Санкт–Петербургский государственный университет

БЕРЕСТЮКОВА Валерия Михайловна

Выпускная квалификационная работа
Байесовское равновесие в модели Бертрана

Уровень образования: бакалавриат
Направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
Основная образовательная программа СВ.5005.2017 «Прикладная математика, фундаментальная информатика и программирование»

Научный руководитель:
доцент, кафедра математической теории игр и статистических решений,
д.ф.-м.н. Седаков Артем Александрович

Рецензент:
доцент, кафедра математического моделирования энергетических систем,
к.ф.-м.н. Лежнина Елена Александровна

Санкт-Петербург
2021 г.

Содержание

Введение

Изучая экономические модели, в которых конкурируют две и более фирмы, чаще всего считается, что показатели деятельности – это знания, которыми обладает каждый участник. Но в реальности экономические субъекты всегда бывают информированы в разной степени, асимметрично информированы.

Как правило, мы не знаем достоверно экономические показатели конкурентов, такие как удельные затраты или издержки, например, из-за коммерческой тайны. Для того, чтобы фирма могла принять правильное решение в отношении определения стоимости своего продукта, необходимо понять поведение фирм на этом рынке. Экономические модели имеют функции спроса и прибыли с различными определяемыми рынком переменными. Они могут быть получены путем опроса и изучения поведения покупателей при изменении параметров.

В данной работе рассмотрим разновидность игр, в которых игроки могут не знать точно предпочтения других игроков. Предпочтения игроков в этих играх зависят от случайных событий, при этом игроки в разной степени владеют информацией о том, какое именно событие произошло. Такого рода игры называют играми с неполной информацией или байесовскими играми. Рассматриваемые игры можно спутать с играми с несовершенной информацией, в которых детали, о которых не были проинформированы игроки ранее, появляется в процессе игры. В изучаемых играх хотя бы одному игроку не ясна полная картина о соперниках.

Предположим, что все игроки руководствуются одними и теми же параметрами, влияющими на поведение рынка. Следует иметь в виду, что на рынке также существует асимметрия. Рассмотрим случай, когда игроки делают ходы одновременно и независимо друг от друга. К существующим участникам игры присоединяется виртуальный игрок «Природа». Каждого из игроков природа наделяет случайной переменной, значения которой называются "типами". Природа представляет игру в нормальной форме. Вероятностное распределение типов для каждого из игроков известно. В начале игры природа выбирает типы игроков. Тип, в частности, определяет функцию выигрыша участника. Таким образом, неполнота информации в байесовской игре – незнание по крайней мере одним игроком типа некого другого участника.

Концепция игр с неполной информацией оказывается эффективной и позволяет моделировать различные ситуации, содержащие элемент случайности, которые невозможно смоделировать в рамках игр с полной информацией.

Изучим модели дуополии и олигополии, в которых фирмы устанавливают цены на свою продукцию, а объемы продаж определяются с использованием функции рыночного спроса [8]. Эта модель предложена Ж. Бертраном в 1883 году [6]. Модель Бертрана нацелена на олигополистические рынки, в которых необходимо каждому конкурирующему предприятию постоянно контролировать ценовую политику одной и той же продукции. Чтобы предвидеть истинную цену товара на рынке, необходимо правильно предположить относительную реакцию каждого предприятия при установке той или иной цены. Данная модель показывает, что существует только одна цена, приносящая максимальную прибыль каждой фирме.

Постановка задачи

Основной целью данной работы является нахождение такого поведения игроков, которое позволило бы им ориентироваться в такой неполноте информации.

Поэтому задача заключается в следующем: каждая фирма должна найти наилучшую цену, которую она установит за свой продукт, принимая во внимание поведение рынка, стоимость и цены конкурентов, а также рыночную асимметрию. Необходимо найти такое поведение игроков, которое позволит игроку ориентироваться в такой неполноте информации.

Кроме этого, ставится задача провести анализ полученной модели на чувствительность к параметрам, влияющие на поведение рынка. А также определить концентрацию рынка при помощи индекса Херфиндаля-Хиршмана.

Обзор литературы

В реальности достаточно редко встречаются ситуации, когда все игроки владеют в совершенстве всей информацией о противниках, поэтому целесообразно рассматривать игры, в которых присутствует неопределенность относительно других игроков. Игрок может не знать различные показатели конкурентов, что усложняет задачу поиска равновесного поведения. Именно такие игры называются играми с неполной информацией. Эта разновидность теоретико-игровых моделей рассматривается в трудах Дж. Харшаньи в работе "Общая теория выбора равновесия в играх" [3]. В данной книге описана основная идея изучаемых игр и приведено четкое сравнение с играми с полной информацией.

Французский математик Жозеф Бертран сформулировал модель ценовой конкуренции, впоследствии названную в его честь – модель Бертрана. Модель была впервые описана в [6], где были показаны основные ее положения.

В одной из глав книги Жана Тироля "Рынок и рыночная власть" [9] рассматривается ценовая конкуренция, дифференциация продукта, задается изучаемая модель Бертрана, игры с несовершенной или неполной информацией и существование байесовского равновесия.

Определения и положения, необходимые для четкого представления поставленных задач, представлены в книге Майкла Мэшлера [8] и Роберта Гиббонса [7].

Альберт Хиршман в 1945 году предложил идею определения уровня концентрации каждого предприятия внутри рынка, позднее Оррисом Херфиндалем в 1950 году была представлена усовершенствованная формула определения доли и показателя концентрации. Данный индекс Херфиндаля–Хиршмана и его концепция описаны в [1].

Глава 1. Модель дуополии Бертрана

1.1 Описание модели

В микроэкономике под олигополией обычно понимают рынок однородного товара, на котором совокупный спрос множества потребителей удовлетворяется небольшим числом производителей-продавцов, причем цена существенно зависит от стратегических решений всех конкурирующих предприятий.

Особенностью ценообразования на олигополистическом рынке является необходимость каждой фирме принимать во внимание возможную реакцию своих конкурентов при выборе своего стратегического решения. Такая задача конкуренции нескольких фирм в условиях олигополии относится к классу задач принятия решений в условиях конфликта и неопределенности, для исследования которых применяется инструментарий теории игр.

Олигополию с двумя конкурирующими на рынке фирмами называют дуополией. Рассмотрим дуополию Бертрана – ситуацию, при которой имеются только два продавца определенного товара, не связанных между собой монополистическим соглашением о ценах, рынках сбыта и квотах.

Для каждого игрока i задается конечное множество его типов T_i, одно вероятностное распределение P на множестве типов $T = \prod_i T_i$ и дополнительно $P(t_i) = \sum_{t_j} P(t_i; t_j) > 0$ для каждого t_i, где под t_j понимается вектор типов противника. Зная распределение P, можно найти условные вероятности $P(t_j|t_i) = P(t_i; t_j)/P(t_i)$. Также задаются состояния природы, каждое из которых определяет игру в нормальной форме. В этой игре множество действий игрока зависит только от его типа и не зависит от типов других игроков.

Игра происходит следующим образом:

1. Природа сообщает игроку только его тип согласно заданному вероятностному распределению. Игроки не владеют информацией о типе своего соперника.

2. Игроки одновременно и независимо друг от друга выбирают действия, допустимые для своего типа, $p_i(t_i)$, $i = 1, 2$.

3. В конечном итоге игроки получают выигрыши, которые формируются следующим образом [9]:

$$q_i(p_i(t_i); p_j(t_j)) = D_i(p_i(t_i); p_j(t_j)) = 1 - bp_i(t_i) + dp_j(t_j),$$

$$\Pi_i(p_i(t_i); p_j(t_j)) = (p_i(t_i) - c_i)(1 - bp_i(t_i) + dp_j(t_j)).$$

где

- q_i – спрос на товар i-го игрока
- p_i, p_j – цены i-го и j-го игроков
- D_i– функция рыночного спроса i-го игрока
- c_i – удельные затраты i-го игрока
- b, d, $(0 < d \leqslant b)$ – параметры, показывающие изменение спроса фирмы при изменении цены на единицу.

1.2 Дуополия в случае двух типов

В данном разделе рассматривается модель с двумя игроками на рынке, у каждого из которых может быть по два различных типа удельных затрат c_i:

- $t_1 \in \{c_1^L; c_1^H\}$ - низкие и высокие удельные затраты первого производителя,
- $t_2 \in \{c_2^L; c_2^H\}$ - низкие и высокие удельные затраты второго производителя.

	Типы игрока 2	
Типы игрока 1	$t_2 = c_2^L$	$t_2 = c_2^H$
$t_1 = c_1^L$	$P(c_1^L; c_2^L)$	$P(c_1^L; c_2^H)$
$t_1 = c_1^H$	$P(c_1^H; c_2^L)$	$P(c_1^H; c_2^H)$

Предполагается, что фирма i $(i = 1, 2)$ может придерживаться старой технологии и тогда ее издержки будут составлять c_i^H, т. е. высокие удельные затраты. Также фирма может использовать новую методику, позволяющую снизить расходы на производство. Издержки в этом случае будут c_i^L.

Введем дополнительные определения [7]:

Определение 1. В статистической байесовской игре стратегией i-го игрока является функция $p_i(t_i) : T_i \to \mathbb{R}_+$ такая, что для каждого типа $t_i \in T_i$ $p_i(t_i)$ определяет действие из $\mathbb{R}_+$, выбранное заданным природой типом t_i. Стратегии для первого игрока $p_1 = \{p_1(t)\}, t \in T_1$, а для второго $p_2 = \{p_2(t)\}, t \in T_2$. Набором стратегий игроков будет $p = (p_1, p_2)$.

Определение 2. Представление i-го игрока статистической байесовской игры в нормальной форме определяется множеством стратегий $\mathbb{R}_+$, множеством типов T_1, T_2, вероятностным распределением P и функциями выигрыша Π_1, Π_2. Тип $t_i \in T_i$ i-го игрока, известный только игроку i, определяет функцию выигрыша i-го игрока $\Pi_i(p_i(t_i); p_j(t_j))$. Обозначим игру как

$$G = \{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+; T_1, T_2; P; \Pi_1, \Pi_2\}.$$

В качестве выигрыша будем понимать математическое ожидание прибыли Π, которое определяется следующим образом:

$$u_i(p_i, p_j|t_i) = \sum\nolimits_{t_j} P_i(t_j|t_i)\Pi(p_i(t_i), p_j^*(t_j)).$$

В качестве решения будем использовать концепцию байесовского равновесия. Каждый игрок в зависимости от своего типа будет максимизировать свою ожидаемую полезность, принимая условные типовые стратегии соперника заданными [9]:

Определение 3. В статистической байесовской игре G стратегии $p^* = (p_1^*, p_2^*)$ являются байесовским равновесием, если для каждого игрока i и каждого его типа $t_i \in T_i$ действие $p_i^*(t_i)$ определяется как

$$p_i^*(t_i) = \underset{p_i(t_i) \in \mathbb{R}_+}{\operatorname{argmax}} \sum\nolimits_{t_j} P_i(t_j|t_i)\Pi_i(p_i(t_i), p_j^*(t_j)).$$

Т.е. ни один игрок не хочет менять свою стратегию p_i^* на другую, предполагая, что его противник придерживается выбранной стратегии p_j^*.

В рассматриваемой дуополии Бертрана байесовское равновесие будет формировать такой набор стратегий:

$$p_1(t_1) \in \underset{p_1}{\operatorname{argmax}}[\textstyle\sum_{t_2}(p_1 - t_1)(1 - bp_1 + dp_2(t_2))P(t_2|t_1)] =$$
$$= \underset{p_1}{\operatorname{argmax}}[P(c_2^L|t_1)(p_1 - t_1)(1 - bp_1 + dp_2^L) + P(c_2^H|t_1)(p_1 - t_1)(1 - bp_1 + dp_2^H)],$$
$$p_2(t_2) \in \underset{p_2}{\operatorname{argmax}}[\textstyle\sum_{t_1}(p_2 - t_2)(1 - bp_2 + dp_1(t_1))P(t_1|t_2)] =$$
$$= \underset{p_2}{\operatorname{argmax}}[P(c_1^L|t_2)(p_2 - t_2)(1 - bp_2 + dp_1^L) + P(c_1^H|t_2)(p_2 - t_2)(1 - bp_2 + dp_1^H)].$$

Запишем развернуто 4 выражения условных ожидаемых значений прибыли фирм для любых t_1, t_2:

$$u_1(p|t_1 = c_1^L) =$$
$$= P(c_2^L|c_1^L)(p_1^L - c_1^L)(1 - bp_1^L + dp_2^L) + P(c_2^H|c_1^L)(p_1^L - c_1^L)(1 - bp_1^L + dp_2^H),$$

$$u_1(p|t_1 = c_1^H) =$$
$$= P(c_2^L|c_1^H)(p_1^H - c_1^H)(1 - bp_1^H + dp_2^L) + P(c_2^H|c_1^H)(p_1^H - c_1^H)(1 - bp_1^H + dp_2^H),$$

$$u_2(p|t_2 = c_2^L) =$$
$$= P(c_1^L|c_2^L)(p_2^L - c_2^L)(1 - bp_2^L + dp_1^L) + P(c_1^H|c_2^L)(p_2^L - c_2^L)(1 - bp_2^L + dp_1^H),$$

$$u_2(p|t_2 = c_2^H) =$$
$$= P(c_1^L|c_2^H)(p_2^H - c_2^H)(1 - bp_2^H + dp_1^L) + P(c_1^H|c_2^H)(p_2^H - c_2^H)(1 - bp_2^H + dp_1^H).$$

Обозначим величины p_i^s как цену i-го игрока при типе $t_i = c_i^s$, где $s = \{L, H\}$. Максимизируем $u_1(p|t_1 = c_1^L), u_1(p|t_1 = c_1^H), u_2(p|t_2 = c_2^L), u_2(p|t_2 = c_2^H)$ по $p_1^L, p_1^H, p_2^L, p_2^H$ соответственно:

Для u_1 при $t_1 = c_1^L$:

$$u_1(p|t_1 = c_1^L) = (p_1^L - c_1^L)(P(c_2^L|c_1^L) + P(c_2^H|c_1^L) - bp_1^L(P(c_2^L|c_1^L) + P(c_2^H|c_1^L)) +$$

$$+d(p_2^L P(c_2^L|c_1^L) + p_2^H P(c_2^H|c_1^L))) =$$

$$= (p_1^L - c_1^L)(1 - bp_1^L + d(p_2^L P(c_2^L|c_1^L) + p_2^H P(c_2^H|c_1^L))) =$$

$$= p_1^L - b(p_1^L)^2 + dp_1^L p_2^L P(c_2^L|c_1^L) + dp_1^L p_2^H P(c_2^H|c_1^L) - c_1^L + bc_1^L p_1^L +$$

$$+dc_1^L(p_2^L P(c_2^L|c_1^L) + p_2^H P(c_2^H|c_1^L)),$$

$$u_1'(p|t_1 = c_1^L) = (p_1^L)' - 2bp_1^L(p_1^L)' + d(p_1^L)' p_2^L P(c_2^L|c_1^L) + d(p_1^L)' p_2^H P(c_2^H|c_1^L) +$$

$$+bc_1^L p_1^L = (p_1^L)'(1 - 2bp_1^L + d(p_2^L P(c_2^L|c_1^L) + p_2^H P(c_2^H|c_1^L)) + bc_1^L) = 0,$$

$$1 - 2bp_1^L + d(p_2^L P(c_2^L|c_1^L) + p_2^H P(c_2^H|c_1^L)) + bc_1^L = 0,$$

$$p_1^L = \tfrac{1}{2b}(1 + d(p_2^L P(c_2^L|c_1^L) + p_2^H P(c_2^H|c_1^L)) + bc_1^L).$$

Выражение p_1^L – это цена первого игрока при выборе им новейшей технологии, т. е. при низких удельных затратах. Получим аналогично оставшиеся цены для первого и второго игрока при каждом виде технологии производства.

Для u_1 при $t_1 = c_1^H$:

$$u_1(p|t_1 = c_1^H) = (p_1^H - c_1^H)(1 - bp_1^H + d(p_2^L P(c_2^L|c_1^H) + p_2^H P(c_2^H|c_1^H)) + bc_1^H),$$

$$u_1'(p|t_1 = c_1^H) = (p_1^H)'(1 - 2bp_1^H + d(p_2^L P(c_2^L|c_1^H) + p_2^H P(c_2^H|c_1^H)) + bc_1^H) = 0,$$

$$p_1^H = \tfrac{1}{2b}(1 + d(p_2^L P(c_2^L|c_1^H) + p_2^H P(c_2^H|c_1^H)) + bc_1^H).$$

Для u_2 при $t_2 = c_2^L$:

$$u_2(p|t_2 = c_2^L) = (p_2^L - c_2^L)(1 - bp_2^L + d(p_1^L P(c_1^L|c_2^L) + p_1^H P(c_1^H|c_2^L)) + bc_2^L),$$

$$u_2'(p|t_2 = c_2^L) = (p_2^L)'(1 - 2bp_2^L + d(p_1^L P(c_1^L|c_2^L) + p_1^H P(c_1^H|c_2^L)) + bc_2^L) = 0,$$

$$p_2^L = \tfrac{1}{2b}(1 + d(p_1^L P(c_1^L|c_2^L) + p_1^H P(c_1^H|c_2^L)) + bc_2^L).$$

Для u_2 при $t_2 = c_2^H$:

$$u_2(p|t_2 = c_2^H) = (p_2^H - c_2^H)(1 - bp_2^H + d(p_1^L P(c_1^L|c_2^H) + p_1^H P(c_1^H|c_2^H)) + bc_2^H),$$

$$u_2'(p|t_2 = c_2^H) = (p_2^H)'(1 - 2bp_2^H + d(p_1^L P(c_1^L|c_2^H) + p_1^H P(c_1^H|c_2^H)) + bc_2^H) = 0,$$

$$p_2^H = \frac{1}{2b}(1 + d(p_1^L P(c_1^L|c_2^H) + p_1^H P(c_1^H|c_2^H)) + bc_2^H).$$

Получили систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными $p_1^L, p_1^H, p_2^L, p_2^H$.

$$p_1^L = \frac{1}{2b}(1 + d(p_2^L P(c_2^L|c_1^L) + p_2^H P(c_2^H|c_1^L)) + bc_1^L),$$

$$p_1^H = \frac{1}{2b}(1 + d(p_2^L P(c_2^L|c_1^H) + p_2^H P(c_2^H|c_1^H)) + bc_1^H),$$

$$p_2^L = \frac{1}{2b}(1 + d(p_1^L P(c_1^L|c_2^L) + p_1^H P(c_1^H|c_2^L)) + bc_2^L),$$

$$p_2^H = \frac{1}{2b}(1 + d(p_1^L P(c_1^L|c_2^H) + p_1^H P(c_1^H|c_2^H)) + bc_2^H).$$

Таким способом были получены наборы цен, образующие байесовское равновесие, которые могут установить игроки, имея данные наборы типов издержек – низкие и высокие удельные затраты.

В матричной форме это представимо в виде $Ax = k$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{dP(c_2^L|c_1^L)}{2b} & -\frac{dP(c_2^H|c_1^L)}{2b} \\ 0 & 1 & -\frac{dP(c_2^L|c_1^H)}{2b} & -\frac{dP(c_2^H|c_1^H)}{2b} \\ -\frac{dP(c_1^L|c_2^L)}{2b} & -\frac{dP(c_1^H|c_2^L)}{2b} & 1 & 0 \\ -\frac{dP(c_1^L|c_2^H)}{2b} & -\frac{dP(c_1^H|c_2^H)}{2b} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} p_1^L \\ p_1^H \\ p_2^L \\ p_2^H \end{pmatrix} k = \begin{pmatrix} \frac{1}{2b} + \frac{c_1^L}{2} \\ \frac{1}{2b} + \frac{c_1^H}{2} \\ \frac{1}{2b} + \frac{c_2^L}{2} \\ \frac{1}{2b} + \frac{c_2^H}{2} \end{pmatrix}$$

Данную систему линейных алгебраических уравнений можно решить при существовании обратной матрицы A^{-1} через $X = A^{-1}k$.

1.3 Дуополия в случае m/n типов

Рассмотрим рынок с двумя производителями одного продукта с m-мерным и n-мерным наборами типов удельных затрат:

- $t_1 \in \{c_{11}, \ldots, c_{1m}\}$ - набор удельных затрат первого производителя,
- $t_2 \in \{c_{21}, \ldots, c_{2n}\}$ - набор удельных затрат второго производителя.

Запишем байесовское равновесие:

$$\begin{gathered} p_1(t_1) \in \underset{p_1}{\operatorname{argmax}}[\textstyle\sum_{t_2}(p_1 - t_1)(1 - bp_1 + dp_2(t_2))P(t_2|t_1)] = \\ = \underset{p_1}{\operatorname{argmax}}[\textstyle\sum_{i=1}^{n} P(c_{2i}|t_1)(p_1 - t_1)(1 - bp_2 + dp_{2i})], \\ p_2(t_2) \in \underset{p_2}{\operatorname{argmax}}[\textstyle\sum_{t_1}(p_2 - t_2)(1 - bp_2 + dp_1(t_1))P(t_1|t_2)] = \\ = \underset{p_2}{\operatorname{argmax}}[\textstyle\sum_{j=1}^{m} P(c_{2j}|t_2)(p_2 - t_2)(1 - bp_1 + dp_{2j})]. \end{gathered}$$

Тогда ожидаемые выигрыши обоих игроков имеют вид:

$$u_1(p|t_1 = c_1^j) = (p_1^j - c_1^j)[\textstyle\sum_{i=1}^{n}(1 - bp_1^j + dp_2^i)P(c_2^i|c_1^j)],\ j \in \{1, ..., m\},$$

$$u_2(p|t_2 = c_2^i) = (p_2^i - c_2^i)[\textstyle\sum_{j=1}^{m}(1 - bp_2^i + dp_1^j)P(c_1^j|c_2^i)]\ i \in \{1, ..., n\}.$$

Максимизируем $u_1(p|t_1 = c_1^j)$ и $u_2(p|t_2 = c_2^i)$ по p_1^j и p_2^i соответственно, $j \in \{1, ..., m\}$, $i \in \{1, ..., n\}$:

$$u_1'(p|t_1 = c_1^j) = (p_1^j)'[\textstyle\sum_{i=1}^{n}(1 - bp_1^j + dp_2^i)P(c_2^i|c_1^j)] -$$

$$-b(p_1^j)'(p_1^j - c_1^j)\textstyle\sum_{i=1}^{n} P(c_2^i|c_1^j) =$$

$$= (p_1^j)'(1 + bc_1^j - 2bp_1^j + d\textstyle\sum_{i=1}^{n} p_2^i P(c_2^i|c_1^j)) = 0,\ j \in \{1, ..., m\},$$

$$u_2'(p|t_2 = c_2^i) = (p_2^i)'[\textstyle\sum_{j=1}^{m}(1 - bp_2^i + dp_1^j)P(c_1^j|c_2^i)] -$$

$$-b(p_2^i)'(p_2^i - c_2^i)\textstyle\sum_{j=1}^{m} P(c_1^j|c_2^i) =$$

$$= (p_2^i)'(1 + bc_2^i - 2bp_2^i + d\textstyle\sum_{j=1}^{n} p_1^j P(c_1^j|c_2^i)) = 0,\ i \in \{1, ..., n\}.$$

В итоге имеем:

$$p_{1j}^{*} = \frac{1}{2b}(1 + bc_{1j} + d\sum_{i=1}^{n} p_{2i}^{*} P(c_{2i}|c_{1j})), j \in \{1, \ldots, m\},$$

$$p_{2i}^{*} = \frac{1}{2b}(1 + bc_{2i} + d\sum_{j=1}^{m} p_{2j}^{*} P(c_{1j}|c_{2i})), i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Таким образом, представление выше – это равновесная цена, которую могут установить первый и второй производитель, имея данные наборы типов издержек.

Решение можно получить в явном виде, при существовании обратной матрицы A^{-1} решив матричное уравнение $x = A^{-1}k$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & -\frac{dP(c_2^1|c_1^1)}{2b} & ... & -\frac{dP(c_2^{n-1}|c_1^1)}{2b} & -\frac{dP(c_2^n|c_1^1)}{2b} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & -\frac{dP(c_2^1|c_1^m)}{2b} & ... & -\frac{dP(c_2^{n-1}c_1^m)}{2b} & -\frac{dP(c_2^n c_1^m)}{2b} \\ -\frac{dP(c_1^1|c_2^1)}{2b} & -\frac{dP(c_1^2|c_2^1)}{2b} & ... & -\frac{dP(c_1^m|c_2^1)}{2b} & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ -\frac{dP(c_1^1|c_2^n)}{2b} & -\frac{dP(c_1^2|c_2^n)}{2b} & ... & -\frac{dP(c_1^m|c_2^n)}{2b} & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} p_1^1 \\ ... \\ p_1^m \\ p_2^1 \\ ... \\ p_2^m \end{pmatrix} k = \begin{pmatrix} \frac{1}{2b} + \frac{bc_1^1}{2} \\ ... \\ \frac{1}{2b} + \frac{bc_1^m}{2} \\ \frac{1}{2b} + \frac{bc_2^1}{2} \\ ... \\ \frac{1}{2b} + \frac{bc_2^n}{2} \end{pmatrix}$$

Глава 2. Олигополия Бертрана

2.1 Описание модели

Олигополия - это тип рынка несовершенной конкуренции, характеризующийся присутствием на рынке товара нескольких производителей. Таким образом, в олигополистической отрасли производителей больше, чем в условиях монополии, но значительно меньше, чем в условиях совершенной конкуренции. Из этого следует, что олигополист, в отличие от совершенного конкурента, обладает определенной властью над ценой, но его власть, по сравнению с монополистом, ограничена количеством производителей, поделивших рынок между собой.

Рассмотрим олигополию, то есть ситуацию, когда на рынке присутствует k игроков, продающих однородную продукцию. Каждому игроку присваивается тип t_i :

$$t_i \in T_i = \{c_{i,1}, c_{i,2}, \dots, c_{i,m_i}\}$$
$$k \in \{1, \dots, k\}$$

Для олигополии представление игрока и стратегия определяются следующим образом:

Определение 5. Представление k-го игрока статистической байесовской игры в нормальной форме определяется множеством стратегий $\mathbb{R}_+$, множеством типов $T_1, \dots, T_k$, вероятностным распределением P и функциями выигрыша $\Pi_1, \dots, \Pi_k$. Тип $t_i \in T_i$ i-го игрока, известный только игроку i, определяет функцию выигрыша игрока i $\Pi_i(p_1(t_1), \dots, p_k(t_k))$. Обозначим игру как

$$G = \{\mathbb{R}_+, \dots, \mathbb{R}_+; T_1, \dots, T_k; P; \Pi_1, \dots, \Pi_k\}.$$

Определение 6. В статистической байесовской игре G стратегией i-го игрока является функция $p_i(t_i) : T_i \to \mathbb{R}_+$ такая, что для каждого типа $t_i \in T_i$ $p_i(t_i)$ определяет действие из $\mathbb{R}_+$, выбранное заданным природой типом t_i.

Стратегиями в данной игре являются цены $p_1, ..., p_k$, зависящие от своих типов $t_1, ..., t_k$ соответственно. Для i-го игрока стретигии будут $p_i =$

$= \{p_i(t)\}$, $t \in T_i$. Набором стратегий игроков будет $p = (p_1, \ldots, p_k)$. Найдем функции выигрыша фирм Π_i для известных удельных затрат, т. е. когда известен набор $(t_1, ..., t_k)$:

$$\Pi_i(p_1(t_1), \ldots, p_i(t_i), \ldots, p_k(t_k)) = (p_i(t_i) - c_i)(a_i - b_i p_i(t_i) + \textstyle\sum_{j \neq k} d_{ij} p_j(t_j))$$
$$i \in \{1, ..., k\}$$
$$j \in \{1, ..., k\}$$

2.2 Байесовское равновесие в олигополии

Запишем стратегии, доставляющие максимум:

$$p_i(t_i) \in$$
$$\underset{p_i(t_i) \in \mathbb{R}_+}{\operatorname{argmax}} [\textstyle\sum_{t_j \neq t_k} (p_i - t_i)(a_i - b_i p_i + \sum_{j \neq k} d_{ij} p_j(t_j)) P(t_1, t_2, ..., t_{i-1}, t_{i+1}, ..., t_k | t_i)]$$
$$i \in \{1, ..., k\}$$

Математическое ожидание прибыли:

$$u_i(p|t_i = c_{ij}) = (p_{ij} - c_{ij})(a_i - b_i p_{ij} + \textstyle\sum_{l=1}^{k} \sum_{s_l=1}^{m_l} d_{il} p_{l s_l}) P(c_{-i, s_{-i}} | c_{ij})$$

где $l = \{1, ..., k\}$ и $s_l = \{1, ..., m_l\}$,
$$c_{-i, s_{-i}} = (c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{i-1, m_{i-1}}, c_{i+1,1}, \ldots, c_{k, m_k})$$

Максимизируем $u_i(t_i = c_{ij})$ по p_{ij}:

$$u_i'(p|t_i = c_{ij}) = p_{ij}' [\textstyle\sum_{l=1}^{k} \sum_{s_l=1}^{m_l} d_{il} p_{l s_l} P(c_{-i, s_{-i}} | c_{ij}) + a_i + b_i c_{ij} - 2 b_i p_{ij}] = 0$$

Тогда получим байесовское равновесие для олигополии, когда у участников рынка имеется различное количество удельных затрат:

$$p_{ij}^* = \frac{a_i + b_i c_{ij} + \sum_{l=1}^{k} \sum_{s_l=1}^{m_l} d_{il} p_{l s_l}^* P(c_{-i, s_{-i}} | c_{ij})}{2 b_i}$$

$$l = \{1, ..., k\} \text{ и } s_l = \{1, ..., m_l\}$$

Глава 3. Анализ на чувствительность

3.1 Анализ дуополии, где $d = b$

Рассмотрим пример дуополии с двумя типами удальных затрат у каждой фирмы и посмотрим, как ведут себя равновесные цены, функции спроса и прибыли. Пусть задано множество типов $t_1 \in T_1 = \{c_1^L, c_1^H\} = \{\frac{4}{5}, \frac{6}{5}\}$, $t_2 \in T_2 = \{c_2^L, c_2^H\} = \{\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\}$ и совместное вероятностное распределение на этом множестве $T = T_1 \times T_2$:

	Типы игрока 1	
Типы игрока 2	$t_1 = c_1^L$	$t_1 = c_1^H$
$t_2 = c_2^L$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$
$t_2 = c_2^H$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$

Тогда маргинальные распределения примут вид:

Игрок 1	$t_1 = c_1^L$	$t_1 = c_1^H$
$P(t_1)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$

Игрок 2	$t_2 = c_2^L$	$t_2 = c_2^H$
$P(t_2)$	$\frac{5}{10}$	$\frac{5}{10}$

Тогда можем посчитать условную вероятность использования i-ым игроком технологии с удельными затратами c_i^s при условии, что противник использует технологию с издержками c_j^r, $s, r = \{L, H\}$:

$$P(c_i^s|c_j^r) = \frac{P(c_i^s;c_j^r)}{P(c_j^r)},\ s, r = \{L, H\},$$
$$P(c_1^L|c_2^L) = \frac{P(c_1^L;c_2^L)}{P(c_2^L)} = \frac{1/10}{5/10} = \frac{1}{5},$$
$$P(c_1^L|c_2^H) = \frac{P(c_1^L;c_2^H)}{P(c_2^H)} = \frac{2/10}{5/10} = \frac{2}{5},$$
$$P(c_1^H|c_2^L) = \frac{P(c_1^H;c_2^L)}{P(c_2^L)} = \frac{4/10}{5/10} = \frac{4}{5},$$
$$P(c_1^H|c_2^H) = \frac{P(c_1^H;c_2^H)}{P(c_2^H)} = \frac{3/10}{5/10} = \frac{3}{5},$$
$$P(c_2^L|c_1^L) = \frac{P(c_2^L;c_1^L)}{P(c_1^L)} = \frac{1/10}{3/10} = \frac{1}{3},$$
$$P(c_2^L|c_1^H) = \frac{P(c_2^L;c_1^H)}{P(c_1^H)} = \frac{2/10}{3/10} = \frac{2}{3},$$
$$P(c_2^H|c_1^L) = \frac{P(c_2^H;c_1^L)}{P(c_1^L)} = \frac{4/10}{7/10} = \frac{4}{7},$$
$$P(c_2^H|c_1^H) = \frac{P(c_2^H;c_1^H)}{P(c_1^H)} = \frac{3/10}{7/10} = \frac{3}{7}.$$

Примем $d = b$. Тогда через матричное уравнение $x = A^{-1}k$ получим значения цен $p_1^L, p_1^H, p_2^L, p_2^H$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{P(c_2^L|c_1^L)}{2} & -\frac{P(c_2^H|c_1^L)}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{P(c_2^L|c_1^H)}{2} & -\frac{P(c_2^H|c_1^H)}{2} \\ -\frac{P(c_1^L|c_2^L)}{2} & -\frac{P(c_1^H|c_2^L)}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{P(c_1^L|c_2^H)}{2} & -\frac{P(c_1^H|c_2^H)}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} k = \begin{pmatrix} \frac{1}{2b} + \frac{c_1^L}{2} \\ \frac{1}{2b} + \frac{c_1^H}{2} \\ \frac{1}{2b} + \frac{c_2^L}{2} \\ \frac{1}{2b} + \frac{c_2^H}{2} \end{pmatrix}$$

Находим обратную матрицу A^{-1} и вектор k:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1.1084 & 0.2248 & 0.2489 & 0.4176 \\ 0.0963 & 1.2369 & 0.3694 & 0.2971 \\ 0.1493 & 0.5172 & 1.1726 & 0.1606 \\ 0.2506 & 0.4161 & 0.1606 & 1.1726 \end{pmatrix} k = \begin{pmatrix} 0.4 + \frac{1}{2b} \\ 0.6 + \frac{1}{2b} \\ 0.375 + \frac{1}{2b} \\ 0.625 + \frac{1}{2b} \end{pmatrix}$$

При существовании A^{-1} имеем:

$$x = \begin{pmatrix} 0.9327 + \frac{1}{b} \\ 1.105 + \frac{1}{b} \\ 0.9102 + \frac{1}{b} \\ 1.1431 + \frac{1}{b} \end{pmatrix}$$

Из вектора x видно, что чем ближе к нулю значение параметра b, тем выше значение цены производителя. При увеличении этого коэффициента получаем убывание функций на всем интервале $\mathbb{R}_+$.

Рассмотрим поведение спроса для первого игрока при различных парах стратегий:

$$q_i(p_i(t_i); p_j(t_j)) = 1 + b(p_j(t_j) - p_i(t_i)),$$

$$q_1(p_1^L, p_2^L) = 1 - 0.0224b,$$

$$q_1(p_1^H, p_2^L) = 0.2103b + 1,$$

$$q_1(p_1^L, p_2^H) = 1 - 0.1947b,$$

$$q_1(p_1^H, p_2^H) = 0.038b + 1.$$

Видим, что функции (p_1^H, p_2^L) и (p_1^H, p_2^H) на всем интервале $(0, +\infty)$ положительны. Это значит, что с увеличением параметра b данные функции спроса монотонно возрастают. Аналогично, по структуре выражений функций спроса для пар стратегий (p_1^L, p_2^L) и (p_1^L, p_2^H) видно, что при увеличении параметра b получаем убывание данных функций на всем интервале $(0, +\infty)$. Так как мы считаем b положительной константой, то видно, что на значение функции спроса влияет скобка $(p_j - p_i)$. Отсюда получим, что если игрок j назначит цену выше, чем игрок i, то спрос i-го игрока возрастает и наоборот в противном случае.

Рассмотрим поведение функции прибыли:

$$\Pi_i(p_i(t_i), p_j(t_j)) = (p_i(t_i) - c_i)(1 + b(p_j(t_j) - p_i(t_i))),$$

$\Pi_1(p_1^L; p_2^L) = \frac{1+0.1102b-0.0029b^2}{b}$, $\Pi_2(p_2^L; p_1^L) = \frac{1+0.1827b+0.00359b^2}{b}$,

$\Pi_1(p_1^L; p_2^H) = \frac{1-0.2897b+0.0184b^2}{b}$, $\Pi_2(p_2^L; p_1^H) = \frac{1+0.355b+0.0312b^2}{b}$,

$\Pi_1(p_1^H; p_2^L) = \frac{1+0.343b+0.0279b^2}{b}$, $\Pi_2(p_2^H; p_1^L) = \frac{1-0.3172b+0.0224b^2}{b}$,

$\Pi_1(p_1^H; p_2^H) = \frac{1-0.0569b-0.0036b^2}{b}$, $\Pi_2(p_2^H; p_1^H) = \frac{1-0.1449b+0.0041b^2}{b}$.

Функции прибыли при каждой паре стратегий убывает при увеличении параметра b, т. е. как в ситуации с функциями цен. Здесь также можно заметить влияние спроса на прибыль: первый множитель $(p_i(t_i) - c_i)$ всегда положителен, так как цена $p_i(t_i)$ не должна быть меньше, чем удельные затраты c_i, а второй множитель - это спрос i-го игрока, а это значит, что чем выше спрос i-го игрока, тем выше его прибыль.

Можно найти ожидаемые прибыли Π_i^*, i=1,2, для фирм, имея такие функции прибыли и совместное распределение:

$$\Pi_1^* = P(c_1^L, c_2^L)\Pi_1(p_1^L, p_2^L) + P(c_1^L, c_2^H)\Pi_1(p_1^L, p_2^H) + P(c_1^H, c_2^L)\Pi_1(p_1^H, p_2^L) +$$

$$+P(c_1^H, c_2^H)\Pi_1(p_1^H, p_2^H) = \frac{0.0116b^2 - 0.0533b + 1}{b},$$

$$\Pi_2^* = P(c_2^L, c_1^L)\Pi_1(p_2^L, p_1^L) + P(c_2^L, c_1^H)\Pi_1(p_2^L, p_1^H) + P(c_2^H, c_1^L)\Pi_1(p_2^H, p_1^L) +$$

$$+P(c_2^H, c_1^H)\Pi_1(p_2^H, p_1^H) = \frac{0.01856b^2 - 0.0533b + 1}{b}.$$

Проанализировав поведение функций цен, спроса и прибыли, получаем следующий вывод: для достижения наибольшей прибыли i-му игроку выгодно, чтобы b было как можно ближе к нулю, а при увеличении этого параметра показатели прибыли значительно ухудшаются.

3.2 Анализ дуополии, где $d = 1$

Рассмотрим модель из раздела 3.1, но считаем, что параметр $d = 1$. Тогда матрицы A и A^{-1} примут следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{6b} & -\frac{1}{3b} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7b} & -\frac{3}{14b} \\ -\frac{1}{10b} & -\frac{2}{5b} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5b} & -\frac{3}{10b} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{336b^4 - 188b^2 + 1} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} b^2(336b^2 - 60) & 56b^2 & 56b^3 + 6b & 122b^3 - 8b \\ 24b^2 & b^2(336b^2 - 28) & 96b^3 - 4b & 2b(36b^2 + 1) \\ \frac{168b^3 + 18b}{5} & \frac{672b^3 - 28b}{5} & 4b^2(84b^2 - 11) & 40b^2 \\ \frac{24b(14b^2 + 1)}{5} & 40b^2 & 4b^2(84b^2 - 11) & 4b^2(84b^2 - 11) \end{pmatrix}$$

Получаем равновесные цены:

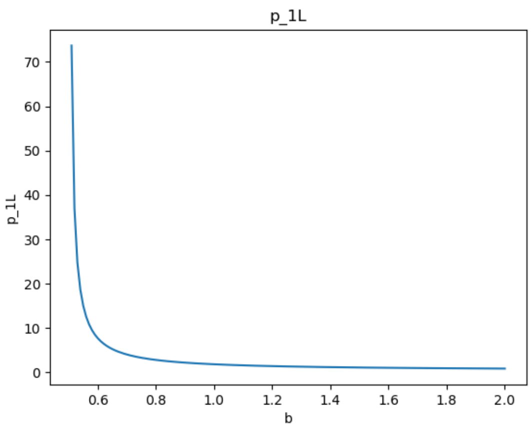
$$p_1^L = \frac{1185408b^4 + 2284380b^3 + 825552b^2 - 41895b - 8820}{2963520b^4 - 776160b^2 + 8820},$$

$$p_1^H = \frac{3556224b^4 + 4392360b^3 + 1354752b^2 - 39690b^x - 17640}{5927040b^4 - 1552320b^2 + 17640},$$

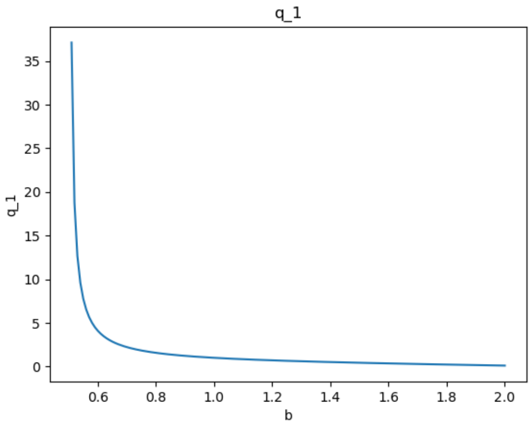
$$p_2^L = \frac{1111320b^6+2311545b^5+670320b^4-337276.8b^3-115657.5b^2+4527.6bx+1155}{2963520b^6-1164240b^4+110460b^2-1155},$$

$$p_2^H = \frac{22050b^4+26812.8b^3+7507.5b^2-235.2b-105}{35280b^4-9240b^2+105}.$$

Изучим поведение этих функций цен при изменении параметра b. Для более детального анализа рассмотрим p_1^L. У данной функции на промежутке до $b = 0.5$ наблюдаются отрицательные значения цен, что исключает допустимость равновесных стратегий. При поиске нулей функции производной получили, что корней нет, то есть на указанном интервале нет точек экстремума. Преодолев эту точку $b = 0.5$, функция цены начинает монотонно убывать, при этом допустимость цен сохраняется, так как значения их положительны. Видно, что чем ближе значение b к 0.5, тем выше значение цены. Схожая ситуация наблюдается для любой из функций цен, найденных ранее. Проанализировав поведение функции спроса $q_1(p_1^L, p_2^L) = \frac{-13440b^5+20300b^4+16848b^3+925b^2-292b}{33600b^4-8800b^2+100}$, получили идентичное поведение этой функции, что и у функций цен. Эти рассуждения эквивалентны для всех функций спроса с любыми комбинациями цен первого и второго производителей. Для $q_1(p_1^L, p_2^L)$ наилучшими показателями b является значение b, которое как можно ближе к 0.5.



(рис. 1) График p_1^L



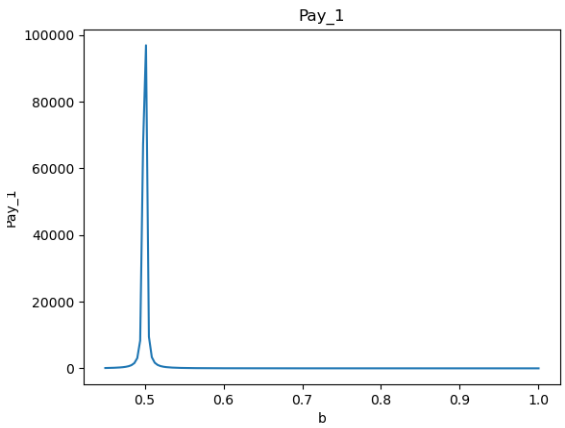
(рис. 2) График $q_1(p_1^L, p_2^L)$

Рассмотрев, например, функцию прибыли

$$\Pi_1(p_1^L, p_2^L) = \frac{b(18b^{14}+19b^{13}+17b^{12}+19b^{11}+18b^{10}+18b^{9}+18b^{8}+17b^{7}+17b^{6}+16b^{5}+}{19b^{14}+19b^{12}+18b^{10}+18b^{8}+16b^{6}+}$$

$$\frac{+16b^{4}+12497349060000b^{3}+11938811435502117b^{2}+2497836171160b-472252766821)}{+15b^{4}+244065875760000b^{2}-89850221985},$$

имеем следующее: так как ранее было замечено, что допустимые значения цен сохраняются, начиная от $b = 0.5$, то это также справедливо и для функции прибыли, поэтому производителю при таком наборе стратегий выгодно, чтобы показатель b был как можно ближе к данной точке, это видно из рисунка 3:



(рис. 3) График $\Pi_1(p_1^L, p_2^H)$

Это аналогично для любой функции прибыли при любой комбинации стратегий игроков.

Проанализировав поведение функций цен, спроса и прибыли при $d =$

$= 1$, получаем, что во всех случаях для таких исходных данных имеется точка, равная $b = 0.5$, чем ближе значение b к этой точке, тем выше значение функций цен, спроса и прибыли первого игрока. Проделав такие же процедуры при различных d, получили, что эта точка разрыва будет сдвигаться и равной $0.5d$ и в ее окрестностях получаются наибольшие значения функций цен, спроса и прибыли. Таким образом, для дуополии необходимо определить на каком интервале функции имеют допустимые значения, тогда значения b, близкие к этой точке, будут давать наибольшие показатели функций цен, спроса и прибыли для модели.

3.3 Анализ олигополии

Рассмотрим пример олигополии с 3 фирмами на рынке ($k = 3$) с различным количеством удельных затрат. Пусть задано множество типов $t_1 = \{\frac{4}{5}, \frac{7}{5}, \frac{1}{5}\}$, $t_2 = \{\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\}$, $t_3 = \{\frac{1}{7}, \frac{3}{7}\}$ и совместное вероятностное распределение $T = T_1 \times T_2 \times T_3$ и считаем $a_i = 1$.

Таблица совместного распределения, когда $t_3 = c_{31}$:

	Типы игрока 2	
Типы игрока 1	$t_2 = c_{21}$	$t_2 = c_{22}$
$t_1 = c_{11}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$
$t_1 = c_{12}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$
$t_1 = c_{13}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{20}$

Таблица совместного распределения, когда $t_3 = c_{32}$:

	Типы игрока 2	
Типы игрока 1	$t_2 = c_{21}$	$t_2 = c_{22}$
$t_1 = c_{11}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$
$t_1 = c_{12}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{20}$
$t_1 = c_{13}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{20}$

Маргинальные распределения для каждого из игроков при различных типах:

Игрок 1	$t_1 = c_{11}$	$t_1 = c_{12}$	$t_1 = c_{13}$
$P(t_1)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{3}{20}$

Игрок 2	$t_2 = c_{21}$	$t_2 = c_{22}$
$P(t_2)$	$\frac{5}{10}$	$\frac{5}{10}$

Игрок 3	$t_3 = c_{31}$	$t_3 = c_{32}$
$P(t_3)$	$\frac{21}{40}$	$\frac{19}{40}$

Тогда условные распределения выглядят следующим образом:

$$P(c_{21}, c_{31}|c_{11}) = \frac{P(c_{11}, c_{21}, c_{31})}{P(c_{11})} = \frac{1/10}{3/10} = \frac{1}{3}$$
$$P(c_{22}, c_{31}|c_{11}) = \frac{P(c_{11}, c_{22}, c_{31})}{P(c_{11})} = \frac{1/20}{3/10} = \frac{1}{6}$$
$$P(c_{21}, c_{32}|c_{11}) = \frac{P(c_{11}, c_{21}, c_{32})}{P(c_{11})} = \frac{1/20}{3/10} = \frac{1}{6}$$
$$P(c_{22}, c_{32}|c_{11}) = \frac{P(c_{11}, c_{22}, c_{32})}{P(c_{11})} = \frac{1/10}{3/10} = \frac{1}{3}$$

$$P(c_{21}, c_{31}|c_{12}) = \frac{P(c_{12}, c_{21}, c_{31})}{P(c_{12})} = \frac{1/10}{11/20} = \frac{2}{11}$$
$$P(c_{22}, c_{31}|c_{12}) = \frac{P(c_{12}, c_{22}, c_{31})}{P(c_{12})} = \frac{2/10}{11/20} = \frac{4}{11}$$
$$P(c_{21}, c_{32}|c_{12}) = \frac{P(c_{12}, c_{21}, c_{32})}{P(c_{12})} = \frac{2/10}{11/20} = \frac{4}{11}$$
$$P(c_{22}, c_{32}|c_{12}) = \frac{P(c_{12}, c_{22}, c_{32})}{P(c_{12})} = \frac{1/20}{11/20} = \frac{1}{11}$$

$$P(c_{21}, c_{31}|c_{13}) = \frac{P(c_{13}, c_{21}, c_{31})}{P(c_{13})} = \frac{1/40}{3/20} = \frac{1}{6}$$
$$P(c_{22}, c_{31}|c_{13}) = \frac{P(c_{13}, c_{22}, c_{31})}{P(c_{13})} = \frac{1/20}{3/20} = \frac{1}{3}$$
$$P(c_{21}, c_{32}|c_{13}) = \frac{P(c_{13}, c_{21}, c_{32})}{P(c_{13})} = \frac{1/40}{3/20} = \frac{1}{6}$$
$$P(c_{22}, c_{32}|c_{13}) = \frac{P(c_{13}, c_{22}, c_{32})}{P(c_{13})} = \frac{1/20}{3/20} = \frac{1}{3}$$

$$P(c_{11}, c_{31}|c_{21}) = \frac{P(c_{11}, c_{21}, c_{31})}{P(c_{21})} = \frac{1/10}{5/10} = \frac{1}{5}$$
$$P(c_{12}, c_{31}|c_{21}) = \frac{P(c_{12}, c_{21}, c_{31})}{P(c_{21})} = \frac{1/10}{5/10} = \frac{1}{5}$$
$$P(c_{13}, c_{31}|c_{21}) = \frac{P(c_{13}, c_{21}, c_{31})}{P(c_{21})} = \frac{1/40}{5/10} = \frac{1}{20}$$
$$P(c_{11}, c_{32}|c_{21}) = \frac{P(c_{11}, c_{21}, c_{32})}{P(c_{21})} = \frac{1/20}{5/10} = \frac{1}{10}$$
$$P(c_{12}, c_{32}|c_{21}) = \frac{P(c_{12}, c_{21}, c_{32})}{P(c_{21})} = \frac{2/10}{5/10} = \frac{2}{5}$$
$$P(c_{13}, c_{32}|c_{21}) = \frac{P(c_{13}, c_{21}, c_{32})}{P(c_{21})} = \frac{1/40}{5/10} = \frac{1}{20}$$

$$P(c_{11}, c_{31}|c_{22}) = \frac{P(c_{11}, c_{22}, c_{31})}{P(c_{22})} = \frac{1/20}{5/10} = \frac{1}{10}$$
$$P(c_{12}, c_{31}|c_{22}) = \frac{P(c_{12}, c_{22}, c_{31})}{P(c_{22})} = \frac{2/10}{5/10} = \frac{2}{5}$$
$$P(c_{13}, c_{31}|c_{22}) = \frac{P(c_{13}, c_{22}, c_{31})}{P(c_{22})} = \frac{1/20}{5/10} = \frac{1}{10}$$

$$P(c_{11}, c_{32}|c_{22}) = \frac{P(c_{11},c_{22},c_{32})}{P(c_{22})} = \frac{1/10}{5/10} = \frac{1}{5}$$
$$P(c_{12}, c_{32}|c_{22}) = \frac{P(c_{12},c_{22},c_{32})}{P(c_{22})} = \frac{1/20}{5/10} = \frac{1}{10}$$
$$P(c_{13}, c_{32}|c_{22}) = \frac{P(c_{13},c_{22},c_{32})}{P(c_{22})} = \frac{1/20}{5/10} = \frac{1}{10}$$

$$P(c_{11}, c_{21}|c_{31}) = \frac{P(c_{11},c_{21},c_{31})}{P(c_{31})} = \frac{1/10}{21/40} = \frac{4}{21}$$
$$P(c_{12}, c_{21}|c_{31}) = \frac{P(c_{12},c_{21},c_{31})}{P(c_{31})} = \frac{1/10}{21/40} = \frac{4}{21}$$
$$P(c_{13}, c_{21}|c_{31}) = \frac{P(c_{13},c_{21},c_{31})}{P(c_{31})} = \frac{1/40}{21/40} = \frac{1}{21}$$
$$P(c_{11}, c_{22}|c_{31}) = \frac{P(c_{11},c_{22},c_{31})}{P(c_{31})} = \frac{1/20}{21/40} = \frac{2}{21}$$
$$P(c_{12}, c_{22}|c_{31}) = \frac{P(c_{12},c_{22},c_{31})}{P(c_{31})} = \frac{2/10}{21/40} = \frac{8}{21}$$
$$P(c_{13}, c_{22}|c_{31}) = \frac{P(c_{13},c_{22},c_{31})}{P(c_{31})} = \frac{1/20}{21/40} = \frac{2}{21}$$

$$P(c_{11}, c_{21}|c_{32}) = \frac{P(c_{11},c_{21},c_{32})}{P(c_{32})} = \frac{1/20}{19/40} = \frac{2}{19}$$
$$P(c_{12}, c_{21}|c_{32}) = \frac{P(c_{12},c_{21},c_{32})}{P(c_{32})} = \frac{2/10}{19/40} = \frac{8}{19}$$
$$P(c_{13}, c_{21}|c_{32}) = \frac{P(c_{13},c_{21},c_{32})}{P(c_{32})} = \frac{1/40}{19/40} = \frac{1}{19}$$
$$P(c_{11}, c_{22}|c_{32}) = \frac{P(c_{11},c_{22},c_{32})}{P(c_{32})} = \frac{1/10}{19/40} = \frac{4}{19}$$
$$P(c_{12}, c_{22}|c_{32}) = \frac{P(c_{12},c_{22},c_{32})}{P(c_{32})} = \frac{1/20}{19/40} = \frac{2}{19}$$
$$P(c_{13}, c_{22}|c_{32}) = \frac{P(c_{13},c_{22},c_{32})}{P(c_{32})} = \frac{1/20}{19/40} = \frac{2}{19}$$

Считаем, что параметр $d = b$. Имеем матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & -\frac{3/10}{2} & -\frac{3/10}{2} & -\frac{6/21}{2} & -\frac{6/19}{2} \\
0 & 1 & 0 & -\frac{3/5}{2} & -\frac{1/2}{2} & -\frac{12/21}{2} & -\frac{10/19}{2} \\
0 & 0 & 1 & -\frac{1/10}{2} & -\frac{1/5}{2} & -\frac{1/7}{2} & -\frac{3/19}{2} \\
-\frac{1/2}{2} & -\frac{6/11}{2} & -\frac{1/3}{2} & 1 & 0 & -\frac{3/7}{2} & -\frac{11/19}{2} \\
-\frac{1/2}{2} & -\frac{5/11}{2} & -\frac{2/3}{2} & 0 & 1 & -\frac{4/7}{2} & -\frac{8/19}{2} \\
-\frac{1/2}{2} & -\frac{6/11}{2} & -\frac{1/2}{2} & -\frac{9/20}{2} & -\frac{1/2}{2} & 1 & 0 \\
-\frac{1/2}{2} & -\frac{5/11}{2} & -\frac{1/2}{2} & -\frac{11/20}{2} & -\frac{2/5}{2} & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

При существовании A^{-1} такую задачу можно решить с помощью матричного уравнения $Ax = r$, где:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 12.92 & 11.94 & 11.87 & 12.13 & 11.52 & 12 & 12.06 \\ 21.84 & 22.87 & 21.75 & 22.24 & 21.08 & 22 & 22.06 \\ 5.96 & 5.96 & 6.94 & 6.03 & 5.78 & 6 & 6.02 \\ 20.07 & 20.11 & 19.9 & 21.08 & 19.06 & 20 & 20.14 \\ 20.1 & 20 & 20 & 20.2 & 20 & 20 & 20.02 \\ 20.19 & 20.24 & 20.11 & 20.35 & 19.36 & 21 & 20.07 \\ 19.208 & 19.207 & 19.12 & 19.39 & 18.36 & 19 & 20.07 \end{pmatrix}$$

$$r = \begin{pmatrix} 0.4 + \frac{1}{2b} \\ 0.1 + \frac{1}{2b} \\ 0.625 + \frac{1}{2b} \\ 0.375 + \frac{1}{2b} \\ 0.0714 + \frac{1}{2b} \\ 0.2142 + \frac{1}{2b} \end{pmatrix}$$

Тогда получаем равновесные цены в явном виде:

$$x = \begin{pmatrix} 30.02 + \frac{42.23}{b} \\ 54.35 + \frac{76.93}{b} \\ 15.50 + \frac{21.36}{b} \\ 50.04 + \frac{70.19}{b} \\ 49.71 + \frac{69.99}{b} \\ 49.96 + \frac{70.67}{b} \\ 47.65 + \frac{67.18}{b} \end{pmatrix}$$

Видно, что при увеличении параметра b значения цен игроков при низких удельных затратах уменьшаются.

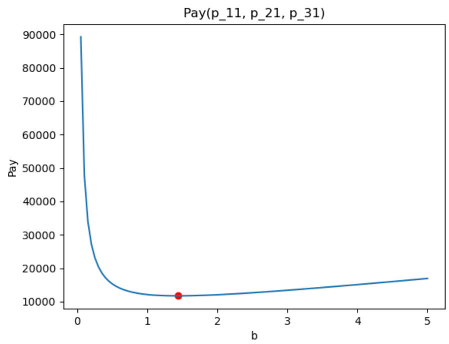
Рассмотрим поведение спроса для первого игрока. Возьмем спрос $q_1(p_{11}, p_{21}, p_{31}) = 69.985b + 99.632$. Видно, что при увеличении параметра b функция спроса растет. Аналогично для остальных функций спроса при различных комбинациях стратегий.

Исследуем на экстремум функцию прибыли, например, $\Pi_1(p_{11}, p_{21}, p_{31}) = $ $= 2045.46b + 42.23 + \frac{4207.82}{b}$:

$$\frac{\partial \Pi_1(p_{11}, p_{21}, p_{31})}{\partial b} = 2045.4621 + \frac{4207.8166}{b^2} = 0$$

$$b_1 = -1.4343,$$
$$b_2 = 1.4343.$$

Было задано, что значения $b > 0$, поэтому интересует точка $b_2 = 1.4343$. Это точка минимума функции $\Pi_1(p_{11}, p_{21}, p_{31})$, т. е. на интервале $(0, 1.4343)$ функция прибыли убывает, а затем, преодолев эту точку, возрастает на интервале $(1.4343, +\infty)$. Аналогичные рассуждения актуальны для остальных функций прибыли при различных параметрах, для каждого набора типов будет свое значение точки минимума b.



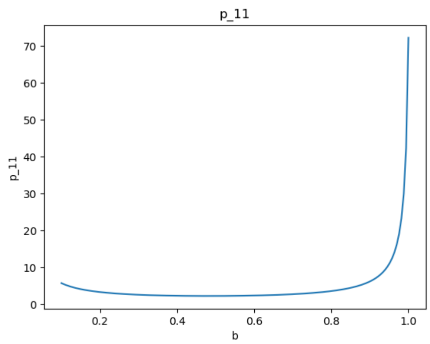
(рис. 4) График $\Pi_1(p_{11}, p_{21}, p_{31})$

Проанализировав результаты, получаем идентичную ситуацию, что и в случае с двумя игроками по два типа издержек: для достижения наибольшей прибыли i-му игроку выгодно, чтобы b было как можно ближе к нулю, а при увеличении этого параметра показатели прибыли значительно ухудшаются.

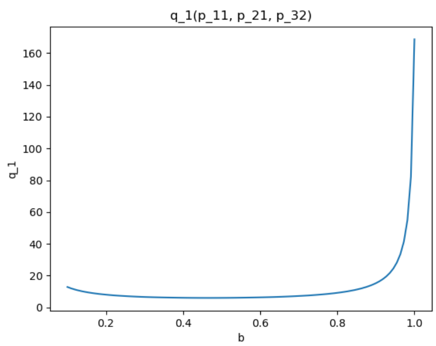
Рассмотрим ту же олигополию, но где параметр $d \neq b$. Пусть $d = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3/10}{2b} & -\frac{3}{20b} & -\frac{1}{7b} & -\frac{3}{19b} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{10b} & -\frac{1}{4b} & -\frac{2}{7b} & -\frac{5}{19b} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{20b} & -\frac{1}{10b} & -\frac{1}{14b} & -\frac{3}{38b} \\ -\frac{1}{4b} & -\frac{3}{11b} & -\frac{1}{6b} & 1 & 0 & -\frac{3}{14b} & -\frac{11}{38b} \\ -\frac{1}{4b} & -\frac{5}{22b} & -\frac{1}{3b} & 0 & 1 & -\frac{2}{7b} & -\frac{4}{19b} \\ -\frac{1}{4b} & -\frac{3}{11b} & -\frac{1}{4b} & -\frac{9}{40b} & -\frac{1}{4b} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4b} & -\frac{5}{22b} & -\frac{1}{4b} & -\frac{11}{40b} & -\frac{1}{5b} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

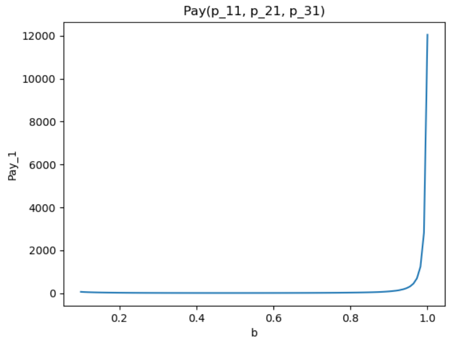
Рассмотрим одну из получившихся функций цен, например, p_{11}, функции спроса и прибыли для комбинации (p_{11}, p_{21}, p_{31}). Поведение этих функций совпадает с поведением функций цен, спроса и прибыли в примере с дуополией при $d \neq b$. После $b = 1$ значения функций спроса и прибыли отрицательны, что не удовлетворяет условию. Получаем, что чем ближе значение параметра b к 1, тем выше значения функций спроса и прибыли первого игрока.



(рис. 5) График p_{11}



(рис. 6) График $q_1(p_{11}; p_{21}, p_{31})$



(рис. 7) График $\Pi_1(p_{11}; p_{21}, p_{31})$

Получается, что в случае, когда $d \neq b$, функции ведут себя одинаково как для дуополии, так и для олигополии. В каждом случае находится точка разрыва при $d = 1$ и затем можно найти эту точку для любого значения d, значение ее будет то же, что и в случае $d = 1$, но помноженное на d.

3.4 Итог

Посмотрев поведение модели на изменение параметров b, d, влияющих на чувствительность рынка, приходим к следующему выводу: во всех рассмотренных случаях данной главы видна закономерность–чем выше параметр b, тем сильнее падает спрос. Это следует из того, что при увеличении b растет и значение цены. Таким образом, чтобы предотвратить уменьшение спроса, необходимо компенсировать это путем установки более низкой стоимости. Кроме того, спрос и прибыль зависят от того, какую цену устанавливают противники: если стоимость конкурента выше, то спрос и прибыль игрока повышаются, и обратное в противном случае. Значения функций цен, спроса и прибыли игроков тем выше, чем ближе значения b к нулю. В таком случае величина спроса не будет зависеть от стратегии фирмы. Если $d \neq b$, тогда чем ближе значение b к точке разрыва, тем выше значения функций спроса, прибыли и цен при допустимости равновесных стратегий.

Глава 4. Индекс Херфиндаля–Хиршмана

4.1 Методика рассчета

Индекс Херфиндаля-Хиршмана (HHI) – это показатель, необходимый для оценивания степени и прогнозирования монополизации рынка, отрасли. Его создателями являются американские экономисты Оррис Херфиндаль и Альберт Хиршман. Данный индекс представляет собой общий показатель рыночной концентрации, позволяет определить рыночную конкурентоспособность.

Рассчитывается индекс как сумма квадратов долей продаж каждой фирмы в отрасли: $HHI = \sum_{i=1}^{n} S_i^2$, где n – количество участников на рынке и S_i-доля каждого из них.

Существует 3 группы (типа) рынков:

- 1 тип: $1800 < HHI < 10000$ – это рынки с высоким уровнем монополизации (монополистические рынки),
- 2 тип: $1000 < HHI < 1800$ – рынки с сильным уровнем монополизации (олигополистические рынки),
- 3 тип: $HHI < 1000$ – рынки с низким уровнем монополизации (конкурентные рынки).

Рассмотрим пример рассчета. Если на рынке 2 продавца, все имеют одинаковую долю, то есть 50%, то HHI:
$HHI = 50^2 \cdot 2 = 2500 \cdot 2 = 5000$.

Если так же 2 продавца, но первый получает, например, 65%, а второй-35%, то
$HHI = 65^2 + 35^2 = 4225 + 1225 = 5450$.

Пусть теперь первый получает 85%, а второй-15%
$HHI = 85^2 + 15^2 = 7225 + 225 = 7450$.

Если 10 продавцов с равными долями (10%), то
$HHI = 10^2 \cdot 10 = 1000$.

Если 50 продавцов с долей 2%, то
$HHI = 2^2 \cdot 50 = 1000$.

Тогда имеем следующие результаты для приведенных выше примеров:

- Во всех трех случаях с двумя продавцами имеем высокий уровень монополизации,
- В случае с десятью фирмами получаем сильный уровень монополизации,
- С пятьюдесятью продавцами имеем низкий уровень монополизации.

С приближением рынка к монополии возрастает рыночная концентрация (меньше конкурентов). Если на рынке присутствует лишь одна фирма, то она имеет 100%-ую долю этого рынка, в этом случае индекс Херфиндаля–Хиршмана был бы равен 10000, что указывает на монополию. Если присутствуют тысячи фирм, доля каждой из которых была бы близка к 0%, то и HHI был бы приближен к нулю, а это бы показало почти идеальную конкуренцию.

Найдем индекс Херфиндаля–Хиршмана для дуополии, учитывая, что $d = b$. Сперва необходимо определить долю продавцов на рынке при тех или иных затратах. Доля рынка компании равна отношению показателей объема продаж к общему объему продажи товаров той же категории на рынке $S_i(p_1(t_1), p_2(t_2)) = \frac{100q_i(p_i(t_i),p_j(t_j))}{q_1(p_1(t_1),p_2(t_2))+q_2(p_2(t_2),p_1(t_1))}$, $i = 1, 2$. Тогда детально рассмотрим случай из пункта 3.1, когда первый и второй производители используют новую технологию, то есть с низкими удельными затратами c_1^L и c_2^L соответственно:

$$S_1(p_1^L, p_2^L) = 100\frac{1-0.0224b}{1-0.0224b+1+0.0224b} = \frac{100-2.24b}{2},$$

$$S_2(p_1^L, p_2^L) = 100 - S1 = 50 + 1.12b.$$

Тогда $HHI = S_1^2 + S_2^2 = 2.5199b^2 + 5000$. Видно, что функция монотонно возрастает и то, что значение индекса приблизительно равно 5000 для небольших b. Это означает, что это рынок с высоким уровнем монополизации – монополистический рынок. Проделав тоже самое с остальными вариациями цен, получаем аналогичную картину: функция имеет схожий вид, монотонно возрастает и значение индекса немного больше 5000, т. е. монополистический рынок.

Рассмотрим дуополию, у которой $d = 1$ из пункта 3.2. Найдем долю продавцов на рынке для той же пары стратегий:

$$S_1(p_1^L, p_2^L) = \frac{100q_1}{q_1+q_2} = \frac{100(1128960b^6-2410800b^5-1372224b^4+127400b^3+26592b^2-1175b-124)}{2892960b^6-4217136b^5-2968224b^4+83048b^3+76842b^2-391b-499},$$

$$S_2(p_1^L, p_2^L) = 100 - S1 =$$

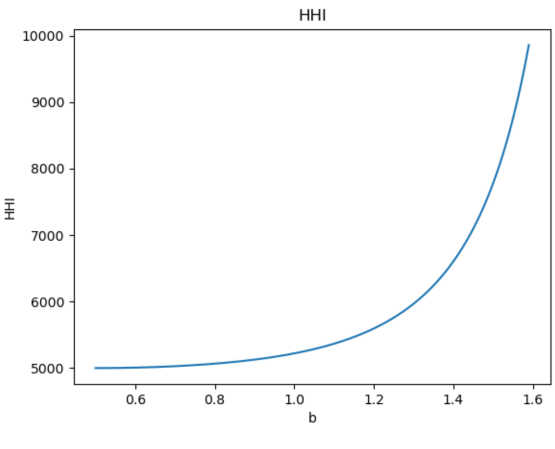
$$= \frac{100(-16336404000b^6+167284776 96b^5+14780556000b^4+410743872b^3-465365250b^2-7260624b+3472875)}{-267917025 60b^6+39054896496b^5+27488722464b^4-769107528b^3-711633762b^2+3621051b+4621239}.$$

Тогда получаем такой индекс Херфиндаля-Хиршмана для такой пары стратегий:

$$HHI = \frac{1834.6(-0.97b^6+x^5+0.88b^4+0.02b^3-0.027b^2-0.0004b+0.00022)^2+}{(-0.68b^6+b^5+0.7b^4-0.019b^3-}$$

$$\frac{+3268.03(-0.46b^6+b^5+0.56b^4-0.052b^3-0.01b^2+0.0004b+5.143)^2}{-0.0182b^2+9.2-5b+0.0001)^2}.$$

График этой функции относительно параметра b выглядит следующим образом:



(рис. 8) График HHI для случая (p_1^L, p_2^L)

В пункте 3.2 установили, что значения цен, прибыли и спроса для рассматриваемой модели имеют показатель $b > 0.5$, поэтому и в данном разделе имеет смысл учитывать это ограничение. Для данной задачи получается, что при $b = 1.593$ значение индекса достигает своего возможного максимума $HHI = 10000$. При наибольшем значении b доли игроков равны $S_1 \approx 99\%$ и $S_2 \approx 1\%$, что, очевидно, маловероятно. Если, например, $b =$

$= 1$, то $S_1 \approx 60\%$ и $S_2 \approx 40\%$, т. е. более реальные значения доли, и уровень монополизации равен 5200, это снова свидетельствует о высоком уровне. В данной модели значения индекса Херфиндаля-Хиршмана варьируются приблизительно от 5000 до 10000, это говорит о том, что данный рынок обладает высоким уровнем монополизации и является монополистическим. Точно такие же выводы получены при остальных парах стратегий.

4.2 Рассчет индекса для олигополии

Для олигополии рассчет доли каждого производителя на рынке вычисляется с помощью $S_i(p_1(t_1), \dots, p_n(t_n)) = \frac{100q_i(p_i(t_i), p_{-i}(t_{-i}))}{\sum_{j=1}^{n} q_j(p_j(t_j), p_{-j}(t_{-j}))}$, где n–количество участников. Сперва рассмотрим случай, когда $d = b$ из пункта 3.3, когда производители имеют цены p_{11}, p_{21}, p_{31}. Получаем долю каждого:

$$q_1(p_{11}, p_{21}, p_{31}) = 69.9856b + 99.6325,$$
$$q_2(p_{21}, p_{11}, p_{31}) = 29.951b + 43.714,$$
$$q_3(p_{31}, p_{11}, p_{21}) = 30.1027b + 42.7527,$$

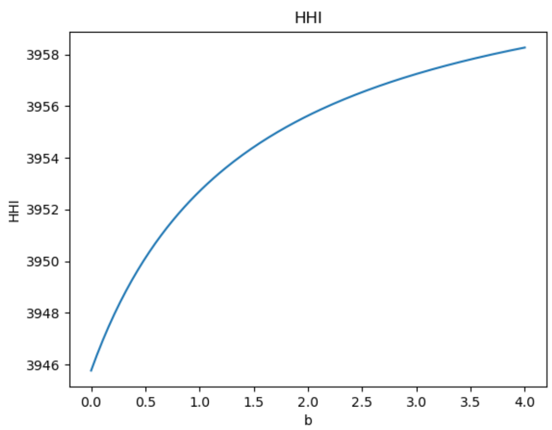
$$S_1(p_{11}, p_{21}, p_{31}) = \frac{100q_1}{q_1+q_2+q_3} = \frac{6998.5679b+9963.2463}{130.03941b+186.099},$$

$$S_2(p_{11}, p_{21}, p_{31}) = \frac{100q_2}{q_1+q_2+q_3} = \frac{2995.1016b+4371.4028}{130.0394b+186.099},$$

$$S_3(p_{11}, p_{21}, p_{31}) = \frac{100q_3}{q_1+q_2+q_3} = \frac{3010.2716b+4275.2749}{130.0394b+186.0992}.$$

Найдем индекс Херфиндаля-Хиршмана:

$$HHI = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = \frac{1934.9309b^2+5526.0122b+3945.7656}{0.48827b^2+1.39752b+1}.$$



(рис. 9) График HHI для случая (p_{11}, p_{21}, p_{31})

Функция HHI монотонно возрастающая при росте b, значения долей производителей и индекс приблизительно равны $S_1 \approx 54\%, S_2 \approx 23\%, S_3 \approx 23\%$ и $HHI \approx 3955$. Снова получили рынок с высоким уровнем монополизации. Все рассуждения схожи для остальных комбинаций цен.

В случае той же олигополии из пункта 3.3, но с $d = 1$, имеем $S_1 \approx 32, S_2 \approx 34, S_3 \approx 34$ и $HHI \approx 3340$. Таким образом, снова получили рынок с достаточно высоким уровнем монополизации.

4.3 Итог

Подводя итог, можно сказать, что во всех разобранных случаях с дуополией и олигополией при разных значениях d получили одну и ту же картину – все рынки являются монополистическими, так как индекс Херфиндаля-Хиршмана принадлежит диапазону, указывающему на высокий уровень концентрации рынка. Таким образом, воспользовавшись данным показателем, можно определить, какую долю на конкретном рынке имеет каждый из производителей, можно оценить также, как меняется уровень концентрации при увеличении или уменьшении параметра b. В рассматриваемой линейной модели Бертрана во всех случаях получается рынок с высоким уровнем монополизации.

Выводы

Таким образом, в начале игры каждый из текущих участников обладает информацией о своем типе удельных затрат. Эта информация недоступна для конкурирующих фирм. Игроки производят ходы одновременно и получают равновесные цены, которые они смогут установить на свою продукцию, обладая данным набором издержек. Для получения таких цен используется байесовское равновесие, позволяющее учесть поведение противников.

Кроме этого был проведен анализ на чувствительность модели – изменение основных ее показателей при изменении параметров; выявили закономерности и схожесть в моделях дуополии и олигополии при тех или иных значениях компонент.

Индекс Херфиндаля-Хиршмана позволил узнать уровень концентрации рынка, для рассматриваемой задачи получили высокий уровень монополизации, что свидетельствует о том, что рынок является монополистическим.

Заключение

В данной работе был рассмотрен класс игр с неполной информацией, которые также носят название байесовские игры. Изучались модели дуополии и олигополии Бертрана. Были выведены наборы цен, которые образуют байесовское равновесие. Именно эти цены смогут задать производители, обладая теми или иными наборами удельных затрат.

Было рассмотрено то, как изменяется поведение функций цен, спроса и прибыли при изменении параметров рыночного спроса, а также была выявлена закономерность выводов и схожесть результатов в каждой из представленных в работе моделей.

Также был рассмотрен индекс Херфиндаля–Хиршмана, который показывает степень монополизации, концентрации рынка. Рассмотрены различные варианты модели Бертрана при тех или иных начальных данных и было показано влияние параметров, влияющих на чувствительность и поведение рынка, на то, какой уровень концентрации будет у рынка.

Список литературы

1. Коцофана, Т. В., П. С. Стажкова Сравнительный анализ применения показателей концентрации на примеребанковского сектора РФ // Вестник СПбГУ. 2011. № 4. С. 30-40.

2. Матюнин Е.В. Исследование модели контроля с неполной информацией при наличии дискретных статически независимых информационных параметров // Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. №18. С. 114-118.

3. Харшаньи Дж., Зельтен Р. Общая теория выбора равновесия в играх. СПб. : Экономическая школа, 2001. — 424 с.

4. Хэл Р. Вэриан Микроэкономика. Промежуточный уровень. Современный подход. Москва: Юнити, 1997, 607 р.

5. Шульц Д.Н., Кысыков А.Б. Оценивание параметров динамической стохастической модели общего равновесия экономики Казахстана на основе байесовского подхода // Вестник Пермского Университета Экономики. 2019. №14. С. 232-245.

6. Bertrand, J. Book review of theorie mathematique de la richesse sociale and of recherches sur les principles mathematiques de la theorie des richesses // Journal de Savants. - 1883. - v.67. - P. 499–508.

7. Gibbons R. Game Theory for Applied Economists. New Jersey: Princeton University Press, 1992. 267 p.

8. Maschler M., Solan E., Zamir S. Game Theory. New York: Cambridge University Press, 2013. 979 p.

9. Tirole J. The theory of Industrial Organization. London: The Mit Press, 2000. 450 p.