

Санкт-Петербургский государственный университет

*ПОЛИНА Софья Геннадьевна*

**Выпускная квалификационная работа**

*Математическое моделирование экономических процессов*

Уровень образования: бакалавриат

Направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Основная образовательная программа СВ.5005.2017 «Прикладная математика, фундаментальная информатика и программирование»

Научный руководитель:

профессор, д.ф. - м.н.

Колпак Евгений Петрович

Рецензент:

доцент, к.ф. - м.н.

Сwirкин Михаил Владимирович

Санкт-Петербург

2021 г.

## Содержание

Введение .....	3
Цели задачи .....	6
Обзор литературы .....	6
1. Статистический анализ данных .....	8
2. Экспорт .....	9
3. Индекс концентрации и индекс Херфиндаля-Хиршмана .....	12
4. Темпы роста .....	17
5. Математическая модель .....	19
6. Обработка статистических данных. Метод наименьших квадратов .....	20
7. Аппроксимация статистических данных .....	22
8. Математическая модель конкуренции .....	29
9. Модифицированная модель .....	30
10. Модель взаимодействия трех субъектов .....	30
11. Имитационная модель конкуренции .....	32
Заключение .....	34
Список использованной литературы .....	35

## **Введение**

Для ВКР мной была выбрана тема «Математическое моделирование экономических процессов». Но первым делом нужно определить, что же такое математическое моделирование? Математическое моделирование является общенаучным методом, который используется как на эмпирическом, так и на теоретическом уровне познания. При построении и исследовании модели могут применяться практически все методы познания, такие как наблюдение, эксперимент, измерение, формализация. Натуральный эксперимент не всегда возможен по ряду причин. Построение модели помогает в процессе изучения заменить некоторый объект-оригинал, сохраняя при этом важные черты этого объекта. Процесс построения и использования модели называется моделированием.

Идея создания математических моделей для изучения разного рода явлений известна давно. Математические модели являются одним из основных инструментов познания человеком явлений окружающего мира. С далеких времен человек стремился найти и описать закономерности, на основе которых устроен мир вокруг. Это могут быть формулы или уравнения, набор правил или соглашений, выраженных в математической форме. С незапамятных времен в математике, механике, физике и других точных науках естествознания для описания изучаемых ими явлений использовались математические модели. Сейчас, как и раньше люди продолжают строить математические модели для описания всевозможных процессов.

Вычислительный эксперимент, в отличие от натуральных экспериментальных установок, позволяет накапливать результаты, полученные при исследовании какого-либо круга задач, а затем быстро и гибко применять их к решению задач в совершенно других областях. Этим свойством обладают используемые универсальные математические модели. Например, уравнение нелинейной теплопроводности оказывается пригодным

для описания не только тепловых процессов, но и диффузии вещества, движения грунтовых вод, фильтрации газа в пористых средах. Изменяется только физический смысл величин, входящих в это уравнение.

Проведение вычислительного эксперимента можно условно разделить на два этапа. После первого этапа вычислительного эксперимента, если надо, модель уточняется. Причём уточнение модели производится как в направлении её усложнения (учёт дополнительных эффектов и связей в изучаемом явлении), так и упрощения (выяснение, какими закономерностями и связями в изучаемом явлении можно пренебречь). На последующих этапах цикл вычислительного эксперимента повторяется до тех пор, пока у исследователя не возникает убеждение в том, что модель полностью соответствует тому объекту, для которого она составлена.

Как и множество вещей в нашем мире, экономика имеет свои закономерности. Используя математический аппарат, можно формализовать данные закономерности. Однако не всегда получается построить хорошую математическую модель. Э. Гидденс писал: «Теоретические подходы обоснованы в том случае, когда мы способны проверить их средствами эмпирического исследования». В тех случаях, когда это все-таки удастся сделать, мы получаем невероятную возможность прогнозировать будущее.

На мой взгляд тема моей ВКР является как никогда актуальной. Большая часть бюджета РФ формируется из доходов, связанных с экспортом и импортом товаров, ресурсов. Экономические системы всегда считались очень сложными, динамика рынка – хаотической, поэтому исследования в данной области проводились в большинстве случаев на основе статистических данных прошедших лет. В работе рассматривается экспорт и импорт Российской Федерации с 1995 по 2018 г. По этим данным проводится проверка внешнего рынка России на конкурентность, т.е. на эффективность.

Конкурентные процессы - одна из наиболее значимых областей в экономике. От развития конкуренции и конкурентоспособности иногда зависит благополучие страны в целом. Применение математического

моделирования для описания конкурентных процессов является наиболее рациональным из всех возможных методов исследований. Модель конкуренции, которая используется в работе, также применима при рассмотрении конкуренции в экосистемах.

Построение данной модели конкуренции на рынке импорта и экспорта РФ дает возможность спрогнозировать возможные дальнейшие развития. Это в свою очередь может быть очень полезно при планировании экономического развития страны. Грамотный прогноз на несколько лет вперед может помочь государству избежать сильных спадов, поддерживая общее благосостояние граждан.

Основные результаты ВКР изложены в публикациях [1, 2].

## **Цели задачи**

Провести статистический анализ российского импорта и экспорта.

Дать оценку уровню конкуренции на международном рынке.

С применением математических методов выявить закономерности динамики импорта и экспорта Российской Федерации.

Разработать математическую модель конкуренции для произвольного количества участников.

Найти наиболее вероятное распределение долей участников международного рынка.

## **Обзор литературы**

Модель Лотки-Вольтерры чаще всего используют для описания процессов в биологии, медицине и экологии [4].

В существующей литературе можно найти примеры применения моделей конкуренций в различных областях. Так А.Д. Базыкин в книге «Нелинейная динамика взаимодействующих популяций» исследовал применение математических методов в биологии. А.Д. Базыкин наряду с рассмотрением симбиоза и отношений типа хищник-жертва, также исследует конкуренцию между двумя популяциями. Для исследования динамических изменений численности двух конкурирующих популяций он использует систему уравнений, которая была предложена Вольтерра, Лотке [3].

Тему развития и совершенствования методов анализа и математического моделирования различных в книге «Моделирование и прогнозирование мировой динамики» поднимают В.А. Садовничий, А.А. Акаев, А.В. Коротаев и С.Ю. Малков. Авторы предлагают новую методологию долгосрочного социально-экономического моделирования, которая основана на больших циклах Кондратьева.

А.В. Праслов в книге «математические методы экономической динамики» приводит анализ и экономическую интерпретацию моделей типа Лотки–Вольтерры. Исследованию подвергаются как простейшие

(двумерные) системы, так и многомерные. Приведена зависимость модели от временной задержки в коэффициенте воспроизводства. Исследованы качественные свойства решений. В частности, доказано существование предельных циклов, определены условия асимптотической устойчивости всех положений равновесия. Предложены новые алгоритмы идентификации моделей Лотки–Вольтерры, как без запаздывания, так и с запаздыванием [13].

## 1. Статистический анализ данных

Для проведения статистического анализа были собраны данные РФ на рынке экспорта и импорта РФ с 53 странами за 24 года, начиная с 1995 года по 2018 год. То есть за начало отсчета был принят 1995 год и все показатели за 1995 год приняты равными 1. Все данные на рис. 1 - рис. 3 приведены в безразмерном виде (относительно 1995 года) [14].

На основе собранной информации был проведен анализ данных по импорту и экспорту. Динамика относительного изменения импорта и экспорта приведена на рис. 1. Объем торговли за 1995 год принят за 1, как по экспорту, так и по импорту. Как следует анализа статистических данных (рис. 1), резкое снижение объёмов экспорта и импорта после мирового кризиса 2008 года, а также после введения санкций против России в 2014 году [11, 12].

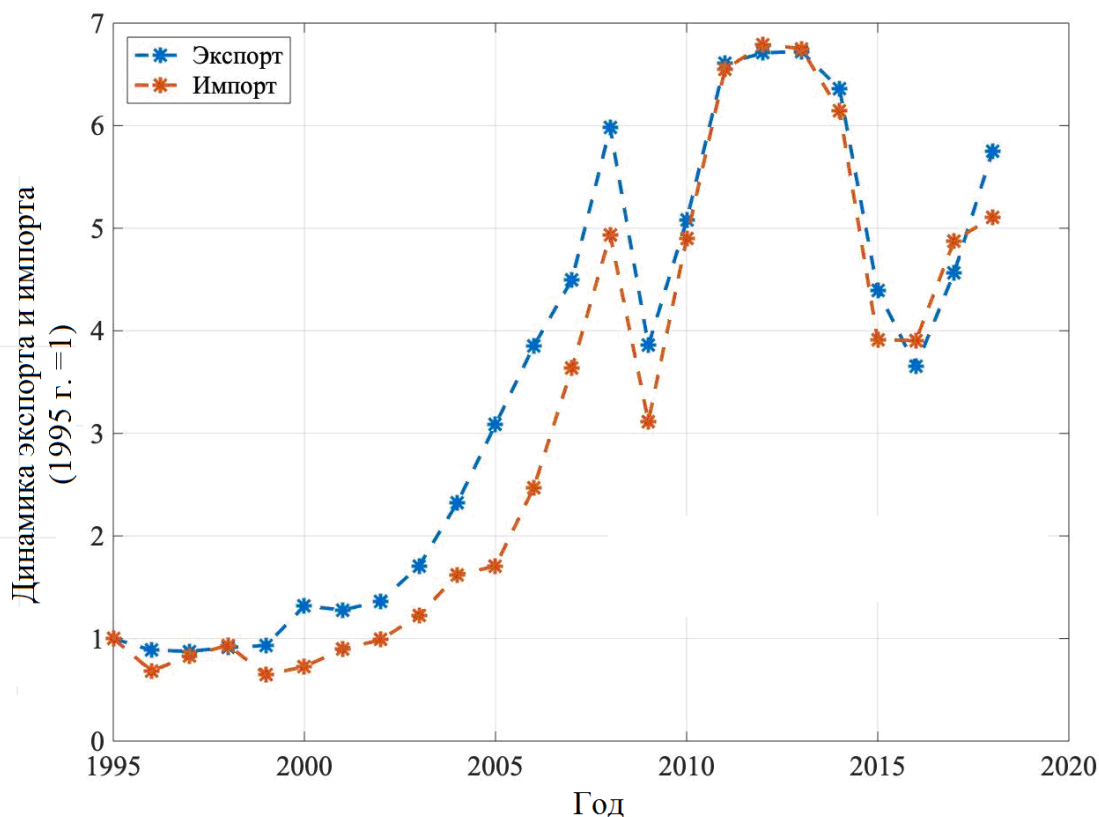


Рис. 1. Динамика экспорта и импорта РФ



При проверке нулевой гипотезы о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции с уровнем значимости равным 5%, был получен следующий результат: коэффициент корреляции  $r = 0,53$ , объем выборки  $n = 24$ ,  $T_{\text{набл}} = 2,8$ , уровень значимости  $t_{\text{кр}} = 0,02$  при котором эта гипотеза отвергается. Из чего можно сделать вывод, что имеющиеся данные по экспорту и импорту имеют связь между собой [6].

## 2. Экспорт

В таблице 1 приведены данные по экспорту с 1995г. по 2018г. 10 стран с наибольшими показателями (млн. долларов США). Как следует из этих данных из 10 стран 7 относятся к странам западного мира, а три - восточного.

Таблица 1. Общая сумма экспорта России с 1995 по 2018г.

№	Страна	Общая сумма (млн. долларов США)
1	Нидерланды	736668
2	Германия	479571
3	Китай	453092
4	Италия	429733
5	Турция	314664
6	Польша	238650
7	США	197004
8	Великобритания	192930
9	Япония	188819
10	Финляндия	179809

В дальнейшем будут рассматриваться 3 страны с самыми большими объемами экспорта из России: Нидерланды, Германия и Китай.

На рис. 2 представлены графики, отображающие рост экспорта в эти три страны (данные за 1995 год приняты равными 1). Как следует из этих

данных, торговля имела заметные спады, пики которых приходятся на одинаковые годы (в промежутке между 2008 - 2018 годами), связанные с различными социально-политическими событиями в мире.

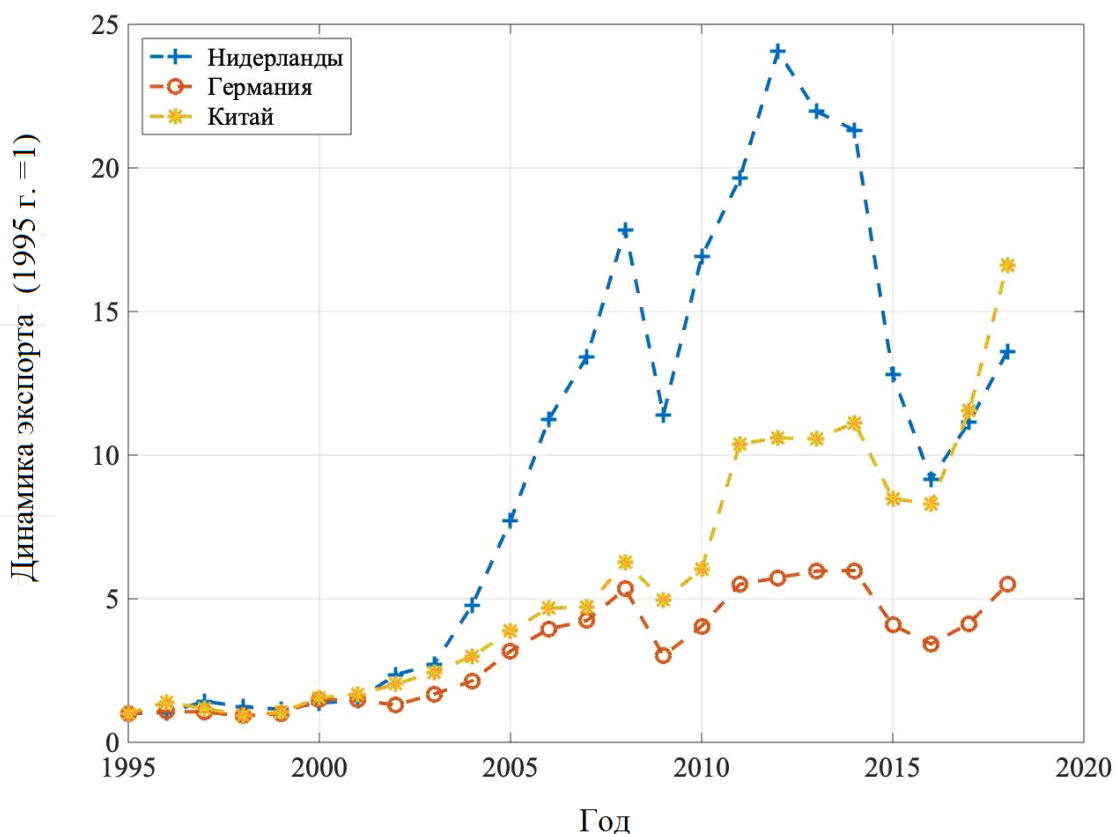


Рис. 2. Динамика экспорта (годовая) РФ в Нидерланды, Германию и Китай

Суммарный объем экспорта Нидерландов, Германии, Китая приведен на рис. 3. Объем торговли за 1995 год принят за 1. Начиная с 1995 года общее количество продукции, реализованной в Нидерландах значительно больше, чем в Китае и Германии. Это связано с тем, что значительная часть товаров идущих на экспорт из России представляет собой минеральное сырье (около 65%), а в Нидерландах наиболее мощная база по его переработке. Начиная с 2008 года резко стал увеличиваться экспорт в Китай. Он перешел на второе место, опережая Германию.

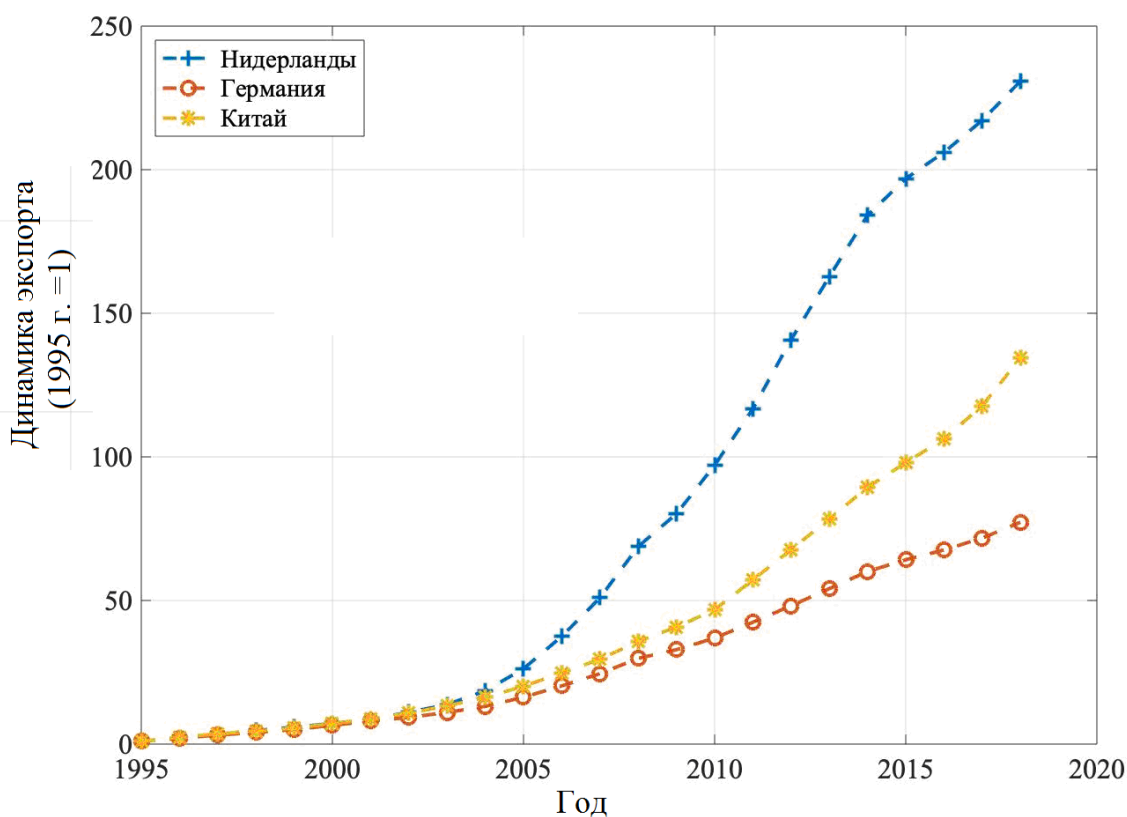


Рис. 3. Динамика экспорта (за все годы) РФ  
в Нидерланды, Германию и Китай

На рис. 4 показаны данные о доле, занимаемой страной в экспорте РФ за 2018 год (страны расположены в том же порядке, что и в таблице 1). Видно, что почти 25% товаров и услуг были экспортированы в Китай (столбец 3 на диаграмме). Около 20% занимают Нидерланды (столбец 1 на диаграмме) и приблизительно 15% отведено Германии (столбец 2 на рис. 4).

Как следует из анализа этих данных, можно сделать вывод, что основная масса экспорта приходит на три страны. Доля других стран в экспорте РФ значительно уступает этим трем странам.

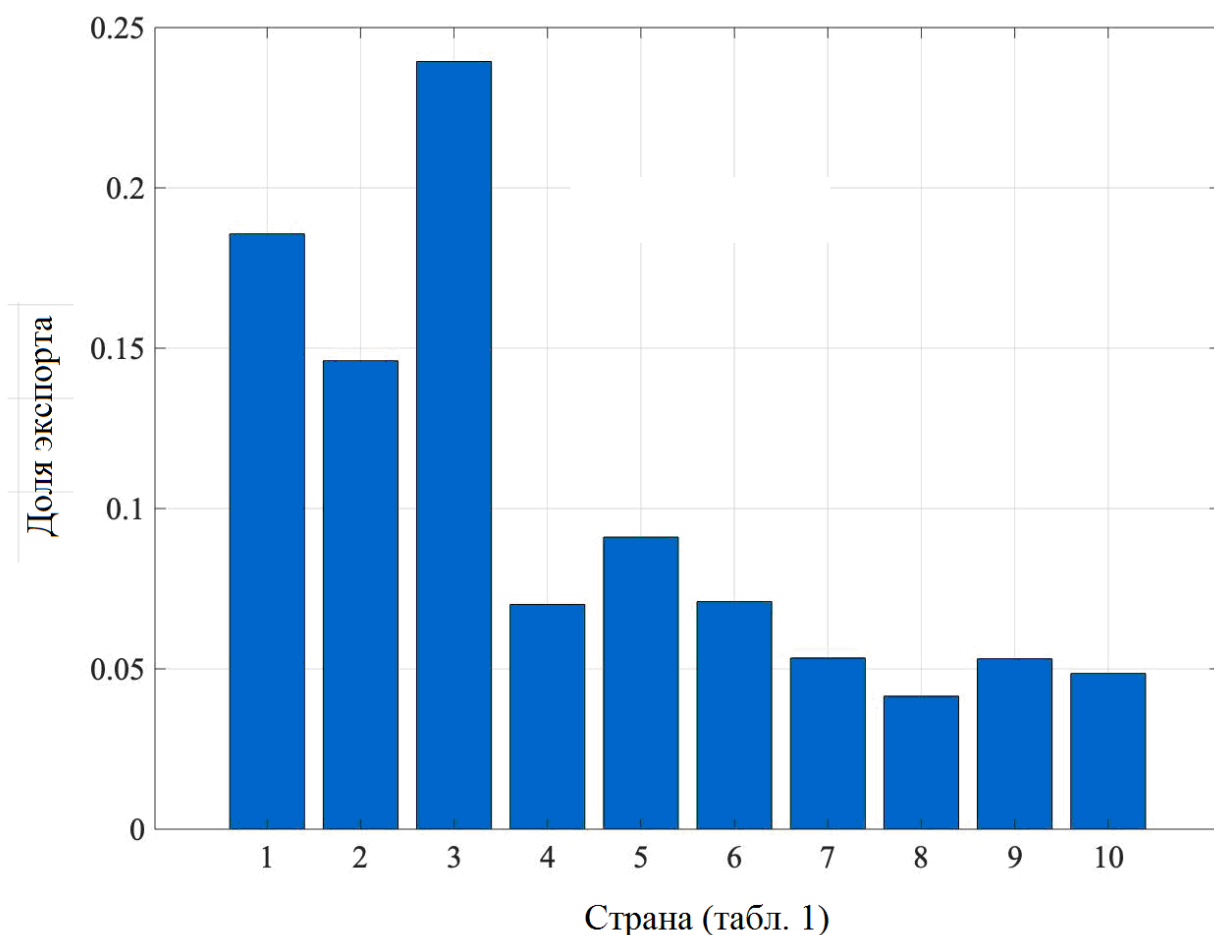


Рис. 4. Доля экспорта 10 стран (табл. 1)

Как следует из анализа статистических данных ведущими странами на рынке экспорта РФ являются 70% стран запада и 30% стран востока. На рынок оказывается существенное влияние социально-политических событий (финансовый кризис в 2008 г., интенсивная санкционная политика западных стран в 2014 г.). Рынки экспорта и импорта РФ связаны между собой. В тройке ведущих стран экспорт РФ постоянно растет [9].

### 3. Индекс концентрации и индекс Херфиндаля-Хиршмана

Для измерения конкуренции на рынке экспорта и импорта используются индекс концентрации  $CR_3$  и индекс Херфиндаля-Хиршмана ННІ. Выбор именно этих индексов для дальнейшего анализа был

мотивирован тем фактом, что в российской антимонопольной практике используются именно эти индексы [5].

Индекс концентрации CR определяет степень охвата рынка крупными предприятиями, осуществляющими свою деятельность в анализируемой отрасли. В нашем случае он показывает степень охвата российского рынка импорта странами, взаимодействующими с Россией. Чтобы найти индекс концентрации, необходимо сложить максимальные относительные рыночные доли субъектов, осуществляющих свою деятельность на рынке:

$$CR_k = \sum_{i=1}^k Y_i$$

где  $CR_k$  - индекс концентрации;  $k$  – количество учитываемых стран с максимальными долями на рынке,  $Y_i$  - рыночная доля стран, В РФ принято рассчитывать индекс по трем странам.

Выделяют следующие критерии сопоставления рыночных структур:

- рынок считается не концентрированным при значениях индекса для трех субъектов ниже 45 %:  $CR_3 < 0,45$ ;
- рынок считается умеренно концентрированным при значениях  $CR_3$  0,45–0,7;
- рынок считается высококонцентрированным при  $CR_3 > 0,7$ .

На рис. 5 изображен график индексов концентрации на рынке импорта России. Заметно постепенное увеличение значения индекса. На рынке стран, ввозящих товары в Россию, видно, что индекс превысит значение 0,5 в 2023 году. Из этого следует, что рынок становится более концентрированным. Это может быть следствием уменьшения объемов импорта товаров и сырья (например, из-за санкций).

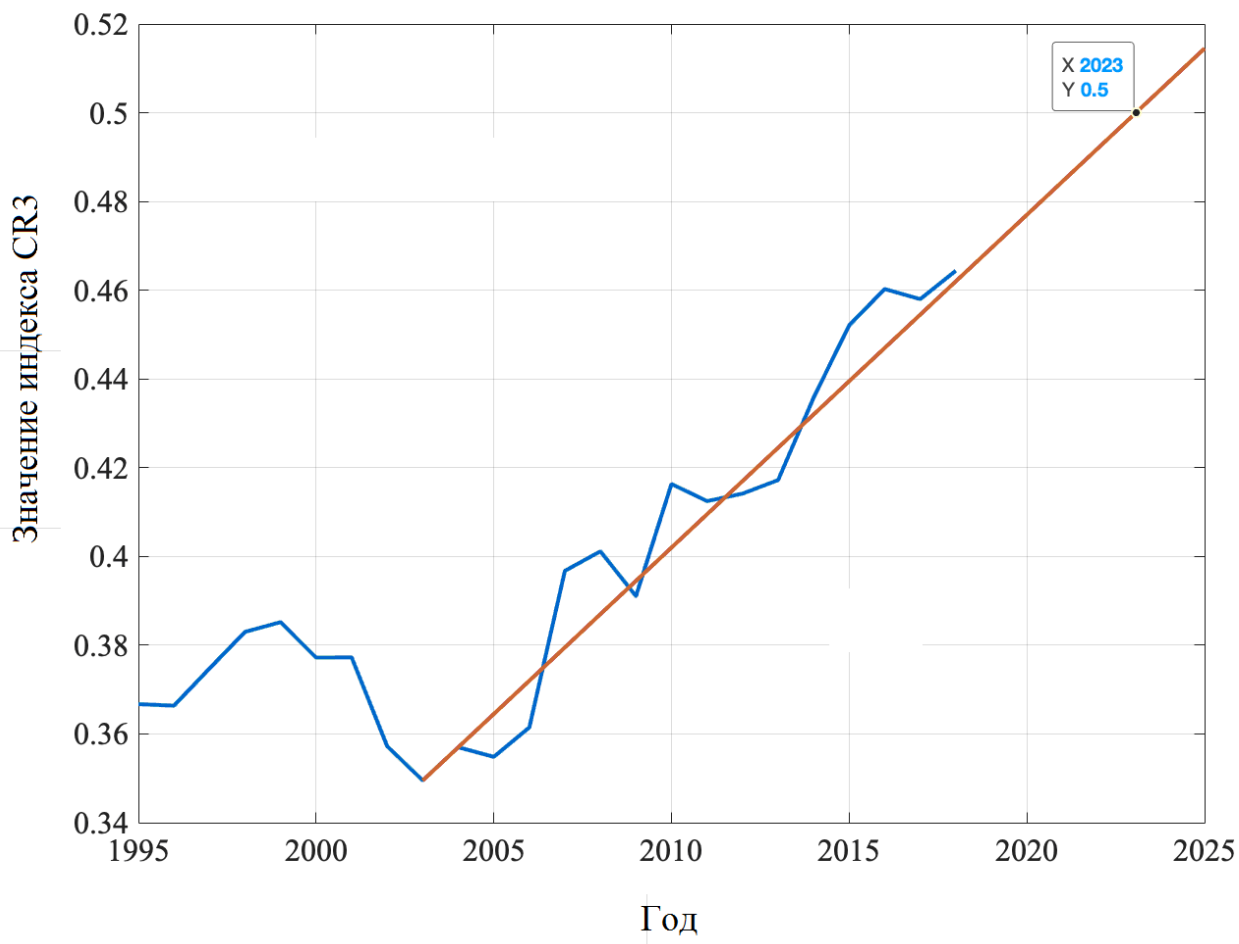


Рис. 5. Динамика индекса концентрации CR<sub>3</sub> для рынка импорта РФ

Теперь рассмотрим изменение индекса Херфиндаля-Хиршмана ННІ для анализируемых показателей. Данный индекс характеризует распределение рыночной власти между фирмами в отрасли. Его также называют показателем уровня монополизации рынка. Используется в США с 1982 года. Индекс ННІ рассчитывается по формуле:

$$ННІ = \sum_{i=1}^n k_i^2,$$

где  $k_i$  – относительная доля  $i$ -й субъекта на рынке;  $n$  – количество субъектов на рассматриваемом рынке. Значения индекса ННІ –изменяются от 0 до 1.

В обоих введённых в исследование индексах равенство нулю соответствует случай чистой конкуренции, максимуму – чистая монополия. При этом, если  $CR_3 < 0,45$  или  $ННІ < 0,1$ , то рынок считается низко

концентрированной, если  $0,45 < CR_3 < 0,7$  и  $0,1 < HHI < 0,2$  – умеренно концентрированным, и, если  $CR_3 > 0,7$  и  $HHI > 0,2$  – высоко концентрированной.

На рис. 6 приведены значения индекса Херфиндаля-Хиршмана с 1995 по 2018 гг. Видно, что в 2016 году он превысил значение 0,1. С этого периода считается, что существует средняя концентрация стран на рынке импорта РФ.

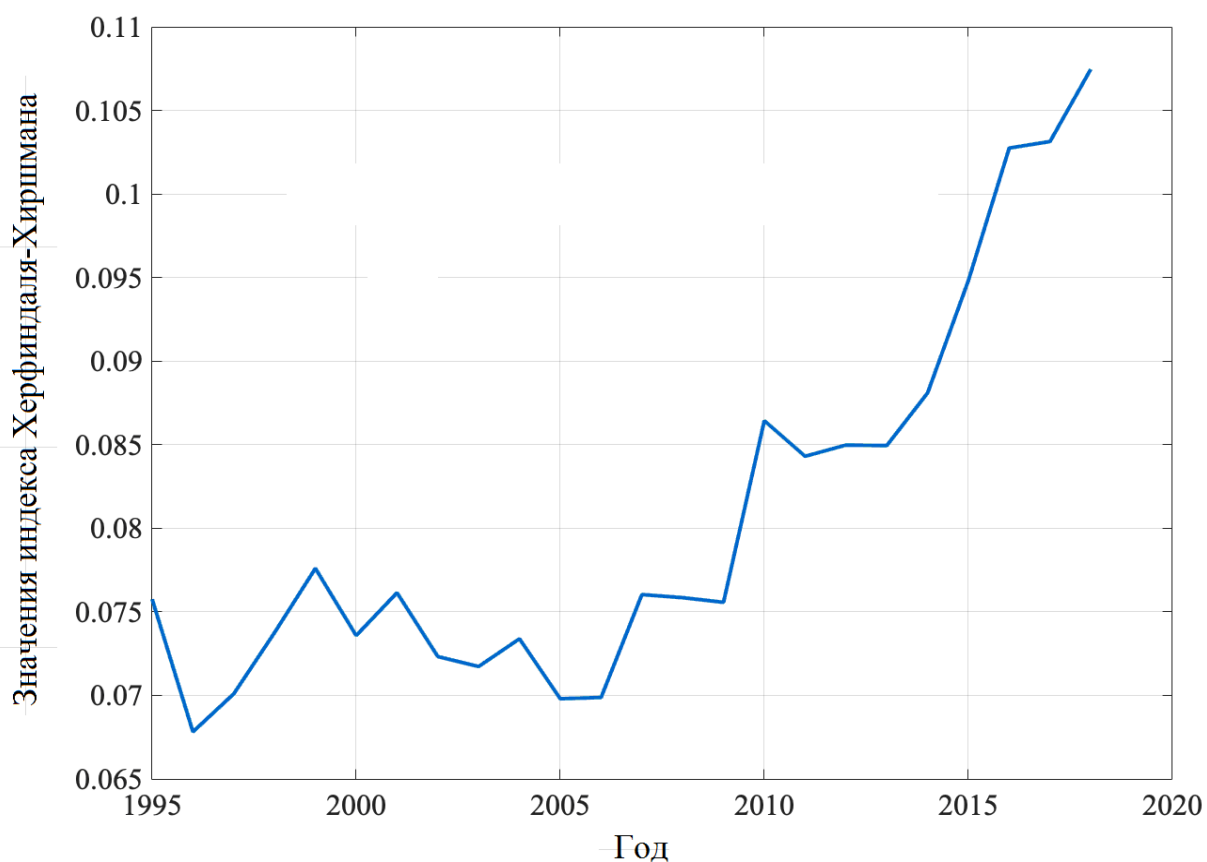


Рис. 6. HHI для рынка импорта РФ

Как показывает анализ индексов HHI и  $CR_3$ , их значения возрастает для рассматриваемых данных рынка импорта. Это может быть связано с уходом части стран с нашего рынка, после введения Россией ответных мер на санкции 2014 года.

На приведенном ниже графике (рис. 7) представлены индексы концентрации  $CR_3$  для российского экспорта. На 2018 год они не превышают

значения равного 0,38, из чего можно сделать вывод, что рынок экспорта российских товаров является низко концентрированным.

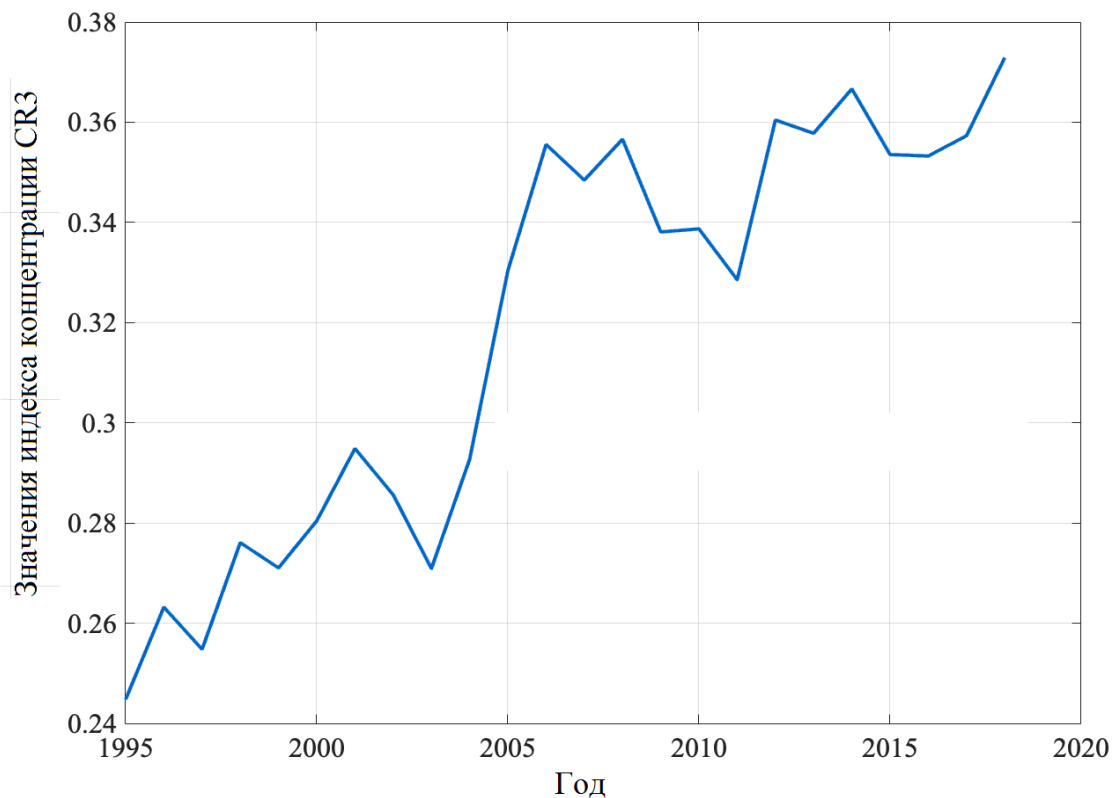


Рис. 7. Динамика индекса CR<sub>3</sub> для рынка экспорта РФ

На рис. 8 представлены индексы Херфиндаля-Хиршмана для российского экспорта. На 2018 год они не превышают  $0,075 < 0,1$ , следовательно, по значениям индекса НИИ мы получаем результат - рынок экспорта российских товаров является низко концентрированным.



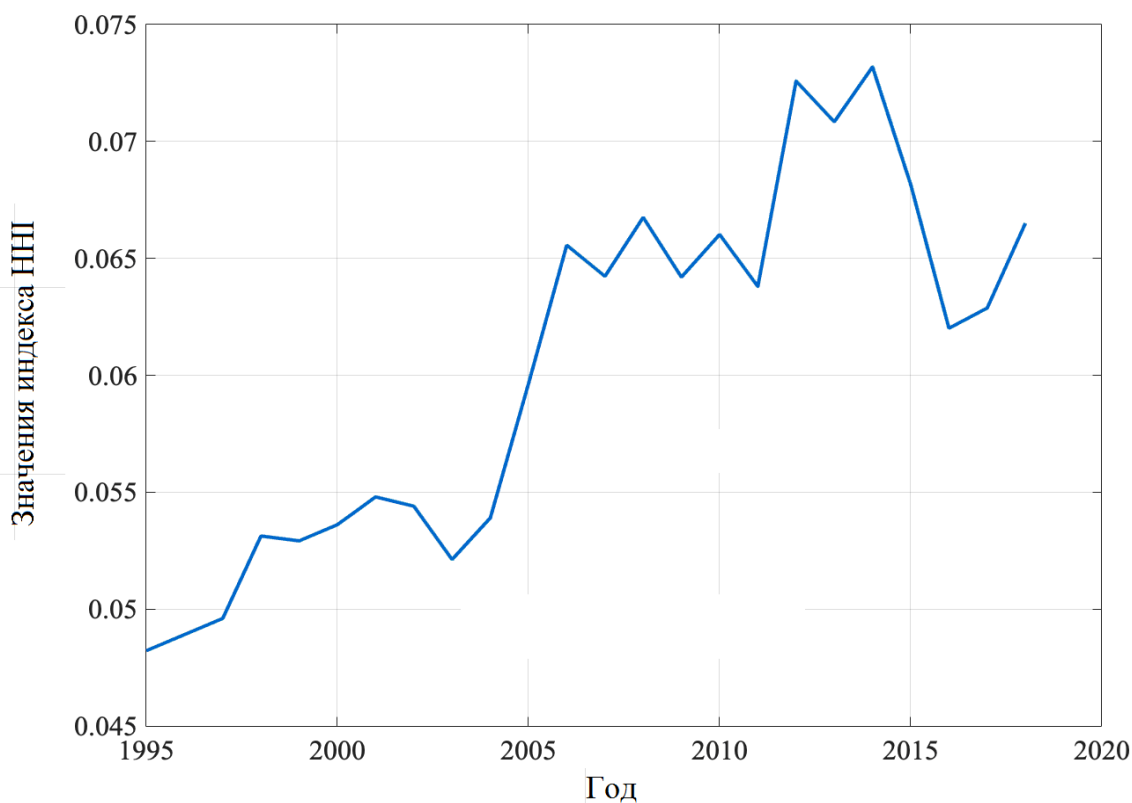


Рис. 8. Динамика индекса ННІ для рынка экспорта РФ

Как следует из данных приведенных на рис. 5 - 8 значения индексов концентрации и Херфиндаля-Хиршмана увеличиваются, то есть конкурентная среда ухудшается. Однако на отдельных ветвях внешней торговли, как показано в работе [12], могут и уменьшаться.

#### 4. Темпы роста

Анализ импорта и экспорта осуществлялся следующим образом: за основу брались не годовые показатели, а тот вклад различных стран (53-х) который накапливался с 1995 по 2018 год. То есть исследуется интегральная зависимость экспорта и импорта, а не годовая («дифференциальная»). По интегральной зависимости можно оценить «усредненные» темпы роста оборотов торговли.

На рис. 9 представлены данные по суммарному объему импорта РФ из 53 стран. Используя данные за 2017 и 2018 года можно посчитать темп роста товарного импорта оборота России. С отдельными странами он изменяется от 0,002 до 0,2 при среднем значении 0,06 (подробные данные приводятся ниже).

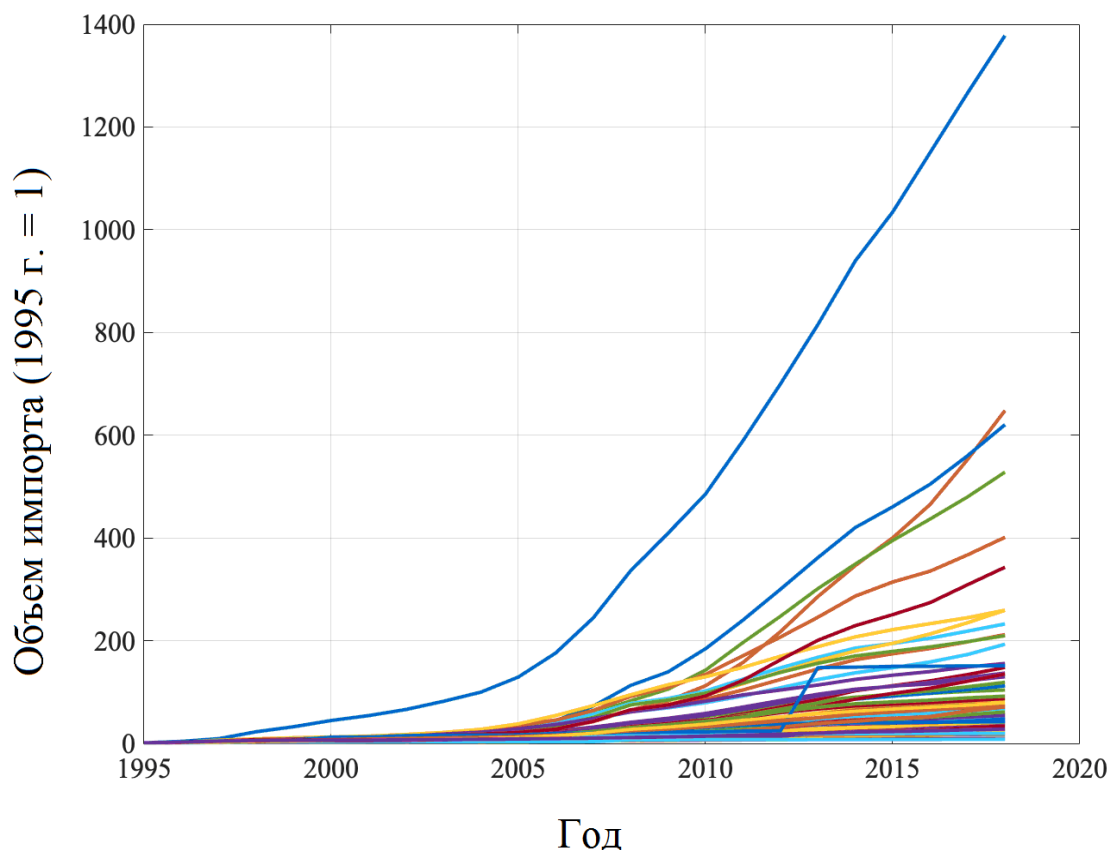


Рис. 9. Динамика суммарного объема импорта

На рис. 10 демонстрируются данные по суммарному объему экспорта РФ в 53 страны. Используя данные за 2017 и 2018 годы были подсчитаны темпы роста экспорта оборота России с отдельными странами. Темпы роста экспорта оборота изменяются от 0,008 до 0,2 при среднем значении 0,007.

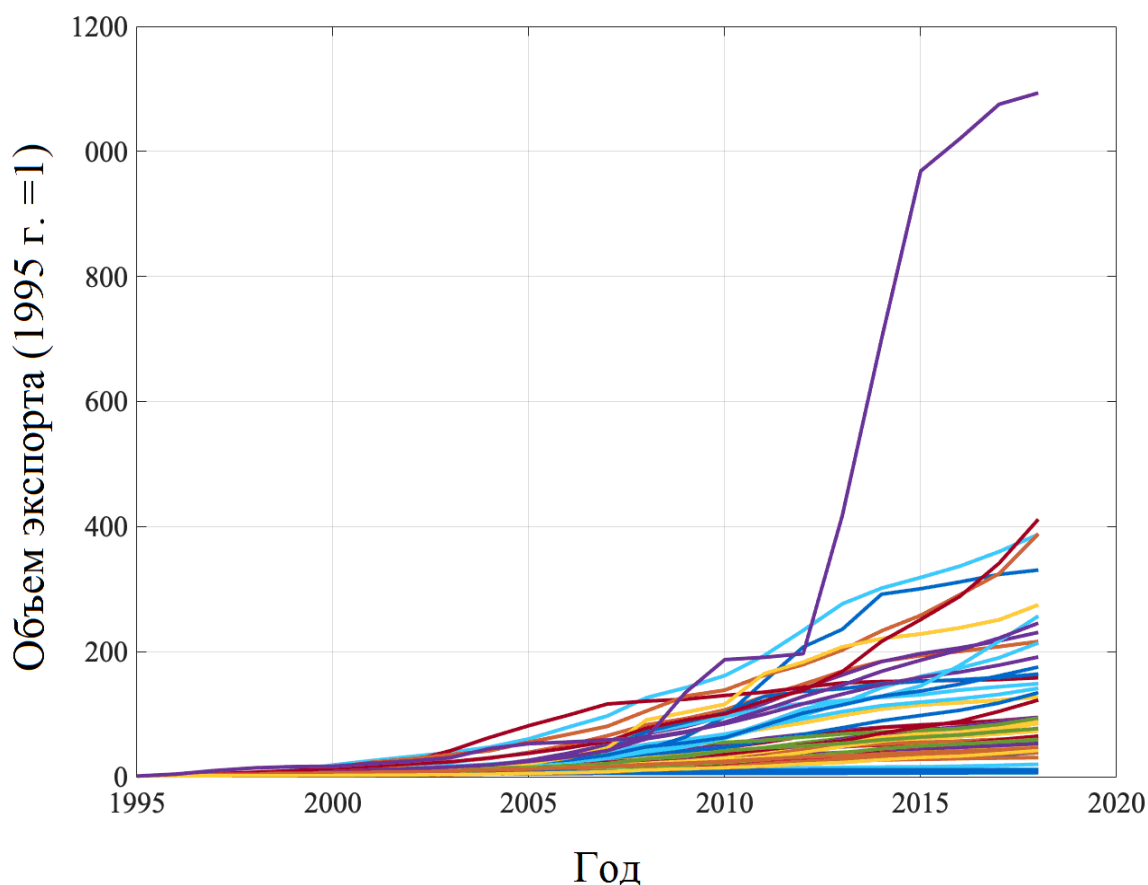


Рис. 10. Динамика суммарного объема экспорта

Не смотря на перепады оборотов внешней торговли (рис. 1) темпы роста экспорта и импорта с основной группой стран не изменяются и составляют приблизительно 6-7% в год.

## 5. Математическая модель

Как следует из анализа статистических данных (рис. 3, рис. 9 - 10) рост суммарного импорта и экспорта растет, но как показал анализ не по экспоненциальной зависимости. Наилучшей аппроксимацией оказалась логистическая зависимость. Логистическая модель применительно к торговле основывается на следующих предположениях.

Если в момент времени  $t$  реализовано  $N(t)$  единиц продукции, то за промежуток времени  $\Delta t$  может быть реализовано количество продукции пропорциональное текущему значению  $N$ :  $\Delta N \sim \mu N \Delta t$ .

Рынок конкретным видом продукции постепенно насыщается, и потребность в продукции со временем исчезает. То есть количество продукции, которую можно реализовать, ограничено некоторым максимальным значением  $N^{\max}$ .

Тогда скорость роста реализованной (или приобретаемой) продукции пропорциональна произведению текущей скорости реализации и доле  $1 - N/N^{\max}$  нереализованной. С учетом этих предположений логистическое уравнение принимает вид [3, 8]

$$\frac{dN}{dt} = \mu N \left( 1 - \frac{N}{N^{\max}} \right), \quad (1)$$

Заменой

$$u = \frac{N}{N^{\max}}$$

уравнение (1) приводится к виду

$$\frac{du}{dt} = \mu u (1 - u).$$

Здесь стационарные точки

$$u = 0 \text{ и } u = 1.$$

Стационарная точка  $u = 0$  - неустойчивая, а стационарная точка  $u = 1$  устойчивая по Ляпунову [7].

## **6. Обработка статистических данных. Метод наименьших квадратов**

Метод наименьших квадратов (МНК) – один из наиболее часто используемых методов при обработке эмпирических данных, построении и анализе физических, биологических, технических, экономических и социальных моделей. С помощью МНК решают задачу выбора параметров

функции (заранее заданного вида) для приближённого описания зависимости величины  $y$  от величины  $x$ .

Исходные данные могут носить самый разнообразный характер и относиться к различным отраслям науки или техники.

Метод наименьших квадратов (МНК) — математический метод, применяемый для решения различных задач, основанный на минимизации суммы квадратов отклонений некоторых функций от искомых переменных. Он может использоваться для «решения» переопределённых систем уравнений (когда количество уравнений превышает количество неизвестных), для поиска решения в случае обычных (не переопределённых) нелинейных систем уравнений, для аппроксимации точечных значений некоторой функции. МНК является одним из базовых методов регрессионного анализа для оценки неизвестных параметров регрессионных моделей по выборочным данным.

Уравнение (1) имеет аналитическое решение

$$y = \frac{y_0 K}{(K - y_0)e^{-\mu t} + y_0} = f(t, K, \mu),$$

где  $y_0 = y(t=0)$ .

Параметры  $\mu$  и  $K$  для конкретного экономического показателя выбирались из условия минимума функции

$$\Phi(\mu, K) = \sum_{i=1}^n (y_i - f(t_i, K, \mu))^2,$$

где  $t_i$  - год, а  $y_i$  - значение экономического показателя за этот год,  $n$  - количество учтенных лет. Процедура поиска минимума была реализована в среде программирования математического пакета MatLab с применением встроенной функции `fminsearch` [10].

## 7. Аппроксимация статистических данных

Параметры  $\mu$  и  $N_{\max}$  (1) для динамики импорта и экспорта по отдельным странам искались с применением метода наименьших квадратов.

На рис. 11 для экспорта России в Японию, Нидерланды, Турцию, Италию, Китай, Германию, США (наибольшие показатели) статистические показатели отмечены символом \*, логистическим зависимостям соответствуют сплошные линии.

Аналогичные зависимости для импорта из Вьетнама, Китая, Пакистана, Мексики, Турции и Германии (наибольшие показатели) приведены на рис. 12.

На рис. 13 приведена доля импорта пяти ведущих стран с 2000 по 2017 гг.

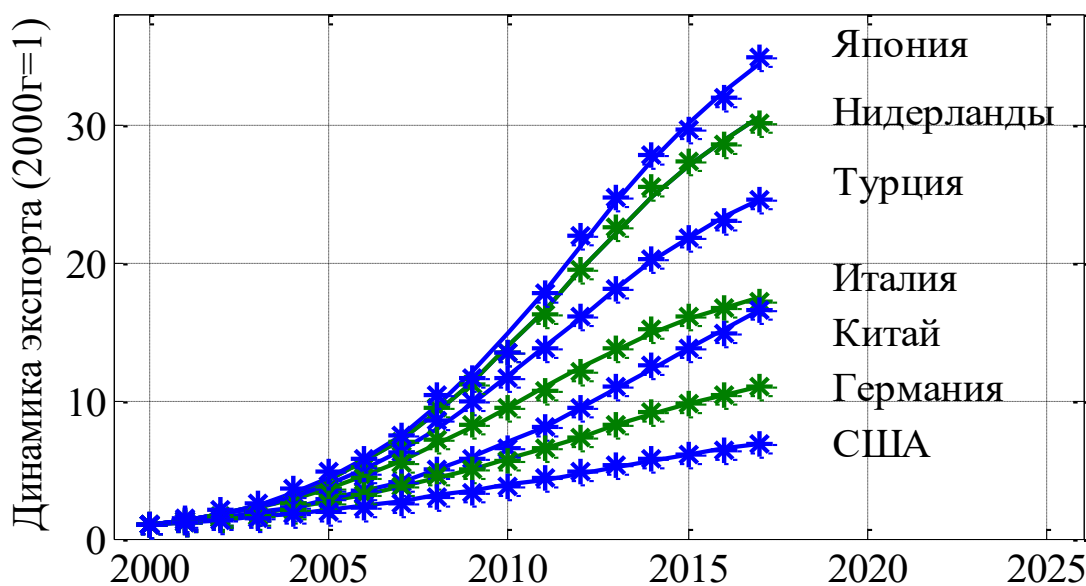


Рис. 11. Динамика экспорта РФ в 7 стран с 2000 по 2017 гг.

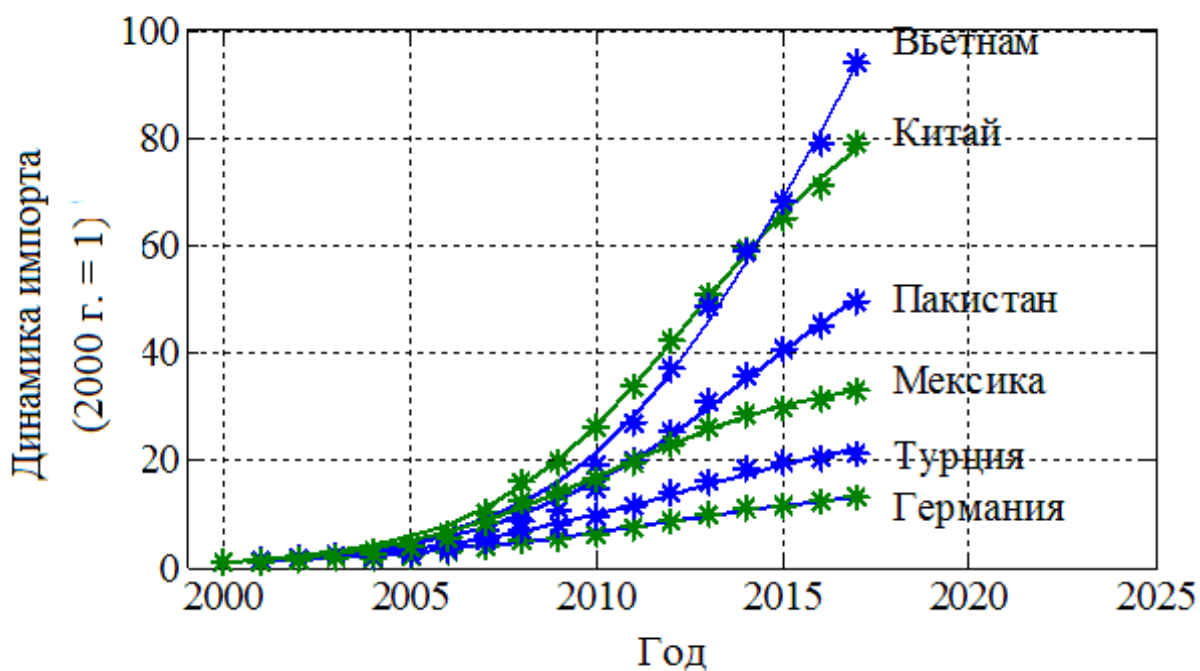


Рис. 12. Динамика импорта РФ из 7 стран с 2000 по 2017 гг.

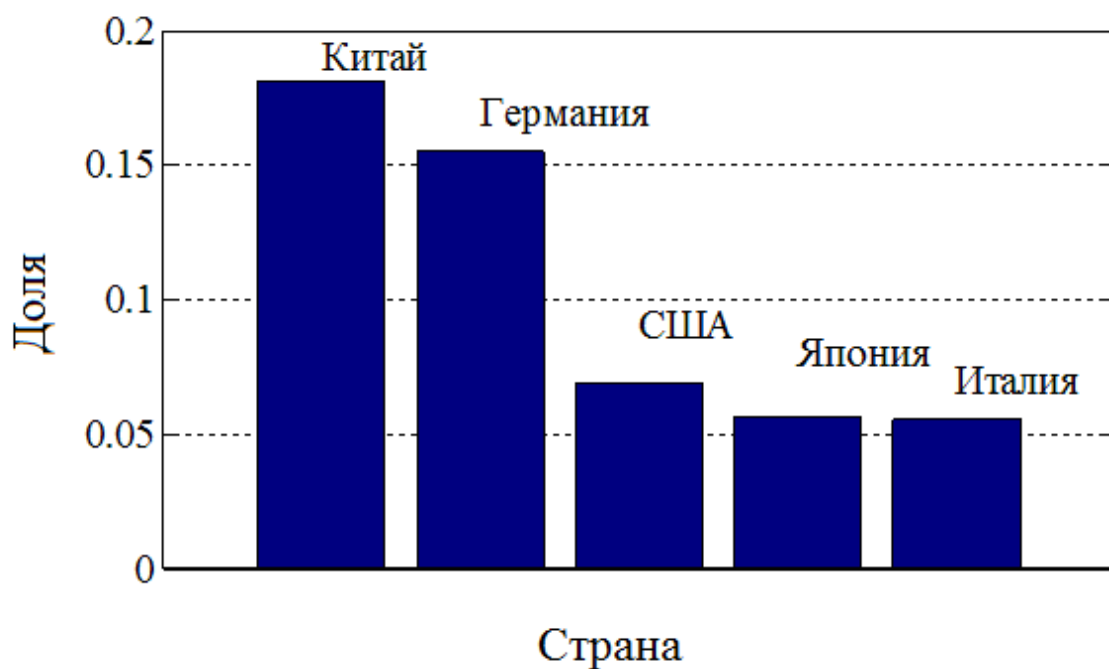


Рис. 13. Доля импорта пяти ведущих стран с 2000 по 2017 гг.

Показатели  $\mu$  и  $N_{\max}$  для 53 стран (рис. 9 - 10) для случая экспорта представлены в табл. 2, а для случая импорта - табл. 3.

Таблица 2. Параметры для экспорта

Страна	$\mu$ (1/год)	$N_{\max}$
Австрия	0.25234	7.4237
Бельгия	0.19091	29.941
Болгария	0.23764	13.027
Венгрия	0.23607	10.125
Германия	0.21857	14.76
Греция	0.26628	24.437
Дания	0.2121	24.889
Ирландия	0.12902	1.7841
Испания	0.27978	20.951
Италия	0.28409	20.178
Нидерланды	0.30857	36.229
Норвегия	0.22676	13.815
Польша	0.25227	17.834
Румыния	0.28005	9.764
Словакия	0.2044	10.197
Соединенное Королевство (Великобритания)	0.21818	12.056
Финляндия	0.23807	13.45
Франция	0.27556	17.059
Чешская Республика	0.20877	10.554
Швейцария	0.25127	7.7437
Швеция	0.19618	13.378
Афганистан	0.34124	76.564
Вьетнам	0.18706	28.374
Гонконг	0.17772	34.465
Израиль	0.22824	9.6433
Индия	0.23607	20.773



Исламская Республика Иран	0.3065	14.315
Кипр	0.47195	11.121
Китай	0.22065	26.414
Корейская Народно- Демократическая Республика	0.29323	6.4478
Монголия	0.21954	26.558
Объединенные Арабские Эмираты	0.20625	24.177
Пакистан	0.32292	14.117
Республика Корея	0.24759	49.544
Сингапур	0.17129	75.079
Сирийская Арабская Республика	0.33532	22.071
Таиланд	0.22564	24.56
Тайвань (Китай)	0.20802	33.237
Турция	0.29455	29.094
Япония	0.1705	29.95
Алжир	0.25368	62.92
Египет	0.18186	55.695
Марокко	0.31208	41.317
Нигерия	0.25421	27.831
Аргентина	0.28779	26.665
Бразилия	0.25544	35.081
Канада	0.23914	15.669
Куба	0.083333	9.7627
Мексика	0.2076	91.845
Панама	0.20172	2.4228
США	0.17208	10.31
Австралия	0.2155	31.35

Новая Зеландия	0.26576	313.95
----------------	---------	--------

Таблица 3. Параметры для импорта

Страна	$\mu$ (1/год)	$N_{\max}$
Австрия	0.2044	16.204
Бельгия	0.22479	16.647
Болгария	0.14118	15.437
Венгрия	0.21158	14.606
Германия	0.22852	17.844
Греция	0.15917	11.634
Дания	0.21228	11.957
Ирландия	0.15505	25.07
Испания	0.27277	29.334
Италия	0.21798	20.344
Нидерланды	0.20025	16.315
Норвегия	0.25251	18.277
Польша	0.23173	19.131
Румыния	0.24056	46.932
Словакия	0.26432	35.192
Соединенное Королевство (Великобритания)	0.22529	17.999
Финляндия	0.20935	10.508
Франция	0.24796	23.274
Чешская Республика	0.22685	27.975
Швейцария	0.20473	20.829
Швеция	0.24964	15.382
Афганистан	0.13699	9.2866
Вьетнам	0.32065	155.76
Гонконг	0.1298	90235

Израиль	0.1978	25.345
Индия	0.1467	32.369
Исламская Республика Иран	0.23801	22.09
Кипр	0.086458	6.93
Китай	0.35904	94.187
Корейская Народно- Демократическая Республика	0.16396	4.0164
Монголия	0.11846	5.6296
Объединенные Арабские Эмираты	0.15356	39054
Пакистан	0.30121	71.181
Республика Корея	0.31586	32.919
Сингапур	0.16963	16.66
Сирийская Арабская Республика	0.26472	8.7388
Таиланд	0.31391	54.082
Тайвань (Китай)	0.32111	48.911
Турция	0.26895	28.31
Япония	0.34151	36.471
Алжир	0.11079	4.0883
Египет	0.21876	52.467
Марокко	0.26856	39.636
Нигерия	0.11613	1.4388*10 <sup>5</sup>
Аргентина	0.29038	22.866
Бразилия	0.29948	21.053
Канада	0.22937	19.093
Куба	0.33482	1.8003
Мексика	0.25883	52.025
Панама	0.15547	15414

США	0.17644	19.509
Австралия	0.22637	17.987
Новая Зеландия	0.086906	$3.5365 \cdot 10^5$

Как следует из анализа статистических данных (рис. 11 - 13, табл. 2 - 3) показатель  $\mu$  для экспорта изменяется в диапазоне от 0,083 до 0,472 1/год при среднем значении 0,24 1/год, а для импорта - в диапазоне от 0,086 до 0,359 1/год при среднем значении 0,22 1/год. Существенное изменение в географии российского импорта не наблюдается, а экспорт сдвигается в сторону стран Востока. Это отмечается и в работе [11].

Показатели  $\mu$  для экспорта и импорта по странам не совпадают. Как следует из рис. 11 экспорт в Японию, Нидерланды, Турцию занимает первые места 2005 года, а по импорту первые места с 2005 года занимают Вьетнам, Китай, Пакистан. Около 30% суммарного объема импорта в РФ приходится на Китай и Германию (рис. 13) - происходит концентрация импорта.

Распределение 53 стран по значениям параметра  $\mu$  для экспорта приведено на рис. 14, для импорта – на рис. 15.

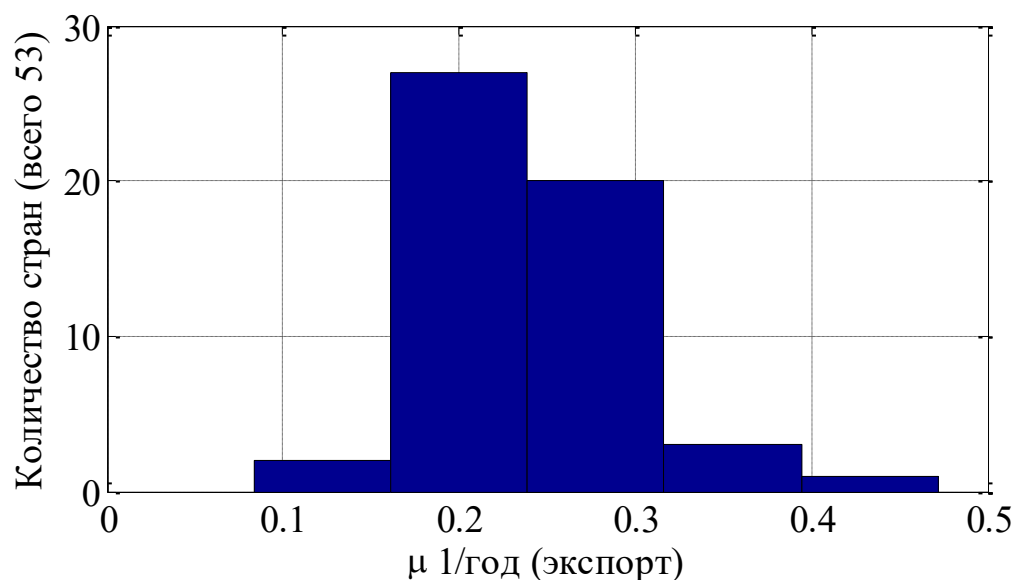


Рис. 14. Распределение стран по значениям параметра  $\mu$  для экспорта

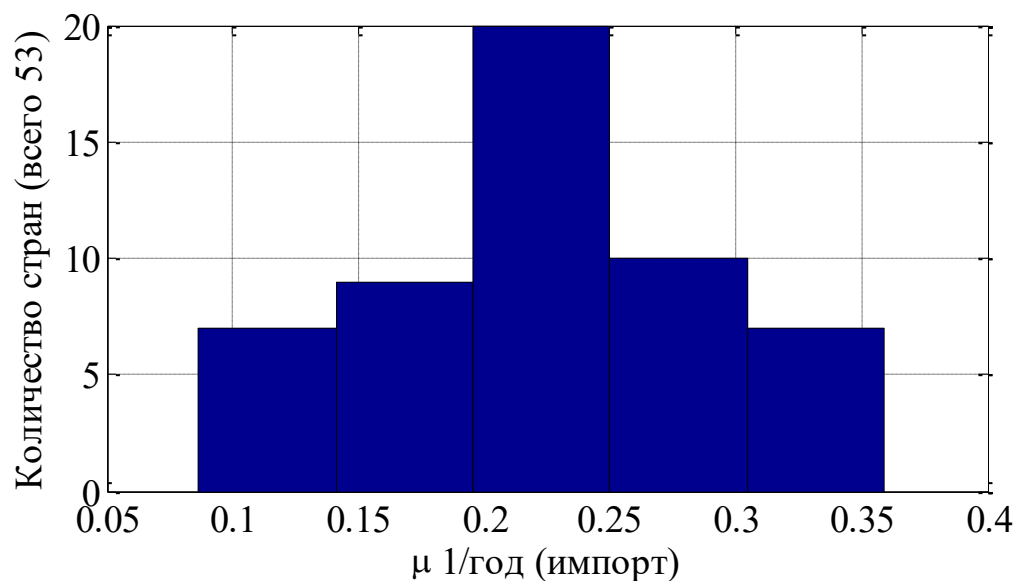


Рис. 15. Распределение стран по значениям параметра  $\mu$  для импорта

## 8. Математическая модель конкуренции

Для построения модели конкуренции на рынках импорта и экспорта РФ была рассмотрена обобщенная модель Вольтерра для двух популяций предложена А.Д. Базыкиным в [3] в следующем варианте:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= u_1(1 - u_1 - \gamma_1 u_2), \\ \frac{du_2}{dt} &= \gamma u_2(1 - u_2 - \gamma_2 u_1), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $u_1$  и  $u_2$  - доли стран на рынке,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma$  - параметры. Внутренняя конкуренция в (2) характеризуется слагаемыми  $u_1^2$  и  $u_2^2$  в первом и втором уравнениях, а слагаемыми  $\gamma_1 u_1 u_2$  и  $\gamma \gamma_2 u_1 u_2$  - конкуренция между странами. Модель (2) при  $\gamma_1 = 0$  и  $\gamma_2 = 0$  переходит в модель двух не взаимодействующих популяций с лимитированным ростом [3].

Особое решение  $u_1 = 0$  и  $u_2 = 0$  уравнений (2) является неустойчивым, а особые решения  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = 0$  и  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = 1$  могут быть устойчивыми, в зависимости от значений параметров  $\gamma_2 > 1$  или  $\gamma_1 > 1$ .

Нетривиальная стационарная точка

$$u_1 = (1 - \gamma_1) / (1 - \gamma_1 \gamma_2), \quad u_2 = (1 - \gamma_2) / (1 - \gamma_1 \gamma_2)$$

будет устойчивой [7] при одновременном выполнении неравенств  $\gamma_1 < 1$  и  $\gamma_2 < 1$ . В противном случае считается, что одна из стран ушла с рынка [1, 2].

## 9. Модифицированная модель

Модифицируя систему (2) конкурирующих стран, построим систему для  $n$  конкурирующих субъектов. Тогда система уравнений (2) принимает вид

$$\frac{du_i}{dt} = \mu_i \left[ u_i(1-u_i) - u_i \sum_{k=1, k \neq i}^n \gamma_{ik} u_k \right], \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

где  $\mu_i$  и  $\gamma_{ik}$  - параметры. Поскольку нетривиальная устойчивая стационарная точка в системе двух уравнений (2) существует при условии, что  $\gamma_1 < 1$  и  $\gamma_2 < 1$ , то в (3) считается, что  $0 < \gamma_{ik} < 1$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ;  $k=1, 2, \dots, n$ ). Эти условия обеспечивают существование стационарного решения с двумя нетривиальными компонентами. Стационарное состояние системы уравнений (3) находится как положительное решение системы линейных уравнений

$$u_i + \sum_{k=1, k \neq i}^n \gamma_{ik} u_k = 1, \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

При  $\gamma_{ik} = 0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ;  $k=1, 2, \dots, n$ ) устойчивой стационарной точкой системы уравнений (3) будет  $u_i = 1$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ). В силу непрерывной зависимости решения системы уравнений (3) от параметров  $\gamma_{ik}$  система этих уравнений при малых значениях параметров  $\gamma_{ik}$  будет иметь решение, на котором все его компоненты будут положительными.

## 10. Модель взаимодействия трех субъектов

Санкционное экономическое давление, которое Запад оказывает на Россию [9, 11], как следует из анализа статистических данных (рис. 11 - 15), приводит к сдвигу внешней торговли РФ в сторону Востока. Этот же

результат получен и в работе [9]. Этот процесс можно рассматривать как взаимодействие трех субъектов (РФ-Восток-запад).

Система уравнений (3) для трех субъектов имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{dt} &= \mu_1 u_1 (1 - u_1 - \gamma_{12} u_2 - \gamma_{13} u_3), \\ \frac{du_2}{dt} &= \mu_2 u_2 (1 - u_2 - \gamma_{21} u_1 - \gamma_{23} u_3), \\ \frac{du_3}{dt} &= \mu_3 u_3 (1 - u_3 - \gamma_{31} u_1 - \gamma_{32} u_2).\end{aligned}\tag{4}$$

Предполагается параметры  $\gamma_{12}$ ,  $\gamma_{13}$ ,  $\gamma_{21}$ ,  $\gamma_{23}$ ,  $\gamma_{31}$  и  $\gamma_{32}$ , входящие в систему уравнений (4), лежат в диапазоне от нуля до единицы. Эти условия обеспечивают устойчивое положение равновесия для двух субъектов.

Стационарная точка системы уравнений (4) находится из системы алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} 1, \gamma_{12}, \gamma_{13} \\ \gamma_{21}, 1, \gamma_{23} \\ \gamma_{31}, \gamma_{32}, 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.\tag{5}$$

Если на решениях этой системы уравнений одна из компонент становится отрицательной, то это рассматривается как уход одного из субъектов с рынка, но при этом в конкуренции между двумя оставшимися наступает устойчивое равновесие.

Последствия санкций можно рассматривать как уход одного из субъектов с международного рынка. Применительно к санкциям это уход РФ с рынка «Запад». Вероятность ухода с рынка можно оценить, применяя имитационное моделирование. Рассмотрим влияние возможных комбинаций параметров  $\gamma_{12}$ ,  $\gamma_{13}$ ,  $\gamma_{21}$ ,  $\gamma_{23}$ ,  $\gamma_{31}$  и  $\gamma_{32}$  на наличие у системы уравнений (5) отрицательного решения, выбирая их случайным образом из промежутка (0,1). Как следует из результатов моделирования при выборке параметров от 100 до 100 000 вероятность ухода одного из субъектов с рынка лежит в диапазоне от 0.3 до 0.4. Таким образом, сдвиг торговли РФ в сторону

Востока носит временный характер, санкции с высокой вероятностью (до 0.7) окажут локальное во времени давление на рынок.

Один из вариантов решения системы уравнений (5) для случая  $\mu_1 = 0.06$ ,  $\mu_2 = 0.05$ ,  $\mu_3 = 0.08$  и

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0.02 & 0.93 \\ 0.93 & 0 & 0.48 \\ 0.64 & 0.03 & 0 \end{pmatrix}$$

приведен на рис. 16. Как следует из этого результата на длительном временном интервале применительно к внешней торговле могут наблюдаться и взлеты, и падения для импорта и экспорта.

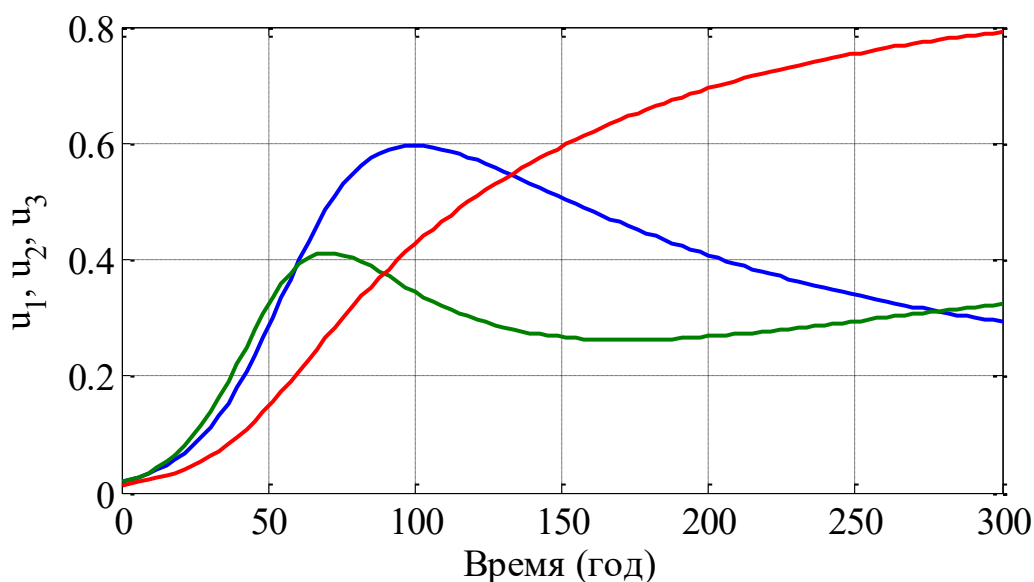


Рис. 16. Зависимость функций  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  и  $u_3(t)$  от времени

## 11. Имитационная модель конкуренции

Анализ распределения «выживших» в условиях конкуренции стран из общего количества  $n$  осуществлялось следующим образом. Начальные условия  $u_i(t=0)$  ( $i=1,2,\dots,n$ ), параметры  $\mu_i$  и компоненты матрицы  $[\gamma_{ik}]$  формировалась из набора случайных чисел равномерно распределенных на интервале  $[0,1]$ . Системы уравнений (3) решалась с использованием



встроенных функций интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений математического пакета Matlab.

На рис. 17 приведено распределение долей «выживших» стран из 50 изначальных для 10 000 вариантов случайного выбора компонент матрицы  $[\gamma_{ik}]$  и параметров  $\mu_i$  в зависимости от их числа при среднем значении 10. То есть из 50 конкурирующих субъектов в среднем «выживает» 10.

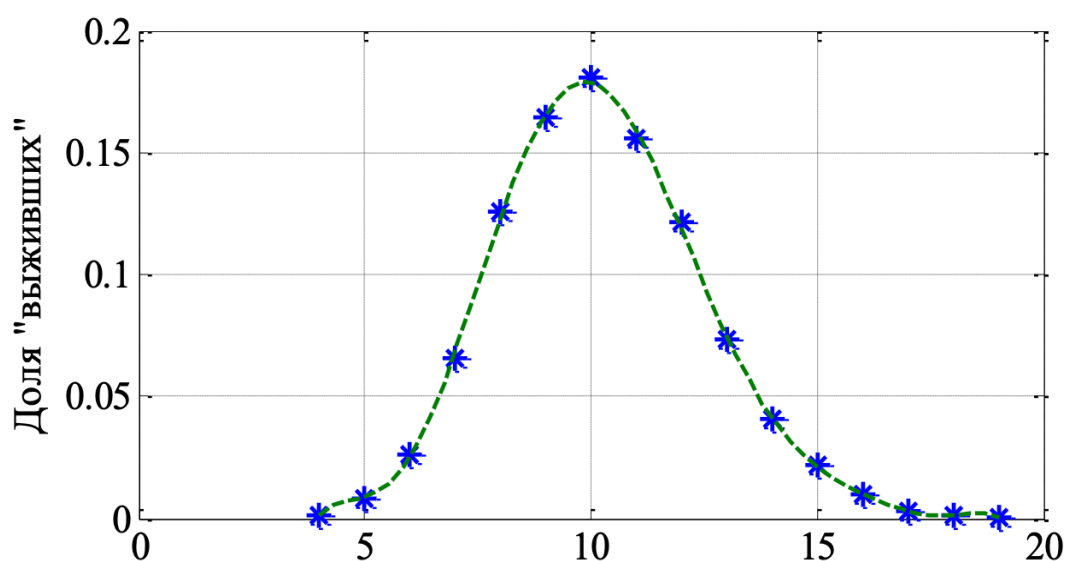


Рис. 17. Установившееся во времени распределение конкурирующих субъектов по численности

В мире 195 независимых стран из них Россия имеет экономические связи с заметным торговым оборотом с 53 странами. Основная масса импорта, экспорта приходится на 5 - 10 стран (рис. 13 - 15). При выбранных параметрах  $\mu$  (табл. 2 - 3) в модели (3) среднее значение стран, активно участвующих в рынке должно быть около 10 (рис. 17). То есть результаты имитационного моделирования согласуются со статистическими данными по внешней торговле РФ [14].

## **Заключение**

В результате работы над темой ВКР получены следующие результаты:

1. Импорт и экспорт РФ локально во времени чувствителен к внешним воздействиям;
2. Импорт и экспорт являются зависимыми друг от друга;
3. Суммарный импорт и экспорт постоянно растут по логистической зависимости;
4. Импорт РФ имеет явный сдвиг в сторону стран востока;
5. Основная доля рынка внешней торговли РФ приходит на 5 - 10 стран;
6. С использованием математических подходов определены стабильные показатели темпов роста оборотов торговли на длительном временном интервале;
7. В рамках разработанной математической модели подтверждено существующее распределение активных участников рынка.

## Список использованной литературы

1. Андреева У.Ю., Полина С.Г., Колпак Е.П. Математические модели конкуренции группы популяций // Дневник науки. 2021. № 1 (49). С. 31.
2. Андреева У.Ю., Полина С.Г., Колпак Е.П. Математические модели конкуренции: интерференция и эксплуатация // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. 2021. № 1-2 (52). С. 30-36.
3. Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. – Москва-Ижевск: институт компьютерных исследований, 2003. – 368 с.
4. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 288 с.
5. Гладков И.С. Внешняя торговля России: тренды на этапе всеобщего кризиса 2020 г. // Экономические и социально-гуманитарные исследования. 2021. № 1 (29). С. 11-19.
6. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: «Высшая школа», 1975. – 333 с.
7. Жабко А.П., Котина Е.Д., Чижова О.Н. Дифференциальные уравнения и устойчивость: Учебник. – СПб.: Издательство «Лань», 2015. – 320 с.
8. Караев А. К. и Коновалов В. В. Логистическая модель динамики развития информационных и экономических систем // Экономика. Налоги. Право. - 2011. - №4. – С. 28-37.
9. Клинова М., Сидорова Е. Экономические санкции и их влияние на хозяйственные связи России с Европейским союзом // Вопросы экономики, № 12, 2014. -67-79.
10. Колпак Е.П. Вычисления в Matlab: учебное пособие. Казань: Изд-во «Бук», 2016. – 184 с.

11. Меланьина М.В. Внешняя торговля России и ЕС: особенности в условиях санкций и цифровизации // Экономика и предпринимательство. 2020. № 8 (121). С. 203-206.

12. Пономарева Е.А., Ярошевич Н.Ю. Оценка уровня концентрации отраслей высокого технологического уровня экономики России // Экономика и бизнес: теория и практика. 2020. № 3-2 (61). С. 166-170.

13. Прасолов А.В. Математические методы экономической динамики: Учебное пособие. – СПб.: Издательство «Лань», 2008. – 352 с.

14. Российский статистический ежегодник. 2019: Стат.сб./Росстат. - Р76 М., 2019 – 708 с.