Санкт–Петербургский государственный университет

Русскова Евгения Дмитриевна

Выпускная квалификационная работа

Равновесие в игре ценообразования и размещения на рынке авиаперевозок

Уровень образования: бакалавриат
Направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
Основная образовательная программа СВ.5005.2017 «Прикладная математика, фундаментальная информатика и программирование»
Профиль «Системный анализ, исследование операций и управление»

Научный руководитель:
доцент, кафедра операционного менеджмента,
к.ф. - м.н. Зенкевич Николай Анатольевич

Рецензент:
доцент, кафедра математической теории игр
и статистических решений,
к.ф. - м.н. Фаттахова Мария Владимировна

Санкт-Петербург
2021 г.

Содержание

Введение

Роль воздушного транспорта в развитии мировой экономики остается неизменно высокой. Также авиаперевозки являются одной из наиболее динамично развивающихся отраслей мирового транспорта. Темпы роста глобального авиапассажиропотока превышают темпы роста мирового номинального ВВП почти в два раза. Количество перевезенных авиапассажиров только за 2007–2017 гг. увеличилось в 1,7 раза – с 2,46 до пиковых 4,08 млрд чел. Стремительный рост пассажиропотока (в 2,3 раза за 2007–2017 гг.) характерен и для пассажиропотока российских авиакомпаний. (Статистические данные взяты из работы [2]).

Ускоренные темпы развития, а также повышение уровня конкуренции на рынке авиаперевозок актуализируют разработку новых подходов к ценообразованию предприятий на данном рынке. Так как прибыль авиакомпании во многом зависит от применяемой тарифной системы. В конечном итоге величина тарифа и выбранные маршруты определяют уровень рентабельности авиакомпании.

Множество научных статей на тему моделирования рынка авиаперевозок начали появляться после дерегулирования рынка авиаперевозок США 1978 года, в результате чего были сняты ограничения на маршруты, которые могут выполнять авиакомпании, и на тарифы, которые они могут взимать. И актуальность данных исследований только растет.

Для определения выбора потребителя во многих статьях использовалась мультиноминальная логит-модель и ее модификации. Мультиноминальная логит-модель была предложена в статье [13], а в работе [11] подробно описаны плюсы данной модели для оценки распределения пассажиропотока и сравнение с другими базовыми моделями.

Целью данной работы является рассмотрение существующих моделей, создание новой игровой модели рынка авиаперевозок и подробное рассмотрение существования равновесия в предложенной модели, а также реализация нахождения данных равновесий модели.

Глава 1. Существующие модели

1.1 Модель 1

Ниже описана модель рынка авиаперевозок представленная в работе [6].

Рассматривется граф $G(V, E)$ где V — множество аэропортов (вершины графа), а E — множество направлений, по которым авиакомпании осуществляют пассажирские перевозки (ребра графа). На рынке представлены n авиакомпаний. Каждая авиакомпания размещает m_i самолетов по ребрам транспотного графа $G(V, E)$. Не более одного на ребро. Вектор x_i задает размещение самолетов i-той авиакомпании в транспортном графе:

$$\forall j \in \{1, ..., |E|\} : x_{ij} \in \{0, 1\}, \sum_{k=1}^{|E|} x_{ik} = m_i.$$

Каждое ребро графа характеризуется потенциальным пассажиропотоком $d(e_j)$ $(e_j \in G(V, E))$. Величина потенциального пассажиропотока зависит от количества населения в городах отправления и прибытия:

$$d(e_j) = \frac{\sqrt{P(v_j^1)P(v_j^2)}}{2}, e_j = (v_j^1, v_j^2)$$

$P =$ Количество населения в соответствующем городе.

M_{ij} — доля авиакомпании i в потенциальном пассажиропотоке на ребре e_j. M_{ij} зависит от цены на рейс p_{ij} и цен конкурирующих авиакомпаний на этом ребре. Предполагается, что распределение пассажиропотока описывает мультиноминальная логит-модель:

$$M_{ij}(p_{ij}, \{p_{rj}\}_{r \in N_j \setminus \{i\}}) = e^{a_0 p_{ij} + (a, k_{ij})} / (\sum_{s=1}^{|N_j|} e^{a_0 p_{sj} + (a, k_{sj})} + e^{\rho}), e_j \in E^i,$$

где $a_1 < 0, a$ — вектор констант, k_{ij} — вектор характеристик рейса, N_j — множество конкурирующих авиакомпаний на ребре e_j, E^i — множество ребер, на которых имеются самолеты у i-ой авиакомпании. Пассажир может отказаться от перелета, поэтому в знаменатель входит e^{ρ}. В характеристики отдельного рейса были включены время перелета, индикатор прямого рейса γ_{ij} ($\gamma_{ij} \in \{0, 1\}$), геометрическое среднее среднедушевых доходов населения в регионах, где расположены аэропорты отправления и прибытия, и расстояние между аэропортами отправления и прибытия.

$$(a, k_{ij}) = a_1 t_{ij} + a_2 \gamma_{ij} + a_3 income_j + a_4 ln(dist_j), e_j \in E^i$$

Прибыль авиакомпании i на ребре e_j:

$$h_{ij}(\{p_{rj}\}_{r \in N_j}) = (p_{ij} - c_{ij}) M_{ij}(p_{ij}, \{p_{rj}\}_{r \in N_j \setminus \{i\}}) d(e_j), i \in N_j,$$

где c_{ij} — себестоимость перевозки одного пассажира. А прибыль i-той авиакопании в транспортном графе $G(V, E)$ равна

$$H_i(\{p_r\}_{r \in N}, \{x_r\}_{r_\in N}) = \sum_{j=1}^{|E|} h_{ij}(\{p_{rj}\}_{r \in N_j}) x_{ij}$$

, где p_r — вектор цен в транспортной сети E^r.
Стратегией i-того игрока является вектор цен p_i. Выигрыш i-того игрока — H_i.
Было доказано существование равновесия Нэша для данной модели как для игры ценообразования для n авиакомпаний, так и для игры размещения для двух авиакомпаний.

Равновесие $\{p_i^*\}_{i \in N}$ находили как точку, к которой сходится последовательность наилучших ответов игроков.
Так же для автор применил данную модель для рынка авиаперевозок России, а в статье [1] в качестве примера использовался и рынок авиаперевозок Китая. Причем на нем был получен более точный результат.

1.2 Модель 2

В статье [14] предложена модель, описывающая конкуренцию двух авиакомпаний с другими видами транспорта.
Две авиакомпании на каждом направлении одновременно выбирают тариф и частоту полетов. Каждая авиакомпания стремится к максимизации целевой функции, которая представляет прибыль авиакомпании, полученную за счёт разницы между доходом от тарифов и затратами на предоставление услуги для данной частоты. Обе авиакомпании знают все доступные варианты выбора друг друга, и прибыль при каждой комбинации этих стратегий, таким образом создается некооперативная игра с полной информацей. Каждый пассажир сначала выбирает предподчительный вид транспорта (самолет, автобус, поезд), далее пассажиры (которые ранее выбрали полет по воздуху) выберают авиакомпанию, которая максимизирует функцию полезности с точки зрения стоимости авиабилета и частоты обслуживания каждой авиакомпании. Цены и частоты других видов транспорта предполагаются заранее известными. Функция доли рынка авиакомпании представляет собой вложенную логит-модель.

Необходимые обозначения:
E — множество всех направлений рассматриваемой сети.
$V_{e,s}$ — полезность выбора вида транспорта $s, s \in \{road, rail, air\}$ на ребре $e \in E$.
$V_{e,airlinei}$ — полезность выбора авиакомпании $x, x \in \{1, 2\}$ на ребре $e \in E$.
V_n — полезность отказа от путешествия.
$p_{e,s}$ — стоимость билета на вид транспорта $s, s \in \{road, rail, airline1, airline2\}$ на ребре $e \in E$.
$f_{e,road}$ — количество рейсов в неделю для вида транспорта $s, s \in \{road, rail, airline$ на ребре $e \in E$.
$t_{e,s}$ — время в пути на виде транспорта $s, s \in \{road, rail, air\}$ на ребре $e \in E$.
$\beta_1, \beta_2, \beta_3, q, k_{road}, k_{rail}, k_{airline1}, k_n$ — параметры модели.
Функции полезности каждого вида транспорта на направлении $e \in E$:

$$V_{e,road} = \beta_1 p_{e,road} + \beta_2 \ln(f_{e,road}) + \beta_3 t_{e,road} + k_{road},$$

$$V_{e,rail} = \beta_1 p_{e,rail} + \beta_2 \ln(f_{e,rail}) + \beta_3 t_{e,rail} + k_{rail},$$

$$V_{e,air} = q \cdot \ln \left[\sum_{x=1,2} \exp(V_{e,airlinex}) \right] + t_{e,air},$$

$$V_{e,airline1} = \beta_1 p_{e,airline1} + \beta_2 \ln(f_{e,airline1}) + k_{airline1},$$

$$V_{e,airline2} = \beta_1 p_{e,airline2} + \beta_2 \ln(f_{e,airline2}),$$

$$V_n = k_n$$

Доля авиакомпании $x, x \in \{1, 2\}$ в потенциальном пассажиропотоке на направлении e равна

$$M_{ex} = \frac{\exp\left(V_{e,airlinex}\right)}{\sum_{x=1,2} \exp(V_{e,airlinex})} \cdot \frac{\exp\left(V_{e,air}\right)}{\sum_{s=1}^{4} \exp(V_{e,s})}, e \in E,$$

$s \in \{road, rail, air, n\}$ — показатель вида транспорта (автобус, поезд, самолет, отказ от путешествия).

Функция прибыли авиакомпании x на ребре e :

$$h_{ex} = p_{e,airlinex} \cdot M_{ex} \cdot d(e) - g \cdot f_{e,airlinex},$$

где g - себестоимость одного полета, $d(e)$ — величина потенциального пассажиропотока на ребре e.

В статье [14] доказано существование и единственность равновесия Нэша для данной модели.

Глава 2. Новая модель

В результате работы была усовершенствована модель, представленная в работе [14] и описанная в предыдущей главе.

2.1 Минусы исходной модели

1)Первым минусом исходной модели является одновременное определение авиакомпаниями частот и тарифов, хотя решения о количестве рейсов и стоимости проезда обычно определяются последовательно, в разные сроки. Решения о частоте обслуживания часто принимаются за недели или месяцы до рассматриваемых рейсов, имея лишь приблизительное понимание будущих решений по тарифам, ведь расписание должно быть составлено и согласовано с аэропортом заранее, а решения о стоимости проезда можно принимать за несколько дней или даже часов до поездки.

2) Отсутствие задачи определения оптимального размещения самолетов по направлениям.

3) В данной модели предполагается, что время в пути для обеих авиакомпаний одинаково, что исключает использование данной модели для случаев, когда пассажиру необходимо выбрать между более частым и дешевым, но и с большим количеством часов в пути рейсом с пересадками и рейсом без пересадки.

4) В функцию полезности частота полета входит как $\beta \ln f, (\beta > 0)$. Данное выражение используется в множестве подобных моделей. В работе [12] сравниваются два способа вхождения частоты в функцию полезности: $\alpha f^m (\alpha, m < 0)$ и $\beta \ln f$, и первый выриант показал несколько более точный результат.

5) Затраты авиакомпании в функции прибыли зависят только от количества рейсов, переменные от количества пассажиров издержки не учи-

тываются.

2.2 Построение модели

Имеется транспортный граф рынка авиаперевозок $G(V, E)$, состоящий из множества аэропортов V(вершины графа) и множества направлений, по которым авиакомпании осуществляют пассажирские перевозки E(ребра графа), а также 2 авиакомпаний, выполняющих рейсы по известным направлениям. Количество направлений, занятых каждой авиакомпанией, определяется количеством самолетов m_i у данной авиакомпании. На каждое направление авиакомпания может поставить не более одного самолета.

Вектор x_i задает размещение самолетов i-той авиакомпании в транспортном графе:

$$\forall j \in \{1, ..., |E|\} : x_{ij} \in \{0, 1\}, \sum_{k=1}^{|E|} x_{ik} = m_i, i \in \{1, 2\}.$$

Каждое ребро графа характеризуется потенциальным пассажиропотоком $d(e_j)$ $(e_j \in G(V, E))$. Предположим, что величина потенциального пассажиропотока зависит от количества населения в городах отправления и прибытия:

$$d(e_j) = \frac{\sqrt{P(v_j^1)P(v_j^2)}}{2}, e_j = (v_j^1, v_j^2)$$

$P =$ Количество населения в соответствующем городе.

Такое представление потенциального пассажиропотока используется в работах [1], [6].

Функции полезности каждого вида транспорта на направлении e_j:

$$V_{e_j,road} = \beta_1 p_{e_j,road} + \beta_2 f^m_{e_j,road} + \beta_3 t_{e_j,road} + k_{road},$$

$$V_{e_j,rail} = \beta_1 p_{e_j,rail} + \beta_2 f^m_{e_j,rail} + \beta_3 t_{e_j,rail} + k_{rail},$$

$$V_{e_j,air} = q \cdot \ln\left[\sum_{i=1,2} \exp(V_{e_j,airline_i})\right] + k_{air},$$

$$V_{e_j,airline_1} = \beta_1 p_{e_j,airline_1} + \beta_2 f^m_{e_j,airline_1} + \beta_3 t_{e_j,airline_1},$$

$$V_{e_j,airline_2} = \beta_1 p_{e_j,airline_2} + \beta_2 f^m_{e_j,airline_2} + \beta_3 t_{e_j,airline_2},$$

$$V_n = k_n$$

Предполагается, что распределение пассажиропотока описывает вложенная логит-модель. Доля $M_{e_j,i}$ авиакомпании $i, i \in \{1,2\}$ в потенциальном пассажиропотоке на направлении e_j равна

$$M_{e_j,i} = \frac{\exp\left(V_{e_j,airline_i}\right)}{\sum_{i=1,2}\exp(V_{e_j,airline_i})} \cdot \frac{\exp\left(V_{e_j,air}\right)}{\sum_{s=1}^{4}\exp(V_{e_j,s})}, e_j \in E,$$

где $s \in \{road, rail, air, n\}$ — показатель вида транспорта (автобус, поезд, самолет, отказ от путешествия).

Предполагается, что издержки авиакомпании зависят не только от частоты полетов, как в моделях [15], [14], но и от количества пассажиров, такую функцию издержек используют в статье [12].
Тогда прибыль авиакомпании i на ребре e_j можно выразить как

$$h_{e_j,i} = (p_{e_j,airline_i} - c_{e_j,airline_i}) \cdot M_{e_j,i} \cdot d(e_j) - g \cdot f_{e_j,airline_i},$$

где $c_{e_j,airline_i}$ — себестоимость перевозки одного пассажира, g — себестоимость рейса, $d(e)$ — величина потенциального пассажиропотока.

А прибыль i-той авиакопании в транспортном графе $G(V,E)$ равна

$$H_i = \sum_{j=1}^{|E|} h_{e_j,i} \cdot x_{ij}.$$

Этапы игры:

1. Игроки одновременно определяют вектор размещения своих самоетов — x_i.

2. Игроки одновременно определяют вектор частот — f_i.

3. Игроки одновременно определяют вектор цен — p_i.

4. Пассажиры выбирают вид транспорта (автобус, поезд, самолет).

5. Пассажиры выбирают авиакомпанию.

6. Авиакомпании получают прибыль H_i.

Определена бескоалиционная игра с полной информацией для n игроков. Стратегией каждого игрока является тройка векторов (x_i, f_i, p_i), где f_i, p_i — вектор частот и цен авиакомпании i на множестве $E_i := \{e_j | x_{ij} = 1\}$.

Выигрыш i-того игрока — H_i.

Требуется найти равновесие по Нэшу $\{x_i^*\}_{i\in\{1,2\}}$, т.е. такие x_i^*, которые для $\forall x_i, i \in \{1,2\}$ удовлетворяют условию

$$H_i(x_i, x_r^*, \{\widetilde{f}_l(x_i, x_r^*)\}_{l\in\{1,2\}}, \{\widetilde{p}_l(x_i, x_r^*, \{\widetilde{f}_l(x_i, x_r^*)\}_{l\in\{1,2\}})\}_{l\in\{1,2\}}) \leqslant$$

$$\leqslant H_i(x_i^*, x_r^*, \{\widetilde{f}_l(x_i^*, x_r^*)\}_{l\in\{1,2\}}, \{\widetilde{p}_l(x_i^*, x_r^*, \{\widetilde{f}_l(x_i^*, x_r^*)\}_{l\in\{1,2\}})\}_{l\in\{1,2\}}),$$

где $r \in \{1,2\} \setminus \{i\}$, $\{\widetilde{f}_l(x_i, x_r)\}_{l\in\{1,2\}}$, $\{\widetilde{p}_l(x_i, x_r, \{\widetilde{f}_l(x_i, x_r)\}_{l\in\{1,2\}})\}_{l\in\{1,2\}}$ — равновесие относительно частот и цен при данном размещении соответственно.

Для каждых векторов размещений $\{x_l\}_{l\in\{1,2\}}$ находится рановесие Нэша по частотам $\{f_i^*(\{x_l\}_{l\in\{1,2\}})\}_{i\in\{1,2\}}$, т.е. такие $f_i^*(\{x_i\}_{i\in\{1,2\}})$, которые для $\forall f_i, i \in \{1,2\}$ удовлетворяют условию

$$H_i(\{x_l\}_{l\in\{1,2\}}, f_i, f_r^*(\{x_l\}), \{\widetilde{p}_l(\{x_l\}, f_i(\{x_l\}), f_r^*(\{x_l\}))\}_{l\in\{1,2\}}) \leqslant$$

$$\leqslant H_i(\{x_l\}_{l\in\{1,2\}}, f_i^*(\{x_l\}), f_r^*(\{x_l\}), \{\widetilde{p}_l(\{x_l\}_{l\in\{1,2\}}, f_i^*(\{x_l\}), f_r^*(\{x_l\}))\}_{l\in\{1,2\}}.$$

Для каждых векторов размещений $\{x_l\}_{l\in\{1,2\}}$ и частот $\{f_l(\{x_l\}_{l\in\{1,2\}})\}_{l\in\{1,2\}}$ находится рановесие Нэша в игре ценообразования $\{p_i^*(\{x_l\}, \{f_l\})\}_{i\in\{1,2\}}$, т.е. такие $p_i^*(\{x_l\},\{f_l\})$, которые для $\forall p_i, i\in\{1,2\}$ удовлетворяют условию

$$H_i(\{x_l\}_{l\in\{1,2\}},\{f_l\}_{l\in\{1,2\}},p_i,p_r^*(\{x_l\},\{f_l\}))) \leqslant$$

$$\leqslant H_i(\{x_l\}_{l\in\{1,2\}},\{f_l\}_{l\in\{1,2\}},p_i^*(\{x_l\},\{f_l\}),p_r^*(\{x_l\},\{f_l\}))).$$

2.3 Проблемы реализации

Так как прибыль авиакомпании i на каждом направлении e_j зависит только от цен и частот авиакомпаний на этом направлении, можно находить равновесие по ценам и частотам отдельно на каждом направлении, максимизируя прибыль авиакомпании только на данном направлении $h_{e_j,i}$.

В предложенной выше модели существование равновесия по частотам вызывает сомнения, как и способ его нахождения. В работе [15] для нахождения равновесия по частотам даже для более простой модели, где доля пассажиров зависит только от частот и цен двух авиакомпаний, при этом модель не учитывает другие виды транспорта, высчитывают равновесие в задаче ценообразования для всех вариантов пар частот (f_1, f_2), где $f_1 \in [1; f_{1max}]$ и $f_2 \in [1; f_{2max}]$ (в работе брали $f_{1max} = f_{2max} = 20$) и составляли матрицу выигрышей для этих равновесий.

Таким образом можно определить матричную игру для каждого направления e_j, где стратегией каждой авиакомпании является частота $f_{e_j,i}$, а выигрышем — прибыль $h_{e_j,i}(\{f_{e_j,i}\}_{i\in\{1,2\}},\{p_i^*(\{f_{e_j,i}\}_{i\in\{1,2\}})\}_{i\in\{1,2\}})$, где $\{p_i^*(\{f_{e_j,i}\}_{i\in\{1,2\}})\}_{i\in\{1,2\}}$ — равновесие в задаче ценообразования при данных частотах. Проблема такого подхода в данной модели заключается в том, что в общем случае равновесие Нэша в чистых стратегиях для подобной матричной игры не существует. Но существует равновесие в смешанных стратегиях (Основная теорема матричных игр [3]). Однако нахождение такого равновесия для матриц больших объемов является нетривиальной задачей.

2.4 Упрощение модели

Для реализации предложенной модели будем считать, что частоты авиакомпаний на каждом направлени известны. Тогда стратегией авиакомпани i является пара векторов (x_i, p_i), где p_i — вектор цен авиакомпании i на множестве $E_i := \{e_j | x_{ij} = 1\}$.

Таким образом, требуется найти равновесие по Нэшу в игре размещения $\{x_i^*\}_{i\in\{1,2\}}$, т.е. такие x_i^*, которые для $\forall x_i, i \in \{1,2\}$ удовлетворяют условию

$$H_i(x_i, x_r^*, \{\widetilde{p_l}(x_i, x_r^*)\}_{l\in\{1,2\}}) \leqslant H_i(x_i^*, x_r^*, \{\widetilde{p_l}(x_i^*, x_r^*)\}_{l\in\{1,2\}}),$$

где $r \in \{1,2\} \setminus \{i\}, \{\widetilde{p_l}(x_i, x_r)\}_{l\in\{1,2\}}$ — равновесие в задаче ценообразования при данном размещении.
Для каждых векторов размещений $\{x_l\}_{l\in\{1,2\}}$ находится рановесие Нэша в игре ценообразования $\{p_i^*(\{x_l\})\}_{i\in\{1,2\}}$, т.е. такие $p_i^*(\{x_l\})$, которые для $\forall p_i, i \in \{1,2\}$ удовлетворяют условию

$$H_i(\{x_l\}_{l\in\{1,2\}}, p_i, p_r^*(\{x_l\})) \leqslant H_i(\{x_l\}_{l\in\{1,2\}}, p_i^*(\{x_l\}), p_r^*(\{x_l\})).$$

Заметим, что стратегией авиакомпании в модели 1, описанной в Главе 1, так же является пара векторов (x_i, p_i). Но есть существенные различия как в характеристиках, которые влияют на модель, так и в модели, описывающей выбор пассажиров.

Выбор пассажиров в модели 1 на каждом направлении зависит только от характеристик рейса каждой из авиакомпаний. В характеристики рейса включены: цена, время перелета, индикатор прямого рейса, геометрическое среднее среднедушевых доходов населения в регионах, где расположены аэропорты отправления и прибытия, и расстояние между аэропортами отправления и прибытия.

А на выбор пассажиров представленной модели влияют: цены авиабитетов, количество рейсов, время в пути, а так же аналогичные характеристики для других видов транспорта (автобусы, поезда).

Глава 3. Исследование существования равновесия

3.1 Равновесие в задаче ценообразования

Будем находить равновесие $\{p_i^*\}_{i \in N}$ в задаче ценообразования как предел последовательности наилучших ответов.

Наилучшим ответом $\hat{p}_{e_j,i}$ авиакомпании i на цену $p_{e_j,r} = p'_{e_j,r}$ другой авиакомпании, называется $p_{e_j,i}$, максимизирующее функцию прибыли $h_{e_j,i}(p_{e_j,i}, p_{e_j,r} = p'_{e_j,r})$. Покажем, что функцию прибыли можно считать выпуклой вверх. Для этого достаточно, чтобы выполнялось:

$$\frac{\partial^2 h_{e_j,i}(p_{e_j,i}, p_{e_j,r})}{\partial^2 p_{e_j,i}} < 0,$$

для всех возможных значений $p_{e_j,i}, p_{e_j,r}$.
Аналитически доказательство данного факта вызывает трудности, поэтому были численно построены графики функции ω_{ij}:

$$\omega_{ij} = \frac{\partial^2 h_{e_j,i}(p_{e_j,i}, p_{e_j,r})}{\partial^2 p_{e_j,i}}$$

для различных значений параметров модели.
Для этого были взяты примерные значения констант (из-за отсутствия данных оценить их самостоятельно не представляется возможным) из подобных моделей других авторов. Затем, рандомно изменялись характеристики модели и строились графики для широкого диапозона значений цен (от себестоимости перевозки одного пассажира и выше). Несколько получившихся графиков представлены на рисунках ниже (Рис.1 - 4). По осям Ox, Oy расположены цены, а по вертикальной оси — значения функции. Все получившиеся графики показали, что преположение о выпуклости функции прибыли явняется истинным для заданных параметров.

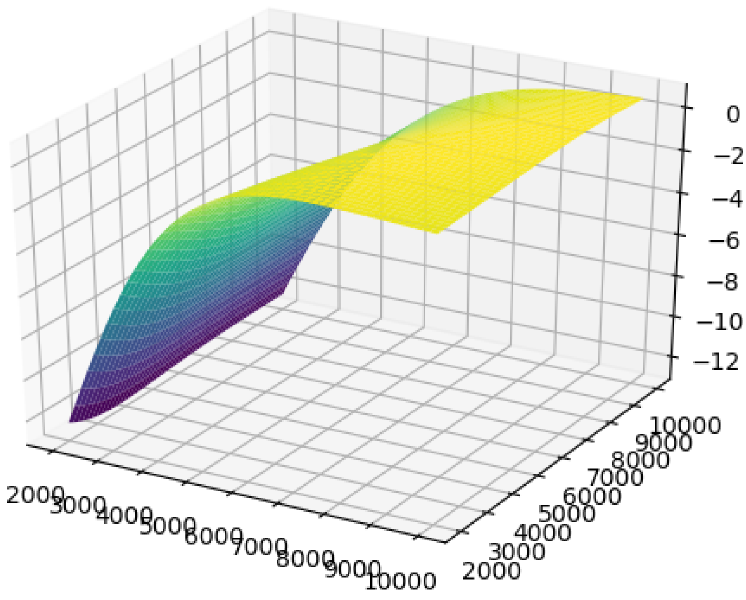
0
−2
−4
−6
−8
−10
−12
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
10000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
10000

Рис. 1

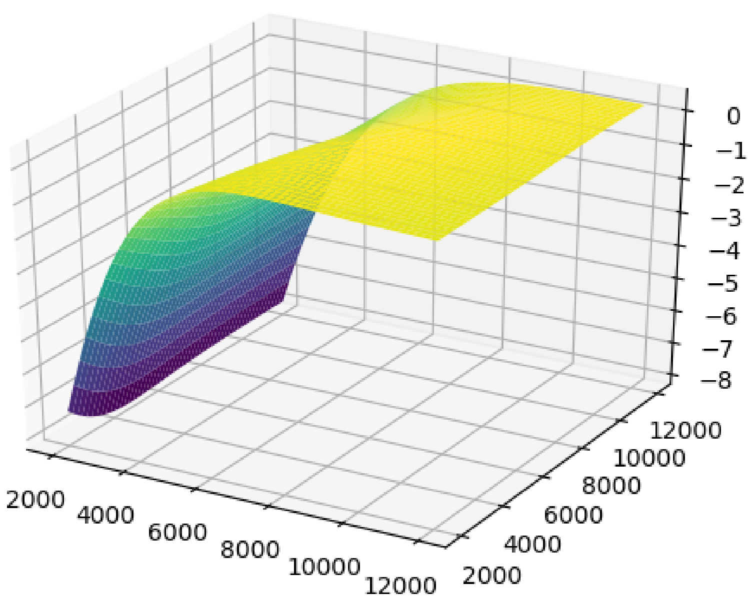
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
2000
4000
6000
8000
10000
12000
2000
4000
6000
8000
10000
12000

Рис. 2

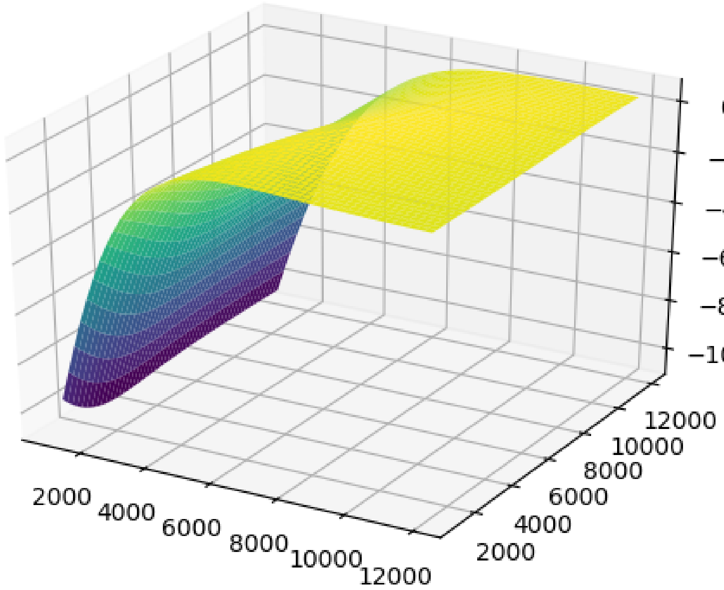
0
−2
−4
−6
−8
−10
2000
4000
6000
8000
10000
12000
2000
4000
6000
8000
10000
12000

Рис. 3

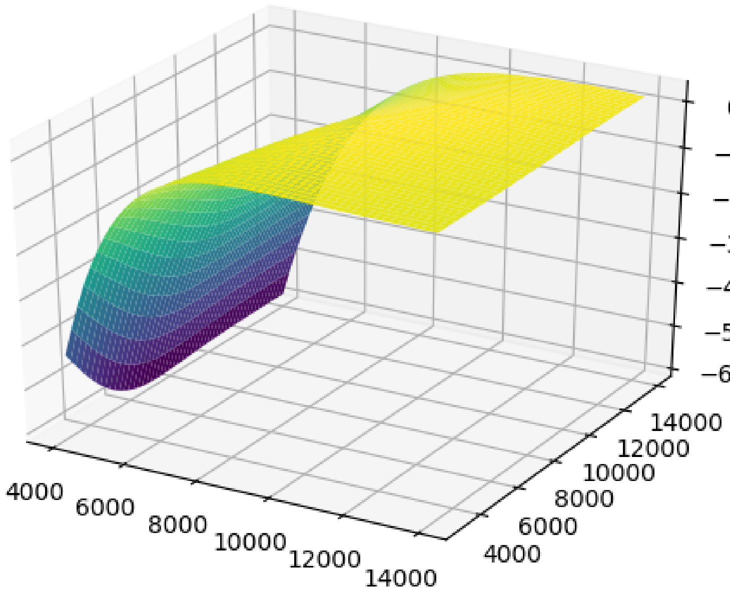
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
4000
6000
8000
10000
12000
14000
4000
6000
8000
10000
12000
14000

Рис. 4

При принятии предположения о выпуклости функции прибыли, можно утверждать, что наилучший ответ игрока i на стратегии других игроков является решением уравнения:

$$\frac{\partial h_{e_j,i}(p_{e_j,i}, p_{e_j,r} = p'_{e_j,r})}{\partial p_{e_j,i}} = 0.$$

Далее возникает вопрос о схоимости последовательности наилучших ответов. В статье [15] показано, что для того, чтобы считать игру ценообразования супермодульной, достаточно, чтобы на каком-либо замкнутом и ограниченном множестве в $\mathbb{R}^2$ значений $(p_{e_j,1}, p_{e_j,2})$ выполнялось :

$$\frac{\partial^2 h_{e_j,i}(p_{e_j,1}, p_{e_j,2})}{\partial p_{e_j,1} \partial p_{e_j,2}} > 0, i \in \{1, 2\}. \tag{1}$$

Это условие означает, что при увеличении цены одной компанией, второй тоже выгодно поднять цену.
Аналогично построим графики функции ϕ_{ij} для различных значений характеристик.

$$\phi_{ij} = \frac{\partial^2 h_{e_j,i}(p_{e_j,1}, p_{e_j,2})}{\partial p_{e_j,1} \partial p_{e_j,2}}, i \in \{1, 2\}.$$

Также следует принять во внимание, что вид функции прибыли не зависит от номера авиакомпании или направления, поэтому достаточно исследовать h_i при разных значениях характерискик для одной авиакомпании на оном направлении.
Получившиеся графики представлены на Рис.5-7.

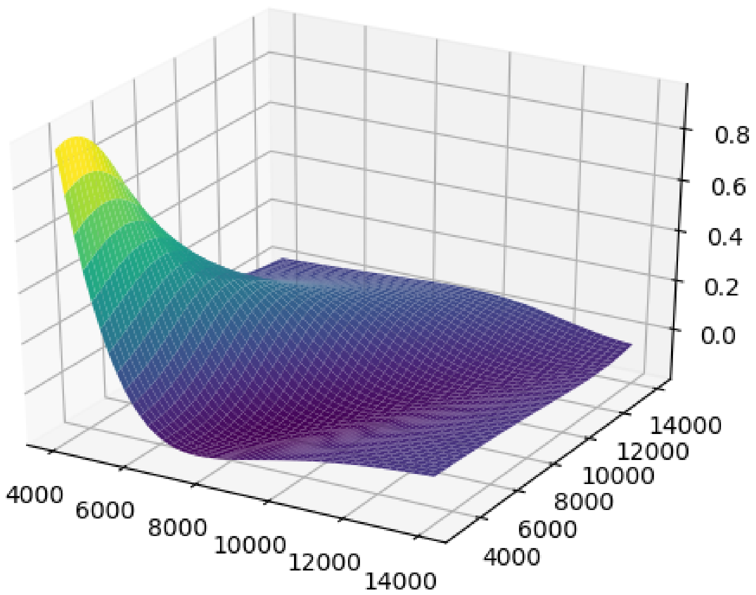
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
4000
6000
8000
10000
12000
14000
14000
12000
10000
8000
6000
4000

Рис. 5

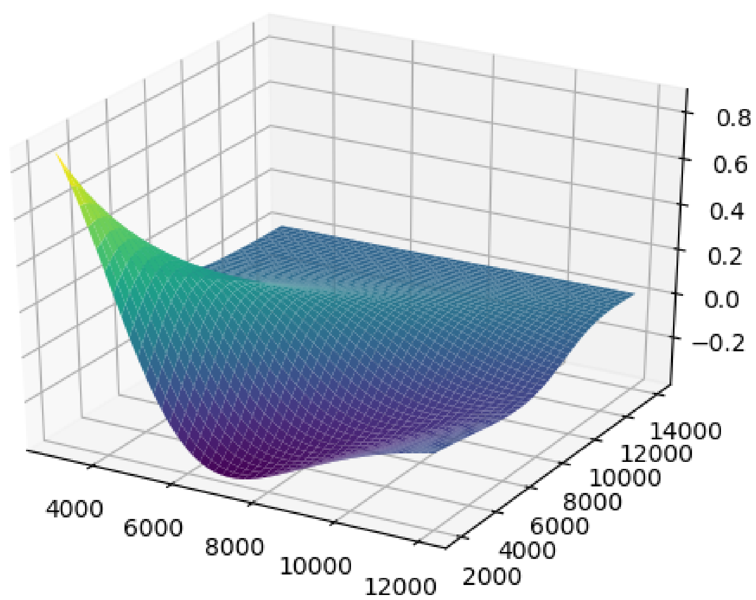
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
4000
6000
8000
10000
12000
14000
12000
10000
8000
6000
4000
2000

Рис. 6

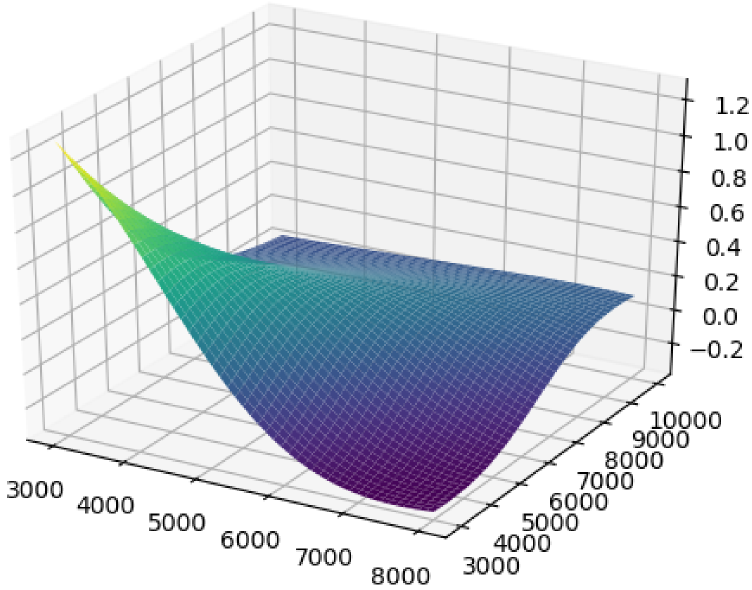

Рис. 7

Полученные результаты можно интерпретировать следующим образом: для широкого диапозона значений авиакомпаниям выгодно поднимать цену в случае, когда пднял цену конкурент, но начиная с определенного большого значения цены $P_{e_j,i}$, авиакомпании выгодно снизить цену вне зависимости от действий конкурента. Поэтому можно выделить замкнутое и ограниченное множество в $\mathbb{R}^2$ значений $(p_{e_j,1}, p_{e_j,2})$, удослетворяющее условию 1.

В работе [10] доказано, что равновесие Нэша для супермодульной игры существует и единственно (множество стратегий в таком случае ограничено множеством, на котором выполняется условие 1). Откуда можно выдвенуть предположение, что для широкого набора параметров модели последовательность наилучших ответов игроков сходится. Что подтверждает вид графика функции прибыли на Рис.8.

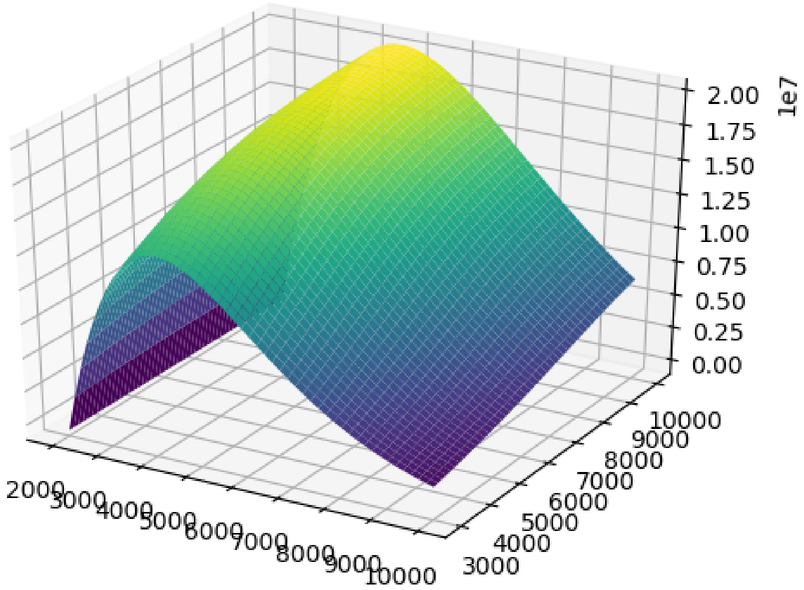

Рис. 8: Прибыль авиакомпании на одном направлении ($d = 100000$).

3.2 Равновесие в задаче размещения

Для решения задачи размещения необходимо определить функцию доли потенциального пассажиропотока в случае единственной авиакомпании на ребре. Так как пассажир не может выбрать авиакомпанию, будем считать, что полезность отсутствующей авиакомпании стремится к $-infty$. Выбор пассажира тогда происходит только в один этап и описывается мультиноминальной логит-моделью. Тогда доля авиакомпании на ребре e_j равна:

$$M_{e_j} = \frac{\exp\left(V_{e_j,air}\right)}{\sum_{s=1}^{4}\exp(V_{e_j,s})}, e_j \in E,$$

где $s \in \{road, rail, air, n\}$ — показатель вида транспорта (автобус, поезд, самолет, отказ от путешествия), $V_{e_j,air} = qV_{e_j} + k_{air}, V_{e_j}$ — полезность авиакомпании на ребре e_j.

Теорема. При неизменной цене, доля авиакомпании на направлении e_j при остутствии конкуренции с другой авиакомпанией не меньше, чем в условиях конкуренции.

Доказательство:

Доля авиакомпании i в условиях конкуренции равна

$$M_{e_j,i} = \frac{\exp\left(V_{e_j,airline_i}\right)}{\sum_{i=1,2}\exp(V_{e_j,airline_i})} \cdot \frac{\exp\left(V_{e_j,air}\right)}{\sum_{s=1}^{4}\exp(V_{e_j,s})} =$$

$$= \frac{\exp\left(V_{e_j,airline_i}\right)}{\sum_{i=1,2}\exp(V_{e_j,airline_i})} \cdot \frac{\exp\left(q\cdot\ln\left[\sum_{i=1,2}\exp(V_{e_j,airline_i})\right] + k_{air}\right)}{\sum_{s=1}^{4}\exp(V_{e_j,s})} =$$

$$= \frac{\exp\left(V_{e_j,airline_i}\right)}{\sum_{i=1,2}\exp(V_{e_j,airline_i})} \cdot \frac{\exp(k_{air})\cdot\left(\exp(V_{e_j,airline_1}) + \exp(V_{e_j,airline_2})\right)^q}{\sum_{s=1}^{4}\exp(V_{e_j,s})}$$

$$\left(\exp(V_{e_j,airline_1}) + \exp(V_{e_j,airline_2})\right)^q =$$
$$= \exp(V_{e_j,airline_1})^q \cdot \left(1 + \frac{\exp(V_{e_j,airline_2})}{\exp(V_{e_j,airline_1})}\right)^q$$

Так как

$$\frac{\exp(V_{e_j,airline_2})}{\exp(V_{e_j,airline_1})} > 0$$

и $0 \leqslant q \leqslant 1$ (по смыслу параметра, в статье [14] $q = 0.65$), можно воспользоваться неравенством Бернулли:

$$\exp(V_{e_j,airline_1})^q \cdot \left(1 + \frac{\exp(V_{e_j,airline_2})}{\exp(V_{e_j,airline_1})}\right)^q \leqslant$$

$$\leqslant \exp(V_{e_j,airline_1})^q \cdot \left(1 + q\cdot\frac{\exp(V_{e_j,airline_2})}{\exp(V_{e_j,airline_1})}\right)$$

Подставляя в выражение распределения пассажирапотока, получаем:

$$M_{e_j,i} \leqslant \frac{\exp\left(V_{e_j,airline_i}\right)}{\sum_{i=1,2}\exp(V_{e_j,airline_i})} \cdot \frac{\exp(k_{air}) \cdot \exp(V_{e_j,airline_1})^q \cdot \left(1 + q \cdot \dfrac{\exp(V_{e_j,airline_2})}{\exp(V_{e_j,airline_1})}\right)}{\sum_{s=1}^{4}\exp(V_{e_j,s})}$$

Не нарушая общности можем считать, что $i = 1$:

$$M_{e_j,i} \leqslant \frac{\exp(k_{air}) \cdot \exp(V_{e_j,airline_1})^q \cdot \left(\exp(V_{e_j,airline_1}) + q \cdot \exp(V_{e_j,airline_2})\right)}{\sum_{i=1,2}\exp(V_{e_j,airline_i}) \cdot \sum_{s=1}^{4}\exp(V_{e_j,s})} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\exp(q \cdot V_{e_j,airline_1} + k_{air})}{\sum_{s=1}^{4}\exp(V_{e_j,s})}$$

Заметим, что числитель последнего выражения равен числителю для M_{e_j}:

$$M_{e_j} = \frac{\exp\left(V_{e_j,air}\right)}{\sum_{s=1}^{4}\exp(V_{e_j,s})}, e_j \in E,$$

а знаменатель при этом больше, так как выражение

$$V_{e_j,air} = q \cdot \ln\left[\sum_{i=1,2}\exp(V_{e_j,airline_i})\right] + k_{air},$$

входящее в сумму числителя, уменьшается при выходе одной авиакомпании из конкуренции, когда как остальные слагаемые числителя неизменны. Откуда следует требуемое.

Следствие. При равновесных ценах прибыль авиакомпании на направлении e_j при остутствии конкуренции с другой авиакомпанией не меньше, чем в условиях конкуренции.

Доказательство:

Так как при неизменной цене доля не уменьшается, соответственно прибыль тоже не может уменьшиться. Соответственно, если предположить, что условие теоремы не выполнено и максимум прибыли авиакомпании в ситуации без конкуренции меньше, чем в конкуренции. То подставляя в функцию прибыли без конкуренции значение равновесной цены для случаю конкуренции, приходим к противоречию.

Теорема о существовании и единственности равновесия в задаче размещения для случая, когда выполнено условие из следствия выше, доказано в работе [6].

Глава 4. Реализация

Реализация проведения численного эксперимента проведена посредством языка программирования Python.

Описание реализованных функций:

`Price_Balance_two_players`

— реализует алгоритм нахождения ценового равновесия для предложенной в Главе 2 модели для случая конкуренции двух авиакомпаний. Нахождение наилучшего ответа игрока произведено методом Ньютона с предварительной оценкой начального приближения.

`Price_Balance_one_players`

— реализует алгоритм нахождения ценового равновесия для предложенной в Главе 2 модели для случая отсутствия конкуренции.

`Price_Balance_n_players`

— реализует алгоритм нахождения ценового равновесия для описанной в Главе 1.1 модели 1 для n авиакомпаний.

`payoffs`

— реализует алгоритм расчета выигрышей игрока на направлениях в зависимости от размещения ресурсов соперником и ценовых равновесий в условиях наличия и отсутствия конкуренции.

`PlayersPlacement`

— реализует алгоритм решения задачи размещения игроков (одинаков как для предложенной модели, так и для модели, описанной в Главе 1.1).

Для программной реализации алгоритмов были использованы следующие библиотеки языка программирования Python:

SymPy — библиотека для выполнения символьных вычислений,

NumPy — библиотека, предназначенная для работы с многомерными массивами данных,

matplotlib — библиотека для визуализации данных.

Описание алгоритма решения задачи размещения для двух игроков:

Алгоритм принимает на вход количество единиц ресурсов двух игроков m_1 и m_2 соответственно, а также выигрыши игроков при ценовом равновесии в условиях наличия и отсутствия конкуренции (которые могут быть получены как результат работы соответствующих функций) и возвращает векторы размещений ресурсов игроками.

На первой итерации предполагается, что первый игрок разместил все m_1 единиц ресурсов оптимальным образом согласно вектору выигрышей при ценовом равновесии для случая отсутствия конкуренции.

С помощью функции $payoff$ рассчитывается вектор выигрышей и размещается 1 единица ресурса вторым игроком. Если второй игрок разместил ресурс на свободном ребре, то выигрыш первого игрока не изменяется и обеспечивается равновесие на данной итерации. В случае, если второй игрок разместил разместил ресурс на занятом ребре, то с помощью функции $payoff$ пересчитываются выигрыши для первого игрока и запускается алгоритм поиска равновесия на данной итерации.

На k-той итерации алгоритма второй игрок размещает k единиц ресурса, пересчитываются выигрыши первого игрока и соответствующий ветор размещения, находится равновесие. Алгоритм продолжается до тех пор, пока второй игрок не разместит все m_2 единиц ресурсов.

Пример работы программы:

Нахождение равновесных цен для модели 1. Вектор характеристик взят для направления Санкт-Петербург — Новосибирск. Результат представлен в таблице 1.

Таблица 1

Авиакомпания	Время перелета(ч)	Индикатор прямого рейса	Показатель дохода населения(руб)	Расстояние (тыс. км.)	Цена в равновесии и на рынке (руб)	Доля в пассажиропотоке
Аэрофлот	4,6	1	50000	3,1	7067 (10000)	0.65
Уральские авиалинии	7,6	0	50000	3,1	6170 (8800)	0.26
Hahn Air System	13	0	50000	3,1	5745 (10600)	0.07
S7	18	0	50000	3,1	6342 (12800)	0.01

Необходимо отметить, что цена равновесия несколько занижена, так как при подсчете себестоимости учитывались только затраты на авиатопливо, расчитанные по источникам [7] и [4].

Нахождение прибыли для предложенной модели:
Результаты представлены в таблице 2, характеристики других видов транпорта для всех примеров неизменны.

Таблица 2

Авиакомпания	Издержки	Частота	Время в пути	Прибыль
Авиакомпания 1	2000	7	2	14611296
Авиакомпания 2	2000	7	2	14611296
Авиакомпания 1	2500	2	3	2315771
Авиакомпания 2	1500	6	2	21123346
Авиакомпания 1	3800	1	2	1073386
Авиакомпания 2	5000	3	7	1250734
Авиакомпания 1	4000	3	9	802623
Авиакомпания 2	3500	5	4	6633342
Авиакомпания 1	4000	10	5	6037912
Авиакомпания 2	4500	8	6	2832770

Заключение

В ходе работы были рассмотрены существующие модели рынка авиаперевозок и на базе одной из описанных моделей была создана новая модель конкуренции двух авиакомпаний. Были доказаны некоторые свойства предложенной модели, с помощью которых было установлено существование и единственность равновесия Нэша в игре размещений. Также численно было показано существование равновесия Нэша для задачи ценообразования. Проведена реализация нахождения этих равновесий посредством языка Python. Код реализации выложен в [9].

Список литературы

[1] Гао X., Мазалов В.В., Ху Ц. Щипцова А.В. Равновесие в игре размещения на рынке авиаперевозок // Труды Карельского научного центра Российской академии наук, №4. 2014. С. 41-47.

[2] Мальцев Андрей Александрович, Матвеева А.В. Международные пассажирские авиаперевозки: детерминанты взрывного роста // Управленец. 2018. №3.

[3] Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Шевкопляс Е. В. Теория игр. // СПб: БХВ-Петербург, 2012, 432 с.

[4] Федеральное агентство воздушного транспорта. https://favt.ru/dejatelnost-ajeroporty-i-ajerodromy-ceny-na-aviagsm/

[5] Щипцова А.В. Мультиномиальный логит-анализ и конкурентное поведение на рынке // Труды Карельского научного центра Российской академии наук, №5. 2011. С. 120-124.

[6] Щипцова А.В. Теоретико игровые модели размещения ресурсов и их приложения: дис. ... канд. ф-м. наук: 05.13.18. Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра Российской академии наук. Петрозаводск. 2013.

[7] Airlines inform: https. //www.airlines-inform.ru/commercial-aircraft/boeing-737-300.html

[8] Andrew Caplin and Barry Nalebuff. Aggregation and Imperfect Competition: On the Existence of Equilibrium // Econometrica Vol. 59, No. 1 (Jan., 1991), pp. 25-59

[9] https://github.com/Russkova/pricingProblem

[10] Jonathan Levin. Supermodular Games // Stratford University. 2006.

[11] Kidokoro, Yukihiro. “Benefit Estimation of Transport Projects-Three Basic Models and Their Implications -.” (2003).

[12] M. Hansen, Y. Liu. Airline competition and market frequency: A comparison of thes-curve and schedule delay models// Transportation Research Part B 78 (2015) 301–317

[13] McFadden D. Conditional Logit Analysis of qualitative Choice Behavior/ Ed. P. Zarembka , Frontiers in econometrics. 1973. Academic Press: New York. P. 105-142.

[14] Pietro Zito and Giuseppe Salvo and Luigi La Franca. Modelling Airlines Competition on Fares and Frequencies of Service by Bi-level Optimization // Procedia - Social and Behavioral Sciences(20).2011.pp. 1080–1089

[15] Reed Harder and Vikrant Vaze.Two-Stage Game Theoretic Modelling of Airline Frequency and Fare Competition. // SIGMETRICS Perform. Eval. Rev. 44.2017.

[16] Vaze, V., and C. Barnhart (2012a). Modeling Airline Frequency Competition for Airport Congestion Mitigation. Transportation Science. Vol. 46, No. 4, pp 512–535.