

Санкт–Петербургский государственный университет

*ШЛОКОВА Анна Ильинична*

Выпускная квалификационная работа

*Построение областей устойчивости в  
пространстве коэффициентов в ловушке  
Пеннинга-Малмберга-Сурко с вращающимся  
дипольным электрическим полем*

Уровень образования: бакалавриат

Направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Основная образовательная программа СВ.5005.2017 «Прикладная  
математика, фундаментальная информатика и программирование»

Профиль «Математическое и программное обеспечение вычислительных  
машин»

Научный руководитель:

доцент, кафедра технологии программирования,  
к. ф. - м. н., доцент Овсянников Александр Дмитриевич

Рецензент:

доцент, кафедра теории систем управления  
электрофизической аппаратуры,  
к. ф. - м. н., доцент Едаменко Николай Семенович

Санкт-Петербург

2021 г.

# Содержание

<b>Введение</b> . . . . .	3
<b>Постановка задачи</b> . . . . .	9
<b>Глава 1. Вспомогательные сведения и преобразования системы</b>	11
1.1. Динамика частицы . . . . .	11
1.2. Переход к системе с постоянными коэффициентами . . . . .	13
<b>Глава 2. Анализ устойчивости системы</b> . . . . .	16
2.1. Критерий Рауса-Гурвица . . . . .	16
2.2. Устойчивость семейства полиномов . . . . .	20
2.2.1 Первый метод - построение и анализ вспомогательной матрицы. . . . .	21
2.2.2 Второй метод - детерминантный критерий устойчивости	21
2.3. Приведение характеристического полинома к виду, содержащему только четные степени . . . . .	24
<b>Глава 3. Учет пространственного заряда</b> . . . . .	25
3.1. Модель, учитывающая пространственный заряд . . . . .	25
3.2. Аксиально-симметричный равномерно заряженный бесконечный пучок . . . . .	27
3.3. Аксиально-симметричный равномерно заряженный пучок конечной длины . . . . .	30
3.4. Построение областей устойчивости с учетом пространственного заряда . . . . .	32
<b>Заключение</b> . . . . .	38
<b>Список литературы</b> . . . . .	39
<b>Приложение</b> . . . . .	41

## Введение

Электромагнитные ловушки создаются и используются для накопления и длительного удержания пучков заряженных частиц для различных целей: для проведения экспериментов по измерению параметров как самих частиц, так и различных ядерных, атомных и молекулярных объектов, образованных ими, с наивысшей точностью; как промежуточные секции различных экспериментальных комплексов для накопления, охлаждения и сжатия пучков заряженных частиц перед их использованием в других элементах комплексов для дальнейших экспериментов; для формирования плотной горячей плазмы изотопов водорода в термоядерных генераторах[2].

Такие устройства востребованы в физике ускорителей, масс - спектроскопии, ядерной и атомной физике, плазменных установках. Кроме того, они успешно использовались при физической реализации квантового компьютера и квантовых вычислений. Ловушка типа Пеннинга была применена при создании *geonium atom* («квазиатома») — связанное состояние электрона. Квазиатом представляет собой псевдоатомную систему, созданную в ловушке Пеннинга, полезную для измерения фундаментальных параметров частиц. В простейшем случае захваченная система состоит только из одной частицы или иона. Такая квантовая система определяется квантовыми состояниями одной частицы, как в атоме водорода. Водород состоит из двух частиц, ядра и электрона, но движение электрона относительно ядра эквивалентно одной частице во внешнем поле.

История создания ловушек начинается во второй половине XX века с экспериментов по длительному удержанию и охлаждению относительно небольшого числа заряженных и нейтральных частиц. В 1949 г конструкция первой подобной ловушки была предложена Джоном Робинсоном Пирсом. В 1950 немецко-американскому физики Ханс Георгу Демельту удалось создать действующую установку, в которой можно было длительно удерживать одиночный электрон (на тот момент ему удалось хранить один электрон в течении 10 секунд) . Он назвал ловушку в честь Е.М. Пеннинга, впервые предложившего использовать продольное магнитное поле

для удержания плазмы, образованной в электрическом разряде. Через 3 года была создана радиочастотная ионная ловушка Пауля. За работы по изучению и конструированию ловушек, эксперименты по удержанию ионов и электронов и управлению их состояниями В. Паулю и Х. Демельту была присуждена Нобелевская премия 1989 года.

Суть действия ловушки состоит в локализации и удержании заряженных частиц в ограниченной области пространства в течение достаточно длительного времени за счёт действия электромагнитных сил. Для этого формируются специальные комбинации электромагнитных полей, обеспечивающих необходимый характер поведения заряженных частиц внутри ловушки.

Для того, чтобы удерживать заряженные частицы, необходимо поместить их в такое поле, в котором они были бы упруго связаны с точкой или осью в пространстве, то есть на них должна действовать упругая возвращающая сила. Таким образом, частица должна находиться в параболической потенциальной яме.

При всем многообразии конструкций ловушек в них используются комбинации электрического и магнитного для удержания заряженных частиц. Соответственно, в ловушках действуют общие законы движения заряженных частиц в этих полях. Существует несколько типов ловушек различной конструкции. Наиболее известны ловушки типа Паули и Пеннинга, а также их различные модификации. Ловушка Пауля (Рис.1) состоит из трех электродов – гиперболоидов вращения, расположенных на общей оси. Торцевые электроды-колпаки находятся под положительным потенциалом (в случае позитронов), а к среднему электроду приложен отрицательный потенциал. Это создает электростатическое поле, удерживающее частицы в центре ловушки. На электроды кроме постоянного напряжения, подается переменное периодическое таким образом, что в пространстве ловушки создается квадрупольное поле. Ключевым недостатком ловушки Пауля является ограниченный размер области накопления, что препятствует накоплению большого количества заряженных частиц.

Если модернизировать ловушку Пауля, выключив в ней переменное напряжение и добавив продольное однородное магнитное поле, то можно

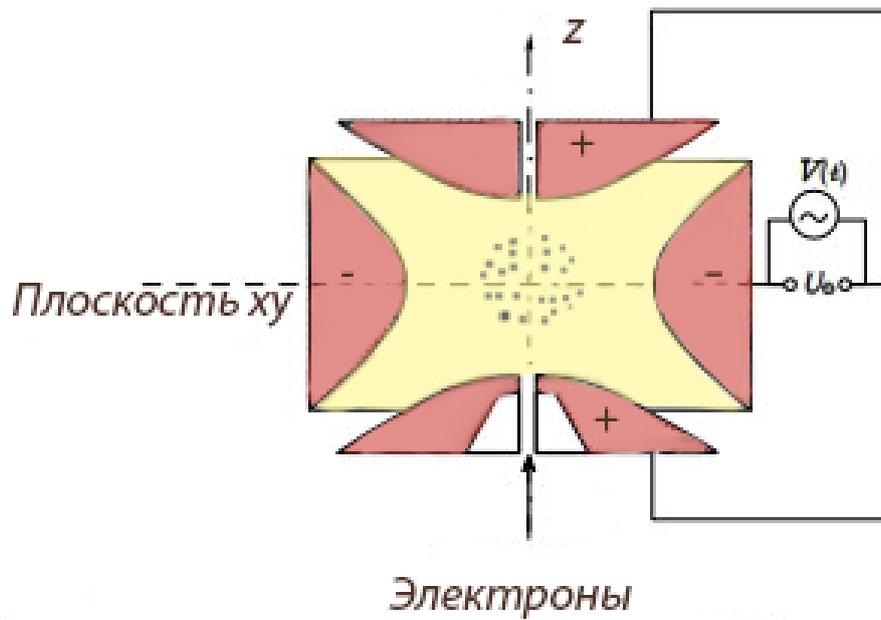


Рис. 1: Ловушка Пауля

получить конструкцию ловушки Пеннинга (Рис. 2).

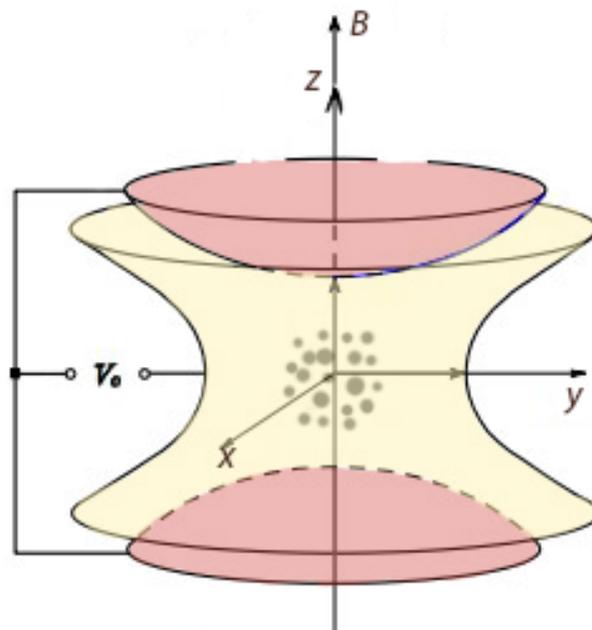
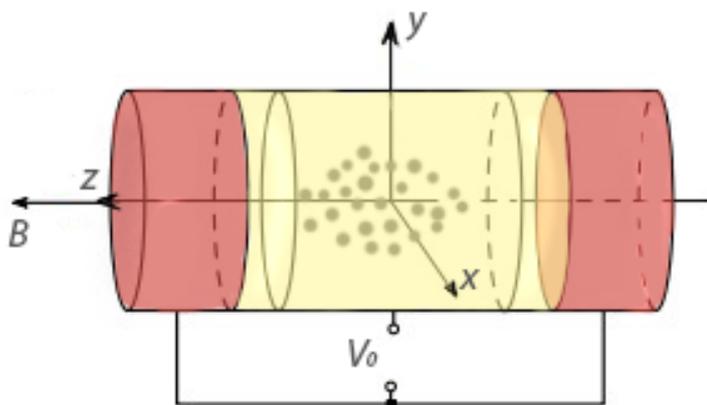


Рис. 2: Ловушка Пеннинга

Однородное продольное магнитное поле позволяет удерживать ради-

альное движение частиц, а аксиально-симметрическое квадрупольное поле, создаваемое электродами, позволяет удерживать аксиальное движение частиц. Магнитное поле проходит вдоль оси ловушки. Электрический потенциал создается благодаря системе из трех электродов: кольца и двух «крышек». В идеальной ловушке Пеннинга кольцо и крышки являются гиперболоидом вращения. Для захвата положительных ионов к крышкам прикладывается отрицательное напряжение относительно кольца. Такой потенциал создаёт седловую точку в центре ловушки и ограничивает вертикальные колебания ионов. Электрическое поле заставляет ионы осциллировать вдоль вертикальной оси ловушки. Совместно с электрическим, магнитное поле заставляет ионы двигаться в горизонтальной плоскости по траектории, называемой эпитрохоида. Орбитальное движение ионов в горизонтальной плоскости состоит из двух нормальных колебаний с «магнетронной» и «модифицированной циклотронной» частотами. «Циклотронная частота» - это частота вращения частицы в постоянном магнитном поле. Циклотронная частота зависит только от отношения электрического заряда к массе и величины магнитного поля. Высокая точность в измерении этой величины позволяет определить массу заряженных частиц.



**Рис. 3:** Ловушка Пеннинга-Малмберга

При замене электродов – гиперболоидов вращения - отрезками ци-

линдрических труб, можно получить модификацию ловушки Пеннинга - ловушку Пеннинга-Малмберга (Рис. 3). За счет большего объема, ловушка с такой конфигурацией позволяет создавать большую разницу потенциалов и удерживать в ловушке большее число частиц. Благодаря тому, что к электродам приложена статическая разность потенциалов, крайние электроды создают на оси запирающий потенциал, что позволяет удерживать частицы в продольном направлении, а статическое продольное магнитное поле удерживает их радиально от попадания на стенки ловушки.

Распределение потенциалов внутри цилиндров описывается формулой [2]:

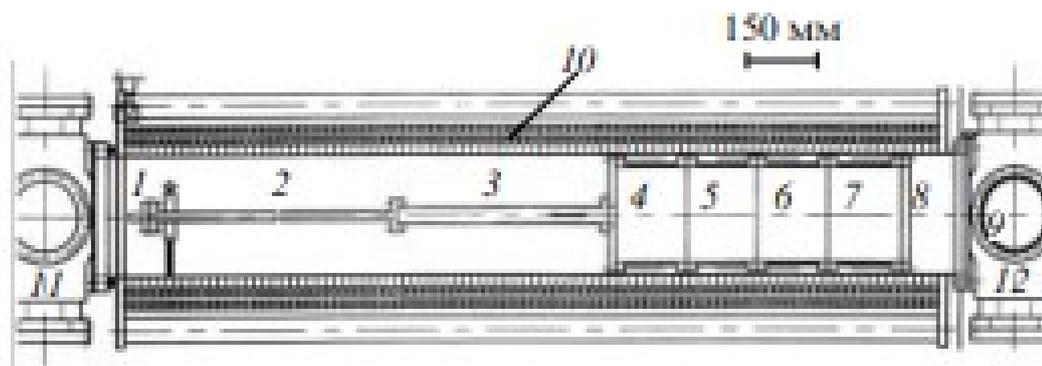
$$\Phi(r, z) = 2V_0 \sum_i^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_i r}{r_0}\right) \cosh\left(\frac{\mu_i z}{r_0}\right)}{\mu_i J_1(\mu_i) \cosh\left(\frac{\mu_i z_0}{r_0}\right)}$$

где  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $J_0$  и  $J_1$  - функции Бейселя первого рода нулевого и первого порядка, а  $\mu_i$  - корни функции  $J_0$ .

На оси вблизи центра ловушки решение уравнения для потенциала видоизменяется и его можно представить в упрощенном виде, схожем по своей структуре с видом поля электростатического аксиально-симметрического квадрупольного. Таким образом, динамику частиц в этой ловушке с достаточно хорошей точностью можно описывать линейным приближением, в следствии чего движение так же будет разделяться на продольные колебания и циклоидальное вращение.

Модификация ловушки, создаваемая добавлением в нее буферного газа называется ловушкой Пеннинга-Малмберга-Сурко. В данной работе рассматривается динамика заряженных частиц в одной из модификаций ловушки Пеннинга-Малмберга-Сурко - ловушка Пеннинга-Малмберга-Сурко с вращающимся дипольным электрическим полем и буферным газом, исследованная ранее в работах [14-16](рис. 4).

Поля рассматриваемой идеальной ловушки комбинируются из постоянных полей ловушки Пеннинга и переменного (вращающегося в поперечной плоскости по всей длине ловушки) электрического поля, называемого также «вращающейся стенкой» (Rotating Wall — RW). Этот элемент создаст дипольное электрическое поле вращающееся в поперечной плоскости по



**Рис. 4:** Ловушка Пеннинга-Малмберга-Сурко с вращающимся электрическим полем. 1-8 - электроды (с помощью разрезных электродов 4-7 создаётся RW-поле); 9 коллектор и спинтронный счётчик; 10 соленоид; 11, 12- турбомолекулярный и криогенные вакуумные насосы.

всей длине ловушки. Напряженность вращающегося поля в продольном (аксиальном) направлении возрастает по абсолютной величине от центра ловушки к краям и имеет противоположную направленность по разные стороны от центра ловушки (т. е. центрально симметрично).

Для создания в ловушке вращающегося электрического поля электрод изготавливается в виде нескольких изолированных сегментов. На каждый сегмент подаётся переменное гармоническое напряжение с одинаковой частотой и амплитудой, сдвинутое по фазе на определенный угол относительно соседнего сегмента. Таким образом достигается вращение электрического поля в плоскости, перпендикулярной оси ловушки. Такую модификацию ловушки иногда называют ловушкой Чарльтона.

Зависимость накопления заряженных частиц от параметров вращающегося поля носит резонансный характер. Добавление в ловушку вращающегося электрического поля с определенными параметрами позволяет получить как быстрое увеличение показателя роста амплитуды магнетронных колебаний (неустойчивость), так и затухание всех типов колебаний (асимптотическую устойчивость). Результаты анализа влияния вращающегося поля, полученные ранее, были или недостаточно полны [12] или недостаточно строги с математической точки зрения [10, 11]. В работах [5, 6, 8, 18] были предложены общие подходы, применимые для анализа устойчивости и построения численно-аналитических решений уравнений движения исследуемой системы при произвольных значениях ее параметров.

Целью данной работы является установление аналитических критериев, которым должны удовлетворять параметры ловушки данного типа для получения степени устойчивости исследуемой системы в заданном диапазоне (для анализа и настройки соответствующих режимов ее работы: сжатия или расширения). При проведении анализа, необходимо учитывать, как будет вести себя система при учете пространственного заряда, а также определить, как будут меняться параметры линейной модели при различных значениях накопленного заряда.

В работе исследуются движения одиночных частиц (как без учета влияния пространственного заряда, так и с его учетом) в идеальных полях. Интерес к поставленной задаче возникает из попыток [4, 15] объяснить наблюдаемый в экспериментах [16] эффект сжатия сгустка накопленных частиц вращающимся полем при предельно малых концентрациях накопленных частиц. Фокусирующий эффект в таком случае должен следовать из анализа решения уравнений движения одиночных частиц в полях сил, действующих в ловушке [4], возможность чего была показана в работах [5, 8]. Учет пространственного заряда позволяет внести корректировку в параметры ловушки, в том числе в процессе накопления.

## Постановка задачи

В данной работе исследуется динамика заряженных частиц в ловушке Пеннинга с вращающимся дипольным электрическим полем. Следуя работе [16] запишем потенциал электрического поля ловушки в следующем виде:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{m}{q} \frac{\omega_z^2}{2} \left( z^2 - \frac{x^2 + y^2}{2} \right) + \frac{m}{q} a z (x \cos(\omega_r t) - y \sin(\omega_r t)). \quad (1)$$

Здесь  $m$  и  $q$  – масса и заряд частицы;

$\omega_z$  – частота продольных колебаний частицы в аксиально симметричном электрическом поле;

$a$  и  $\omega_r$  – амплитуда и частота вращающегося поля ( $a = 0$  – поле выключено);

$$a \approx \frac{qU_r}{2mRL_b}$$

где  $U_r$  – максимум разности потенциалов между диаметрально противоположными электродами,

$2L_b$  – длина участка дипольного вращающегося поля, совпадающая с длиной ловушки,

$R$  – радиус цилиндрических электродов.

Используя уравнение Ньютона-Лоренца и добавляя тормозящее влияние буферного газа запишем выражение для силы действующей на частицу:

$$F = q \cdot E + q \cdot [V \times B] - k \cdot \dot{r}$$

В этом случае динамику частиц можно описать следующей системой уравнений [14]:

$$\ddot{x} = \frac{w_z^2}{2}x - az \cos(w_r t) + \Omega_c \dot{y} - k\dot{x}, \quad (2)$$

$$\ddot{y} = \frac{w_z^2}{2}y + az \sin(w_r t) - \Omega_c \dot{x} - k\dot{y}, \quad (3)$$

$$\ddot{z} = -w_z^2 z - k\dot{z} - a(x \cos(w_r t) - y \sin(w_r t)). \quad (4)$$

Здесь  $\Omega_c = qB/m$  – циклотронная частота в идеальной ловушке;

$\mathbf{V} = \mathbf{e}_z B$  – продольное однородное магнитное поле;

$k > 0$  – коэффициент демпфирования, используемый для приближенного учета охлаждающего эффекта буферного газа с помощью силы вязкого сопротивления (трения) [15, 16]. В данной модели не учитывается статистический характер столкновений частиц с молекулами буферного газа. (При этом  $k = 0$  означает ловушку без буферного газа).

В данной работе предполагается выполнение следующих оценок:

$$\Omega_c \gg w_z \gg \frac{w_z^2}{2\Omega_c} \gg k > 0.$$

Требуется определить характер движения отдельных частиц в ловушке и влияние изменения параметров ловушки на устойчивость данной системы.

Исходя из определения асимптотической устойчивости по Ляпунову,

линейная система называется асимптотически устойчивой тогда, когда все ее решения асимптотически устойчивы. Для линейных однородных систем, это свойство эквивалентно тому, что компоненты всех решений данной системы стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .

Проверка асимптотической устойчивости системы (2)-(4) затруднена тем, что матрица системы непостоянна (зависит от времени). В случае постоянной матрицы системы вопрос об асимптотической устойчивости сводится к проверке на отрицательность вещественных частей всех собственных значений матрицы системы.

## Глава 1. Вспомогательные сведения и преобразования системы

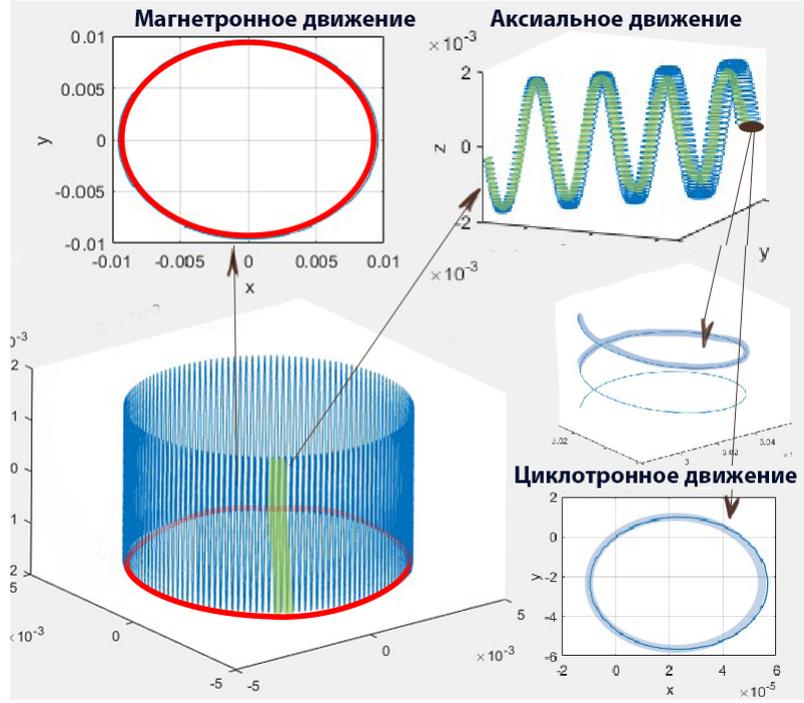
### 1.1 Динамика частицы

Рассмотрим подробнее динамику частицы в ловушке. Благодаря комбинации электростатического аксиально симметрического поля электродов ловушки и продольного однородного магнитного поля в ловушке Пеннинга создается устойчивая система, в которой частицы колеблются вокруг положения равновесия. Эти колебания подразделяются на три типа: циклотронные, магнетронные и аксиальные (Рис. 5).

Как видно из рисунка, в горизонтальной плоскости орбитальное движение ионов движение ионов в радиальной плоскости состоит из двух нормальных колебаний с «магнетронной» и «модифицированной циклотронной» частотами. Эти движения похожи на деферент и эпицикл, соответственно, модели Солнечной системы Птолемея. Электрическое поле заставляет ионы осциллировать вдоль вертикальной оси ловушки.

Для определения модифицированных частот, перейдем к следующей замене.

Введем комплексную переменную  $\xi = x + iy$ . Тогда систему уравнений (2)-(4), характеризующих движение заряженных частиц в ловушке, можно



**Рис. 5:** Динамика заряженной частицы

представить в виде:

$$\ddot{\xi} - \frac{w_z^2}{2}\xi + (i\Omega_c + k)\dot{\xi} = -az \exp(-iw_r t) \quad (5)$$

$$\ddot{z} + w_z^2 z + kz = -\frac{a}{2}(\xi \exp(iw_r t) - \bar{\xi} \exp(-iw_r t)) \quad (6)$$

При  $a = 0$  решения линейной стационарной системы уравнений представимы в виде  $\exp(\lambda t)$ . Для каждого уравнения выпишем характеристический полином и найдем его корни:

$$R(\lambda) = \lambda^2 + (i\Omega_c + k)\lambda - \frac{w_z^2}{2} \quad (7)$$

$$\lambda_+ = r_c - iw_c,$$

$$\lambda_- = r_m - iw_m,$$

где  $r_c = \text{Re}\lambda_+ = -(k + r_m)$ ;  $r_m = \text{Re}\lambda_-$ ;  $w_m$  – модифицированная частота магнетронных колебаний, описывающая колебания частиц в скрещенных продольном магнитном и радиальном электрическом полях;

$w_c = (\Omega_c - w_m)$  - модифицированная частота циклотронных колебаний;

$$Q(\lambda) = \lambda^2 + k\lambda + w_z^2 \quad (8)$$

$$\mu_{\pm} = -\frac{k}{2} \pm iw_b$$

$w_b = \sqrt{w_z^2 - \frac{k^2}{4}}$  - модифицированная частота продольных (аксиальных) колебаний. При этом будут справедливы приближенные формулы:

$$w_m \approx \frac{w_z^2}{2\Omega_c}, r_m \approx \frac{k w_m}{\Omega_c} \ll k, w_b \approx w_z, w_c \approx \Omega_c.$$

Мнимые части характеристических чисел определяют модифицированные частоты колебаний. От отрицательных вещественных частей этих корней зависят коэффициенты сжатия амплитуды колебаний соответствующих типов движения, от положительных – коэффициенты расширения. Таким образом, при  $k > 0$  и  $a = 0$  для циклотронных и аксиальных движений имеет место сжатие (затухание амплитуды колебаний), а для магнетронных – расширение (нарастание амплитуды колебаний).

## 1.2 Переход к системе с постоянными коэффициентами

Для исследования устойчивости движения при произвольном значении параметра  $a$  введем новую переменную

$$\psi = u + iv = \xi \exp(iw_r t)$$

Что равносильно следующей замене

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(w_r t) & -\sin(w_r t) \\ \sin(w_r t) & \cos(w_r t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

которая осуществляет переход к подвижной системе координат, получаемой из неподвижной равномерным вращением в поперечной плоскости с

угловой частотой  $w_r$  вокруг оси  $z$ . В результате получаем новую систему:

$$\psi'' + (i(\Omega_c - 2w_r)k)\psi' + (w_r\Omega_c - w_r^2 - \frac{w_z^2}{2} - iw_rk)\psi = -az \quad (9)$$

$$z'' = w_z^2 z + kz = -au \quad (10)$$

При  $a = 0$  характеристический полином первого уравнения данной системы  $P(\lambda)$  связан с полиномом  $R(\lambda)$  соотношением

$$P(\lambda) = R(\lambda - iw_r)$$

А их характеристические числа соотношением

$$\nu_{\pm} = \lambda_{\pm} + iw_r$$

Характеристический полином второго уравнения системы совпадает с  $Q(\lambda)$ . Таким образом, переход к этим переменным не меняет характеристические показатели системы, и исследование устойчивости первоначальной системы можно свести к исследованию получаемой в результате преобразования системы, разбивая первое уравнение на вещественную и мнимую части:

$$\ddot{u} - (\Omega_c - 2w_r)\dot{v} + k\dot{u} + (w_r\Omega_c - w_r^2 - \frac{w_z^2}{2})u + kw_rv + az = 0, \quad (11)$$

$$\ddot{v} + (\Omega_c - 2w_r)\dot{u} + k\dot{v} + (w_r\Omega_c - w_r^2 - \frac{w_z^2}{2})v - kw_ru = 0, \quad (12)$$

$$\ddot{z} + k\dot{z} + w_z^2 z = -au. \quad (13)$$

Заметим, что ранее с помощью данной замены переменных в работе [14] исследовалось влияние на устойчивость вращающегося квадрупольного электрического поля в ловушке Пеннинга без буферного газа. В таком случае проведение анализа устойчивости системы также существенно упрощается возможностью рассматривать поперечное движение независимо от продольного (в отличие от нашего случая).

Характеристические числа системы (11)-(13) могут быть найдены

как корни характеристического полинома  $\chi(\lambda)$ :

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda^2 + k\lambda + (w_r\Omega_c - w_r^2 - \frac{w_z^2}{2}) & -(\Omega_c - 2w_r)\lambda + kw_r & a \\ (\Omega_c - 2w_r)\lambda - kw_r & \lambda^2 + k\lambda + (w_r\Omega_c - w_r^2 - \frac{w_z^2}{2}) & 0 \\ a & 0 & \lambda^2 + k\lambda + w_z^2 \end{vmatrix}.$$

Или, что тоже

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) = & \lambda^6 + 3k\lambda^5 + (3k^2 + w_r^2 + (\Omega_c - w_r)^2)\lambda^4 + (k^3 + k(3w_r^2 + \\ & + (\Omega_c - w_r)^2))\lambda^3 + (w_r^2(3k^2 + (\Omega_c - w_r)^2) + w_z^2((\Omega_c - 2w_r)^2 + \\ & + w_r(\Omega_c - w_r) - \frac{3w_z^2}{4} - a^2))\lambda^2 + k(k^2w_r^2 + (w_r(\Omega_c - w_r) - \frac{w_z^2}{2})^2 - \\ & - 2w_r(\Omega_c - 2w_r)w_z^2 - w_z^4 - a^2)\lambda + (k^2w_r^2w_z^2 + w_z^2(w_r(\Omega_c - w_r) - \frac{w_z^2}{2})^2 - \\ & - a^2(w_r(\Omega_c - w_r) - \frac{w_z^2}{2})) \end{aligned} \quad (14)$$

Степенью устойчивости  $\gamma$  полинома будем называть расстояние на комплексной плоскости от мнимой оси до корня характеристического полинома с максимальной вещественной частью. Если все корни характеристического полинома находятся в левой полуплоскости (случай асимптотической устойчивости системы) степень устойчивости будем считать положительной. Если в правой полуплоскости находится хотя бы один корень, значение степени устойчивости будет браться с отрицательным знаком (случай неустойчивой системы). Если самый правый корень (или корни) располагаются на мнимой оси, степень устойчивости будем считать равной нулю. Таким образом,

$$\gamma = -\max \operatorname{Re}\lambda_i$$

где  $\lambda_i$  – корни полинома.

Из формул Виета для полинома (14) следует:

$$\sum_{i=1}^6 \operatorname{Re}\lambda_i = -3k$$

и степень устойчивости  $\gamma$  полинома (14) не превышает  $k/2$  при любых значениях параметров системы ( $\gamma_{max} = k/2$ ) [5].

## Глава 2. Анализ устойчивости системы

### 2.1 Критерий Рауса-Гурвица

Введем параметр  $\alpha$ , с помощью которого будем оценивать степень устойчивости исследуемой системы. Пусть  $\mu = \lambda + \alpha$ . Сделаем соответствующую замену в характеристическом полиноме (14):

$$\chi(\mu - \alpha) = d_0\mu^6 + d_1\mu^5 + d_2\mu^4 + d_3\mu^3 + d_4\mu^2 + d_5\mu + d_6. \quad (15)$$

Здесь

$$d_0 = 1$$

$$d_1 = 3k - 6\alpha$$

$$d_2 = 3k^2 + w_r^2 + (\Omega_c - w_r)^2 + 15\alpha^2 - 15k\alpha$$

$$d_3 = k^3 + k(3w_r^2 + (\Omega_c - w_r)^2) - \frac{1}{4}\alpha(80\alpha^2 - 120\alpha k + 48k^2 + 16\Omega_c^2 - 32\Omega_c w_r + 32w_r^2)$$

$$d_4 = w_r^2(3k^2 + (\Omega_c - w_r)^2) + w_z^2((\Omega_c - 2w_r)^2 + w_r(\Omega_c - w_r) - \frac{(3w_z^2)}{4}) - a^2 - \frac{1}{4}\alpha(60\alpha^3 + 120\alpha^2 k - 72\alpha k^2 - 24\alpha\Omega_c^2 + 48\alpha\Omega_c w_r - 48\alpha w_r^2 + 12k^3 + 12k\Omega_c^2 - 24k\Omega_c w_r + 48k w_r^2)$$

$$d_5 = k(k^2 w_r^2 + (w_r(\Omega_c - w_r) - \frac{(w_z^2)}{2})^2 - 2w_r(\Omega_c - w_r)w_z^2 - w_z^4 - a^2) - \frac{1}{4}\alpha(24\alpha^4 - 60\alpha^3 k + 48\alpha^2 k^2 + 16\alpha^2\Omega_c^2 - 32\alpha^2\Omega_c w_r + 32\alpha^2 w_r^2 - 12\alpha k^3 - 12\alpha k\Omega_c^2 + 24\alpha k\Omega_c w_r - 48\alpha k w_r^2 - 8a^2 + 24k^2 w_r^2 + 8\Omega_c^2 w_r^2 + 8\Omega_c^2 w z^2 - 16\Omega_c w r^3 - 24\Omega_c w r w z^2 + 8w r^4 + 24w r^2 w z^2 - 6w z^4)$$

$$d_6 = k^2 w_r^2 w_z^2 + w_z^2(w_r(\Omega_c - w_r) - \frac{(w_z^2)}{2})^2 - a^2(w_r(\Omega_c - w_r) - \frac{(w_z^2)}{2}) - \frac{1}{4}\alpha(-4\alpha^5 + 12\alpha^4 k - 12\alpha^3 k^2 - 4\alpha^3\Omega_c^2 + 8\alpha^3\Omega_c w_r - 8\alpha^3 w_r^2 + 4\alpha^2 k^3 + 4\alpha^2 k\Omega_c^2 - 8\alpha^2 k\Omega_c w_r + 16\alpha^2 k w_r^2 + 4\alpha a^2 - 12\alpha k^2 w_r^2 - 4\alpha\Omega_c^2 w_r^2 - 4\alpha\Omega_c^2 w z^2 + 8\alpha\Omega_c w r^3 + 12\alpha\Omega_c w r w z^2 - 4\alpha w r^4 - 12\alpha w r^2 w z^2 + 3\alpha w z^4 - 4a^2 k + 4k^3 w_r^2 + 4k\Omega_c^2 w_r^2 - 8k\Omega_c w r^3 - 4k\Omega_c w r w z^2 + 4k w r^4 + 12k w r^2 w z^2 - 3k w z^4)$$

Коэффициенты  $d_j$  могут быть также вычислены из формулы Тейлора:  $d_j = \chi^{(6-j)}(-\alpha)/(6-j)!$ ;  $j = 0, \dots, 6$ .

Проверку полинома (15) на асимптотическую устойчивость при различных значениях параметра  $\alpha$  можно организовать с помощью необходимых и достаточных условий Рауса-Гурвица. Выполнение этих условий для полинома (15) при выбранном значении параметра  $\alpha$  будет означать, что

степень устойчивости полинома (14) будет больше выбранного значения:  
 $\gamma > \alpha$ .

Составим матрицу Гурвица для полинома (15)

$$\begin{pmatrix} d_1 & d_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_3 & d_2 & d_1 & d_0 & 0 & 0 \\ d_5 & d_4 & d_3 & d_2 & d_1 & d_0 \\ 0 & d_6 & d_5 & d_4 & d_3 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & d_6 & d_5 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_6 \end{pmatrix}.$$

Так как характеристический полином системы имеет шестой порядок, целесообразно применять одну из модификаций алгебраического критерия устойчивости Гурвица - критерий Льенара-Шипара, который сводится к проверке положительности нечетных главных миноров матрицы Гурвица при условии  $d_j > 0, j = 0, \dots, 6$ .

Рассмотрим главные миноры матрицы Гурвица с нечетными индексами:

$$\Delta_1 = d_1; \Delta_3 = \begin{vmatrix} d_1 & d_0 & 0 \\ d_3 & d_2 & d_1 \\ d_5 & d_4 & d_3 \end{vmatrix}; \Delta_5 = \begin{vmatrix} d_1 & d_0 & 0 & 0 & 0 \\ d_3 & d_2 & d_1 & d_0 & 0 \\ d_5 & d_4 & d_3 & d_2 & d_1 \\ 0 & d_6 & d_5 & d_4 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & d_6 & d_5 \end{vmatrix}.$$

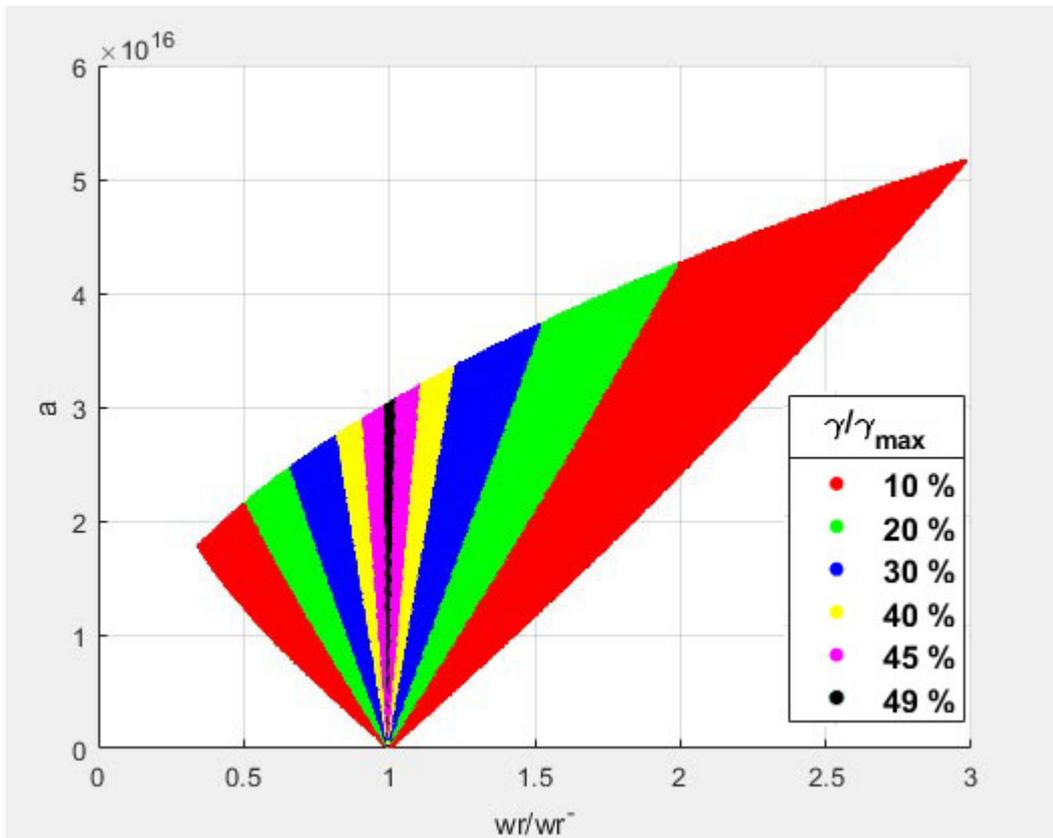
В итоге получаем систему неравенств

$$\Delta_3 > 0; \Delta_5 > 0; d_j > 0, j = 1, \dots, 6,$$

выполнение которых гарантирует, что степень устойчивости  $\gamma$  полинома (2.14) будет лежать в диапазоне:

$$\alpha < \gamma \leq k/2.$$

Выбирая различные значения параметра  $\alpha$ , исследуем зависимость степени устойчивости системы  $\gamma$  от амплитуды  $a$  и частоты  $w_r$  вращающе-



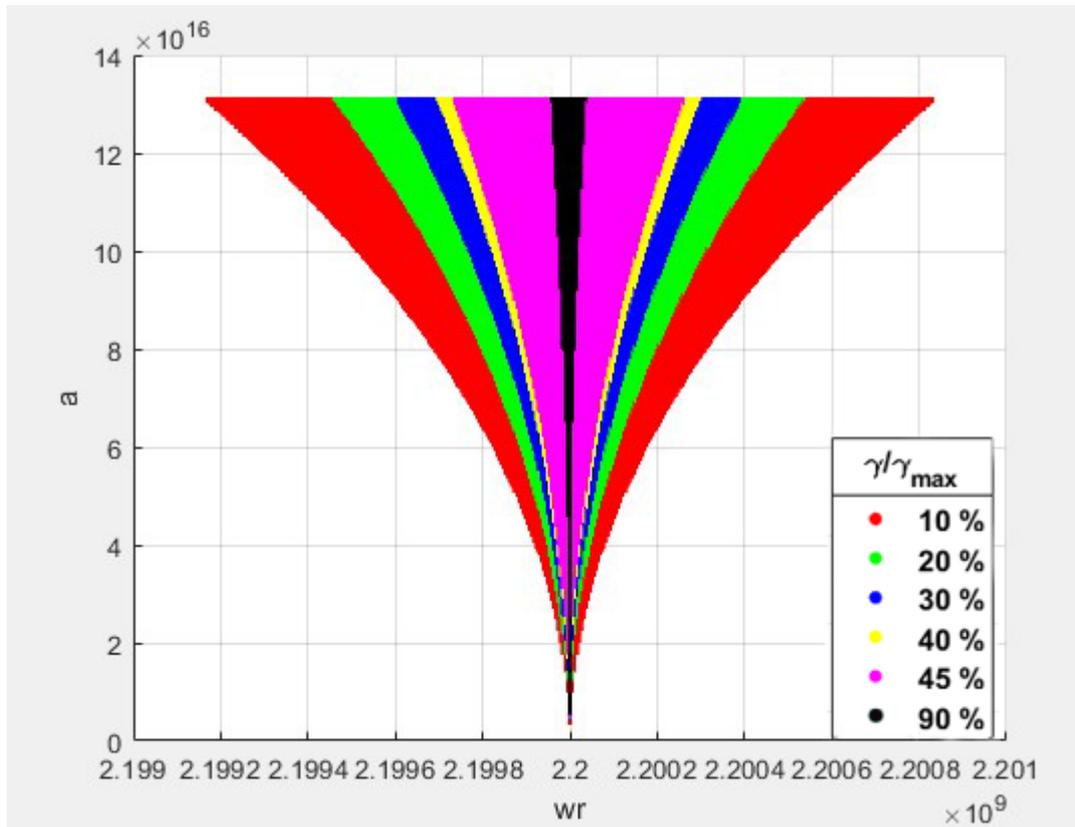
**Рис. 6:** Области с различными диапазонами значений степени устойчивости системы

гося электрического поля. Данное исследование реализовано в программе "Graphix\_Gurv" (см. Приложение). При этом основные параметры системы берутся со следующими значениями:  $k = 1400(c^{-1})$ ,  $w_z = 59.6 * 10^6$  (рад/с),  $\Omega_c = 4.4 * 10^9$  (рад/с). В качестве заряженной частицы берется электрон.

На рисунках 6 и 7 различными цветами помечены найденные области асимптотической устойчивости в пространстве параметров  $a$  и  $w_r$  с оценкой диапазона значений для степени устойчивости системы. Например, красный цвет означает, что степень устойчивости составляет больше 10 процентов, зеленый — больше 20, и т.д. (см. легенду соответствующего рисунка), где за 100 процентов берется  $\gamma_{\max} = k/2$ .

На рисунке 6 представлены результаты расчетов, которые проводились для частот вращающегося поля  $w_r$  от нуля до  $3 * \omega_r^-$ , где  $\omega_r^- = (\omega_b + \omega_m) = 60 * 10^6$  (рад/с) — так называемая эффективная для сжатия частота вращения для данной системы (см. [6], [15]). Амплитуда вращающегося поля  $a$  бралась в диапазоне от нуля до  $6 * 10^{16}(c^{-2})$ . По горизонтальной оси для большей наглядности на Рис.1 откладывается отношение  $\omega_r/\omega_r^-$ .

Следует отметить, что и при  $a = 0$ , и  $w_r = 0$  система всегда неустойчива и построенная область устойчивости лежит выше горизонтальной оси (область может быть трудно различима при выбранном масштабе).



**Рис. 7:** Области с различными диапазонами значений степени устойчивости системы

На рисунке 7 представлены результаты расчетов, которые проводились для диапазона частот вращающегося поля  $w_r = (\omega_c + \omega_m)/2 \pm 0.04\% = \Omega_c/2 \pm 0.04\%$ . Амплитуда вращающегося поля  $a$  бралась в диапазоне от нуля до  $14 * 10^{16} (c^{-2})$ . По горизонтальной оси для удобства откладывается отношение  $\omega_r/\Omega_c$ .

В области устойчивости на Рис.6 наибольшие найденные степени устойчивости близки к  $k/4$ , а на Рис.7 наибольшие значения близки к  $k/2$ . Наибольшая степень устойчивости найдена на частотах вращения поля близких к “резонансным”, при этом можно заметить, что даже небольшие относительные отклонения от которых приводят к существенному уменьшению степени устойчивости и потере устойчивости при “небольших” значениях амплитуды вращающегося поля.

## 2.2 Устойчивость семейства полиномов

Проверка полинома (3.1) на асимптотическую устойчивость при различных значениях параметра  $\alpha$ , приведенная выше, является не достаточно полной, так как она проводится для отдельно взятых точек в пространстве коэффициентов. Чтобы убедиться в непрерывности устойчивости всего семейства полиномов (15), нужно провести более полный анализ .

Мы можем представить наше семейство полиномов в виде:

$$U = \{\chi(\lambda, a^2) \mid d \in D\} \quad (16)$$

где  $a - (n+1)$ -мерный вектор коэффициентов полинома  $\chi(\lambda)$  , а  $D$  - ограниченное множество в пространстве коэффициентов. Это семейство устойчиво, если устойчивы все полиномы из  $U$ . Будем пытаться найти подсемейство  $U_1 \subset U$  такое, что из устойчивости  $U_1$  следует устойчивость  $U$ . Семейству  $U_1$  отвечает подмножество  $D_1 \subset D$  в пространстве коэффициентов. Такие подсемейства и соответствующие подмножества называют проверочными. В нашем случае  $D$  является выпуклым многогранником, обозначим через  $E$  множество ребер, а через  $V$  - множество вершин. Согласно Реберной теореме [3], в качестве проверочного подмножества  $D_1$  можно принять множество, состоящее из одномерных граней (ребер) многогранника  $D$ . Запишем наши ребра, как отрезок, соединяющий две вершины. Пусть эти вершины соответствуют полиномам  $\chi_1(\lambda, a^2)$  и  $\chi_2(\lambda, a^2)$ , тогда уравнение для ребра будет выглядеть следующим образом:

$$\mu\chi_1(\lambda, a_1^2) + (1 - \mu)\chi_2(\lambda, a_2^2), \mu \in [0, 1] \quad (17)$$

Устойчивость семейства (15) гарантирует устойчивость исходного семейства. Однако исследование устойчивости всех полиномов семейства может быть затруднительным. Рассмотрим два метода определения устойчивости.

### 2.2.1 Первый метод - построение и анализ вспомогательной матрицы.

Первый подход разобран в работе [13], где для полиномов семейства (17) строится матрица Гурвица:

$$H = \mu H(\chi_1) + (1 - \mu)H(\chi_2)$$

Здесь  $H(\chi_1)$  и  $H(\chi_2)$  - матрицы Гурвица для полиномов  $\chi_1(\lambda, a_1^2)$  и  $\chi_2(\lambda, a_2^2)$  соответственно. Если эти полиномы устойчивы, то устойчивость семейства (16) имеет место тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\lambda_k(H^{-1}(\chi_1)H(\chi_2)) \notin (0, \infty] \quad (18)$$

Рассмотрим пример использования условий (18), считая основные параметры системы равными:  $k = 1400(c^{-1})$ ,  $w_z = 59.6 * 10^6$  (рад/с),  $\Omega_c = 4.4 * 10^9$  (рад/с),  $w_r = \Omega_c/2$ (рад/с). Амплитуду вращающегося поля  $a_1 = 11.1338 * 10^{12}$  и  $a_2 = 13.10959 * 10^{16}$  выбираем, основываясь на полученных ранее результатах, на границе области устойчивости.

Получаем значение собственных чисел

$$\lambda_1 = 0.874798532610965 + 954.972338523695i;$$

$$\lambda_2 = 0.874798532610965 - 954.972338523695i;$$

$$\lambda_3 = 0.0494116459795824;$$

$$\lambda_4 = 0.969316669611317;$$

$$\lambda_5 = 1.00580153451408;$$

$$\lambda_6 = 6.09960171062128e^{-07};$$

Что означает, что  $\lambda_i > 0, i = 1...6$ , то есть что условие (18) выполняется и семейство полиномов (16) является устойчивым.

### 2.2.2 Второй метод - детерминантный критерий устойчивости

Второй подход рассмотрен в статье [3] и является детерминантным критерием устойчивости семейства полиномов  $U$  с вещественными коэффициентами.

Рассмотрим полиномы  $\chi_1(\lambda, a_1^2)$  и  $\chi_2(\lambda, a_2^2)$ , положим  $\lambda = i\omega$  и выделим

вещественные и мнимые части полиномов  $\chi_1(i\omega, a_1^2)$  и  $\chi_2(i\omega, a_2^2)$ :

$$\chi_1(i\omega, a_1^2) = p_1(\omega, a_1^2) + q_1(\omega, a_1^2),$$

$$\chi_2(i\omega, a_2^2) = p_2(\omega, a_2^2) + q_2(\omega, a_2^2),$$

Здесь

$$p_i(\omega, a_i^2) = -d_0^{(1)}\omega^6 - d_2^{(1)}\omega^4 - d_4^{(1)}\omega^2 + d_6^{(1)},$$

$$q_i(\omega, a_i^2) = d_1^{(1)}\omega^5 - d_3^{(1)}\omega^3 - d_1^{(1)}\omega$$

Введем полиномы

$$F_1(\omega) = p_1(\omega, a_1^2)q_2(\omega, a_2^2) - q_1(\omega, a_1^2)p_2(\omega, a_2^2),$$

$$F_2(\omega) = p_1(\omega, a_1^2)p_2(\omega, a_2^2) + q_1(\omega, a_1^2)q_2(\omega, a_2^2),$$

Найдем неполное частное и остаток от деления следующей дробно-рациональной функции

$$\frac{F_1'(\omega)F_2(\omega)}{F_1(\omega)} = R(\omega) + \frac{G(\omega)}{F_1(\omega)}$$

Тогда

$$F_1(\omega) = \omega(A_0\omega^6 + A_1\omega^4 + A_2\omega^2 + A_3)$$

$$F_1'(\omega) = B_0^{(1)}\omega^6 + B_1^{(1)}\omega^4 + B_2^{(1)}\omega^2 + B_3^{(1)}$$

$$G(\omega) = B_0^{(2)}\omega^6 + B_1^{(2)}\omega^4 + B_2^{(2)}\omega^2 + B_3^{(2)}$$

Введем матрицу

$$X^{(j)} = \begin{pmatrix} B_o^{(j)} & B_1^{(j)} & B_2^{(j)} & B_3^{(j)} & B_4^{(j)} & B_5^{(j)} & B_6^{(j)} \\ A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \\ 0 & B_o^{(j)} & B_1^{(j)} & B_2^{(j)} & B_3^{(j)} & B_4^{(j)} & B_5^{(j)} \\ 0 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ 0 & 0 & B_o^{(j)} & B_1^{(j)} & B_2^{(j)} & B_3^{(j)} & B_4^{(j)} \\ 0 & 0 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 0 & 0 & 0 & B_o^{(j)} & B_1^{(j)} & B_2^{(j)} & B_3^{(j)} \end{pmatrix}, j = 1, 2.$$

где  $B_k, A_k = 0$ , при  $k > 3$ .

Пусть  $r_j(j = 1, 2)$  - ранг матрицы  $X^{(j)}$ , а  $\sigma_k^{(j)}$  - главные миноры этих матриц. Тогда по теореме 7 [3], для того чтобы все полиномы семейства (15) были устойчивы, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\begin{aligned} r_1 - 2V(1, -\sigma_2^{(1)}, \sigma_4^{(1)}, -\sigma_6^{(1)}) - 2V(A_0, \sigma_1^{(1)}, \sigma_3^{(1)}, \sigma_5^{(1)}, \sigma_7^{(1)}) = \\ = r_2 - 2V(1, -\sigma_2^{(2)}, \sigma_4^{(2)}, -\sigma_6^{(2)}) - 2V(A_0, \sigma_1^{(2)}, \sigma_3^{(2)}, \sigma_5^{(2)}, \sigma_7^{(2)}) \end{aligned} \quad (19)$$

$V$  - число знакоперемен в ряду.

Разберем работу критерия (19), реализованного программой "Edge\_theorem" (см. Приложение), на конкретном примере. Основные параметры системы будем считать равными:  $k = 1400(c^{-1})$ ,  $w_z = 59.6*10^6$  (рад/с),  $\Omega_c = 4.4*10^9$  (рад/с),  $w_r = \Omega_c/2$ (рад/с). А амплитуду вращающегося поля примем равной  $a1 = 10 * 10^{13}$  и  $a2 = 10 * 10^{16}$ . Тогда равенство будет иметь вид

$$\begin{aligned} 5 - 2V(1, 1, 1, -1) - 2V(-1, -1, -1, -1, 1) = 5 - 2V(1, 1, -1, -1) - \\ - 2V(-1, -1, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

Или что тоже

$$5 - 2 - 2 = 5 - 2 - 2$$

Полученное равенство является верным, тем самым приходим к заключению, что все исследуемое семейство (15) устойчиво.

## 2.3 Приведение характеристического полинома к виду, содержащему только четные степени

Анализ характеристического полинома (15) осложнен тем тем, что работа с полиномом 6 степени является достаточно сложной задачей. Поэтому рассмотрим случай, когда характеристический полином может быть приведен к виду, содержащему только четные степени.

Для этого введем замену  $\lambda = t - \frac{k}{2}$  в полиноме (15). При этом будем считать  $w_r = \Omega_c/2$ . После чего заменим  $t^2$  на  $y$  для получения кубического уравнения. Тогда полином примет вид:

$$d_0 y^3 + d_1 y^2 + d_2 y + d_3 = 0; \quad (20)$$

$$d_0 = 1,$$

$$d_1 = \frac{\Omega_c^2}{2} - \frac{3k^2}{4},$$

$$d_2 = -a^2 + \frac{3k^4}{16} + \frac{\Omega_c^4}{16} + \frac{\Omega_c^2 w_z^2}{4} - \frac{3w_z^4}{4},$$

$$d_3 = \frac{a^2 k^2}{4} - \frac{a^2 \Omega_c^2}{4} + \frac{a^2 w_z^2}{2} - \frac{k^6}{64} - \frac{k^4 \Omega_c^2}{32} - \frac{k^2 \Omega_c^4}{64} + \frac{3k^2 \Omega_c^2 w_z^2}{16} + \frac{3k^2 w_z^4}{16} + \frac{\Omega_c^4 w_z^2}{16} - \frac{\Omega_c^2 w_z^4}{4} + \frac{w_z^6}{4}$$

Любое кубическое уравнение общего вида (20) может быть приведено при помощи замены  $y = t - \frac{d_1}{3d_0}$  к канонической форме кубического уравнения

$$t = t^3 + pt + q,$$

$$\text{где } p = \frac{d_2}{d_0} - \frac{d_1^2}{3d_0^2} = \frac{3d_0 d_2 - d_1^2}{3d_0^2}, q = \frac{2d_1^3}{27d_0^3} - \frac{d_1 d_2}{3d_0^2} + \frac{d}{d_0} = \frac{2d_1^3 - 9d_0 d_1 d_2 + 27d_0^2 d_3}{27d_0^3}$$

Для нахождения корней кубического уравнения в канонической форме можно использовать формулу Кардано. Определим величину:

$$Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2.$$

Если все коэффициенты кубического уравнения вещественны, то и  $Q$  вещественно, и по его знаку можно определить тип корней:

$Q > 0$  — один вещественный корень и два сопряжённых комплексных корня.

$Q = 0$  — один однократный вещественный корень и один двукратный, или, если  $p = q = 0$ , то один трёхкратный вещественный корень.

$Q < 0$  — три вещественных корня.

По формуле Кардано, корни кубического уравнения в канонической форме равны:

$$t_1 = \alpha + \beta, t_{2,3} = -\frac{\alpha+\beta}{2} \pm i\frac{\alpha-\beta}{2}\sqrt{3},$$

$$\text{где } \alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}, \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}},$$

Дискриминант многочлена  $t^3 + pt + q$  при этом равен  $\Delta = -108Q$ .

Применяя данные формулы, для каждого из трёх значений  $\alpha$  необходимо брать такое  $\beta$ , для которого выполняется условие  $\alpha\beta = -p/3$  (такое значение  $\beta$  всегда существует).

Введенная нами замена имеет вид  $\lambda = t - \frac{k}{2}$ , что соответствует анализу системы с максимальной степенью устойчивости. Таким образом при выбранной частоте исследование системы на устойчивость упрощается и появляется возможность аналитически проанализировать параметры полинома, представленного в специальном виде (20).

## Глава 3. Учет пространственного заряда

### 3.1 Модель, учитывающая пространственный заряд

Ранее было рассмотрено движение частиц в заданных фокусирующих внешних полях, без учета взаимодействия частиц в пучке. Однако, если плотность пространственного заряда велика, то пренебречь эффектом взаимодействия частиц уже не представляется возможным.

Введем в нашу систему, описывающую динамику заряженных частиц поправочные коэффициенты, отвечающие за влияние пространственного заряда -  $q_x$ ,  $q_y$  и  $q_z$ . В силу симметрии пучка относительно оси  $z$ , поправочные коэффициенты в поперечном движении равны  $q_x = q_y$ , поэтому обозначим их как  $q_{xy}$ . Таким образом, система дифференциальных уравнений, описывающих динамику частицы с учетом влияния пространственного за-

ряда будет иметь вид:

$$\ddot{x} = \left(\frac{w_z^2}{2} + q_{xy}\right)x - az \cos(w_r t) + \Omega_c \dot{y} - k\dot{x}, \quad (21)$$

$$\ddot{y} = \left(\frac{w_z^2}{2} + q_{xy}\right)y + az \sin(w_r t) - \Omega_c \dot{x} - k\dot{y}, \quad (22)$$

$$\ddot{z} = -(w_z^2 - q_z)z - k\dot{z} - a(x \cos(w_r t) - y \sin(w_r t)). \quad (23)$$

Введенная поправка влечет за собой изменение в значениях модифицированных частот, поэтому следуя уравнениям (7)-(8) и беря во внимание поправку на пространственный заряд (21)-(23) получим новые формулы для  $w_b$  и  $w_m$ :

$$w_b = \sqrt{w_z^2 - \frac{k}{4} - q_z}; \quad w_m = \frac{w_z^2 + 2q_{xy}}{2\Omega_c} \quad (24)$$

Аналогично вычислениям предложенным в Главе 1 пункт 2, выполним переход к вращающейся системе координат, позволяющий свести исследуемую систему обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами к линейной дифференциальной системе с постоянной матрицей. Таким образом система (21)-(23) примет вид:

$$\ddot{u} - (\Omega_c - 2w_r)\dot{v} + k\dot{u} + (w_r\Omega - w_r^2 - \frac{w_z^2}{2} - q_{xy})u + kw_r v + az = 0,$$

$$\ddot{v} + (\Omega_c - 2w_r)\dot{u} + k\dot{v} + (w_r\Omega_c - w_r^2 - \frac{w_z^2}{2} - q_{xy})v - kw_r u = 0,$$

$$\ddot{z} + k\dot{z} + (w_z^2 - q_z)z = -au.$$

С учетом вышеперечисленных видоизменений в уравнении, учитывающих влияние пространственного заряда в ловушке, картина устойчивости изменится.

Для установления зависимости устойчивости системы от числа частиц в ловушке рассмотрим две различные модели пучка: аксиально - симметричный равномерно заряженный бесконечный пучок и аксиально - симметричный равномерно заряженный пучок конечной длины.

## 3.2 Аксиально-симметричный равномерно заряженный бесконечный пучок

Рассмотрим влияние пространственного заряда создаваемого аксиально-симметричным равномерно заряженным сгустком частиц. Как мы знаем, электростатическое поле в вакууме, при наличии объемных зарядов имеет вид:

$$\nabla^2 U = \frac{-\rho}{\varepsilon_0}$$

где  $U$  - потенциал поля;  $\rho$  - плотность объемного заряда;  $\varepsilon_0$  - электрическая постоянная;  $\nabla^2$  - дифференциальный оператор Лапласа, форма которого в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + r \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) \right]$$

Уравнения Пуассона, записанное в цилиндрической системе координат  $r, \theta, z$  с учетом аксиальной симметрии ( $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ ) выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{-\rho}{\varepsilon_0}$$

Так как мы рассматриваем потенциал, создаваемый на оси камеры относительно ее стенки аксиально-симметричным сгустком частиц, начальными данными для решения задачи являются распределение потенциала и его нормальной производной на оси симметрии ( $U = f_0(z)$  и  $\frac{\partial U}{\partial r} = 0$ ) и пространственное распределение плотности заряда  $\rho$ . Здесь  $\rho = \frac{en}{\pi R_a^2 L_a}$ , где  $e$  - заряд электрона,  $n$  - количество частиц в пучке,  $R_a$  - радиус пучка,  $L_a$  - толщина пучка [4].

Нам удобно представлять решение рассматриваемой задачи в качестве суперпозиции двух функций:

$$U = U_1 + U_2$$

Первая функция является решением однородного уравнения (урав-

нения Лапласа):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U_1}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} = 0$$

при этом на оси симметрии принимается заданное значение потенциала  $U_1 = f_0(z)$ .

Вторая функция является решением неоднородного уравнения:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U_2}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} = \frac{-\rho}{\varepsilon_0}$$

при этом  $U_2 = 0$  на оси симметрии.

Определение значения  $U_2$  в общем случае требует решения неоднородного уравнения, однако в нашей задаче возможно пренебречь членом  $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$  ввиду предположения о равномерном распределении заряда по  $z$ , что сводит задачу вычисления  $U_2$  к квадратурам:

$$U_2(r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \int_0^r \frac{q(r)}{r} dr \quad (25)$$

$$q(r) = -2\pi \int_0^r \rho(r)r dr \quad (26)$$

При этом облако пространственного заряда имеет четкую границу  $R_a$  (радиус пучка), такую что при  $r > R_a$  значение плотности заряда  $\rho(r) = 0$ . Таким образом получаем значение потенциала

$$U_2 = \frac{en}{4\pi R_a^2 L_a \varepsilon_0} r^2; r \leq R_a$$

Значение нормальной производной потенциала дает нам выражение для поправочного коэффициента

$$\frac{\partial U_2}{\partial r} = \frac{en}{2\pi R_a^2 L_a \varepsilon_0} r = q_{xy} r$$

следовательно

$$q_{xy} = \frac{2en}{\pi R_a^2 L_a \varepsilon_0}$$

Выражая из этой формулы значение  $n$  мы можем получить связь между количеством числа частиц в ловушке и поправочным коэффициентом:

$$n = q_{xy} \frac{2\pi R_a^2 L_a \varepsilon_0}{e} \quad (27)$$

При значении  $r \geq R_a$  потенциал выражается следующей формулой:

$$U_2(r) = U_2(R_a) + \frac{q(R_a)}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r}{R_a}\right) \quad (28)$$

Где  $U_2(R_a)$  - значение функции  $U_2$  на границе облака пространственного заряда ( $r = R_a$ ), а  $q(R_a) = -2\pi \int_0^R \rho(r)r dr$  - заряд облака пространственного заряда в расчете на единицу длины.

Таким образом потенциал, создаваемый на оси камеры относительно ее стенки аксиально-симметричным пучком бесконечной длины, выражается формулой:

$$U_2(0) = -\frac{en}{4\pi\varepsilon_0 L_a} \left(2\ln\left(\frac{R_b}{R_a}\right) + 1\right) \quad (29)$$

Если значение (29) превысит запирающую разность потенциалов ловушки  $\Delta U$ , то накопление прекратится. Из этого можно сделать оценку предельного числа частиц в ловушке:

$$n \leq \frac{\Delta U 4\pi\varepsilon_0 L_a}{e} \left(2\ln\left(\frac{R_b}{R_a}\right) + 1\right)^{-1} \quad (30)$$

Запирающая разность потенциалов ловушки находится из формулы (1) при значении ( $r = 0$ ):

$$\Delta U(z) = \frac{m w_z^2}{2e} \left(\frac{L_b}{2}\right)^2$$

Здесь значение  $L_b$  - зона накопления частиц в ловушке.

Еще один критерий для оценки предельного количества частиц в ло-

вушке - критерий Бриллюэна:

$$n/V \leq \frac{B^2}{2\mu_0 mc^2} \quad (31)$$

Здесь  $B$  - значение продольного магнитного поля,  $m$  - масса электрона,  $\mu_0$  - магнитная постоянная,  $c$  - скорость света в вакууме. Этот критерий учитывает, что при определенной плотности частиц сила кулоновского расталкивания превосходит лоренцеву силу, предотвращающую расширению сгустка частиц [2].

### 3.3 Аксиально-симметричный равномерно заряженный пучок конечной длины

Рассмотрим другой вариант модели пучка - модель дисков конечной длины или так называемых толстых дисков, рассмотренный в работе [12]. Движение дисков конечной длины происходит в полой металлической трубе радиуса  $R_b$ , ось симметрии которой совмещена с осью  $Oz$  цилиндрической системы координат. Частицы - цилиндры одинакового радиуса  $R_a$  с осью симметрии, совпадающей с осью симметрии системы, обладающие некоторой толщиной  $L_a$  по этой оси.

Полагаем, что толстый диск заряжен равномерно по объему и имеет заряд  $q = en$ ; объемную плотность заряда так же будем считать равной  $\rho = \frac{q}{\pi R_a^2 L_a}$ .

Найдем выражение для напряженности поля, создаваемого в металлической трубе одиночным диском конечной длины. Считаем  $z_0$  координатой центра толстого диска;

Чтобы найти потенциал поля, создаваемого толстым диском, воспользуемся выражением для потенциала бесконечно тонкого диска (считаем что поверхностная плотность заряда на диске  $\sigma = 1$ ):

$$U(r, z, \xi) = \sum_{m=1}^{\infty} P_m(r) \exp \frac{-\mu}{R_b} |z - \xi|, 0 \leq r \leq R_b, |z - \xi| < \infty$$

где

$$P_m(r) = \frac{R_b}{\varepsilon_0} \frac{J_1(\mu_m \frac{R_a}{R_b})}{\mu_m^2 J_1^2(\mu_m)} J_0(\mu_m \frac{r}{R_b}) \quad (32)$$

здесь  $J_0$  и  $J_1$  - функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка соответственно.  $\mu_m$  - корни функции  $J_0$ .

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\frac{z}{2})^{n+2k}}{k!(k+n)!} \quad (33)$$

Чтобы получить потенциал, создаваемый толстым диском с координатой  $z_0$ , проинтегрируем выражение  $U(r, z, \eta)$  по переменной в пределах от  $z_0 - \frac{L_a}{2}$  до  $z_0 + \frac{L_a}{2}$  с учетом плотности пространственного заряда пучка. Получим

$$\int e^{\frac{-\mu}{R_b}|x|} dx = \frac{R_b}{\mu} g_m(x) + C$$

где

$$g_m(x) = \text{sign}(x)(1 - e^{\frac{-\mu}{R_b}|x|}) \quad (34)$$

$C$  - произвольная постоянная.

Таким образом, потенциал поля, создаваемого неподвижным толстым диском, равен:

$$\begin{aligned} U(r, z) &= \eta \int_{-L_a/2}^{L_a/2} U(r, z, \eta) d\eta = \\ &= \eta R_b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_m} P_m(r) (g_m(z + \frac{L_a}{2}) - g_m(z - \frac{L_a}{2})) \end{aligned} \quad (35)$$

Дифференцируя значение (35) по  $r$  и  $z$ , получим значение напряженности поля:

$$\begin{aligned} E_z(r, z) = \frac{\partial U(r, z)}{\partial z} &= -\eta R_b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_m} P_m(r) (g'_m(z + \frac{L_a}{2}) - \\ & - g'_m(z - \frac{L_a}{2})) \end{aligned} \quad (36)$$

$$E_r(r, z) = \frac{\partial U(r, z)}{\partial r} = -\eta R_b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_m} \dot{P}_m(r) \left( g_m \left( z + \frac{L_a}{2} \right) - g_m \left( z - \frac{L_a}{2} \right) \right) \quad (37)$$

В выражениях (36)-(37) выделяем линейные по  $z$  и  $r$  части. Таким образом учитывая формулы (32), (33), (34) получаем

$$E_z(z) = -\frac{2en}{\varepsilon_0 L_a \pi R_a R_b} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{J_1(\mu_m \frac{R_b}{R_b})}{J_1^2(\mu_m)} \right] z = q_z z$$

$$E_r(r) = -\frac{enL_a}{8\varepsilon_0 \pi R_a R_b^3} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \mu_m^2 \frac{J_1(\mu_m \frac{R_a}{R_b})}{J_1^2(\mu_m)} \right] r = q_{xy} r$$

Следовательно связь между количеством числа частиц и поправочными коэффициентами в ловушке выражается формулами:

$$n = -\frac{\varepsilon_0 L_a \pi R_a R_b}{2e} \left( \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{J_1(\mu_m \frac{R_b}{R_b})}{J_1^2(\mu_m)} \right] \right)^{-1} q_z = A q_z \quad (38)$$

$$n = -\frac{8\varepsilon_0 \pi R_a R_b^3}{e L_a} \left( \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \mu_m^2 \frac{J_1(\mu_m \frac{R_a}{R_b})}{J_1^2(\mu_m)} \right] \right)^{-1} q_{xy} = B q_{xy} \quad (39)$$

Таким образом считая  $q_{xy} = n/A$  и  $q_z = N/b$ , получим зависимость  $q_z$  от  $q_{xy}$ :

$$q_z = \frac{B}{A} q_{xy} \quad (40)$$

### 3.4 Построение областей устойчивости с учетом пространственного заряда

При построениях областей устойчивости будем ориентироваться на типичные значения параметров частиц и ловушки Пеннинга-Малмберга-Сурко установки ЛЕРТА для накопления заряженных частиц. Эти значения приведены в таблице 1.

**Таблица 1:** Типичные значения параметров

Длина электродов в области накопления, м	$L_b$	0.32
Внутренний радиус электродов, м	$R_b$	0.1
Циклотронная частота, рад/с	$\Omega_c$	$7 \cdot 10^8$
Запирающая разность потенциалов, В	$\Delta U$	13
Продольное магнитное поле,	$B$	0.004
Длина накопленного сгустка, м	$L_a$	0.24
Радиус сгустка, м	$R_a$	$0.5 \cdot 10^{-2}$
Заряд электрона, кл	$e$	$-1.60217662 \cdot 10^{-19}$
Масса электрона, кг	$m$	$9.1093837015 \cdot 10^{-31}$
Скорость света в вакууме, м/с	$c$	$3 \cdot 10^8$
Диэлектрическая постоянная, Ф/м	$\epsilon_0$	$8.8541878 \cdot 10^{-12}$
Магнитная постоянная постоянная, Н/А <sup>2</sup>	$\mu_0$	$8.8541878 \cdot 10^{-12}$

Пользуясь аналитическими расчетами (31) получим оценку предельного числа частиц в ловушке:

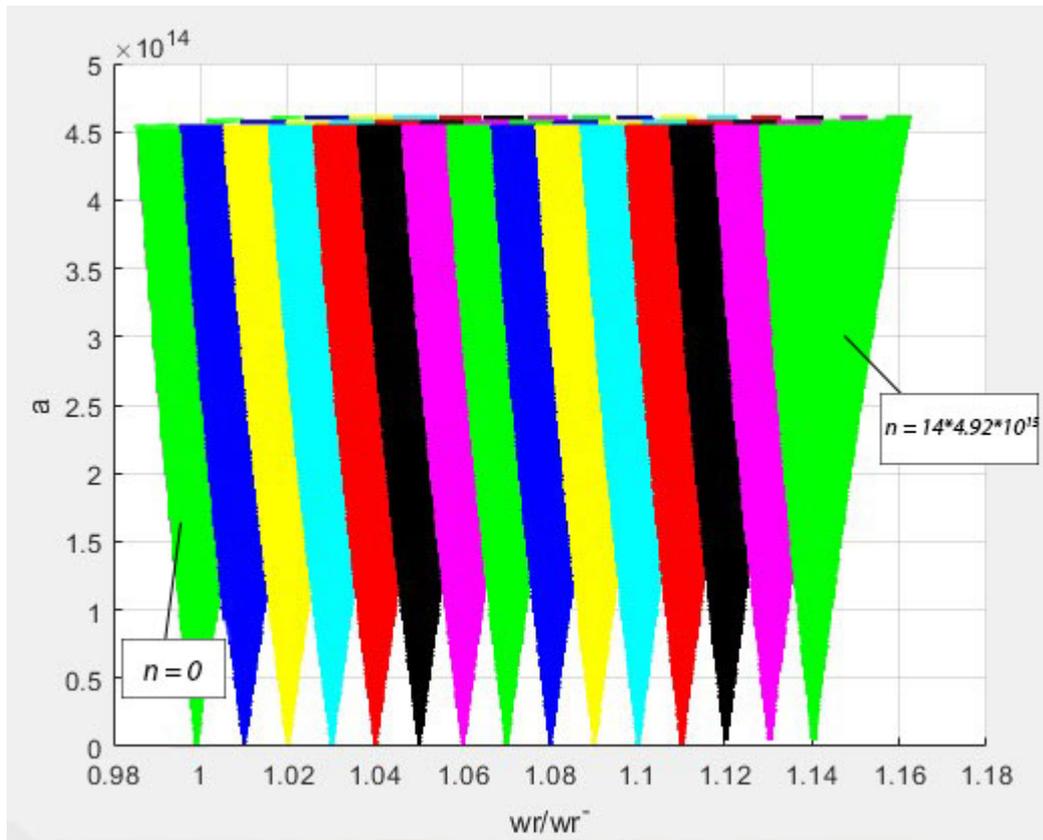
$$n \leq 3 \cdot 10^8$$

По критерию Бриллюэна (32) получаем значение:

$$n/V \leq 6 \cdot 10^{13}; n \leq 1.4 \cdot 10^9$$

Рассмотрим теперь, как будет меняться карта устойчивости нашей системы при увеличении количества заряженных частиц. Определение областей устойчивости реализовано в программе "Graphix\_Gurv\_charge" (см. Приложение).

В случае, когда мы рассматриваем бесконечно длинный пучок значение оптимальной частоты  $w_r^- = w_b + w_m$  будет сдвигаться согласно формуле (25) на величину  $\frac{q_{xy}}{\Omega_c}$  (рис. 7). Степень устойчивости для расчетов (рис.7) бралась равной  $\gamma/\gamma_{max} = 49\%$ . Значение  $n$  бралось в пределах от 0 до  $69 \cdot 10^{15}$ . Разные значения для количества частиц в ловушке обозначены разными цветами для большей наглядности. Значение амплитуды вращаю-



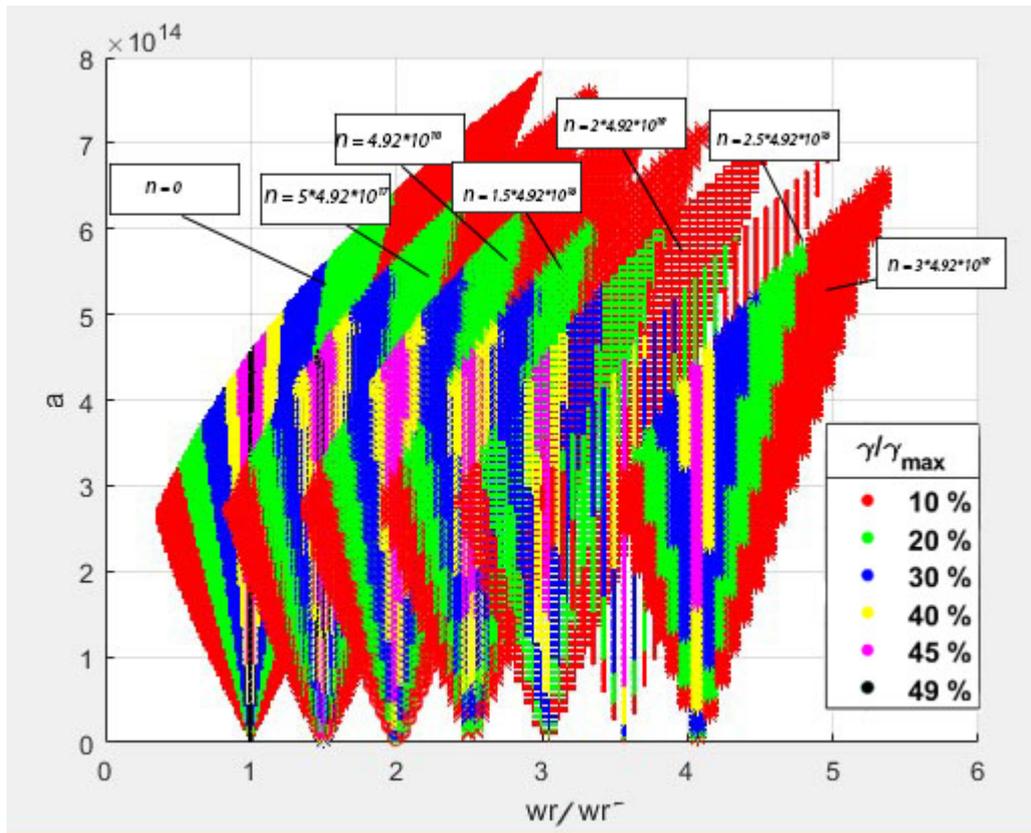
**Рис. 8:** Первая модель пучка при степени устойчивости  $\gamma/\gamma_{max} = 49\%$

щегося поля а бралось от 0 до  $5 * 10^{14}(c^{-1})$ , а значение частоты вращающегося поля  $w_r$  от 0 до  $1.2 * w_r^-$ ,  $w_r^- = (w_b + w_m) = 60 * 10^6$  рад/с - эффективная частота сжатия без учета пространственного заряда в системе.

Рис.8 отображает изменение картины устойчивости при значениях  $n$  в диапазоне  $[0; 3 * 4.92 * 10^{18}]$ . Различные значения количества частиц на рисунке обозначаются разными символами, а разные степени устойчивости, отображаются разными цветами (см. легенду рисунка 8). Значение амплитуды вращающегося поля бралось от 0 до  $8 * 10^{14}(c^{-1})$ , а значение частоты вращающегося поля от 0 до  $6 * w_r^-$  рад/с.

На рис.7 и рис.8 заметно изменение эффективной частоты от увеличения количества накопленных частиц (для наглядности ось берется  $w_r/w_r^-$ , что отражает смещение от оптимальной частоты при  $n = 0$  вправо). На рис.8 так же можно заметить сужение области устойчивости при количестве частиц порядка  $10^{18}$ .

При рассмотрении модели пучка конечной длины, значение эффективной для сжатия частоты вращения  $w_r^- = w_b + w_m$  будет так же сдви-

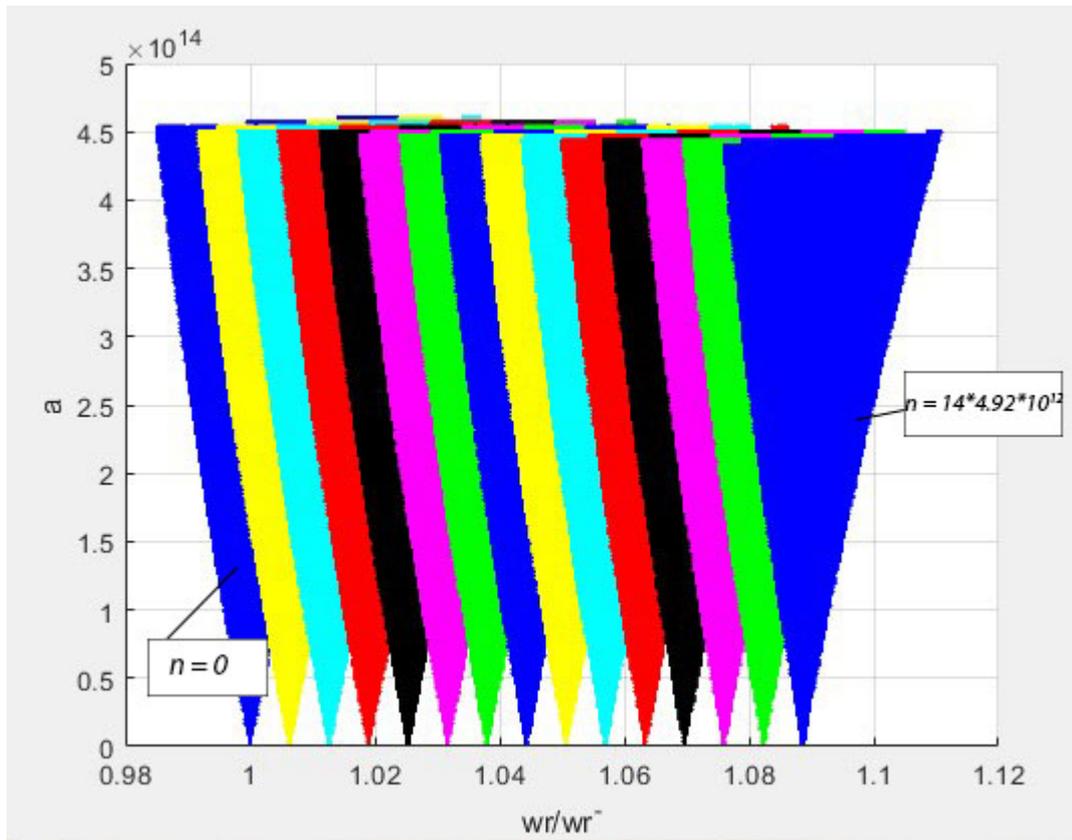


**Рис. 9:** Первая модель пучка при различных степенях устойчивости

гаться согласно формуле (25). Однако в этом случае, на значение влияет не только величина  $\frac{q_{xy}}{\Omega_c}$ , но и  $-q_z$ , фигурирующая в выражении модифицированной частоты продольных колебаний  $w_b$ .

На рис.10 отражается поведение областей устойчивости при степени устойчивости  $\gamma/\gamma_{max} = 49\%$ . Значения амплитуды и частоты вращающегося поля брались аналогичными случаю пучка бесконечного размера. Значение  $n$  бралось в пределах  $[0; 14 \cdot 4.92 \cdot 10^{12}]$ . Разные значения для количества частиц в ловушке так же обозначены разными цветами. Сравнивая рис.7 и рис.9 можно заметить, что смещение от оптимальной частоты при увеличении числа частиц значительно быстрее в случае, когда мы рассматриваем модель пучка конечной длины. Так же можно отметить уменьшение области устойчивости, если обратить внимание на верхнюю часть графика.

Более подробную картину изменения можно получить, если рассматривать различные значения степени устойчивости (рис.11). Здесь будем брать количество частиц  $n = 0 : 7 \cdot 3.3 \cdot 10^{14}$ . Как и в случае бесконечно длинного пучка будем брать значение амплитуды вращающегося поля от 0



**Рис. 10:** Первая модель пучка при степени устойчивости  $\gamma/\gamma_{max} = 49\%$

до  $8 * 10^{14} (c^{-1})$ . Значение частоты вращающегося в этом случае находится в диапазоне от 0 до  $4 * w_r^-$ .

Данная картина достаточно наглядно показывает смещение оптимальной частоты, а так же сужение областей устойчивости при увеличении числа частиц. Кроме того, можно заметить, что при определенном значении  $n$  устойчивость пропадает вовсе.

Проведем сравнительный анализ двух различных моделей пучков: посчитаем значения количества частиц  $n$ , концентрации частиц  $n/V$ , значения добавочных коэффициентов  $q_{xy}$  и  $q_z$ , заряда и разности между эффективными частотами  $(w_r/w_r^- - 1) * 100\%$  (рис.11).

Из этой таблицы видно, что изменение эффективной частоты в случае пучка конечной длины происходит намного быстрее, чем в случае пучка бесконечной длины. Это обусловлено тем, что в разных моделях добавочные коэффициенты имеют различный вид. Прочерком в таблице обозначены значения, при которых устойчивость полностью теряется. Это происходит, когда значение корректирующего коэффициента становится больше

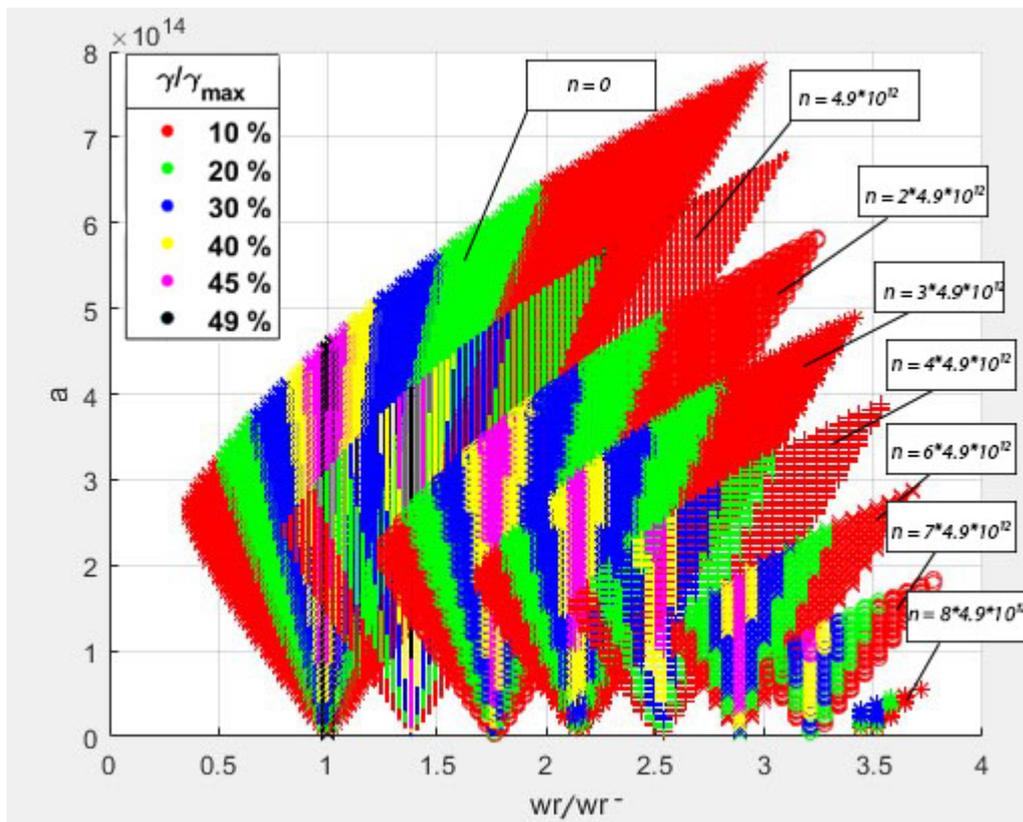


Рис. 11: Первая модель пучка при различных степенях устойчивости

Количество частиц, n	2.014 *10 <sup>4</sup>	6.713 *10 <sup>6</sup>	1.265 *10 <sup>8</sup>	3*10 <sup>8</sup>	10 <sup>11</sup>	1.885 *10 <sup>12</sup>	3.303 *10 <sup>12</sup>	3.303 *10 <sup>14</sup>	3.303 *10 <sup>15</sup>	4.920 *10 <sup>16</sup>	4.920 *10 <sup>17</sup>	4.920 *10 <sup>18</sup>
Концентрация частиц, n/V	1.068 *10 <sup>9</sup>	3.561 *10 <sup>11</sup>	6.711 *10 <sup>12</sup>	1.591 *10 <sup>13</sup>	5.305 *10 <sup>15</sup>	1.000 *10 <sup>17</sup>	1.752 *10 <sup>17</sup>	1.752 *10 <sup>19</sup>	1.752 *10 <sup>20</sup>	2.610 *10 <sup>21</sup>	2.610 *10 <sup>22</sup>	2.610 *10 <sup>23</sup>
Пучок бесконечной длины, q_xу (q_z)=0	2.880 *10 <sup>5</sup>	9.600 *10 <sup>7</sup>	1.810 *10 <sup>9</sup>	4.290 *10 <sup>9</sup>	1.430 *10 <sup>12</sup>	2.695 *10 <sup>13</sup>	4.723 *10 <sup>13</sup>	4.723 *10 <sup>15</sup>	4.723 *10 <sup>16</sup>	7.036 *10 <sup>17</sup>	7.036 *10 <sup>18</sup>	7.036 *10 <sup>19</sup>
Пучок конечной длины, q_xу	1.933 *10 <sup>1</sup>	6.444 *10 <sup>3</sup>	1.214 *10 <sup>5</sup>	2.880 *10 <sup>5</sup>	9.600 *10 <sup>7</sup>	1.810 *10 <sup>9</sup>	1.752 *10 <sup>10</sup>	1.752 *10 <sup>12</sup>	1.752 *10 <sup>13</sup>	4.723 *10 <sup>13</sup>	4.723 *10 <sup>14</sup>	4.723 *10 <sup>15</sup>
Пучок конечной длины, q_z	4.149 *10 <sup>2</sup>	1.383 *10 <sup>5</sup>	2.607 *10 <sup>6</sup>	6.180 *10 <sup>6</sup>	2.060 *10 <sup>9</sup>	3.883 *10 <sup>10</sup>	6.804 *10 <sup>10</sup>	6.804 *10 <sup>12</sup>	6.804 *10 <sup>13</sup>	1.014 *10 <sup>15</sup>	1.014 *10 <sup>16</sup>	1.014 *10 <sup>17</sup>
Заряд, e	-3.226 *10 <sup>^(-15)</sup>	-1.076 *10 <sup>^(-12)</sup>	-2.027 *10 <sup>^(-11)</sup>	-4.807 *10 <sup>^(-11)</sup>	-1.602 *10 <sup>^(-8)</sup>	-3.020 *10 <sup>^(-8)</sup>	-5.291 *10 <sup>^(-7)</sup>	-5.291 *10 <sup>^(-5)</sup>	-5.291 *10 <sup>^(-4)</sup>	-7.883 *10 <sup>^(-3)</sup>	-7.883 *10 <sup>^(-2)</sup>	-7.883 *10 <sup>^(-1)</sup>
Разность в процентах между эффективными частотами пучка бесконечной длины ( $\frac{\omega_{\text{eff}}}{\omega_c} - 1$ ) * 100%	4.263 *10 <sup>^(-13)</sup>	1.367 *10 <sup>^(-10)</sup>	2.575 *10 <sup>^(-9)</sup>	6.106 *10 <sup>^(-9)</sup>	2.035 *10 <sup>^(-6)</sup>	3.837 *10 <sup>^(-5)</sup>	6.723 *10 <sup>^(-5)</sup>	6.723 *10 <sup>^(-3)</sup>	6.723 *10 <sup>^(-2)</sup>	1.001	10.015	100.144
Разность между эффективными частотами пучка конечной длины ( $\frac{\omega_{\text{eff}}}{\omega_c} - 1$ ) * 100%	5.646 *10 <sup>^(-9)</sup>	1.882 *10 <sup>^(-6)</sup>	3.548 *10 <sup>^(-5)</sup>	8.4118 *10 <sup>^(-5)</sup>	2.804 *10 <sup>^(-2)</sup>	5.285 *10 <sup>^(-1)</sup>	9.260 *10 <sup>^(-1)</sup>	92.294	-----	-----	-----	-----

Рис. 12: Сравнительная таблица

значения  $w_z^2 - \frac{k}{4}$ .

Таким образом, при выполнении равенства  $w_z^2 - \frac{k}{4} = q_z$  получаем значение поправочного коэффициента  $q_z = 4.489 * 10^{13}$ , соответствующего числу частиц  $n = 2.179 * 10^{15}$ . Полученный результат описывает ситуацию, когда потенциальная яма сглаживается и ловушка перестает накапливать частицы. Предельное значение заряда в этом случае  $q = 3.486 * 10^{-4}$ . В случае пучка конечной длины, ограничения на количество частиц, складывается исключительно из потери устойчивости по критерию Льенара-Шипара, поэтому сделать оценку основываясь на вычислении оптимальной частоты сжатия в данном случае не является возможным.

Полученные оценки дают значительно больший диапазон для предельного значения частиц в ловушке с вращающимся полем (на реальной установке реальные значения могут быть значительно меньше в следствии различных факторов, не рассмотренных в данной задаче).

## Заключение

Рассмотрена линейная модель, описывающая динамику частиц в ловушке Пеннинга с вращающимся дипольным электрическим полем. Поставлена задача определения областей устойчивости в пространстве коэффициентов (параметров ловушки). Использована одна из модификаций алгебраического критерия устойчивости Гурвица - критерий Льенара - Шипара, произведен анализ устойчивости (по Ляпунову) движений частиц в ловушке с типовыми основными параметрами, найдены области устойчивости в пространстве параметров, характеризующих добавочное вращающееся электрическое поле. Разработана программа, реализующая проверку критерия Льенара - Шипара и графическое представление областей устойчивости.

Проведен анализ для определения устойчивости линейных семейств полиномов. Рассмотрено два подхода для определения устойчивости таких семейств, каждый из которых подтверждает результаты вычислений, полученных при использовании критерия Льенара-Шипара. Разработаны две программы реализующие проверку семейства полиномов по данным критериям.

Поставлена задача определения влияния пространственного заряда на устойчивость системы. Рассмотрены две модели пучка: аксиально - симметричный равномерно заряженный бесконечный пучок частиц и аксиально - симметричный равномерно заряженный пучок конечной длины. Построены области устойчивости для различного числа накопленных частиц в сгустке и типовых параметрах с ловушки Пеннинга. Разработано соответствующее программное обеспечение.

Результаты данного исследования были частично опубликованы в двух статьях [9] и [10].

## Список литературы

- [1] Владимирова Л.В. Многокритериальная оптимизация динамики пучков // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2014. Т. 7. С. 3–18.
- [2] Есеев М.К., Мешков И.Н. Ловушки для накопления заряженных частиц и античастиц в прецизионных экспериментах // Успехи физических наук. 2016. Т. 186. Вып.3. С.321–335. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0186.201603f.0321>
- [3] Жабко А. П., Харитонов В. Л., Необходимые и достаточные условия устойчивости линейного семейства полиномов // Автомат. и телемех., 1994, выпуск 10, 125–134
- [4] Молоковский С. И., Сушков А. Д. Интенсивные электронные и ионные пучки. –2-е изд. , перераб. и доп. –М. : Энергоатомиздат, 1991.- - 304 с. – ISBN 5-283-03973-0.
- [5] Мешков И.Н., Овсянников А.Д. Овсянников Д.А., Есеев М.К. Исследование устойчивости динамики заряженных частиц в ловушке Пеннинга-Малмберга-Сурко с вращающимся полем // Доклады Академии наук. 2017. Т. 476, Вып. 6. С. 630–634. <https://doi.org/10.7868/S0869565217300065>
- [6] Овсянников А.Д. Анализ динамики заряженных частиц в идеальной ловушке Пеннинга с вращающимся полем и буферным газом

// Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10, Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2019. Т.15. Вып. 1. С. 62–75.  
<https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.105>

- [7] Овсянников А.Д. Математические модели оптимизации динамики пучков // Санкт-Петербург, Издательство «ВВМ», ISBN 978-5-9651-0881-7. 2014. 181 стр.
- [8] Овсянников А.Д., Райконен М.А. Алгоритм приближенного расчета мультипликаторов для одной периодической системы // Вестн. С.-Петерб. гос. ун-та технологии и дизайна. Серия 1. Естественные и технические науки, 2017. Вып. 3. С. 10-14.
- [9] Овсянников А.Д., Шлокова А. И., Комарова А. А., "Поиск областей устойчивости в пространстве коэффициентов в ловушке Пеннинга-Малмберга-Сурко с вращающимся электрическим квадрупольным полем, // Вестник Санкт-Петербургского государственного университета технологии и дизайна. серия 1: Естественные и технические науки (2020), 3-6
- [10] Овсянников А. Д., Шлокова А. И., Комарова А. А., Построение областей устойчивости в пространстве параметров в ловушке Пеннинга с вращающимся электрическим полем, // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика, 2021, том 35, 49–59 DOI: <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.35.49>
- [11] Овсянников Д.А. Моделирование и оптимизация динамики пучков заряженных частиц // Ленинград, Издательство ЛГУ, 1990. 312 стр.
- [12] Овсянников Д.А., Рубцова И.Д., В.А. Козыченко Некоторые проблемы моделирования интенсивных пучков заряженных частиц в линейных ускорителях // – Санкт-Петербург : ООО "Издательство ВВМ 2013. – 144 с. – ISBN 9785965107988.

- [13] Bialas S. A necessary and sufficient condition for the stability of convex combinations of stable polynomials or matrices // Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences. 1985. V. 33. P. 473 - 480.
- [14] Hasegawa T., Jensen M.J., Bollinger J.J. Stability of a Penning trap with a quadrupole rotating field // Phys. Rev. A 71, 023406. 2005. Vol. 71, Iss. 2. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.71.023406>
- [15] Isaac C. A. Motional sideband excitation using rotating electric fields // Phys. Rev. A 87, 043415. 2013. Vol. 87. Iss.4 <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.87.043415>
- [16] Isaac C. A., Baker C. J., Mortensen T. et al. Compression of positron clouds in the independent particle regime // Phys. Rev. Lett. 107, 033201. 2011. Vol. 107, Iss.3. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.033201>
- [17] Meshkov I. N., Eseev M. K., Ovsyannikov A. D. et al. Analysis of the particle dynamics stability in the Penning—Malmberg—Surko trap // Proc. XXV Russian Particle Accelerator Conference, RuPAC 2016. Saint-Petersburg, 2016. P. 64-66. <https://doi.org/10.18429/JACoW-RuPAC2016-WECAMH03>
- [18] Ovsyannikov A.D., Meshkov I.N., Ovsyannikov D.A. et al. Analysis and Modeling of the Charged Particle Beam Dynamics in the Charlton Trap. Phys. Part. Nuclei Lett. 15, P. 754–757 (2018). <https://doi.org/10.1134/S1547477118070543>

## Приложение

### Graphix\_Gurv

```
clear
clc
% Параметры ловушки
global a Qx Qz wr k uc wz
```

```

k = 1400;
wz=59.6*10^6;
uc=4.4*10^9;
Qx = 0;
Qz = 0;

% массив цветов отвечающий за разные степени устойчивости
colors_ = {'.c', '.r', '.g', '.b', '.y', '.k', '.w'};
% массив отвечающий за разные степени устойчивости
gamma_arr = [k/(2*wz)*0.0, k/(2*wz)*0.1, k/(2*wz)*0.20,
k/(2*wz)*0.30, k/(2*wz)*0.40, k/(2*wz)*0.49, k/(2*wz)*0.90];

% Сопоставление степеней устойчивости и соответствующего массива
% коэффициентов
coef_main = sym(ones(length(gamma_arr), 9));
for i=1:length(gamma_arr)
    for j=1:8
        coef = coefficients(gamma_arr(i));
        if j > length(coef)
            break
        end
        coef_main(i,j) = coef(j);
    end
end
coef_main_MF = matlabFunction(coef_main);
% Отрисовка картины устойчивости
hold on
for a_i= 0:800
    a_ = 6 *10^15/5 * a_i;
    for wr_i = 0:1200
        wr_ = 2.4*10^6 * wr_i;
        flag = true;
        j = 1;

```

```

% значения коэффициентов и миноров при заданных параметрах
% ловушки
    result = coef_main_MF(a_, wr_);
% проверка выполнения критерия Льенера-Шипара (8 условий) для каждой
% степени устойчивости
    while flag && j <= length(gamma_arr)
        for i=1:1:8
            func = result(j, i);
            if func < 0
                flag = false;
                break
            end
        end
    end
% Построение картины устойчивости
    if flag
        plot(wr_, a_, char(colors_(j)));
    end
    j = j + 1;
end
end
end
grid on
xlabel('wr')
ylabel('a')

% функция отвечающая за вычисление коэффициентов собственной
% функции и главных миноров 3 и 5 порядка
function coef_ = coefficients(gamma)
syms L1 wr a
global k wz uc Qx Qz

% модернизированный вид собственной матрицы, учитывающей степень
% устойчивости и пространственный заряд

```

```

L = L1 - gamma;
D = [(L^2+k/wz*L+(wr*(uc -wr)-wz^2/2 -Qx)/wz^2),
(- (uc - 2*wr)*L/wz +k*wr/wz^2), a/wz^2;
((uc - 2*wr)*L/wz -k*wr/wz^2),
(L^2+k/wz*L+(wr*(uc -wr)-wz^2/2 -Qx)/wz^2), 0;
a/wz^2, 0, (L^2+k*L/wz + 1 - Qz/wz^2)];

```

```

% поиск коэффициентов

```

```

coef = fliplr(simplify(coeffs(det(D), L1)));

```

```

% поиск миноров

```

```

det5 = det([coef(2), coef(1), 0, 0, 0;
coef(4), coef(3), coef(2), coef(1), 0;
coef(6), coef(5), coef(4), coef(3), coef(2);
0, coef(7), coef(6), coef(5), coef(4);
0, 0, 0, coef(7), coef(6)]);

```

```

det3 = det([coef(2), coef(1), 0;
coef(4), coef(3), coef(2);
coef(6), coef(5), coef(4)]);

```

```

coef(1) = det3;

```

```

coef_ = [fliplr(coef), det5];
end

```

**Graphix\_Gurv\_charge**

```

clear
clc

```

```

% Параметры пучка и ловушки

```

```

% Значение корней функции Бесселя первого рода нулевого порядка
load('Mu_m.mat')
% заряд электрона
e = -1.60217662*10^(-19);
% электрическая постоянная
e0= 8.85418781762039*10^(-12);
% радиус пучка
R_a= 0.5*10^(-2);
% длина пучка
L = 12*10^(-2);
% радиус трубы
R_b = 0.1;
% расчет параметра для определения количества частиц
% пучка бесконечной длины
n1 = -pi*R_a^2*e0*L/(2*e);

% Значение функции Бесселя первого рода первого порядка
J1 = besselj(1,mum*R_a/R_b);
J2 = besselj(1,mum);
% расчет параметров для определения количества частиц
% пучка конечной длины
A1 = sum(J1./(J2.^2.*mum));
A2 = sum(J1.*mum./J2.^2);
p1 = -e0*L*pi*R_a*R_b/(2*e*A1);
p2 = -8*e0*pi*R_a*R_b^3/(e*A2*L);

% Параметры ловушки
global a Qx wr k uc wz gamma

k= 1400;
wz=59.6*10^6;
uc=4.4*10^9;

```

```

gamma = k/(wz)*0.2;

% массив цветов
colour_arr = {'.c', '.r', '.g', '.b', '.y', '.k', 'm'};

% вычисление коэффициентов собственной функции и главных
% миноров 3 и 5
% порядка
coef_main = coefficients();
coef_main_MF = matlabFunction(coef_main);

hold on

for Qx = 0:10
% Qz_ = 0;
% Qx_ = 4*10^16/100*Qx;
  Qx_ = 4*10^16/10*Qx;
  Qz_ = p2*Qx_/p1;
  for a = 0:1:30
    a_ = 3.5*10^16/30*a;
    for wr= 1:1:30
      wr_ = 7*10^7/30*wr;
      flag = true;
% значения коэффициентов и миноров при заданных параметрах
% ловушки
      result = coef_main_MF(Qx_, Qz_, a_, wr_);
% проверка выполнения критерия Льенера-Шипара (8 условий)
      for i=1:1:8
        func = result(i);
        if func < 0
          flag = false;
          break
        end
      end
    end
  end
end

```

```

        end
% отрисовка графика устойчивости
    if flag
%         plot3( wr_,a_, Qx_*n1, char(colour_arr(mod(Qx,7)+1)))
%         plot3( wr_,a_, Qx_*p2, char(colour_arr(mod(Qx,7)+1)))
        end
    end
end
end
end
xlabel("wr")
ylabel("a")
zlabel("n")
grid on

% функция отвечающая за вычисление коэффициентов собственной функции
% и главных миноров 3 и 5 порядка
function coef_ = coefficients()
syms L1 wr a Qx Qz
global k wz uc gamma

% модернизированный вид собственной матрицы, учитывающей степень
% устойчивости и пространственный заряд
L = L1 - gamma;
D = [(L^2+k/wz*L+(wr*(uc -wr)-wz^2/2 -Qx)/wz^2),
(- (uc - 2*wr)*L/wz +k*wr/wz^2), a/wz^2;
((uc - 2*wr)*L/wz -k*wr/wz^2),
(L^2+k/wz*L+(wr*(uc -wr)-wz^2/2 -Qx)/wz^2), 0;
a/wz^2, 0, (L^2+k*L/wz + 1 - Qz/wz^2)];

% поиск коэффициентов
coef = fliplr(simplify(coeffs(det(D), L1)));
% поиск миноров
det5 = det([coef(2), coef(1), 0, 0, 0;

```

```

coef(4), coef(3), coef(2), coef(1), 0;
coef(6), coef(5), coef(4), coef(3), coef(2);
0, coef(7), coef(6), coef(5), coef(4);
0, 0, 0, coef(7), coef(6)]);

det3 = det([coef(2), coef(1), 0;
coef(4), coef(3), coef(2);
coef(6), coef(5), coef(4)]);
coef(1) = det3;
coef_ = [fliplr(coef), det5];
end

Edge_theorem

clear all

% верхняя граница
% a1 = 13.10958*10^16;
a1 = 13.10959*10^15;
% нижняя граница
% a2 = 8.49999* 10^13;
a2 = 11.1338*10^13;
% значение параметров ловушки
wz=59.6*10^6;
uc=4.4*10^9;
k= 1400;
Lfa = 0;
wr = 0.5*uc;

% дополнительный коэффициент
q01 =exp(1/6*log(k^2*wz^2*wr^2+wz^2*(wr*(uc-wr)-wz^2/2))^2-
a2^2*(wr*(uc-wr)- wz^2/2));

```

```

% Коэффициенты двух вершин исследуемого семейства полиномов
d0 = 1*q01^6;
d1 = 3*k*q01^5;
d2 = (3*k^2 +wr^2 +(uc-wr)^2)*q01^4;
d3= (k^3+k*(3*wr^2 + (uc-wr)^2))*q01^3;
d4 = (wr^2*(3*k^2 +(uc-wr)^2)+
wz^2*((uc-2*wr)^2 + wr*(uc-wr)-3*wz^2/4)-a1^2)*q01^2;
d5 = (k*(k^2*wr^2+(wr*(uc-wr)+ wz^2/2)^2-2*wr*(uc-2*wr)*
wz^2-wz^4/2-a1^2))*q01;
d6 = k^2*wz^2*wr^2+wz^2*(wr*(uc-wr)-wz^2/2)^2
- a1^2*(wr*(uc-wr)- wz^2/2);

dd0 = 1*q01^6;
dd1 = 3*k*q01^5;
dd2 = (3*k^2 +wr^2 +(uc-wr)^2)*q01^4;
dd3= (k^3+k*(3*wr^2 + (uc-wr)^2))*q01^3;
dd4 = (wr^2*(3*k^2 +(uc-wr)^2)
+wz^2*((uc-2*wr)^2 + wr*(uc-wr)-3*wz^2/4)-a2^2)*q01^2;
dd5 = (k*(k^2*wr^2+(wr*(uc-wr)+ wz^2/2)^2-
2*wr*(uc-2*wr)*wz^2-wz^4/2-a2^2))*q01;
dd6 = k^2*wz^2*wr^2+wz^2*(wr*(uc-wr)-wz^2/2)^2
- a2^2*(wr*(uc-wr)- wz^2/2);

% полиномы отвечающие за вершины
% f1 = d0*L^6 + d1*L^5 + d2*L^4 + d3*L^3 + d4*L^2 + d5*L + d6;
% f2 = dd0*L^6 + dd1*L^5 + dd2*L^4 + dd3*L^3 + dd4*L^2 + dd5*L + dd6;

p1 = -d0*L^6+d2*L^4-d4*L^2+d6;
q1 = d1*L^5 - d3*L^3 + d5*L;
p1_1 = -6*d0*L^5+ 4*d2*L^3-2*d4*L;
q1_1 = 5*d1*L^4 - 3*d3*L^2 + d5;

```

```

p2 = -dd0*L^6+dd2*L^4-dd4*L^2+dd6;
q2 = dd1*L^5 - dd3*L^3 + dd5*L;
p2_1 = -6*dd0*L^5+ 4*dd2*L^3-2*dd4*L;
q2_1 = 5*dd1*L^4 - 3*dd3*L^2 + dd5;

```

```

F1 = p1*q2 - p2*q1;
F1_1 = p1_1*q2 + p1*q2_1 - q1_1*p2 - q1*p2_1;
F2 = p1*p2 +q1*q2;
Coef_1 = sym2poly(F1_1*F2);
Coef_2 = sym2poly(F1);
Coef_3 = sym2poly(F1_1);

```

```

[q, r] = deconv(Coef_1, Coef_2);

```

```

BB0 = r(13);
BB1 = r(15);
BB2 = r(17);
BB3 = r(19);

```

```

A0 = Coef_2(1);
A1 = Coef_2(3);
A2 = Coef_2(5);
A3 = Coef_2(7);

```

```

B0 = Coef_3(1);
B1 = Coef_3(3);
B2 = Coef_3(5);
B3 = Coef_3(7);

```

```

X1=[B0, B1, B2, B3, 0, 0, 0;
    A0, A1, A2, A3, 0, 0, 0;
    0, B0, B1, B2, B3, 0, 0;

```

```

    0, A0, A1, A2, A3, 0, 0;
    0, 0, B0, B1, B2, B3, 0;
    0, 0, A0, A1, A2, A3, 0;
    0, 0, 0, B0, B1, B2, B3];
s1 = B0;
s2 = det([B0, B1;
    A0, A1]);
s3 = det([B0, B1, B2;
    A0, A1, A2;
    0, B0, B1]);
s4 = det([B0, B1, B2, B3;
    A0, A1, A2, A3;
    0, B0, B1, B2;
    0, A0, A1, A2]);
s5 = det([B0, B1, B2, B3, 0;
    A0, A1, A2, A3, 0;
    0, B0, B1, B2, B3;
    0, A0, A1, A2, A3;
    0, 0, B0, B1, B2]);

s6 = det([B0, B1, B2, B3, 0, 0;
    A0, A1, A2, A3, 0, 0;
    0, B0, B1, B2, B3, 0;
    0, A0, A1, A2, A3, 0;
    0, 0, B0, B1, B2, B3;
    0, 0, A0, A1, A2, A3]);
s7 = det(X1);

X2=[BB0, BB1, BB2, BB3, 0, 0, 0;
    A0, A1, A2, A3, 0, 0, 0;
    0, BB0, BB1, BB2, BB3, 0, 0;
    0, A0, A1, A2, A3, 0, 0;
    0, 0, BB0, BB1, BB2, BB3, 0;

```

```

    0, 0, A0, A1, A2, A3, 0;
    0, 0, 0, BB0, BB1, BB2, BB3];
s11 = BB0;
s21 = det([BB0, BB1;
    A0, A1]);
s31 = det([BB0, BB1, BB2;
    A0, A1, A2;
    0, B0, B1]);
s41 = det([BB0, BB1, BB2, BB3;
    A0, A1, A2, A3;
    0, BB0, BB1, BB2;
    0, A0, A1, A2]);
s51 = det([BB0, BB1, BB2, BB3, 0;
    A0, A1, A2, A3, 0;
    0, BB0, BB1, BB2, BB3;
    0, A0, A1, A2, A3;
    0, 0, BB0, BB1, BB2]);
s61 = det([BB0, BB1, BB2, BB3, 0, 0;
    A0, A1, A2, A3, 0, 0;
    0, BB0, BB1, BB2, BB3, 0;
    0, A0, A1, A2, A3, 0;
    0, 0, BB0, BB1, BB2, BB3;
    0, 0, A0, A1, A2, A3]);
s71 = det(X2);

r1 = rank(X1)
r2 = rank(X2)

% Условие устойчивости семейства полиномов
res1_1=[1,sign(-s2),sign(s4),sign(-s6)]
res1_2 =[sign(A0),sign(s1),sign(s3),sign(s5), sign(s7)]

```

```
res2_1=[1,sign(-s21),sign(s41),sign(-s61)]  
res2_2 =[sign(A0),sign(s11),sign(s31),sign(s51),sign(s71)]
```