Санкт-Петербургский государственный университет

Бабенышев Сергей Станиславович

Выпускная квалификационная работа

Расчет деформирования плоской ортотропной пластинки методом суперпозиции

Уровень образования: бакалавриат

Направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Основная образовательная программа СВ.5005.2017 «Прикладная математика, фундаментальная информатика и программирование»

Профиль «Математическое и программное обеспечение

вычислительных машин»

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,

профессор кафедры информационных систем,

заведующий кафедрой механики управляемого движения,

Матросов Александр Васильевич

Рецензент:

доктор технических наук,

доцент ГУМРФ,

Ширунов Гурий Николаевич

Санкт-Петербург

2021 г.

**Содержание**

[Введение 3](#_Toc72823405)

[Постановка задачи 3](#_Toc72823406)

[Обзор литературы 5](#_Toc72823407)

[Глава 1. Введение 5](#_Toc72823408)

[1.1 Мотивация 5](#_Toc72823409)

[1.2 Постановка задачи 6](#_Toc72823410)

[1.3 Доступные программные средства 6](#_Toc72823411)

[Глава 2. Определение воздействия операторов МНФ на тригонометрические функции 7](#_Toc72823412)

[2.1 Нахождение 7](#_Toc72823413)

[2.1.1 Нахождение 7](#_Toc72823414)

[2.1.2 Нахождение 8](#_Toc72823415)

[2.1.3 Нахождение 9](#_Toc72823416)

[2.1.4 Нахождение 10](#_Toc72823417)

[2.1.5 Нахождение 11](#_Toc72823418)

[2.2 Нахождение 12](#_Toc72823419)

[2.3 Нахождение 14](#_Toc72823420)

[2.3.1 Нахождение 14](#_Toc72823421)

[2.3.2 Нахождение 15](#_Toc72823422)

[2.3.3 Нахождение 17](#_Toc72823423)

[2.3.4 Нахождение 17](#_Toc72823424)

[2.3.5 Нахождение 19](#_Toc72823425)

[2.4 Нахождение 20](#_Toc72823426)

[Глава 3. Теоретическая часть 22](#_Toc72823427)

[Глава 4. Расчётная часть 28](#_Toc72823428)

[Глава 5. Анализ экспериментов 30](#_Toc72823429)

[Заключение 32](#_Toc72823430)

[Список литературы 33](#_Toc72823431)

# Введение

В решении многих задач механики в соответствии с современными запросами науки и техники являются эффективными приближенные методы, предусматривающие использование вычислительных машин.

Неотъемлемой частью разработки разнообразных строительных конструкций является совершенствование методов расчёта. Это обусловлено тем, что с развитием технологий возрастают требования к надёжности конструкций и эффективности использования строительных материалов. Удовлетворению ожесточающихся требований способствует развитие методов расчёта, позволяющих в достаточной мере учитывать особенности реального поведения конструкций. Эти методы должны обладать высокой точностью и позволять использовать вычислительную технику.

За последние годы было разработано большое количество эффективных методов расчета как численных, так и аналитических. Одним из приближенных методов решения краевых задач теории упругости является метод начальных функций (МНФ), с помощью которого можно решать в том числе и задачи прикладной теории упругости, в частности, о пластинах с различными условиями закрепления и условиями нагрузки.

Мы рассмотрим одну из таких задач — задачу расчёта НДС ортотропного тела прямоугольного сечения, у которого по верхней грани действует равномерно-распределённая нагрузка, нижняя грань свободна от каких-либо нагрузок, а боковые грани защемлены.

# Постановка задачи

Рассматривается задача плоской деформации ортотропного тела прямоугольного сечения, у которого по верхней грани действует равномерно-распределённая нагрузка , его нижняя грань свободна от каких-либо нагрузок, а боковые грани защемлены.

*x*

*y*

*O*

*h*

*a*

**Рис. 1.** Прямоугольная область с размерами  соответственно вдоль осей  и  в прямоугольной декартовой системе координат

В задаче рассматриваются следующие краевые условия:

, , , ,

, , , .

Здесь и – перемещения соответственно вдоль осей  и ,

,  — нормальные компоненты тензора напряжений,  — касательная компонента тензора напряжений, константы  являются коэффициентами пропорциональности в обобщенном законе Гука для плоской задачи линейной теории упругости:

.

Компоненты  выражаются через технические постоянные: ,  — модули растяжения-сжатия вдоль соответственно направлений  и ,  — модуль сдвига в плоскости , , — коэффициенты Пуассона (первый индекс означает направление действующего напряжения, а второй — направление деформации)

, , , 

Была поставлена задача исследования двух общих решений для упругого ортотропного прямоугольника, полученных методом суперпозиции. Общее решение строится как сумма решений МНФ с начальной линией и . Для первого решения начальные функции выбираются в виде , , ,  для решения МНФ с начальной линией и , , ,  для решения МНФ с начальной линией (так называемое решение по «синусам»). Для второго решения начальные функции выбираются в виде , , ,  для решения МНФ с начальной линией и , , ,  для решения МНФ с начальной линией (так называемое решение по «косинусам»). Исследовать для задачи изгиба защемленного по двум вертикальным сторонам ортотропного прямоугольника поведение этих двух решений:

1. Удовлетворяя методом коллокаций (в точках сторон прямоугольника) граничным условиям (ГУ) строим систему линейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов решения по «синусам», а потом по «косинусам». Сравниваем полученные решения, обращая особенное внимание на угловые точки.
2. Удовлетворяя методом наименьших квадратов (минимизация суммы квадратов разностей значений на границе, полученных с помощью решения, и заданного ГУ) граничным условиям (ГУ) строим систему линейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов решения по «синусам», а потом по «косинусам». Сравниваем полученные решения, обращая особенное внимание на угловые точки.

# Обзор литературы

Метод начальных функций, разработанный отечественными учеными А.С. Малиевым и В.З. Власовым, применяется для решения различных двумерных и пространственных задач теории упругости. Метод решения двумерных краевых задач теории упругости и строительной механики описан в работах В.В. Власова «Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики, 1975» [1] и Агарёва В. А. «Метод начальных функций для двумерных краевых задач теории упругости, 1963» [3]

Метод начальных функций – довольно капризный вычислительный метод. Малейшая неточность в вычислениях может привести к неправильной работе алгоритма. Александр Васильевич Матросов в работе «Вычислительная неустойчивость алгоритма метода начальных функций» [2] описал необходимую точность вычислений для получения правильных решений при различных длинах мантиссы и разном количестве слагаемых в рядах.

# Глава 1. Введение

## Мотивация

В современных механизмах, постройках используется большое количество материалов с различной устойчивостью к механическим воздействиям. Например, углеволокнит активно применяется в различных сферах жизни: в строительстве, самолётостроении, автомобилестроении и т.д. При проектировании новых механизмов необходимо знать точные максимальные нагрузки изделий из данного материала в различных условиях. В современном мире с развитием техники и появлением возможности использовать большое количество значащих знаков после запятой в вычислениях метод начальных функций обеспечивает высокую точность решений. В ходе работы мы произведём расчёт НДС ортотропной пластинки, сделанной из углеволокнита, что докажет целесообразность использования МНФ при решении подобных задач.

Метод начальных функций, как и любой другой вычислительный метод необходимо модернизировать. Мы получим результаты воздействия операторов метода начальных функций на тригонометрические функции, которые впоследствии будут использоваться для решения плоских задач теории упругости.

## Постановка задачи

Рассмотрим плоскую задачу теории упругости. Уравнения равновесия в перемещениях (уравнения Ламе) для такой задачи в декартовой ортогональной системе координат в отсутствие массовых сил для прямолинейно-анизотропного тела в матрично-операторной форме могут быть записаны в виде

где – вектор-столбец перемещений соответственно вдоль осей и , а W – матрица операторов Ламе.

Для решения плоских задач теории упругости применяется метод начальных функций. Если НФ заданы на начальной линии или , то решение системы уравнений (1) представимо в виде , где – вектор компонентов напряженно-деформированного состояния, – вектор начальных функций, – матрица операторов метода начальных функций. Для получения решения системы (1) операторами МНФ воздействуют на начальные функции, которые могут быть заданы в разных видах.

Необходимо вычислить результаты воздействия операторов метода начальных функций на тригонометрические функции, затем, по имеющемуся решению по синусам, удовлетворяя методом коллокаций (в точках сторон прямоугольника) граничным условиям (ГУ) построить систему линейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов, с полученными коэффициентами рассчитать НДС ортотропного тела.

## Доступные программные средства

Расчёты производятся в операционной системе Windows 10 Pro x64. Для получения результатов используются Python 3.9 c библиотеками mpmath (1.2.1), numpy (1.20.3), matplotlib (3.4.2), scipy (1.6.3), pyparsing (2.4.7) и Maple 2021.

# Глава 2. Определение воздействия операторов МНФ на тригонометрические функции

## 2.1 Нахождение

Если начальные функции заданы на начальной линии , то решение системы уравнений (1) может быть получено в следующем виде:

Если вектор начальных функций на начальной линии задать как , то вектор компонентов НДС будет выглядеть как , где , , - сумма результатов воздействия операторов на соответствующие тригонометрические функции в представлениях начальных функций:

### 2.1.1 Нахождение

Для того, чтобы получить результат воздействия операторов МНФ на соответствующие тригонометрические функции, необходимо разложить оператор в степенной ряд, а затем степенью соответствующего оператора дифференцирования или воздействовать на соответствующую тригонометрическую функцию.

### 2.1.2 Нахождение

+ +

### 2.1.3 Нахождение

### 2.1.4 Нахождение

### 2.1.5 Нахождение

## 2.2 Нахождение

Если вектор начальных функций задан как:

,

вектор компонентов НДС:

,

где , . То - сумма результатов воздействия операторов на соответствующие тригонометрические функции в представлениях начальных функции, выглядит следующим образом:

Так как подробные результаты воздействия операторов МНФ , , , на начальные функции, заданные на начальной линии , представлены в предыдущей главе, ниже будут приведены только суммы результатов воздействия операторов на .

+

++

2.3 Нахождение

Аналогично и для начальных функций, заданных на x=0 в виде

. Тогда решениями будут

где , .

### 2.3.1 Нахождение

+

### 2.3.2 Нахождение

+

### 2.3.3 Нахождение

+

### 2.3.4 Нахождение

### 2.3.5 Нахождение

## 2.4 Нахождение

Пусть задан вектор начальных функций: . Тогда решениями будут , где ,

.

+

+

# Глава 3. Теоретическая часть расчёта НДС ортотропного тела

Производим расчёт НДС ортотропного тела прямоугольного сечения  (, *a*=2м, *h*=1м). Материалом служит углеволокнит с высокомодульными углеродными волокнами со следующими механическими характеристиками , , , ,  (углеродные волокна направлены вдоль оси ).

По верхней грани  действует равномерно-распределенная нагрузка интенсивности , нижняя грань свободна от каких-либо нагрузок. Боковые грани  «защемлены» (перемещения  и  равны нулю). Таким образом, неизвестные коэффициенты ,  компонентов общего решения в данной задаче определяются из следующих граничных условий:

, , , ,

, , , .

, , , 

Взято решение НДС по синусам. Представления компонентов НДС выглядят следующим образом:

 (3.1)



 (3.2)



 (3.3)









 (3.4)









 (3.5)







Для определения констант , входящих в общее решение, используется метод коллокации. Для этого в рядах в компонентах НДС ограничиваем , . Всего неизвестных . Принимаем . В этом случае имеем неизвестных. Выбираем на каждой стороне прямоугольника по М внутренних точек. Эти точки с учетом того, что на каждой стороне 2 граничных условия, дадут нам 8M уравнений. Еще выбираем по одной точке (они не равны уже выбранным) на сторонах . Это даёт нам еще 4 уравнения. Система замкнулась – количество уравнений теперь равняется количеству неизвестных.

Следующим этапом необходимо решить полученную систему линейных алгебраических уравнений.

# Глава 4. Расчётная часть

Для расчётов будем использовать Python и Maple. Для обеспечения нужной точности вычислений установим 100 значащих знаков после запятой. Задаём компоненты НДС из предыдущей главы следующим образом: функция получает на вход . Производится расчёт коэффициентов при каждой из неизвестных. Функция возвращает полученные коэффициенты в порядке: коэффициент при .

Задание функции :

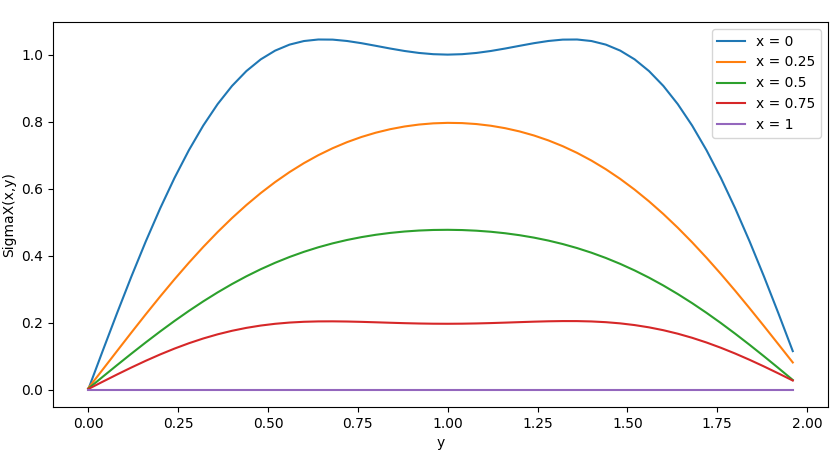
**def** u(x, y):  
 h1\_s0 = mpmathify(H22 \* H66 \* (alpha\_1 \*\* 2 - alpha\_2 \*\* 2) / d\_)  
 h4\_s0 = mpmathify(H22 \* (alpha\_1 \*\* 2 - alpha\_2 \*\* 2) \* y / d\_)  
 g2\_s0 = mpmathify(0)  
 g4\_s0 = mpmathify(0)  
 h1\_sm = []  
 **for** i **in** range(1, M + 1):  
 alpha\_i = alpha(i)  
 h1\_sm.append( mpmathify(H66 \* ((H12 + alpha\_1 \*\* 2 \* H22) \* cosh(alpha\_1 \* alpha\_i \* y) - (H12 + alpha\_2 \*\* 2 \* H22) \* cosh(alpha\_2 \* alpha\_i \* y)) / d\_ \* cos(alpha\_i \* x)) )  
 h2\_sm = []  
 **for** i **in** range(1, M + 1):  
 alpha\_i = alpha(i)  
 h2\_sm.append( mpmathify(H66 \* (- (H12 + alpha\_1 \*\* 2 \* H22) / alpha\_1 \* sinh (alpha\_1 \* alpha\_i \* y) + (H12 + alpha\_2 \*\* 2 \* H22) / alpha\_2 \* sinh(alpha\_2 \* alpha\_i \* y)) / d\_ \* cos(alpha\_i \* x)) )  
 h3\_sm = []  
 **for** i **in** range(1, M + 1):  
 alpha\_i = alpha(i)  
 h3\_sm.append( mpmathify((H12 + H66) \* ((cosh(alpha\_2 \* alpha\_i \* y) - cosh(alpha\_1 \* alpha\_i \* y)) / alpha\_i) / d\_ \* cos(alpha\_i \* x)) )  
 h4\_sm = []  
 **for** i **in** range(1, M + 1):  
 alpha\_i = alpha(i)  
 h4\_sm.append( mpmathify(((-H66 + alpha\_1 \*\* 2 \* H22) / (alpha\_1 \* alpha\_i) \* sinh(alpha\_1 \* alpha\_i \* y) + (H66 - alpha\_2 \*\* 2 \* H22) / (alpha\_2 \* alpha\_i) \* sinh(alpha\_2 \* alpha\_i \* y)) / d\_ \* cos(alpha\_i \* x)) )  
 g1\_sn = []  
 **for** i **in** range(1, M + 1):  
 beta\_i = beta(i)  
 g1\_sn.append( mpmathify(((-H11 \* H22 + H12 \*\* 2 + H12 \* H66 + alpha\_\_1 \*\* 2 \* H11 \* H66) \* cosh(alpha\_\_1 \* beta\_i \* x) + (H11 \* H22 - H12 \*\* 2 - H12 \* H66 - alpha\_\_2 \*\* 2 \* H11 \* H66) \* cosh(alpha\_\_2 \* beta\_i \* x)) / d\_\_ \* sin(beta\_i \* y)) )  
 g2\_sn = []  
 **for** i **in** range(1, M + 1):  
 beta\_i = beta(i)  
 g2\_sn.append( mpmathify(H66 \* ((H22 + alpha\_\_1 \*\* 2 \* H12) / alpha\_\_1 \* sinh(alpha\_\_1 \* beta\_i \* x) - (H22 + alpha\_\_2 \*\* 2 \* H12) / alpha\_\_2 \* sinh(alpha\_\_2 \* beta\_i \* x)) / d\_\_ \* sin(beta\_i \* y)) )  
 g3\_sn = []  
 **for** i **in** range(1, M + 1):  
 beta\_i = beta(i)  
 g3\_sn.append( mpmathify(((- H22 + alpha\_\_1 \*\* 2 \* H66) / (alpha\_\_1 \* beta\_i) \* sinh(alpha\_\_1 \* beta\_i \* x) + (H22 - alpha\_\_2 \*\* 2 \* H66) / (alpha\_\_2 \* beta\_i) \* sinh(alpha\_\_2 \* beta\_i \* x)) / d\_\_ \* sin(beta\_i \* y)) )  
 g4\_sn = []  
 **for** i **in** range(1, M + 1):  
 beta\_i = beta(i)  
 g4\_sn.append( mpmathify((H12 + H66) \* ((cosh(alpha\_\_1 \* beta\_i \* x) - cosh(alpha\_\_2 \* beta\_i \* x)) / beta\_i) / d\_\_ \* sin(beta\_i \* y)) )  
  
 **return** (h1\_s0, h4\_s0, g2\_s0, g4\_s0, \*h1\_sm, \*h2\_sm, \*h3\_sm, \*h4\_sm, \*g1\_sn, \*g2\_sn, \*g3\_sn, \*g4\_sn)

Функции задаются аналогично. Используя данные функции формируем матрицу уравнения , удовлетворяя граничным условиям (например, первые M строк получаются из , где выбирается как M равноудалённых точек из ).

Для повышения точности полученную систему решаем в Maple. После получения неизвестных коэффициентов строим графики функций в сечениях  (), в сечениях .

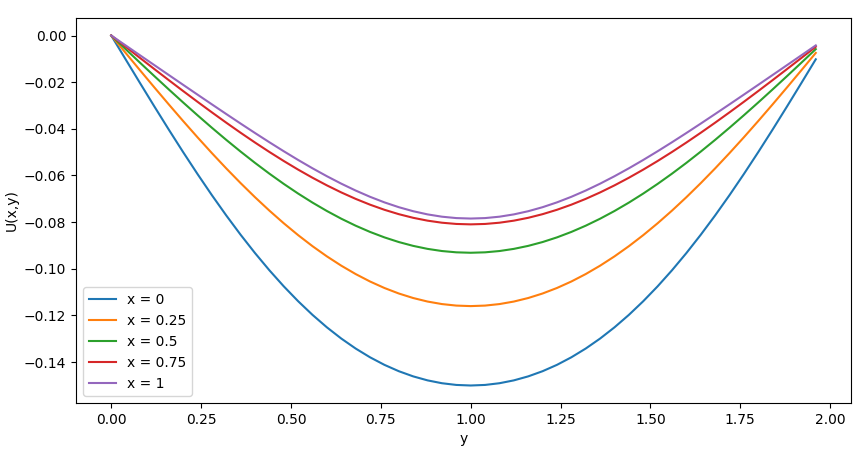
# Глава 5. Анализ экспериментов

В результате расчёта НДС ортотропного тела были получены следующие результаты:



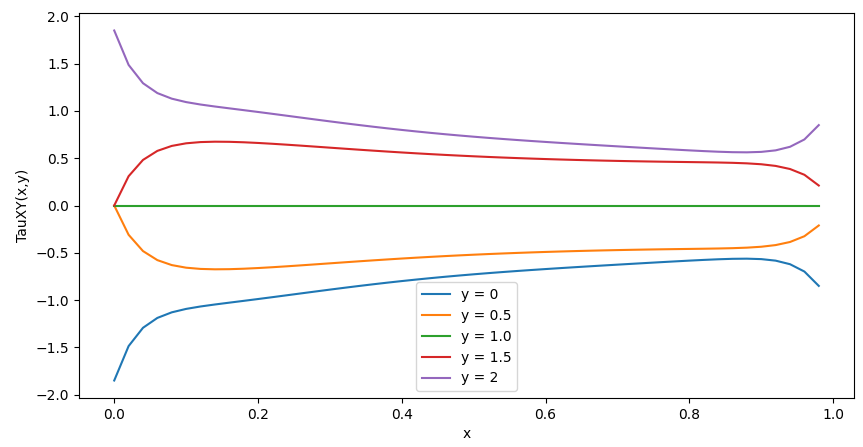
**Рис.5.1.** Безразмерные нормальные напряжения в горизонтальных сечениях

На (Рис.5.1) мы можем видеть, как распределяется напряжение внутри пластинки при воздействии напряжения на сторону x = 0. Наибольшее напряжение на горизонтальных срезах происходит в середине пластины (при y = 1).

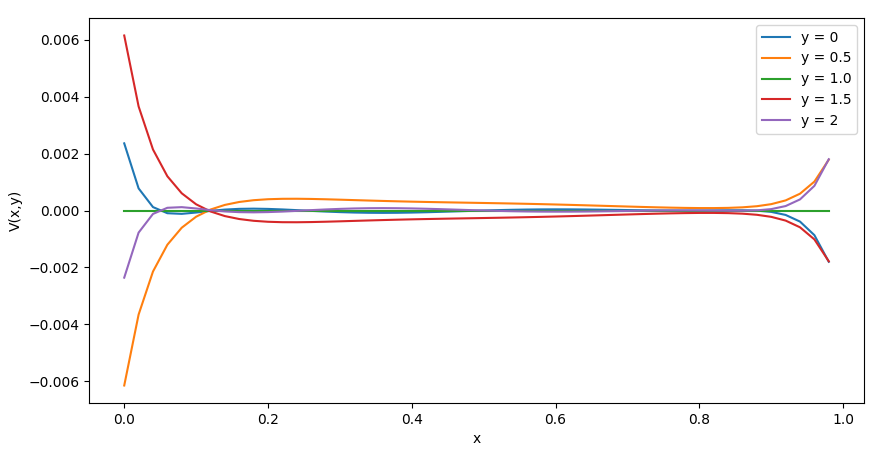


**Рис.5.2.** Перемещения в горизонтальных сечениях

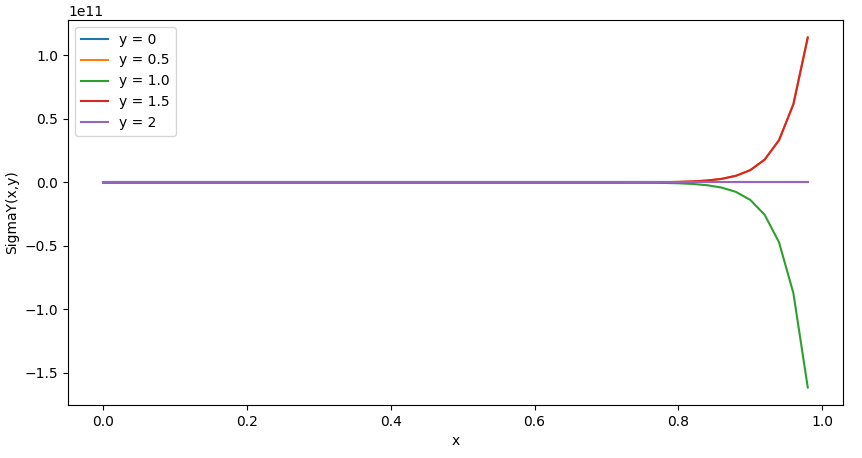
Больше всего пластинка прогибается в сечении x = 0, также изгиб имеет место при x = 1, где нет внешней нагрузки.



**Рис.5.3.** Напряжения в вертикальных сечениях



**Рис.5.4.** Перемещения в вертикальных сечениях



**Рис.5.5.** Безразмерные нормальные напряжения в вертикальных сечениях

# Заключение

В результате проделанной работы были получены результаты воздействия операторов метода начальных функций на тригонометрические функции, которые впоследствии будут использоваться для решения плоских задач теории упругости. Также была решена задача расчёта НДС ортотропной пластинки из углеволокнита с высокомодульными углеродными волокнами, удовлетворяя краевым условиям методом коллокации, что показывает возможность использования метода начальных функций при расчётах НДС тел из данного материала.

# Список литературы

[1] Власов В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики, 1975

[2] Матросов А. В. Вычислительная неустойчивость алгоритма метода начальных функций // Вестник Санкт-Петербургского университета, 2010

[3] Агарёв В. А. Метод начальных функций для двумерных краевых задач теории упругости, 1963

[4] Матросов А.В. Математическое моделирование линейно-упругих систем сложной конфигурации, дисс. … д.ф.-м.н., СПбГУ, 2011, 269с.