0 l_1*sin(q(2)); -cos(q(2)) sin(q(2)) 0 -
l_1*cos(q(2)); 0 0 1 0; 0 0 0 1];
A3 = [cos(q(3)) 0 -sin(q(3)) -l_2*sin(q(3)); sin(q(3)) 0 cos(q(3))
l_2*cos(q(3)); 0 -1 0 0; 0 0 0 1];

T_or = inv(A1)*inv(A2)*inv(A3)*T;

switch T_or(3,3)
    case 1
   q(4) = atan2(T_or(2,1), T_or(1,1));
   q(5) = 0;
   q(6) = 0;
    case -1
    q(4) = atan2(-T_or(1,2), -T_or(1,1));
    q(5) = pi;
    q(6) = 0;
    otherwise
    q(4) = atan2(T_or(2,3), T_or(1,3));
    q(5) = atan2(sqrt(1-(T_or(3,3)^2)), T_or(3,3));
    q(6) = atan2(T_or(3,2), -T_or(3,1));
end

if (T(1,4))^2+(T(2,4))^2+(T(3,4))^2>(l_1)^2+(l_2)^2 || q(1)<0 || q(1)>2*pi ||
q(2)<-pi/2 || q(2)>pi/2 || q(3)<-pi/2 || q(3)>pi/2 || q(4)<-pi/2 || q(4)>pi/2
|| q(5)<-pi/2 || q(5)>pi/2 || q(6)<-pi/2 || q(6)>pi/2
    disp('ошибка');
end
end
```

3. function [q,x1,y1,z1] = traj1(t0,t1,T0,T1)

```
q0 = inverse_fun(T0);
q1 = inverse_fun(T1);

for t = t0:0.1:t1
q_i = q0+(q1-q0).*(t/(t1-t0)-(sin(pi*t/((t1-t0)/2)))/(2*pi));
q(i,1:6) = q_i;

T_1 = forward_fun(q(i,1:6));
x1(i) = T_1(1,4);
y1(i) = T_1(2,4);
z1(i) = T_1(3,4);

i = i+1;
end
end
```

4. function [q_new,x2,y2,z2] = traj2(t0,t1,T0,T1)

```
R0 = [T0(1,1:3); T0(2,1:3); T0(3,1:3)];
R1 = [T1(1,1:3); T1(2,1:3); T1(3,1:3)];
p0 = [T0(1,4); T0(2,4); T0(3,4)];
p1 = [T1(1,4); T1(2,4); T1(3,4)];

R_t1 = (R0')*R1;
fi_t1 = acos(1/2*(R_t1(1,1)+R_t1(2,2)+R_t1(3,3)-1));

for t = t0:0.1:t1
fi_i = (t/(t1-t0)-(sin(pi*t/((t1-
t0)/2)))/(2*pi)).*(acos(1/2*(R_t1(1,1)+R_t1(2,2)+R_t1(3,3)-1)));
fi(i) = fi_i;
i = i+1;
end
i = 1;

for t = t0:0.1:t1
ro_i = (t/(t1-t0)-(sin(pi*t/((t1-t0)/2)))/(2*pi)).*(((inv(R0)*(p1-p0))).');
ro(i,1:3) = ro_i;
i = i+1;
end

e(1) = (R_t1(3,2)-R_t1(2,3))/(2*sin(fi_t1));
e(2) = (R_t1(1,3)-R_t1(3,1))/(2*sin(fi_t1));
e(3) = (R_t1(2,1)-R_t1(1,2))/(2*sin(fi_t1));
lam_e = [0 -e(3) e(2); e(3) 0 -e(1); -e(2) e(1) 0];

for i = 1:((t1-t0)*10+1)
R = cos(fi(i)).*eye(3)+(1-cos(fi(i))).*e.*e'+sin(fi(i)).*lam_e;
A = [R(1,:) ro(i,1); R(2,:) ro(i,2); R(3,:) ro(i,3); 0 0 0 1];
T = T0*A;

x2(i) = T(1,4);
y2(i) = T(2,4);
z2(i) = T(3,4);

q_new(i,1:6) = inverse_fun(T);
i = i+1;
end
end
```