

Санкт-Петербургский государственный университет

АНДРЕЕВА Ульяна Юрьевна

Выпускная квалификационная работа

Математическое моделирование экономической динамики

Уровень образования: бакалавриат

Направление *01.03.02 «Прикладная математика и информатика»*

Основная образовательная программа *СВ.5005.2017 «Прикладная математика, фундаментальная информатика и программирование»*

Научный руководитель:

профессор, кафедра вычислительных методов
механики деформируемого тела,
д. ф.- м. н. Колпак Евгений Петрович

Рецензент:

профессор, кафедра моделирования
социально-экономических систем,
заведующий кафедрой моделирования
социально-экономических систем
д. ф.- м. н. Малафеев Олег Алексеевич

Санкт-Петербург

2021

Содержание

Введение	3
1. Население России	5
2. Основные экономические показатели	11
3. Обобщение результатов. Прогнозы.....	20
4. Логистическое уравнение	24
5. Обработка статистических данных. Метод наименьших квадратов	26
6. Математическая модель использования денежных накоплений	27
7. Математическая модель кооперации «ВВП – Инвестиции»	31
8. Математическая модель «Природа – Общество»	33
Заключение	35
Список литературы	36

Введение

Уровень жизни представляет собой четкое количественно определяемое и статистически отслеживаемое понятие; он удобен для проведения сопоставлений, во временном и межрегиональном аспектах; этот термин наиболее распространен в практике международных сопоставлений.

Доходы и покупательная способность населения имеют не только социальное значение, но и как факторы, определяющие продолжительность самой жизни. Они весьма значимы, как элемент экономического подъема, который определяет емкость внутреннего рынка.

Возросшее внимание к проблемам уровня жизни населения, более глубокий их анализ, а также более полное отображение системы показателей уровня жизни в материалах государственной статистики означает, реакцию на резкое падение уровня жизни значительной части населения.

Низкий уровень доходов, и, как следствие, низкая покупательная способность основной массы населения – одна из основных причин стагнации экономики России.

Повышение уровня жизни россиян является важнейшей программной задачей социальной политики Российского государства. В числе приоритетов правительства – восстановление доходов и максимальное стимулирование платежеспособного спроса населения.

Для оживления экономики необходимо формирование платежеспособного спроса через увеличение части доходов населения в общей сумме доходов общества – ВВП. В основном, для реанимации внутреннего рынка и поддержки отечественного производителя стратегически важно повышать доходы наиболее бедной и средней части населения. Увеличение и, конечно, своевременная выплата зарплаты, пенсий, стипендий и других социальных выплат, является необходимым для подъема экономики.

В работе анализ статистических данных ведется с 2000 по 2018 год. Данные за 2000 год приняты =1. Все результаты приведены в безразмерном виде.

1. Население России

Население России — состав жителей, населяющих территорию России. На 1 января 2020 года, по оценке Росстата, в России было 146 745 098 постоянных жителей, страна занимает девятое место в мире по численности населения. Коэффициент смертности за 2018 год составил 12,4 смертей на 1000 человек, что ниже таких стран ЕС как Болгария (15,4 ‰), Латвия (15,0 ‰), Литва (14,1 ‰), Румыния (13,5 ‰) и Венгрия (13,4 ‰), но выше среднего по ЕС (10,4 ‰).

В этом пункте мы рассмотрим как динамику численности населения страны в общем, так и изменения числа занятых, безработных, а также пенсионеров отдельно.

На рис. 1.1 приведена динамика численности населения. График - первое приближение парабола. Прогноз неплохой, потому что нормальная рождаемость. До 2008 года численность уменьшалась, а потом начала возрастать. Минимум приходится на 2008 год, восстановление на уровень 2000 года произошло в 2014 году. Сколько лет численность населения уменьшалась (8 лет), примерно столько и восстанавливалась. Т.е. 14 лет длится демографический кризис.



Рис. 1.1 Динамика численности населения

На рис. 1.2 представлена динамика числа занятых в стране. Часть трудоспособного населения занята в производстве, а часть работоспособного населения работу не имеет. Число занятых в производственной сфере постоянно растет. Минимум приходится на 2008 год. До 2008 года численность населения уменьшалась, а число занятых росло. По нашим оценкам, через 20 лет не будет хватать рабочей силы, поддерживающей недееспособных граждан, потому что с 2000 по 2008 год была демографическая яма. Это может привести к ухудшению материального положения пенсионеров через 20-30 лет. Численность занятых после 2014 года возросла на 10%.

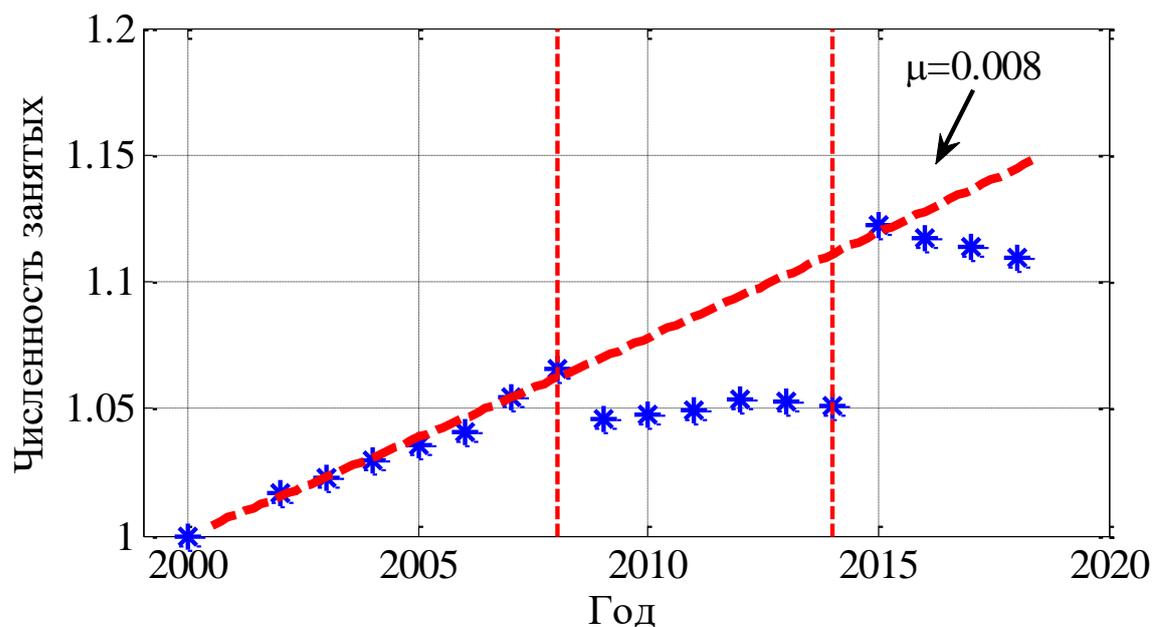


Рис. 1.2 Динамика численности занятых

На рис. 1.3 представлена динамика числа безработных, стоящих на учете на бирже. До 2005 года численность безработных увеличивалась, после чего начала падать. В 2008 году был всплеск – произошло уменьшение численности работающего населения, обусловленное кризисом 2008 года.

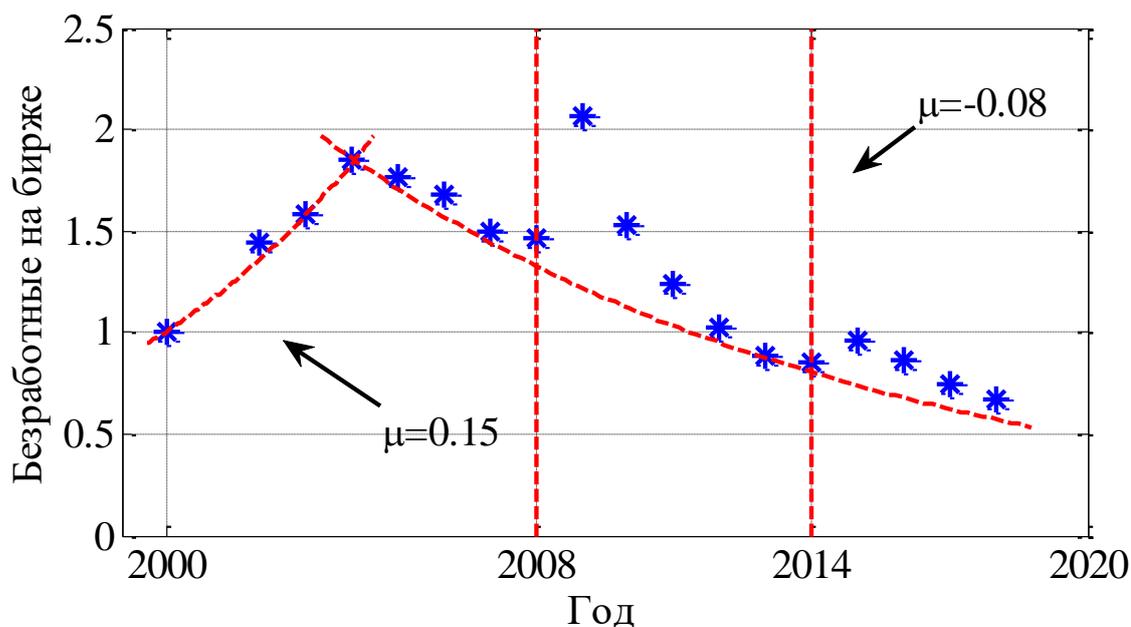


Рис. 1.3 Динамика численности безработных, стоящих на учете на бирже

На рис. 1.4 отображена динамика числа безработных. Как следует из нашего анализа по числу безработных, их число уменьшалось с 2000 по 2007 год, потом был всплеск, приведший к резкому увеличению, но в 2012 году численность безработных снова уменьшилась и вышла на уровень 2007 года (до всплеска). Пик приходится на 2008 год. 800 тыс. - на столько увеличилось число безработных в пик.

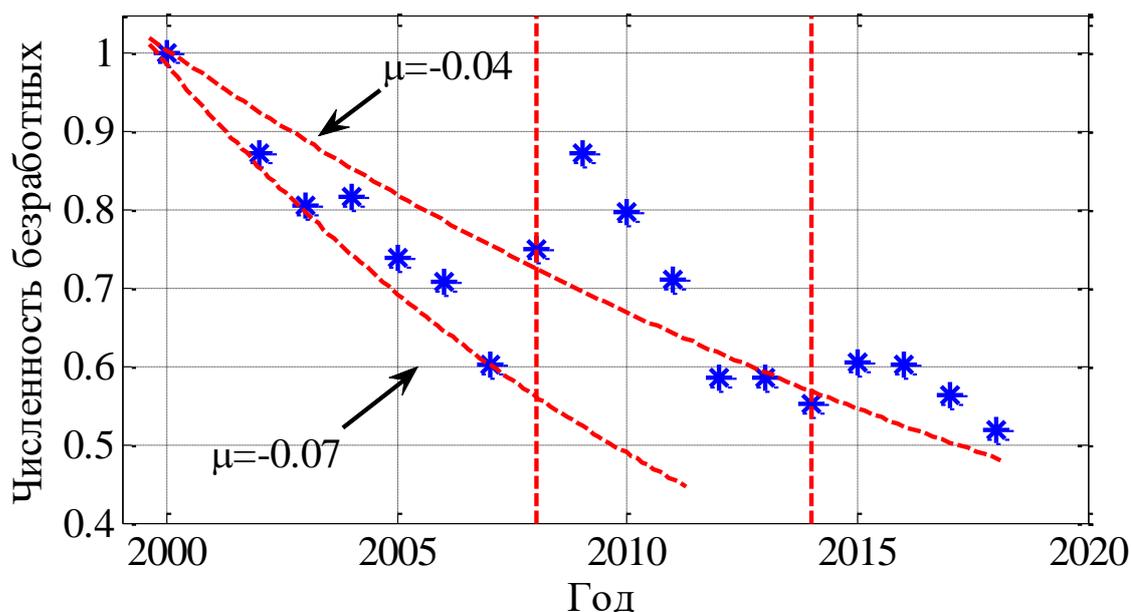


Рис. 1.4 Динамика числа безработных

На рис. 1.5 отображена динамика численности пенсионеров. По нашим оценкам, численность пенсионеров практически не менялась с 2000 по 2008 год, а с 2008 по 2017 год возросла на 15 %, в то время, как численность занятых увеличилась на 10%. Как следует из нашего анализа, скорость роста численности пенсионеров больше, чем скорость роста численности работающих. На 15 пенсионеров приходится 10 работающих. С учетом всего выше сказанного, материальное положение пенсионеров ухудшается. Из-за инфляции будет ухудшаться материальное состояние пенсионеров.

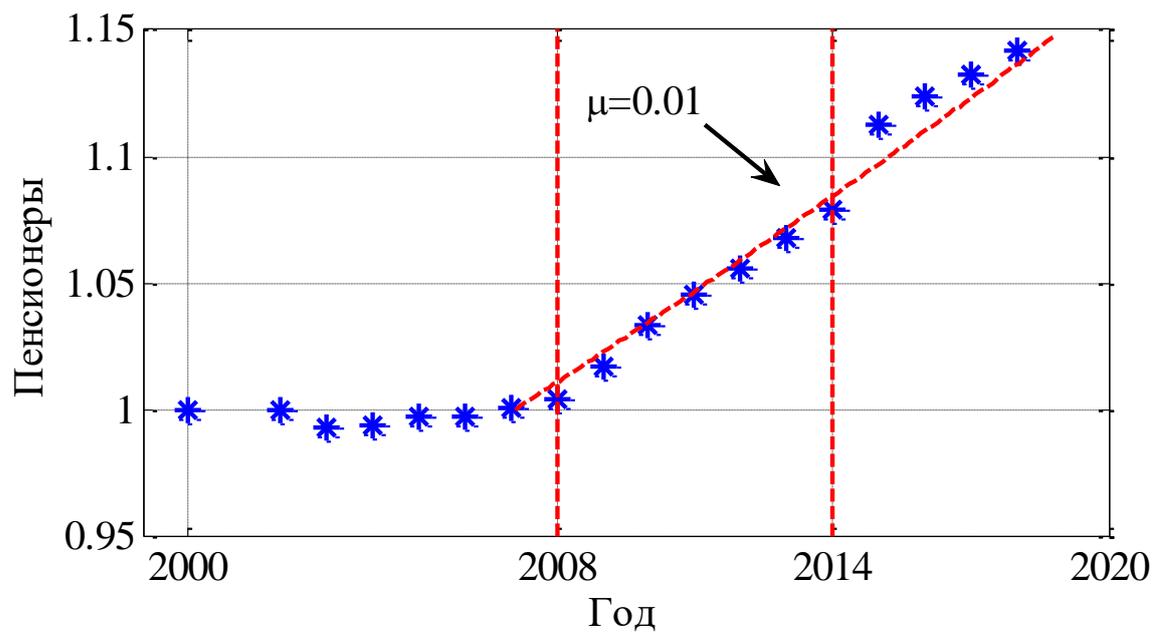


Рис. 1.5 Динамика численности пенсионеров

2. Основные экономические показатели

В данном разделе рассматривается динамика таких экономических показателей, как доходы населения, доходы бюджета, пенсии, ВВП, денежная масса, а также ввод фондов, инвестиции и вклады.

На рис. 2.1 приведена динамика доходов населения. Доходы населения – материальные средства, которыми располагает население для осуществления своих потребностей. Размер и состав доходов – одна из важнейших, хотя и неполных, характеристик уровня жизни населения. Доходы населения определяют состояние и эффективность экономики и экономических отношений в обществе. Доходы характеризуются уровнем, составом, структурой, динамикой и соотношением с расходами различных слоев и групп населения.

Результаты мониторинга в начале 2000-х годов свидетельствуют о том, что в целом по Российской Федерации основные показатели уровня, динамики и структуры доходов и расходов населения выросли.

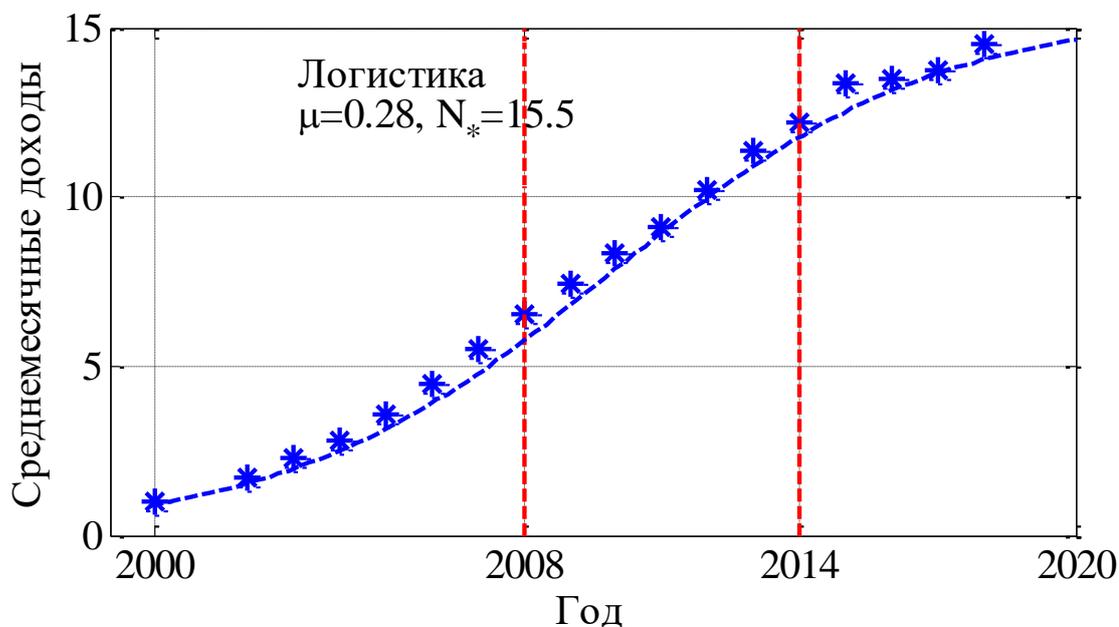


Рис. 2.1 Динамика среднемесячных доходов населения

На рис. 2.2 представлена динамика изменения пенсий. Как следует из этих данных, среднедушевые денежные доходы выросли в 15, а пенсии в 20 раз. Начиная с 2009 года идут заметные расхождения в темпах роста этих двух показателей. Как следует из всех данных, которые я получаю от людей старшего поколения, материальному положению пенсионеров администрация страны уделяет недостаточное внимание.

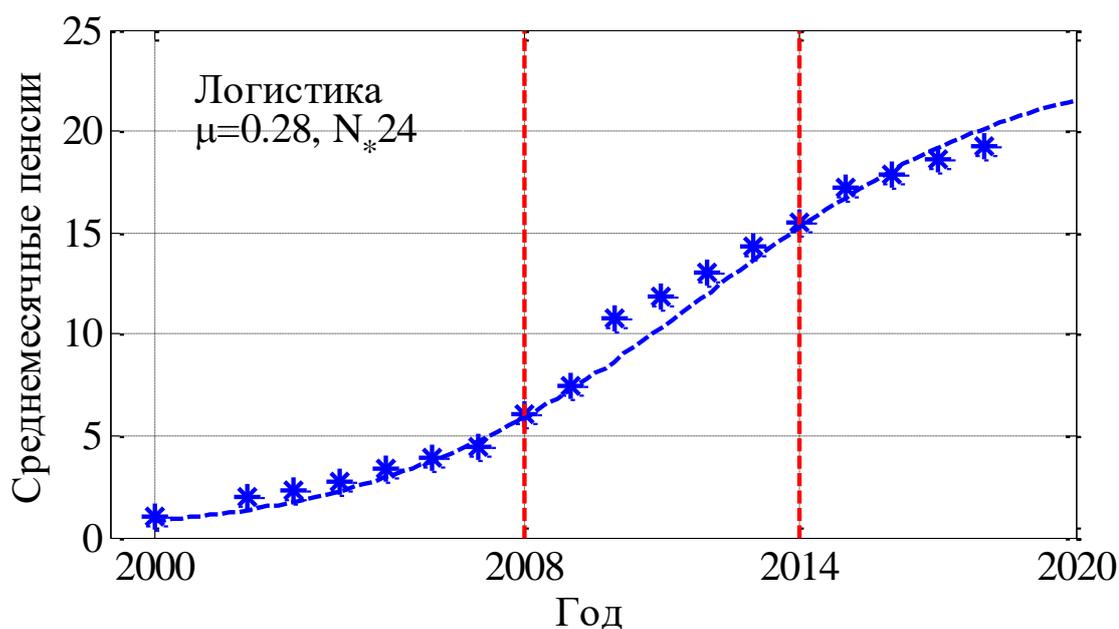


Рис. 2.2 Динамика пенсий

На рис. 2.3 представлена динамика доходов бюджета. Государственный бюджет — финансовый документ страны, совокупность финансовых смет всех ведомств, государственных служб, правительственных программ и т. д. В нём определяются потребности, подлежащие удовлетворению за счёт государственной казны, равно как указываются источники и размеры ожидаемых поступлений в государственную казну.

Доходы государственного бюджета — денежные средства, поступающие в безвозмездном и безвозвратном порядке в соответствии с действующей классификацией и существующим законодательством.

Государственные доходы формируются за счёт:

- 1) налогов, взимаемых как центральными, так и местными органами власти;
- 2) неналоговых доходов, складывающихся из доходов от внешнеэкономической деятельности, а также доходов от имущества, находящегося в государственной собственности;
- 3) доходов целевых бюджетных фондов.

Как видно из нашего анализа, доходы бюджета растут постоянно, за исключением кризисного 2008 года.

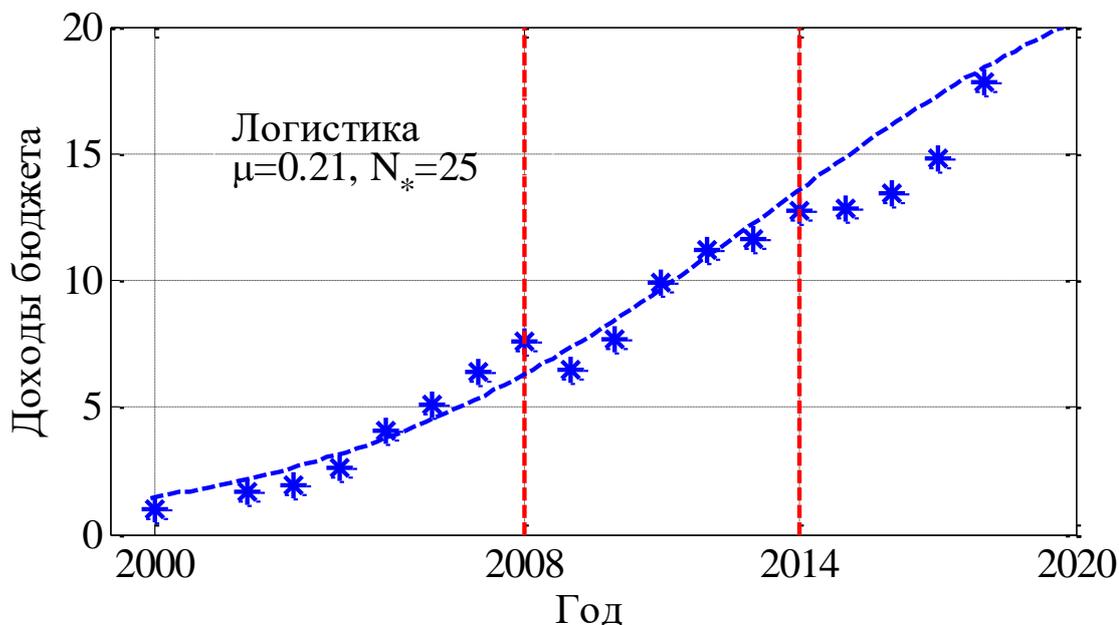


Рис. 2.3 Динамика доходов бюджета

На рис. 2.4 приведена динамика ввода фондов. Согласно статье 123.17 ГК РФ фонд — это унитарная некоммерческая организация, не имеющая членства, учреждённая гражданами и (или) юридическими лицами на основе добровольных имущественных взносов и преследующая благотворительные,

культурные, образовательные или иные социальные, общественно-полезные цели.

Имущество, переданное фонду, является собственностью фонда. В свою очередь, учредители не несут ответственность по обязательствам фонда, равно как и фонд не отвечает по обязательствам, возникшим у его учредителей. Нельзя обратиться с судебным иском на имущество лица, внесённое в фонд. Фонд использует имущество для целей, указанных в уставе и обязан ежегодно публиковать отчёты об использовании своего имущества. Название данной организации должно включать наименование и слово «фонд». Решение о ликвидации фонда принимает только суд и исключительно по заявлению заинтересованных лиц. Фонд представляет собой некоммерческую организацию. Поэтому круг его учредителей обычно не широк. Сами учредители не получают какие-либо привилегии и тем более — прибыль. Членства в фонде нет, как и договоров. Есть только устав. Учредитель не отвечает за долги фонда, потому что фонд — отдельная самостоятельная организация и способна сама отвечать по своим обязательствам и может в случаях, предусмотренных законодательством зарабатывать средства сама. Отсюда наличие у фондов большого «соблазна» заниматься предпринимательской деятельностью. Поэтому с целью контроля за деятельностью фондов создается попечительский совет, он же — орган управления в фонде. Обязательным условием совета является его формирование из сторонних лиц.

В ходе анализа можем заметить, что после 2008, 2014 и 2016 года наблюдаются застои. Это связано с финансовым кризисом 2008 года, а также с введением санкций в 2014-2016 годах.

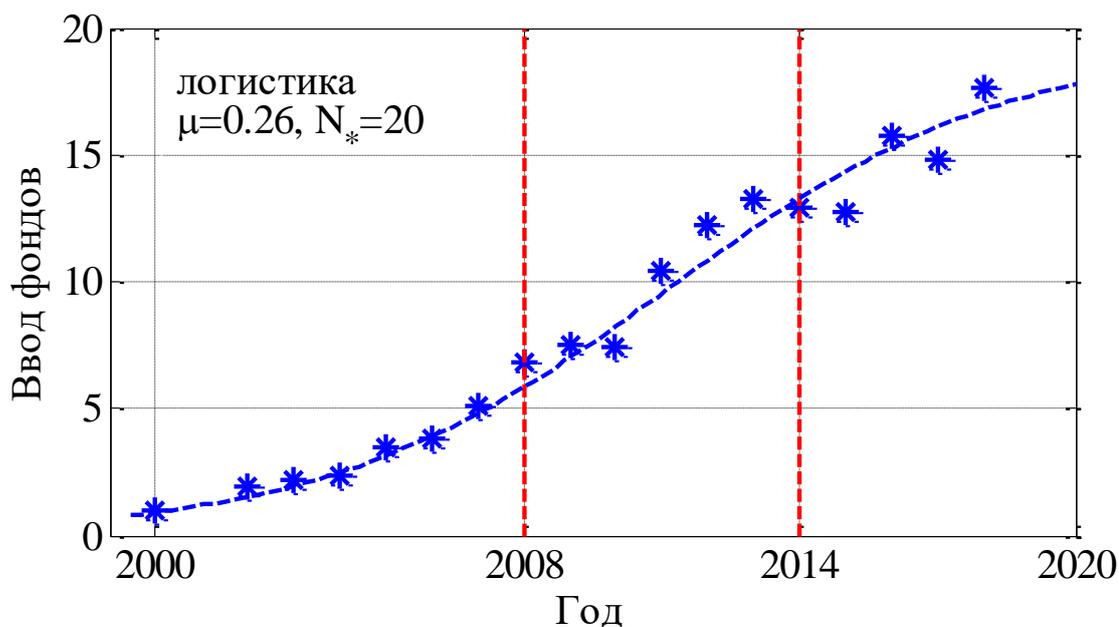


Рис. 2.4 Динамика ввода фондов

На рис. 2.5 представлена динамика инвестиций. Инвестиции — размещение капитала с целью получения прибыли. Инвестиции являются неотъемлемой частью современной экономики. От кредитов инвестиции отличаются степенью риска для инвестора (кредитора) — кредит и проценты необходимо возвращать в оговорённые сроки независимо от прибыльности проекта, инвестиции (инвестированный капитал) возвращаются и приносят доход только в прибыльных проектах. Если проект убыточен — инвестиции могут быть утрачены полностью или частично.

Под инвестиционной деятельностью понимается вложение инвестиций и осуществление практических действий в целях получения прибыли и (или) достижения иного полезного эффекта.

С позиции монетарной теории денег, средства можно направить на потребление или сбережение. Простое сбережение изымает средства из оборота и создаёт предпосылки для кризисов. Инвестирование же вовлекает сбережения в оборот. Оно может происходить напрямую или косвенно

(размещение временно свободных средств на депозит в банк, который уже сам инвестирует).

Можно заметить, что инвестиции постоянно растут, за исключением небольшого упадка после кризиса 2008 года. По сравнению с 2000 годом к 2018 показатель вырос в 15 раз.

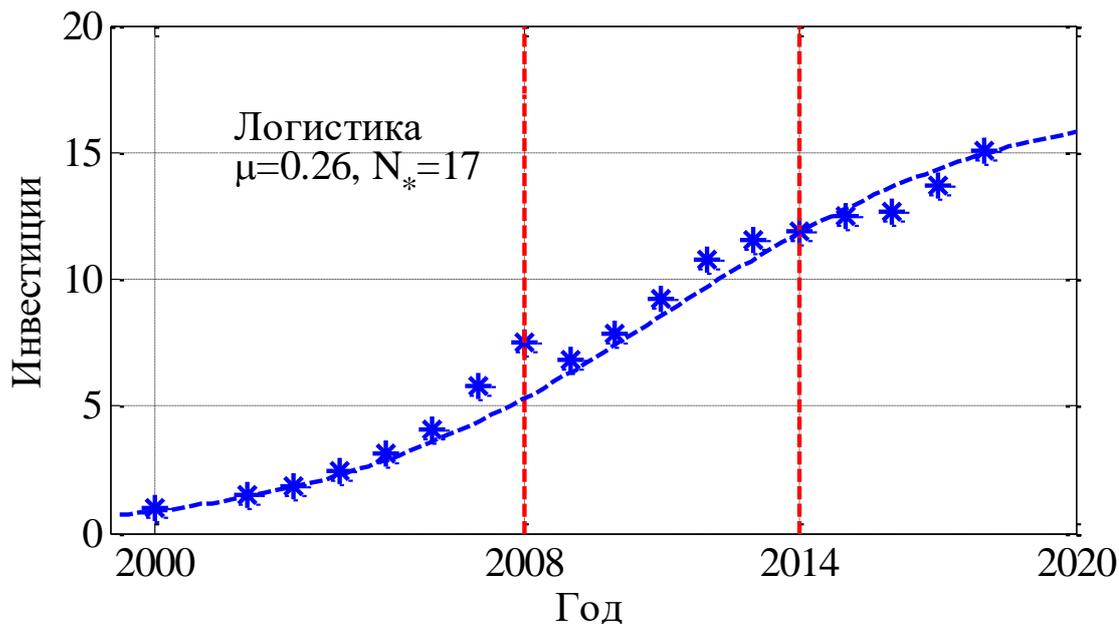


Рис. 2.5 Динамика инвестиций

На рис. 2.6 представлена динамика душевого ВВП. Валовой внутренний продукт, общепринятое сокращение – ВВП – макроэкономический показатель, отражающий рыночную стоимость всех конечных товаров и услуг (то есть предназначенных для непосредственного употребления, использования или применения), произведённых за год во всех отраслях экономики на территории государства для потребления, экспорта и накопления, вне зависимости от национальной принадлежности использованных факторов производства. ВВП страны может быть выражен как в национальной валюте, и при необходимости пересчитан по биржевому

курсу в иностранную валюту, так и может быть представлен по паритету покупательной способности.

Материальные доходы населения зависят от того, как растет ВВП. Если увеличивается ВВП, то благосостояние тоже должно увеличиваться.

Как следует из нашего анализа, ВВП растет постоянно, за исключением кризисного периода 2008 года, и вырос в 14 раз. Ранее были получены результаты, что пенсии увеличились в 20, а денежные доходы населения в 15 раз.

Из всего выше сказанного, заметим, что ВВП растет медленнее всех остальных показателей. Вероятно, это связано с денежной массой.

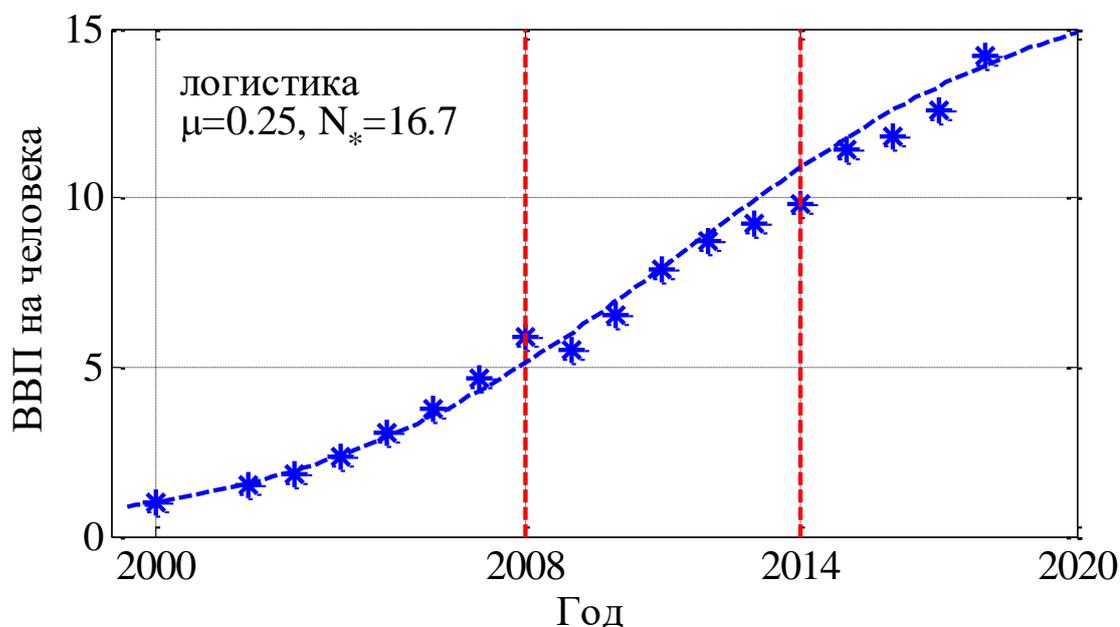


Рис. 2.6 Динамика душевого ВВП

На рис. 2.7 приведена динамика денежной массы - наличные деньги. На рис. 2.8 приведена динамика денежной массы - безналичные средства. Наличные деньги в стране выросли за это время в 20, а безналичные в 50 раз. А ВВП в 14 раз. Возможно, рост заработной платы и пенсий покрывается лишними деньгами. В идеале, ВВП и денежная масса должны расти

одинаково. Можем предположить, что материальное благосостояние населения улучшается потому, что денежная масса растет быстрее ВВП.

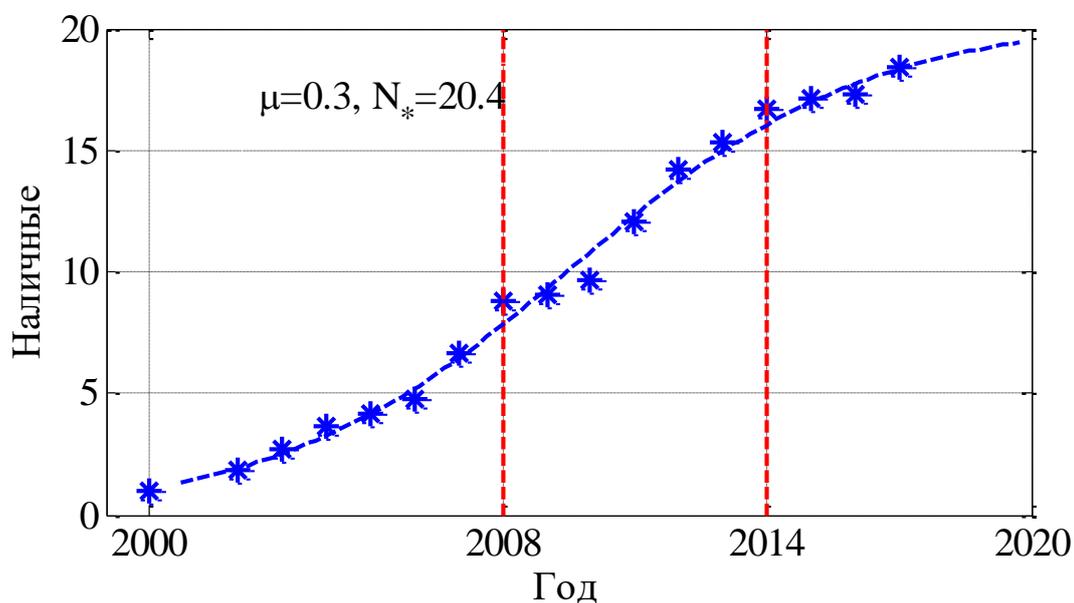


Рис. 2.7 Динамика денежной массы (наличные деньги)

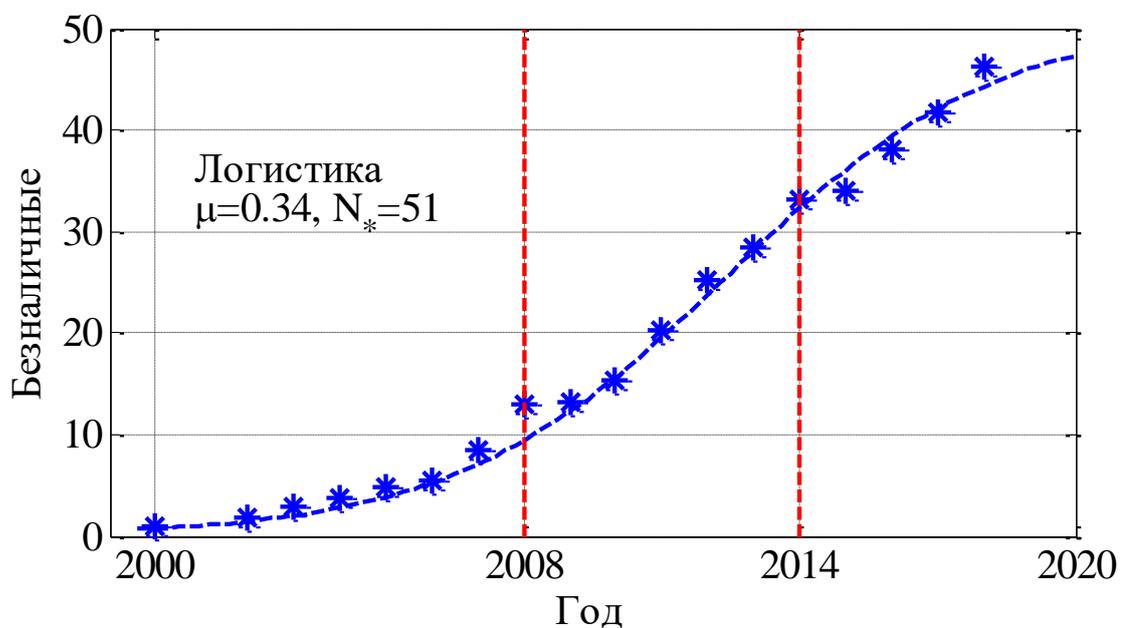


Рис. 2.8 Динамика денежной массы (безналичные средства)

На рис. 2.9 представлена динамика вкладов населения. Банковские вклады – самый известный и самый популярный у населения финансовый инструмент. По данным Банка России по состоянию на конец 2016 года в российских банках население держит вклады более чем на 10 трлн рублей. «Депозитная операция», которую выполняют банки, имеет большое экономическое значение. Собирая деньги во вклады, банк придает им импульс движения. Деньги, «не работающие» на руках у населения, становятся работающими у банка. Банк не держит эти деньги у себя, он их перераспределяет, передает на началах возвратности другим субъектам, нуждающимся в дополнительных платежных средствах, считая их тем самым дополнительными «энергетическими» ресурсами.

Как видно из нашего анализа, начиная с 2000 года, вклады постоянно растут и увеличились более чем в 60 раз по сравнению с начальным значением.

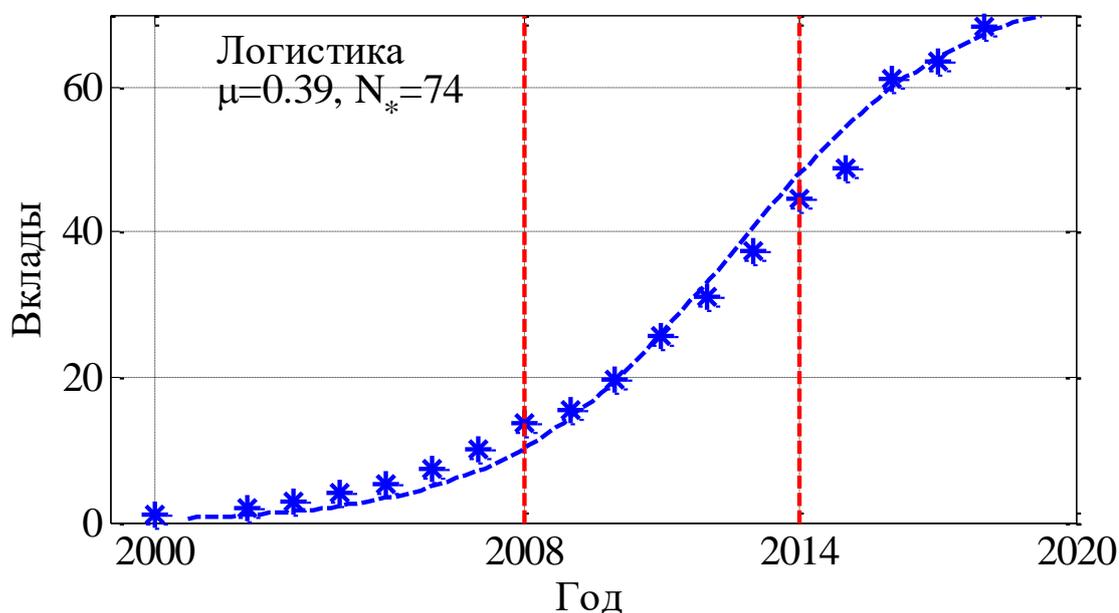


Рис. 2.9 Динамика вкладов населения

3. Обобщение результатов. Прогнозы

На рис. 3.1 отображена динамика таких показателей, как денежная масса, доходы бюджета, ввод фондов и инвестиции. После 2010 года идут заметные расхождения в темпах роста фондов и инвестиций.

Из нашего анализа следует, что скорость роста денежной массы выше, чем у других показателей. Исходя из прогноза, можно сделать вывод, что к 2030 году наступит период стагнации.

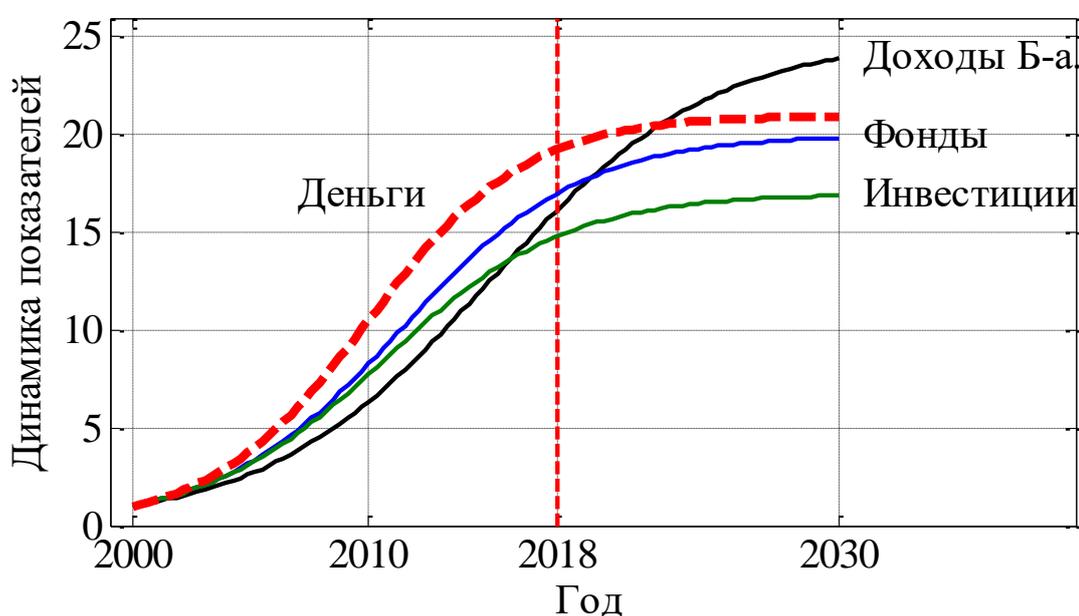


Рис. 3.1 Динамика показателей (доходы бюджета, фонды, инвестиции, денежная масса)

На рис. 3.2 представлена динамика денежной массы, ввода фондов, среднедушевого ВВП, а также доходов населения. Темпы роста денежной массы превышают темпы роста других показателей. После 2012 года наблюдаются значительные расхождения роста остальных 3-х показателей. Среднедушевой ВВП и доходы населения растут примерно с одинаковой скоростью, а вот темпы роста ввода фондов значительно их опережают. Уже к 2018 году фонды выросли в 17 раз, тогда как ВВП и доходы только в 14. А

исходя из нашего прогноза, к 2030 году фонды вырастут в 20, ВВП в 16, а доходы населения в 15 раз. В данной ситуации также наблюдается замедление скорости роста всех показателей к 2030 году.

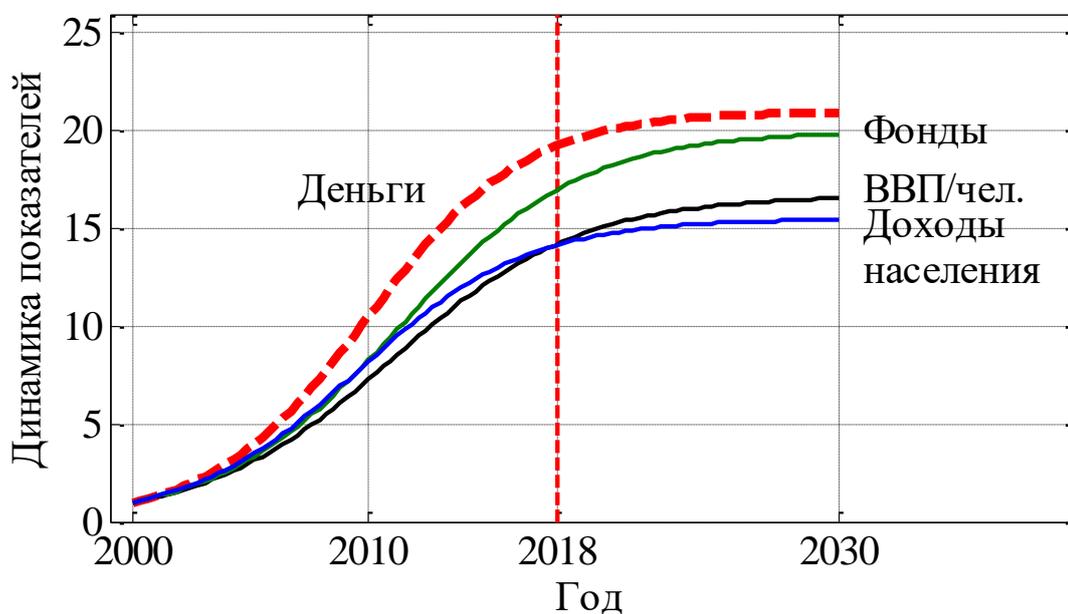


Рис. 3.2 Динамика показателей (фонды, среднедушевой ВВП, доходы населения, денежная масса)

На рис. 3.3 отображена динамика денежной массы, доходов населения (в том числе пенсий) и оборотов торговли. Небольшие различия наблюдаются в скорости роста таких показателей, как торговля и доходы населения на протяжении всего, рассматриваемого нами, временного промежутка.

До 2015 года одинаково растут пенсии и денежная масса. После, исходя из предоставленных нам данных и нашего прогноза, наблюдаются расхождения. Таким образом, к 2030 году денежная масса вырастет в 21, а пенсии в 24 раза. К 2030 году опять замедляется рост всех показателей.

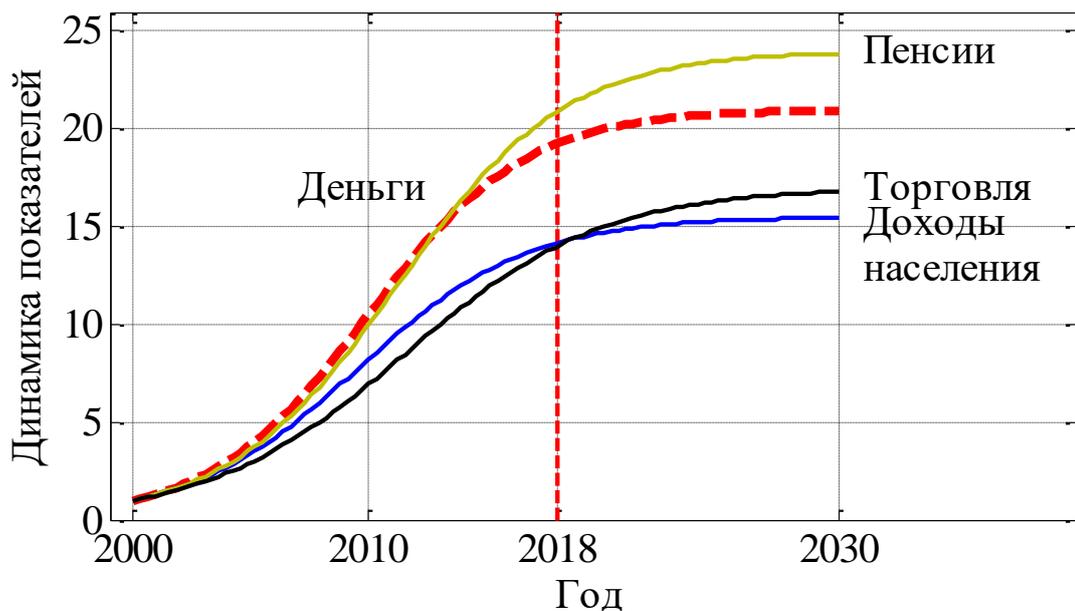


Рис. 3.3 Динамика показателей (пенсии, обороты торговли, доходы населения, денежная масса)

На рис. 3.4 представлена динамика следующих показателей:

Вклады населения, фонды, инвестиции и ВВП. В темпах роста инвестиций и ВВП заметны лишь минимальные расхождения. Как видно из нашего анализа, начиная с 2000 года вклады постоянно растут и увеличились более чем в 60 раз по сравнению с начальным значением.

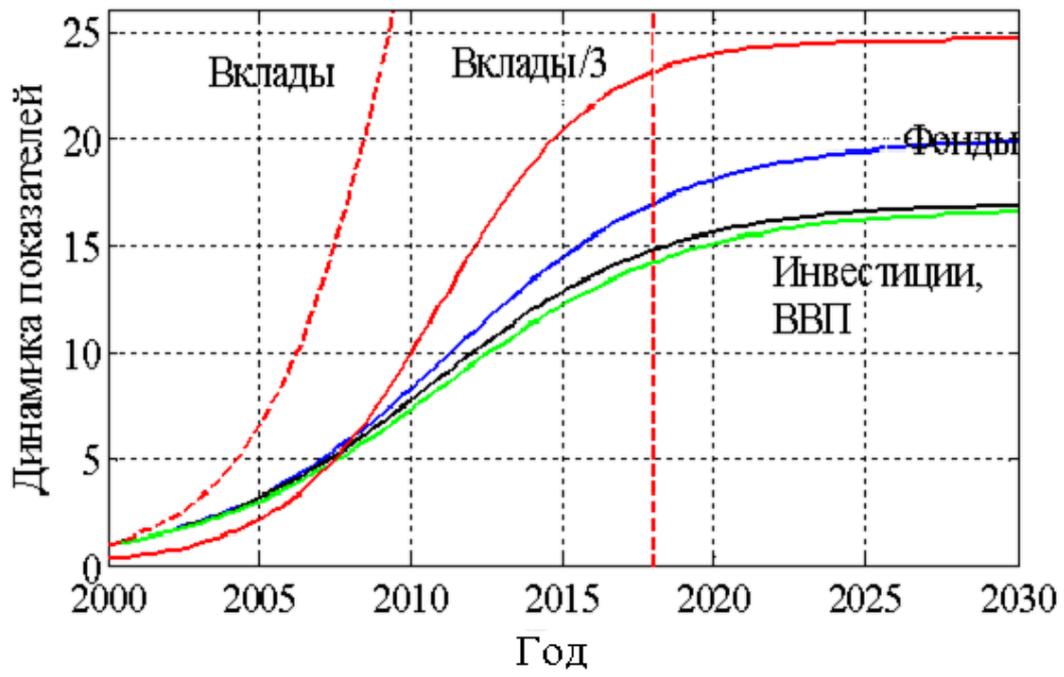


Рис. 3.4 Динамика показателей (фонды, инвестиции, ВВП, вклады населения)

4. Логистическое уравнение

Мы заметили, что все представленные ранее графики (рис. 2.1 – 3.4) описываются логистическими зависимостями, и описаны данным логистическим уравнением,

$$\frac{dy}{dt} = \mu y \left(1 - \frac{y}{K} \right), \quad (1)$$

где μ - характеризует скорость роста, а K - максимальное количество продуктов, которое можно создать в рамках существующей системы экономических взаимоотношений.

Уравнение (1) имеет две стационарные точки:

неустойчивую $y = 0$,

устойчивую $y = K$.

В таблицу 1 внесены все параметры μ и K для таких показателей, как численность занятых, безработных, безработных на бирже, пенсионеров, среднемесячные доходы населения, пенсии, доходы бюджета, ввод фондов, инвестиции, душевой ВВП, наличные деньги, безналичные средства, а также вклады населения. Также параметры μ и K внесены на рис. 1.1 – 2.9.

Таблица 1. Параметры логистического уравнения

Показатель	μ	K
Занятые	0.008	
Безработные на бирже	до 2005г 0.15 после -0.08	
Безработные	до 2008г -0.07 после -0.04	
Пенсионеры	0.01	
Доходы населения	0.28	15.5
Пенсии	0.28	24
Доходы бюджета	0.21	25

Ввод фондов	0.26	20
Инвестиции	0.26	17
Душевой ВВП	0.25	16.7
Наличные деньги	0.3	20.4
Безналичные средства	0.34	51
Вклады населения	0.39	74

Логистическое уравнение, также известное как уравнение Ферхюльста (по имени впервые сформулировавшего его бельгийского математика), изначально появилось при изучении изменений численности населения. Исходные предположения для вывода уравнения при рассмотрении экономической динамики выглядят следующим образом:

- скорость роста материальных ресурсов пропорциональна их текущему количеству (в уравнении (1) множитель μy) при прочих равных условиях;
- количество материальных ресурсов, которое может быть произведено без изменения технологий производства ограничено (множитель $1 - y/K$ в уравнении (1)).

Анализ экономических показателей и прогноз осуществляются, как правило [2], на основе годовых темпов роста или падения показателей экономики. Модели прогноза на основе систем дифференциальных уравнений используются редко [1], [3].

5. Обработка статистических данных. Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов (МНК) — математический метод, применяемый для решения различных задач, основанный на минимизации суммы квадратов отклонений некоторых функций от искомым переменных. Он может использоваться для «решения» переопределенных систем уравнений (когда количество уравнений превышает количество неизвестных), для поиска решения в случае обычных (не переопределенных) нелинейных систем уравнений, для аппроксимации точечных значений некоторой функции. МНК является одним из базовых методов регрессионного анализа для оценки неизвестных параметров регрессионных моделей по выборочным данным.

Уравнение (1) имеет аналитическое решение

$$y = \frac{y_0 K}{(K - y_0)e^{-\mu t} + y_0} = f(t, K, \mu), \quad (2)$$

где $y_0 = y(t=0)$.

Параметры μ и K для конкретного экономического показателя (таблица 1) выбирались из условия минимума функции

$$\Phi(\mu, K) = \sum_{i=1}^n (y_i - f(t_i, K, \mu))^2, \quad (3)$$

где t_i - год, а y_i - значение экономического показателя за этот год, n - количество учтенных лет. Процедура поиска минимума была реализована в среде программирования математического пакета MatLab с применением встроенной функции `fminsearch`.

6. Математическая модель использования денежных накоплений

Проведенный анализ основных экономических показателей (рис. 3.1 – 3.4) показал, что в экономике происходит медленная стагнация. Единственный растущий показатель – накопление сбережений населения. То есть текущее экономическое положение населения не является критическим, раз сбережения растут. Либо население пытается за счет сбережений улучшить свое экономическое положение в будущем за счет экономии ресурсов сегодня. Однако медленная стагнация может обесценить сбережения населения.

В уравнении (1) параметр μ характеризует скорость роста материальных накоплений, а параметр K – предельное значение материального ресурса, которой может быть достигнуто при существующих экономических отношениях. Он и является основным фактором, приводящим к стагнации в случае его постоянства.

Изменить предельные значения можно за счет изменений технологий производства, совершенствования систем управления, перераспределения материальных ресурсов и другими способами.

Увеличение ВВП и инвестиций можно осуществить за счет уменьшения скорости накопления сбережений. То есть сбережений населения направить на модернизацию производства (ВВП) и вложение ресурсов в разработку новых технологий (инновации).

Модель динамики трех показателей (ВВП, накопления, инвестиции) с учетом (1) принимает вид

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= \mu_1 y_1 \left(1 - \frac{y_1}{K_1}\right), \\ \frac{dy_2}{dt} &= \mu_2 y_2 \left(1 - \frac{y_2}{K_2}\right), \\ \frac{dy_3}{dt} &= \mu_3 y_3 \left(1 - \frac{y_3}{K_3}\right).\end{aligned}\tag{4}$$

Введем переменные ($i = 1, 2, 3$)

$$C_i = \frac{a_i + y_2 / K_2}{b_i + y_2 / K_2}$$

такие, что $a_i > b_i$. При этом условии будут выполняться неравенства $C_i > 1$.

Примем, что значения K_1 (ВВП) и K_3 (инвестиции) увеличиваются за счет уменьшения K_2 (предельного значения сбережений). С учетом этого предположения модель (4) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \mu_1 y_1 \left(1 - \frac{y_1}{K_1 C_1} \right), \\ \frac{dy_2}{dt} &= \mu_2 y_2 \left(1 - \frac{y_2}{K_2} C_2 \right), \\ \frac{dy_3}{dt} &= \mu_3 y_3 \left(1 - \frac{y_3}{K_3 C_3} \right). \end{aligned} \tag{5}$$

То есть предельное значение ВВП увеличивается в C_1 раз, предельное значений инвестиций в C_3 раз (частично и за счет ВВП), а предельное значение сбережений уменьшается в C_2 раз.

Стационарная точка системы уравнений (5) находится из системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{y_1}{K_1} &= \frac{a_1 + y_2 / K_2}{b_1 + y_2 / K_2}, \\ \frac{y_2}{K_2} &= \frac{b_2 + y_2 / K_2}{a_2 + y_2 / K_2}, \\ \frac{y_3}{K_3} &= \frac{a_3 + y_2 / K_2}{b_3 + y_2 / K_2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Второе уравнение в (6) приводится к квадратному уравнению

$$\left(\frac{y_2}{K_2} \right)^2 + (a_2 - 1) \frac{y_2}{K_2} - b_2 = 0 \tag{7}$$

Это уравнение имеет корни противоположных знаков:

$$\frac{y_2}{K_2} = \frac{1}{2} \left(-(a_2 - 1) \pm \sqrt{(a_2 - 1)^2 + 4b_2} \right)$$

При $\frac{y_2}{K_2} = 0$ левая часть уравнения (5) принимает отрицательное значение, а

при $\frac{y_2}{K_2} = 1$ положительное, поскольку $a_2 > b_2$. Поэтому положительный

корень уравнения (7) удовлетворяет неравенству $\frac{y_2}{K_2} < 1$. То есть новое предельное значение сбережений уменьшится.

А из первого и третьего уравнения в (7) следует, что предельные значения y_1 и y_3 увеличатся. Если принять, что $b_1 = b_2 = b_3 = 1$, то

$$\frac{y_1/K_1}{y_3/K_2} = \frac{a_1 + y_2/K_2}{a_3 + y_2/K_2}$$

Отсюда видно, что при $a_1 > a_2$ больше вырастет ВВП, а при $a_2 > a_1$ больше вырастут инвестиции.

На рис. 4 для случая $a_1 = 3.5$, $a_2 = 1.5$, $a_3 = 2.2$, $b_1 = b_2 = b_3 = 1$ приведена динамика показателей, если перераспределение сбережений начинается в 2020 году. Сбережения уменьшились в 1.25 раза, ВВП увеличился в 2.3 раза, а инвестиции – в 1.6 раза.

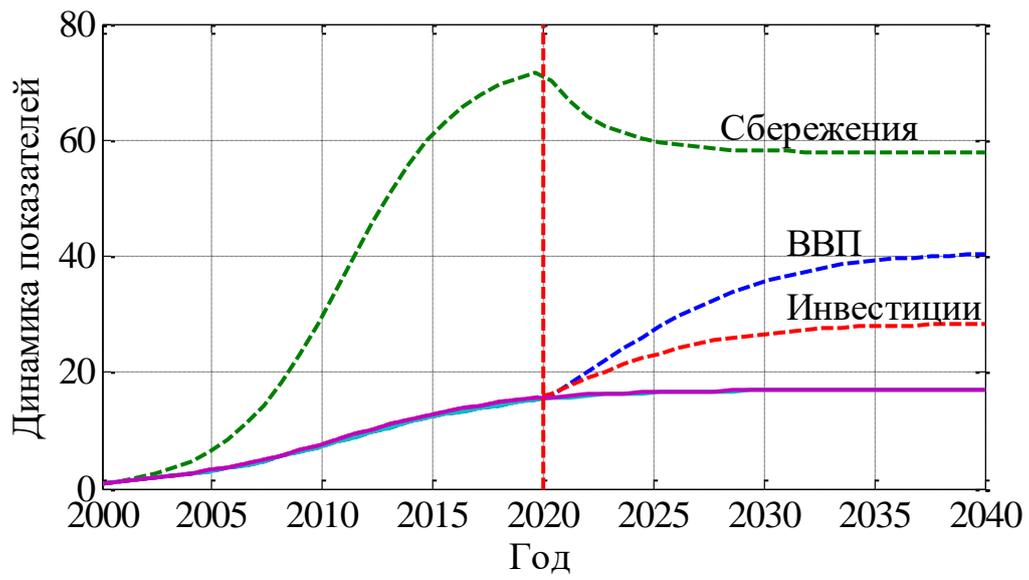


Рис. 4 Динамика показателей до 2020 года и после 2020 года

7. Математическая модель кооперации «ВВП – Инвестиции»

Повысить экономические показатели можно не только за счет перераспределения денежных накоплений, но и за счет более эффективного использования результатов, полученных в различных сферах деятельности. Эффективность взаимодействия можно продемонстрировать на модели кооперации системы, обеспечивающей рост ВВП и системы, обеспечивающей инновации. Под инновациями в модели понимаются ресурсы, вложенные в социальную сферу, образование, науку, в те сферы деятельности, которые повышают ВВП. В модели кооперации (8) принимается, что y_1 - текущее значение ВВП, y_2 - текущее значений инновация. Тогда модель кооперации [4] принимает вид:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= \mu_1 y_1 \left(1 + a_1 \frac{y_2}{K_2} - \frac{y_1}{K_1} \right), \\ \frac{dy_2}{dt} &= \mu_2 y_2 \left(1 + a_2 \frac{y_1}{K_1} - \frac{y_2}{K_2} \right), \\ a_1 < 1, a_2 < 1\end{aligned}\tag{8}$$

В этой модели вклад инноваций в ВВП определяется слагаемым $a_1 \frac{y_2}{K_2}$ в первом уравнении, а ВВП в инновации – слагаемым $a_2 \frac{y_1}{K_1}$ во втором уравнении в (8).

Система уравнений (8) имеет нетривиальную стационарную точку

$$\begin{aligned}\frac{y_1}{K_1} &= \frac{1 + a_1}{1 - a_1 a_2}, \\ \frac{y_2}{K_2} &= \frac{1 + a_2}{1 - a_1 a_2}.\end{aligned}\tag{9}$$

Матрица Якоби правой части уравнений в стационарной точке

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\mu_1 y_1}{K_1} & a_1 \frac{\mu_1 y_1}{K_2} \\ a_2 \frac{\mu_2 y_2}{K_1} & -\frac{\mu_2 y_2}{K_2} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

а ее характеристический полином

$$\lambda^2 + \left(\frac{\mu_1 y_1}{K_1} + \frac{\mu_2 y_2}{K_2} \right) \lambda + (1 - a_1 a_2) \frac{\mu_2 y_2}{K_2} \frac{\mu_1 y_1}{K_1} = 0 \quad (11)$$

имеет корни с отрицательными вещественными частями. Поэтому стационарная точка (9) будет устойчивой.

На рис. 5 для $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0.2$ показано изменение ВВП и инвестиций после 2020 года.

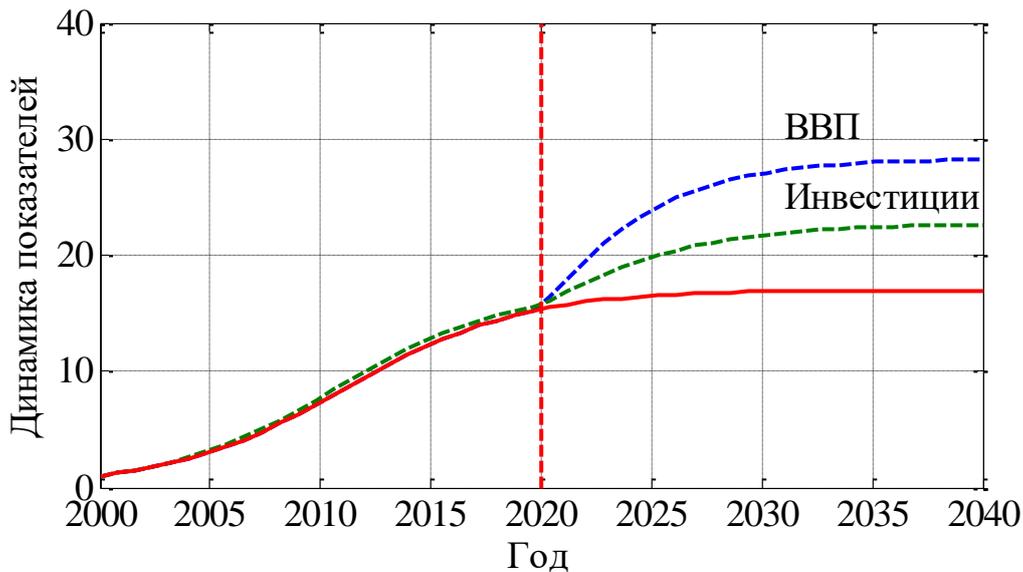


Рис. 5 Динамика показателей до 2020 года и после 2020 года

8. Математическая модель «Природа – Общество»

Как в модели (5), так и в модели (8) повышаются предельные значения показателей. То есть временный подъем все равно приводит со временем к стагнации. Поэтому только перераспределение средств между различными отраслями не решает задачу постоянного увеличения экономических показателей. Самым перспективным может быть использование неограниченных на сегодняшний день природных источников ресурсов и постоянно растущих интеллектуальных возможностей человека.

Постоянное использование неограниченных источников позволит увеличивать предельные значения показателей ежегодно на некоторое значение: ВВП на γ_1 , а инвестиции на γ_2 . С учетом этого предположения модель представлена системой двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= \mu_1 y_1 \left(1 - \frac{y_1}{K_1 e^{\gamma_1 t}} \right), \\ \frac{dy_2}{dt} &= \mu_2 y_2 \left(1 - \frac{y_2}{K_2 e^{\gamma_2 t}} \right).\end{aligned}\tag{12}$$

Параметр γ_1 , характеризует скорость освоения природных ресурсов, а γ_2 - скорость повышения уровня грамотности, новых открытий и т.п. Темпы роста ВВП промышленных стран около 4% в год, а темпы роста «интеллектуального» потенциала около 2%. С учетом этого принимаем, что $\gamma_1 = 0.04$, $\gamma_2 = 0.02$. Динамика показателе при этих параметрах приведена на рис.6.

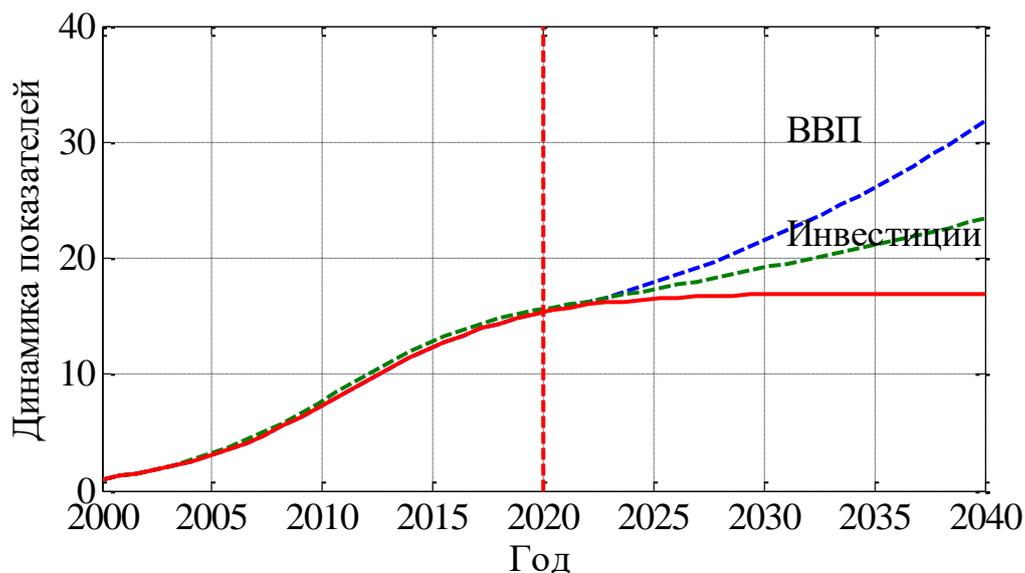


Рис. 6 Динамика показателей до 2020 года и после 2020 года

Из анализа результатов моделирования видно, что перераспределение ресурсов в сферах экономики может дать временный эффект по увеличению ВВП, инвестиций, денежных сбережений и т.п. Решение экономических задач за счет сбережений населения тоже через некоторое время приведет к медленной стагнации. Наиболее рациональным может быть рациональное освоение природных ресурсов и развитие интеллектуального потенциала общества.

Заключение

Из проведенного статистического анализа экономических показателей следует следующее:

- скорость роста численности пенсионеров больше, чем скорость роста численности работающих - материальное положение пенсионеров со временем может ухудшиться;

- в целом по Российской Федерации основные показатели экономической динамики, а также уровня и структуры доходов и расходов населения растут;

- темпы роста экономических показателей постепенно уменьшаются и к 2030 году может наступить стагнация экономики;

Из разработанных моделей следует, что увеличить темпы роста экономики можно за счет:

1. Перераспределения денежных накоплений.
2. Более рационального использования результатов, полученных в различных сферах деятельности.
3. Освоения новых природных ресурсов и повышения интеллектуального потенциала общества, что является наиболее эффективным способом.

Список литературы

1. Прасолов А.В. Математические методы экономической динамики. СПб: Издательство «Лань», 2008. - 352 с.
2. Российский статистический ежегодник, 2020.
3. Караев А. К. и Коновалов В. В. Логистическая модель динамики развития информационных и экономических систем // Экономика. Налоги. Право. - 2011. - №4. – С. 28-37.
4. Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. – Москва-Ижевск: институт компьютерных исследований, 2003. – 368 с.
5. Андреева У. Ю., Полина С. Г., Колпак Е. П. Математические модели конкуренции группы популяций // Дневник науки. 2021. № 1 (49). С. 31
6. Андреева У. Ю., Полина С. Г., Колпак Е. П. Математические модели конкуренции: интерференция и эксплуатация // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. 2021. № 1-2 (52). С. 30-36.
7. Жабко А. П., Котина Е. Д., Чижова О. Н. Дифференциальные уравнения и устойчивость: Учебник. – СПб.: Издательство «Лань», 2015. – 320 с.
8. Колпак Е. П. Вычисления в Matlab: учебное пособие. Казань: Изд-во «Бук», 2016. – 184 с.