

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И СИСТЕМ

Иванов Артемий Валерьевич

Выпускная квалификационная работа бакалавра

**Синтез оптимальных траекторий для
нелинейной системы четвертого порядка**

Направление 01.03.02

Прикладная математика и информатика

Научный руководитель,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент,
Моисеев И. А.

Рецензент,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент,
Тамасян Г. Ш.

Санкт-Петербург
2021

Содержание

Введение	3
Постановка задачи	4
Обзор литературы	6
Глава 1. Структура и свойства точек переключения оптимального управления	7
Глава 2. Количество точек переключения управления скоростью .	10
Глава 3. Синтез траекторий, удовлетворяющих принципу макси- мума	14
3.1 Случай с одним моментом переключения скорости . . .	14
3.2 Случай с тремя моментами переключения скорости . . .	19
Выводы	26
Заключение	27
Список литературы	28
Приложение	30

Введение

Объект управления – объект или динамический процесс, поведение которого контролируется человеком. Различные процессы, протекающие в технике, экономике, производственной деятельности и т.п., обычно являются управляемыми, т.е. возможно их осуществление различными способами в зависимости от действий человека. Регулирование поддерживаемой кондиционером температуры или же вывод спутника на заданную орбиту – все это является частью математической теории автоматического управления. Со временем желание человека управлять объектами наилучшим образом привело к постановке новых задач и к существенному изменению подхода к ним. Хочется, чтобы кондиционер мог поддерживать температуру с минимальными затратами электроэнергии, а спутник хочется запустить на максимально высокую орбиту с минимальным расходом топлива. Так, в середине 50-х годов сложилась новая математическая теория и получила название «теории оптимальных процессов». Выдающуюся роль в этом сыграл «принцип максимума», высказанный Л. С. Понтрягиным в качестве гипотезы и подробно исследованный В. Г. Болтянским, З. В. Гамкрелидзе и Е. Ф. Мищенко [1].

При решении практических задач достаточно часто функционалом качества является время, т.е. приходится решать задачу быстродействия. Данная задача в силу своей актуальности исследовалась достаточно широко. Известно, что в случае линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений принцип максимума является не только необходимым, но и достаточным условием для оптимальности решения. В случае же нелинейности системы достаточно часто используют ее линеаризацию, что приводит к хорошим результатам, но далеко не всегда. Поэтому проводят дополнительные исследования, опирающиеся на вид и свойства конкретной нелинейной системы. В данной работе рассматривается одна из таких систем.

Постановка задачи

Поставим задачу оптимального управления. Пусть движение объекта удовлетворяет следующей системе нелинейных дифференциальных уравнений четвертого порядка

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= V(t) \sin \varphi(t) + W_x, \\ \dot{y}(t) &= V(t) \cos \varphi(t) - W_y, \\ \dot{\varphi}(t) &= \omega u_1(t), \\ \dot{V}(t) &= a u_2(t). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $x(t)$ и $y(t)$ – геометрические координаты объекта, $\varphi(t)$ – курсовой угол, $V(t)$ – скорость объекта. Курсовой угол отсчитывается от положительного направления оси ординат до вектора скорости $(V_x, V_y)^T$ по часовой стрелке и удовлетворяет ограничению $|\Delta\varphi(t)| \leq 2\pi$. Данное ограничение означает, что управляемый объект может выполнить полный разворот на любом участке движения. Скорость объекта лежит в интервале $V(t) \in [V_0, V_{max}]$, где $V_0 > 0$ – начальная скорость объекта управления, а $V_{max} = V_0 + a \frac{2\pi}{\omega}$ – максимальное значение скорости. Угловая скорость ω , ускорение a , возмущения W_x, W_y – положительные постоянные, причем W_x, W_y не равны нулю одновременно.

Вектор управления $(u_1(t), u_2(t))^T$ в данной задаче выбирается из класса кусочно-непрерывных функций, где $u_1(t)$ – управление курсовым углом, а $u_2(t)$ – управление линейной скоростью рассматриваемого объекта. Оба управления удовлетворяют ограничениям $|u_1(t)| \leq 1$ и $|u_2(t)| \leq 1$.

В данной задаче требуется перевести объект из начального положения $(x_0, y_0, \varphi_0, V_0)$ в область $(0, 0, \cos \varphi(T) = 1, V_0)$, где T – конечный момент времени, за минимальное время, т.е. решить задачу оптимального быстродействия. Главное отличие данной постановки задачи от рассматриваемых ранее заключается в ограничениях, наложенных на курсовой угол и скорость объекта. В силу того, что для данной постановки задачи количество точек переключения управлений для оптимальной траектории не определено, то будем рассматривать частный случай, когда существует допустимое и удовлетворяющее необходимому условию оптимальности движение с одним переключением курсового угла. Отметим, что в точке пере-

ключения угла не происходит переключения управления скоростью.

Данная система может представлять различные физические задачи. Например, с помощью нее можно смоделировать заход самолета при наличии бокового ветра на посадку на взлетно-посадочную полосу, на палубу авианосца. Также данная система моделирует задачу стыковки спутника или дозаправки в воздухе, т.е. описывает задачу мягкой встречи.

Все рассуждения в работе проводятся в предположении, что оптимальная траектория движения (1) существует. Задача определения условий существования такой траектории требует отдельного рассмотрения.

Обзор литературы

Существование движения объекта для подобной системы и в несколько иной постановке изучалось неоднократно. Игровая постановка задачи под названием «шофер-убийца» была предложена и рассмотрена Р. Айзексом в [2, 3]. В работах [4, 5] была решена задача вывода объекта в начало координат с нулевыми возмущениями, отсутствием ограничений на скорость управляемого объекта и с произвольным курсовым углом. В статье [6] разработан алгоритм построения информационного множества для системы с нулевыми возмущениями. Задача преследования для системы третьего порядка была сформулирована в [7]. Система, наиболее близкая к настоящей, решалась в [8]. Различные варианты и модификации игры «шофер-убийца», численные методы и алгоритмы ее решения описывались в [9, 10].

Глава 1. Структура и свойства точек переключения оптимального управления

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)),$$

где

$$x(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)),$$

$$f(x(t), u(t)) = (f^1(x(t), u(t)), f^2(x(t), u(t)), \dots, f^n(x(t), u(t))),$$

функции f_i определены для любых значений векторной переменной $x(t) \in X$ и для значений $u(t)$, принадлежащих области управления U , непрерывны по совокупности переменных x^1, \dots, x^n, u и непрерывно дифференцируемы по x^1, \dots, x^n . Для нахождения управления, удовлетворяющего необходимому условию оптимальности, т.е. принципу максимума, воспользуемся следующей теоремой [1].

Теорема. Пусть $u(t), t \in [t_0, t_1]$ – допустимое управление, переводящее фазовую точку из положения x_0 в положение x_1 , $x(t)$ – соответствующая траектория, так что $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$. Для оптимальности (в смысле быстродействия) управления $u(t)$ и траектории $x(t)$ необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции $\psi(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_n(t))$, удовлетворяющей условиям

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

что:

1. Для всех $t, t \in [t_0, t_1]$, функция

$$H(\psi(t), x(t), u) = \sum_{i=1}^n \psi_i(t) f^i(x(t), u) \quad (3)$$

переменного $u \in U$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума:

$$H(\psi(t), x(t), u) = M(\psi(t), x(t)),$$

2. В конечный момент времени t_1 выполнено неравенство

$$M(\psi(t_1), x(t_1), u) \geq 0. \quad (4)$$

Оказывается, что если величины $\psi(t_1)$, $x(t)$, $u(t)$ удовлетворяют соотношениям

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, i = 1, 2, \dots, n,$$

и (2), а также (3), то функция $M(\psi(t), x(t))$ переменного t постоянна, так что проверку (4) можно проводить в любой момент времени t , $t \in [t_0, t_1]$, а не только в момент $t = t_1$.

Из (3) следует, что гамильтониан исходной системы (1) имеет вид

$$H(x, y, \varphi, V, \psi, u) = \psi_1(V \sin \varphi + W_x) + \psi_2(V \cos \varphi - W_y) + \psi_3 \omega u_1 + \psi_4 \omega u_2. \quad (5)$$

Система, сопряженная (1), согласно (2), имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = 0, \\ \dot{\psi}_3 = -(\psi_1 V \cos \varphi - \psi_2 V \sin \varphi), \\ \dot{\psi}_4 = -(\psi_1 \sin \varphi + \psi_2 V \cos \varphi). \end{cases} \quad (6)$$

Из условия максимума гамильтониана (5) по управлению следует

$$u_1(t) = \begin{cases} +1, & \psi_3(t) > 0, \\ -1, & \psi_3(t) < 0, \end{cases} \quad u_2(t) = \begin{cases} +1, & \psi_4(t) > 0, \\ -1, & \psi_4(t) < 0. \end{cases}$$

Проинтегрировав первые два уравнения сопряженной системы (6), получаем, что ψ_1 и ψ_2 есть величины постоянные, то есть

$$\psi_1 = C_1,$$

$$\psi_2 = C_2.$$

Интегрирование третьего уравнения системы (6) дает

$$\begin{aligned} \psi_3(t) &= \int (C_2 V \sin \varphi - C_1 V \cos \varphi) dt = \\ &= C_2(x - W_x t) - C_1(y + W_y t) + C_3 \end{aligned} \quad (7)$$

Так как гамильтониан линеен и однороден по C_1 и C_2 , то эти постоянные можно подвергнуть условию нормировки, т.е. $C_1^2 + C_2^2 = 1$. Тогда $C_1 = \sin \alpha$, $C_2 = \cos \alpha$, и $\alpha = \arctg(C_1/C_2)$.

Пусть $[\tau, t]$ – интервал постоянства управлений u_1 и u_2 . Интегрируя первые два уравнения из (1), получим

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \int_{\tau}^t (V \sin \varphi + W_x) dt = x(\tau) + W_x(t - \tau) - \frac{V(t) \cos \varphi(t)}{\omega u_1(\tau)} + \\
 &+ \frac{V(\tau) \cos \varphi(\tau)}{\omega u_1(\tau)} + \frac{a u_2(\tau) \sin \varphi(t)}{\omega^2 u_1^2(\tau)} - \frac{a u_2(\tau) \sin \varphi(\tau)}{\omega^2 u_1^2(\tau)}, \\
 y(t) &= \int_{\tau}^t (V \cos \varphi - W_y) dt = y(\tau) - W_y(t - \tau) + \frac{V(t) \sin \varphi(t)}{\omega u_1(\tau)} - \\
 &- \frac{V(\tau) \sin \varphi(\tau)}{\omega u_1(\tau)} + \frac{a u_2(\tau) \cos \varphi(t)}{\omega^2 u_1^2(\tau)} - \frac{a u_2(\tau) \cos \varphi(\tau)}{\omega^2 u_1^2(\tau)}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Глава 2. Количество точек переключения управления скоростью

Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема. Пусть для движения управляемого объекта, описываемого системой (1) существуют траектории с одной точкой переключения управления курсовым углом, являющиеся решением поставленной задачи. Тогда эти траектории имеют одну или же три точки переключения управления скоростью.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся схемой, примененной в [11]. Положим, что время начала движения равно нулю и $x_i = x(t_i)$, $y_i = y(t_i)$, $\varphi_i = \varphi(t_i)$, $V_i = V(t_i)$, $i = \overline{1, n}$, – значения фазовых координат в моменты переключения управления $u_2(t)$. Рассмотрим временной интервал $[0, t_p]$, где t_p – момент переключения $u_1(t)$. Выясним, сколько может быть точек переключения управления скоростью в данном интервале. Пусть их больше чем одна. Учитывая постоянство гамильтониана как функции времени [1] и используя (7), имеем

$$\begin{aligned}
 H(t_2) - H(t_1) &= C_1(V_2 \sin \phi_2 + W_x) + C_2(V_2 \cos \phi_2 - W_y) + \\
 &+ u_1^0 \omega (C_2(x_2 - W_x t_2) - C_1(y_2 + W_y t_2) + C_3) - \\
 &- C_1(V_1 \sin \varphi_1 + W_x) - C_2(V_1 \cos \varphi_1 - W_y) - \\
 &- u_1^0 \omega (C_2(x_1 - W_x t_1) - C_1(y_1 + W_y t_1) + C_3) = \tag{9} \\
 &= C_1(V_2 \sin \varphi_2 - V_1 \sin \varphi_1) + C_2(V_2 \cos \varphi_2 - V_1 \cos \varphi_1) + \\
 &+ u_1^0 \omega (C_2((x_2 - x_1) - W_x(t_2 - t_1)) - \\
 &- C_1((y_2 - y_1) + W_y(t_2 - t_1))).
 \end{aligned}$$

С учетом (8) получим, что

$$\begin{aligned}
 u_1^0 \omega C_2(x_2 - x_1 - W_x(t_2 - t_1)) &= C_2 \left(V_1 \cos \varphi_1 - V_2 \cos \varphi_2 + \right. \\
 &\left. + \frac{au_2^1 \sin \varphi_2}{u_1^0 \omega} - \frac{au_2^1 \sin \varphi_1}{u_1^0 \omega} \right), \\
 u_1^0 \omega C_1(y_2 - y_1 + W_y(t_2 - t_1)) &= C_1 \left(-V_1 \sin \varphi_1 + V_2 \sin \varphi_2 + \right. \\
 &\left. + \frac{au_2^1 \cos \varphi_2}{u_1^0 \omega} - \frac{au_2^1 \cos \varphi_1}{u_1^0 \omega} \right)
 \end{aligned}$$

и (9) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
H(t_2) - H(t_1) &= C_1 V_2 \sin \varphi_2 - C_1 V_1 \sin \varphi_1 + C_2 V_2 \cos \varphi_2 - \\
&- C_2 V_1 \cos \varphi_1 + C_2 V_1 \cos \varphi_1 - C_2 V_2 \cos \varphi_2 + C_2 \frac{au_2^1 \sin \varphi_2}{u_1^0 \omega} - \\
&- C_2 \frac{au_2^1 \sin \varphi_1}{u_1^0 \omega} + C_1 V_1 \sin \varphi_1 - C_1 V_2 \sin \varphi_2 - C_1 \frac{au_2^1 \cos \varphi_2}{u_1^0 \omega} + \\
&+ C_1 \frac{au_2^1 \cos \varphi_1}{u_1^0 \omega} = \frac{au_2^1}{u_1^0 \omega} (\sin \varphi_2 C_2 - \cos \varphi_2 C_1 - \sin \varphi_1 C_2 + \\
&+ \cos \varphi_1 C_1) = \frac{au_2^1}{u_1^0 \omega} (\sin(\varphi_2 - \alpha) - \sin(\varphi_1 - \alpha)) = 0,
\end{aligned}$$

где $\alpha = \arctg(C_1/C_2)$. Отсюда следует, что

$$\sin(\varphi_2 - \alpha) - \sin(\varphi_1 - \alpha) = 2 \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1 - 2\alpha}{2} = 0$$

и $\sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = 0$, $\varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1$, что противоречит ограничению, наложенному на курсовой угол. Тогда нулю равен второй множитель и $\varphi_2 = 2\alpha - \varphi_1 + \pi + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1$. Допустим, что существует третья точка переключения управления скоростью. Применив те же рассуждения, получим $\varphi_3 = 2\alpha - \varphi_2 + \pi + 2\pi m$, $k = 0, \pm 1$, $\varphi_3 = 2\alpha - 2\alpha + \varphi_1 - \pi - 2\pi k + \pi + 2\pi m = \varphi_1 + 2\pi(m - k)$, что также противоречит ограничениям, наложенным на курсовой угол. Таким образом, на интервале $[0, t_p]$, не может быть более двух точек переключения $u_2(t)$. Далее рассмотрим интервал $[t_p, T]$. Применяя те же рассуждения, что и для первого интервала, получим, что и в этом случае не может быть больше двух точек переключения управления $u_2(t)$. Таким образом получим, что общее количество переключений не более четырех. Теперь воспользуемся тем фактом, что минимальная скорость объекта равна начальной скорости. Это означает, что в начальный момент времени $u_2^0 = +1$, а в конечный момент $u_2^T = -1$, т. е. $u_2^n = -1$, где t_n – последняя точка переключения управления. Тогда возможны следующие варианты:

1. Пусть в интервале $[0, t_p]$ нет переключений, тогда первая точка переключения $t_1 \in [t_p, T]$. После переключения $u_2^1 = -1$. Далее движение с данным управлением будет решением задачи (1). Если предположить, что это не так, тогда значения управлений в следующих точках переключения равны $u_2^2 = +1$, $u_2^3 = -1$, а это противоречит доказанному выше результату (в интервале три точки переключения).

2. В интервале $[0, t_p]$ одна точка переключения. В данном случае происходит переключение с управления $u_2^0 = +1$ на управление $u_2^1 = -1$. Тогда возможны следующие случаи: больше точек переключения нет и $u_2^n = u_2^1 = -1$; во втором случае в интервале $[t_p, T]$ может быть два переключения $u_2^2 = +1, u_2^3 = -1$.

3. В интервале $[0, t_p]$ две точки переключения, т. е. $u_2^1 = -1, u_2^2 = +1$. Тогда в интервале $[t_p, T]$ имеется одна точка переключения $u_2^3 = -1$ (аналогично пункту 1).

Таким образом, мы убедились, что искомые траектории имеют одну или же три точки переключения управления $u_2(t)$.

Теорема доказана. ■

Следствие. Для движения управляемого объекта, описываемого системой (1), искомые траектории содержат следующие наборы управлений:

$$1. \quad u_1^0 = +1, t \in [0, t_p], \quad u_1^1 = -1, t \in [t_p, T].$$

$$1.1. \quad u_2^0 = +1, t \in [0, t_p] \cup [t_p, t_1], \quad u_2^1 = -1, t \in [t_1, T].$$

$$1.2. \quad u_2^0 = +1, t \in [0, t_1], \quad u_2^1 = -1, t \in [t_1, t_p] \cup [t_p, T].$$

$$1.3. \quad u_2^0 = +1, t \in [0, t_1], \quad u_2^1 = -1, t \in [t_1, t_p] \cup [t_p, t_2],$$

$$u_2^2 = +1, t \in [t_2, t_3], \quad u_2^3 = -1, t \in [t_3, T].$$

$$1.4. \quad u_2^0 = +1, t \in [0, t_1], \quad u_2^1 = -1, t \in [t_1, t_2],$$

$$u_2^2 = +1, t \in [t_2, t_p] \cup [t_p, t_3], \quad u_2^3 = -1, t \in [t_3, T].$$

$$2. \quad u_1^0 = -1, t \in [0, t_p], \quad u_1^1 = +1, t \in [t_p, T].$$

$$2.1. \quad u_2^0 = +1, t \in [0, t_p] \cup [t_p, t_1], \quad u_2^1 = -1, t \in [t_1, T].$$

$$2.2. \quad u_2^0 = +1, t \in [0, t_1], \quad u_2^1 = -1, t \in [t_1, t_p] \cup [t_p, T].$$

$$2.3. \quad u_2^0 = +1, t \in [0, t_1], \quad u_2^1 = -1, t \in [t_1, t_p] \cup [t_p, t_2],$$

$$u_2^2 = +1, t \in [t_2, t_3], \quad u_2^3 = -1, t \in [t_3, T].$$

$$2.4. \quad u_2^0 = +1, t \in [0, t_1], \quad u_2^1 = -1, t \in [t_1, t_2],$$

$$u_2^2 = +1, t \in [t_2, t_p] \cup [t_p, t_3], \quad u_2^3 = -1, t \in [t_3, T].$$

Глава 3. Синтез траекторий, удовлетворяющих принципу максимума

В данной главе будет выполняться анализ каждого из возможных вариантов переключений, а также будут построены функционалы, в результате минимизации которых будут найдены параметры для синтеза движений. При $u_1^0 = 1$ будем считать, что $\varphi_0 \in [-2\pi, 0)$, если же $u_1^0 = -1$, то $\varphi_0 \in (0, 2\pi]$.

3.1 Случай с одним моментом переключения скорости

Случай 1. Рассмотрим случай, когда момент переключения скоростью t_1 произошел после переключения управления углом t_p , т.е. $t_p < t_1$. Интегрируя выражения для $\dot{\varphi}(t)$ и $\dot{V}(t)$ из системы (1), получим

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_0 + u_1^0 \omega t, & 0 \leq t \leq t_p, \\ \varphi_0 + u_1^0 \omega (2t_p - t), & t_p \leq t \leq T. \end{cases} \quad (10)$$

$$V(t) = \begin{cases} V_0 + at, & 0 \leq t \leq t_1, \\ V_0 + a(2t_1 - t), & t_1 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (11)$$

По условию задачи, конечная скорость объекта должна совпадать с начальной, т.е. требуется выполнение равенства $V(T) = V_0$. Используя формулу (11), имеем соотношение $V(T) = V_0 + a(2t_1 - T) = V_0$, откуда

$$t_1 = \frac{T}{2}. \quad (12)$$

Используя (10), выразим t_p, t_1, φ_1, T через φ_p :

$$\begin{aligned} \varphi_p &= \varphi_0 + u_1^0 \omega t_p \implies t_p = \frac{\varphi_p - \varphi_0}{u_1^0 \omega}, \\ \varphi_T &= \varphi_0 + u_1^0 \omega (2t_p - T) \implies T = \frac{2\varphi_p - \varphi_0 - \varphi_T}{u_1^0 \omega}. \end{aligned} \quad (13)$$

Зная (12) и учитывая соотношение выше, получим

$$t_1 = \frac{2\varphi_p - \varphi_0 - \varphi_T}{2u_1^0 \omega}. \quad (14)$$

Снова используя (10) для φ_1 , имеем

$$\varphi_1 = \varphi_0 + u_1^0 \omega (2t_p - t_1) \implies \varphi_1 = \varphi_p + \frac{\varphi_T - \varphi_0}{2}. \quad (15)$$

Теперь воспользуемся (11) и найдем соотношения для V_p и V_1 :

$$\begin{aligned} V_p &= V_0 + at_p \implies V_p = V_0 + \frac{a}{u_1^0 \omega} (\varphi_p - \varphi_0), \\ V_1 &= V_0 + a(2t_1 - t_1) \implies V_1 = V_0 + \frac{a}{2u_1^0 \omega} (2\varphi_p - \varphi_0 - \varphi_T). \end{aligned} \quad (16)$$

Пусть $u_1^0 = 1$, тогда при $\varphi_p > 0$ имеем $\varphi_T = 0$, если же $\varphi_p < 0$, то $\varphi_T = -2\pi$. В случае $\varphi_T = 0$, используя (15), получим соотношение $\varphi_1 = \varphi_p - \varphi_0/2$. Заметим, что $\varphi_p > \varphi_1$, и сделав замену, имеем неравенство $\varphi_p > \varphi_p - \varphi_0/2$, или $\varphi_0 > 0$, что невозможно. При $\varphi_p < 0$, используя (15), получим $\varphi_1 = \varphi_p - \varphi_0/2 - \pi$. Так как $\varphi_p > \varphi_1$, то, сделав замену, имеем неравенство $\varphi_p > \varphi_p - \varphi_0/2 - \pi$, или $\varphi_0 > -2\pi$, что может иметь место.

Пусть теперь $u_1^0 = -1$, тогда при $\varphi_p > 0$ имеем $\varphi_T = 2\pi$, если же $\varphi_p < 0$, то $\varphi_T = 0$. В случае $\varphi_T = 2\pi$, используя (15), получим соотношение $\varphi_1 = \varphi_p + \pi - \varphi_0/2$. Заметим, что $\varphi_1 > \varphi_p$, и сделав замену, имеем неравенство $\varphi_p + \pi + \varphi_0/2 > \varphi_p$, или $\varphi_0 < 2\pi$, и данное движение возможно. При $\varphi_p < 0$, используя (15), получим $\varphi_1 = \varphi_p - \varphi_0/2$. Так как $\varphi_1 > \varphi_p$, то, сделав замену, имеем неравенство $\varphi_p - \varphi_0/2 > \varphi_p$, или $\varphi_0 < 0$, что невозможно.

Далее выполним алгоритм синтез искомых траекторий. Так как уравнений для вычисления всех неизвестных нам недостаточно, будем использовать минимизацию следующего функционала по значению курсового угла φ_p

$$f(\varphi_p) = [x(T)]^2 + [y(T)]^2.$$

Последовательно используем (8) для каждой точки переключения:

$$\begin{aligned} x(t_p) &= x_0 + W_x(t_p) - \frac{V_p \cos \varphi_p}{\omega u_1^0} + \frac{V_0 \cos \varphi_0}{\omega u_1^0} + \frac{a \sin \varphi_p}{\omega^2} - \frac{a \sin \varphi_0}{\omega^2}, \\ y(t_p) &= y_0 - W_y(t_p) + \frac{V_p \sin \varphi_p}{\omega u_1^0} - \frac{V_0 \sin \varphi_0}{\omega u_1^0} + \frac{a \cos \varphi_p}{\omega^2} - \frac{a \cos \varphi_0}{\omega^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t_1) &= x(t_p) + W_x(t_1 - t_p) + \frac{V_1 \cos \varphi_1}{\omega u_1^0} - \frac{V_p \cos \varphi_p}{\omega u_1^0} + \frac{a \sin \varphi_1}{\omega^2} - \frac{a \sin \varphi_p}{\omega^2}, \\ y(t_1) &= y(t_p) - W_y(t_1 - t_p) - \frac{V_1 \sin \varphi_1}{\omega u_1^0} + \frac{V_p \sin \varphi_p}{\omega u_1^0} + \frac{a \cos \varphi_1}{\omega^2} - \frac{a \cos \varphi_p}{\omega^2}. \end{aligned}$$

$$x(T) = x(t_1) + W_x(T - t_1) + \frac{V_T \cos \varphi_T}{\omega u_1^0} - \frac{V_1 \cos \varphi_1}{\omega u_1^0} - \frac{a \sin \varphi_T}{\omega^2} + \frac{a \sin \varphi_1}{\omega^2},$$

$$y(T) = y(t_1) - W_y(T - t_1) - \frac{V_T \sin \varphi_T}{\omega u_1^0} + \frac{V_1 \sin \varphi_1}{\omega u_1^0} - \frac{a \cos \varphi_T}{\omega^2} + \frac{a \cos \varphi_1}{\omega^2}.$$

Теперь, выражая все неизвестные с помощью (12), (13), (14), (15) и (16), получим функционал следующего вида, который можно минимизировать по φ_p :

$$f_1(\varphi_p) = [x(T)]^2 + [y(T)]^2 =$$

$$= \left[x_0 u_1^0 \omega + W_x(2\varphi_p - \varphi_T - \varphi_0) + \frac{a u_1^0}{\omega} \left(2 \sin \left(\varphi_p + \frac{\varphi_T - \varphi_0}{2} \right) - \sin \varphi_0 \right) + \right.$$

$$\left. + V_0(\cos \varphi_0 + 1) - 2 \cos \varphi_p \left(V_0 + \frac{a}{u_1^0 \omega} (\varphi_p - \varphi_0) \right) \right]^2 +$$

$$+ \left[y_0 u_1^0 \omega - W_y(2\varphi_p - \varphi_T - \varphi_0) + \frac{a u_1^0}{\omega} \left(2 \cos \left(\varphi_p + \frac{\varphi_T - \varphi_0}{2} \right) - \cos \varphi_0 - 1 \right) - \right.$$

$$\left. - V_0 \sin \varphi_0 + 2 \sin \varphi_p \left(V_0 + \frac{a}{u_1^0 \omega} (\varphi_p - \varphi_0) \right) \right]^2,$$

где φ_p принадлежит следующим интервалам:

$$\varphi_p \in \begin{cases} [\varphi_0, 0], & u_1^0 = +1, \varphi_T = -2\pi, \\ [0, \varphi_0], & u_1^0 = -1, \varphi_T = 2\pi. \end{cases}$$

Утверждение 1. Пусть движение управляемого объекта удовлетворяет системе (1). Если при заданных начальных данных $(x_0, y_0, \varphi_0, V_0)$ минимум функции $f_1(\varphi_p)$ равен нулю, тогда имеет место искомое движение.

Так как функционал зависит от одной переменной, для поиска минимума можно воспользоваться методами одномерной минимизации, например, методом золотого сечения. В приложении приведены примеры траекторий для двух случаев:

1. $(x_0, y_0, \varphi_0, V_0) = (-205762.394, 231860.309, -3\pi/2, 100)$;
 $u_1 = +1, \varphi_p = -2.7767, \varphi_T = -2\pi$ на рис. 1.
2. $(x_0, y_0, \varphi_0, V_0) = (-299999.114, 231424.182, \pi, 100)$;
 $u_1 = -1, \varphi_p = 0.656569, \varphi_T = 2\pi$ на рис. 2.

Случай 2. Теперь рассмотрим случай, когда момент переключения скоростью t_1 произошел до переключения управления углом t_p , т.е. $t_1 < t_p$.

Интегрируя выражения для $\dot{\varphi}(t)$ и $\dot{V}(t)$ из системы (1), получим соотношения, совпадающие с (10), (11).

По условию задачи, конечная скорость объекта должна совпадать с начальной, т.е. требуется выполнение равенства $V(T) = V_0$. Используя формулу (11), имеем соотношение $V_T = V_0 + a(2t_1 - T) = V_0$, откуда

$$t_1 = \frac{T}{2}. \quad (17)$$

Используя (10), выразим t_p, t_1, φ_1, T через φ_p :

$$\begin{aligned} \varphi_p = \varphi_0 + u_1^0 \omega t_p &\implies t_p = \frac{\varphi_p - \varphi_0}{u_1^0 \omega}, \\ \varphi_T = \varphi_0 + u_1^0 \omega (2t_p - T) &\implies T = \frac{2\varphi_p - \varphi_0 - \varphi_T}{u_1^0 \omega}. \end{aligned} \quad (18)$$

Зная (17) и учитывая соотношение выше, получим

$$t_1 = \frac{2\varphi_p - \varphi_0 - \varphi_T}{2u_1^0 \omega}. \quad (19)$$

Снова используя (10) для φ_1 , имеем

$$\varphi_1 = \varphi_0 + u_1^0 \omega (2t_p - t_1) \implies \varphi_1 = \varphi_p + \frac{\varphi_0 - \varphi_T}{2}. \quad (20)$$

Теперь воспользуемся (11) и найдем соотношения для V_p и V_1 :

$$\begin{aligned} V_p = V_0 + a(2t_1 - t_p) &\implies V_p = V_0 + \frac{a}{u_1^0 \omega} (\varphi_p - \varphi_T), \\ V_1 = V_0 + at_1 &\implies V_1 = V_0 + \frac{a}{2u_1^0 \omega} (2\varphi_p - \varphi_0 - \varphi_T). \end{aligned} \quad (21)$$

Пусть $u_1^0 = 1$, тогда при $\varphi_p > 0$ имеем $\varphi_T = 0$, если же $\varphi_p < 0$, то $\varphi_T = -2\pi$. В случае $\varphi_T = 0$, используя (20), получим соотношение $\varphi_1 = \varphi_p + \varphi_0/2$. Заметим, что $\varphi_p > \varphi_1$, и сделав замену, имеем неравенство $\varphi_p > \varphi_p + \varphi_0/2$, или $\varphi_0 < 0$, что имеет место быть. При $\varphi_p < 0$, используя (20), получим $\varphi_1 = \varphi_p + \varphi_0/2 + \pi$. Так как $\varphi_p > \varphi_1$, то, сделав замену, имеем неравенство $\varphi_p > \varphi_p + \varphi_0/2 + \pi$, или $\varphi_0 < -2\pi$, что невозможно.

Пусть теперь $u_1^0 = -1$, тогда при $\varphi_p > 0$ имеем $\varphi_T = 2\pi$, если же $\varphi_p < 0$, то $\varphi_T = 0$. В случае $\varphi_T = 2\pi$, используя (20), получим соотношение $\varphi_1 = \varphi_p + \varphi_0/2 - \pi$. Заметим, что $\varphi_1 > \varphi_p$, и сделав замену, имеем неравенство $\varphi_p + \varphi_0/2 - \pi > \varphi_p$, или $\varphi_0 > 2\pi$, что невозможно. При $\varphi_p < 0$,

используя (20), получим $\varphi_1 = \varphi_p + \varphi_0/2$. Так как $\varphi_1 > \varphi_p$, то, сделав замену, имеем неравенство $\varphi_p + \varphi_0/2 > \varphi_p$, или $\varphi_0 > 0$, и данное движение возможно.

Теперь выполним синтез искомых траекторий. Так как уравнений для вычисления всех неизвестных нам недостаточно, будем использовать минимизацию следующего функционала по значению курсового угла φ_p

$$f(\varphi_p) = [x(T)]^2 + [y(T)]^2.$$

Последовательно используем (8) для каждой точки переключения:

$$x(t_1) = x_0 + W_x(t_1) - \frac{V_1 \cos \varphi_1}{\omega u_1^0} + \frac{V_0 \cos \varphi_0}{\omega u_1^0} + \frac{a \sin \varphi_1}{\omega^2} - \frac{a \sin \varphi_0}{\omega^2},$$

$$y(t_1) = y_0 - W_y(t_1) + \frac{V_1 \sin \varphi_1}{\omega u_1^0} - \frac{V_0 \sin \varphi_0}{\omega u_1^0} + \frac{a \cos \varphi_1}{\omega^2} - \frac{a \cos \varphi_0}{\omega^2}.$$

$$x(t_p) = x(t_1) + W_x(t_p - t_1) - \frac{V_p \cos \varphi_p}{\omega u_1^0} + \frac{V_1 \cos \varphi_1}{\omega u_1^0} - \frac{a \sin \varphi_p}{\omega^2} + \frac{a \sin \varphi_1}{\omega^2},$$

$$y(t_p) = y(t_1) - W_y(t_p - t_1) + \frac{V_p \sin \varphi_p}{\omega u_1^0} - \frac{V_1 \sin \varphi_1}{\omega u_1^0} - \frac{a \cos \varphi_p}{\omega^2} + \frac{a \cos \varphi_1}{\omega^2}.$$

$$x(T) = x(t_p) + W_x(T - t_p) + \frac{V_T \cos \varphi_T}{\omega u_1^0} - \frac{V_p \cos \varphi_p}{\omega u_1^0} - \frac{a \sin \varphi_T}{\omega^2} + \frac{a \sin \varphi_p}{\omega^2},$$

$$y(T) = y(t_p) - W_y(T - t_p) - \frac{V_T \sin \varphi_T}{\omega u_1^0} + \frac{V_p \sin \varphi_p}{\omega u_1^0} - \frac{a \cos \varphi_T}{\omega^2} + \frac{a \cos \varphi_p}{\omega^2}.$$

Теперь, выражая все неизвестные с помощью (17), (18), (19), (20) и (21), получим функционал следующего вида, который можно минимизировать по φ_p :

$$\begin{aligned} f_2(\varphi_p) &= [x(T)]^2 + [y(T)]^2 = \\ &= \left[x_0 u_1^0 \omega + W_x(2\varphi_p - \varphi_T - \varphi_0) + \frac{a u_1^0}{\omega} \left(2 \sin \left(\varphi_p + \frac{\varphi_0 - \varphi_T}{2} \right) - \sin \varphi_0 \right) + \right. \\ &\quad \left. + V_0 (\cos \varphi_0 + 1) - 2 \cos \varphi_p \left(V_0 + \frac{a}{u_1^0 \omega} (\varphi_p - \varphi_T) \right) \right]^2 + \\ &+ \left[y_0 u_1^0 \omega - W_y(2\varphi_p - \varphi_T - \varphi_0) + \frac{a u_1^0}{\omega} \left(2 \cos \left(\varphi_p + \frac{\varphi_0 - \varphi_T}{2} \right) - \cos \varphi_0 - 1 \right) - \right. \\ &\quad \left. - V_0 \sin \varphi_0 + 2 \sin \varphi_p \left(V_0 + \frac{a}{u_1^0 \omega} (\varphi_p - \varphi_T) \right) \right]^2, \end{aligned}$$

где φ_p принадлежит следующим интервалам:

$$\varphi_p \in \begin{cases} [\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi], & u_1^0 = +1, \varphi_T = 0, \\ [\varphi_0 - 2\pi, 0], & u_1^0 = -1, \varphi_T = 0, \end{cases}$$

Утверждение 2. Пусть движение управляемого объекта удовлетворяет системе (1). Если при заданных начальных данных $(x_0, y_0, \varphi_0, V_0)$ минимум функции $f_2(\varphi_p)$ равен нулю, тогда имеет место искомое движение.

Полученный функционал также зависит от одной переменной, и для поиска минимума можно использовать методы одномерной минимизации, например, метод золотого сечения. В приложении приведены примеры траекторий для двух случаев:

1. $(x_0, y_0, \varphi_0, V_0) = (112425.294, -182953.149, -\pi, 100)$;

$u_1 = +1, \varphi_p = 1.009664, \varphi_T = 0$ на рис. 3.

2. $(x_0, y_0, \varphi_0, V_0) = (-27699.904, -100118.955, \pi/2, 100)$;

$u_1 = -1, \varphi_p = -0.591941, \varphi_T = 0$ на рис. 4.

3.2 Случай с тремя моментами переключения скорости

Случай 3. Рассмотрим случай, когда один момент переключения скоростью t_1 произошел до момента переключения управления углом t_p , а два других после, т.е. $t_1 < t_p < t_2 < t_3$. Интегрируя выражения для $\dot{\varphi}(t)$ и $\dot{V}(t)$ из системы (1), получим

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_0 + u_1^0 \omega t, & 0 \leq t \leq t_p, \\ \varphi_0 + u_1^0 \omega (2t_p - t), & t_p \leq t \leq T. \end{cases} \quad (22)$$

$$V(t) = \begin{cases} V_0 + at, & 0 \leq t \leq t_1, \\ V_0 + a(2t_1 - t), & t_1 \leq t \leq t_2, \\ V_0 + a(2t_1 - 2t_2 + t), & t_2 \leq t \leq t_3, \\ V_0 + a(2t_1 - 2t_2 + 2t_3 - t), & t_3 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (23)$$

По условию задачи, конечная скорость объекта должна совпадать с начальной, т.е. требуется выполнение равенства $V(T) = V_0$. Используя формулу (23), имеем соотношение $V(T) = V_0 + a(2t_1 - 2t_2 + 2t_3 - T) = V_0$, откуда

$$t_1 - t_2 + t_3 = \frac{T}{2}. \quad (24)$$

Выражая из (22) моменты времени и подставляя в (24), получим соотношение

$$\varphi_T - \varphi_0 = 2\varphi_p - 2\varphi_1 - 2\varphi_2 + 2\varphi_3. \quad (25)$$

Последовательно используем (8) для каждой точки переключения:

$$\begin{aligned} x(t_1) &= x_0 + W_x(t_1) - \frac{V_1 \cos \varphi_1}{\omega u_1^0} + \frac{V_0 \cos \varphi_0}{\omega u_1^0} + \frac{a \sin \varphi_1}{\omega^2} - \frac{a \sin \varphi_0}{\omega^2}, \\ y(t_1) &= y_0 - W_y(t_1) + \frac{V_1 \sin \varphi_1}{\omega u_1^0} - \frac{V_0 \sin \varphi_0}{\omega u_1^0} + \frac{a \cos \varphi_1}{\omega^2} - \frac{a \cos \varphi_0}{\omega^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t_p) &= x(t_1) + W_x(t_p - t_1) - \frac{V_p \cos \varphi_p}{\omega u_1^0} + \frac{V_1 \cos \varphi_1}{\omega u_1^0} - \frac{a \sin \varphi_p}{\omega^2} + \frac{a \sin \varphi_1}{\omega^2}, \\ y(t_p) &= y(t_1) - W_y(t_p - t_1) + \frac{V_p \sin \varphi_p}{\omega u_1^0} - \frac{V_1 \sin \varphi_1}{\omega u_1^0} - \frac{a \cos \varphi_p}{\omega^2} + \frac{a \cos \varphi_1}{\omega^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t_2) &= x(t_p) + W_x(t_2 - t_p) + \frac{V_2 \cos \varphi_2}{\omega u_1^0} - \frac{V_p \cos \varphi_p}{\omega u_1^0} - \frac{a \sin \varphi_2}{\omega^2} + \frac{a \sin \varphi_p}{\omega^2}, \\ y(t_2) &= y(t_p) - W_y(t_2 - t_p) - \frac{V_2 \sin \varphi_2}{\omega u_1^0} + \frac{V_p \sin \varphi_p}{\omega u_1^0} - \frac{a \cos \varphi_2}{\omega^2} + \frac{a \cos \varphi_p}{\omega^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t_3) &= x(t_2) + W_x(t_3 - t_2) + \frac{V_3 \cos \varphi_3}{\omega u_1^0} - \frac{V_2 \cos \varphi_2}{\omega u_1^0} + \frac{a \sin \varphi_3}{\omega^2} - \frac{a \sin \varphi_2}{\omega^2}, \\ y(t_3) &= y(t_2) - W_y(t_3 - t_2) - \frac{V_3 \sin \varphi_3}{\omega u_1^0} + \frac{V_2 \sin \varphi_2}{\omega u_1^0} + \frac{a \cos \varphi_3}{\omega^2} - \frac{a \cos \varphi_2}{\omega^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(T) &= x(t_3) + W_x(T - t_3) + \frac{V_T \cos \varphi_T}{\omega u_1^0} - \frac{V_3 \cos \varphi_3}{\omega u_1^0} - \frac{a \sin \varphi_T}{\omega^2} + \frac{a \sin \varphi_3}{\omega^2}, \\ y(T) &= y(t_3) - W_y(T - t_3) - \frac{V_T \sin \varphi_T}{\omega u_1^0} + \frac{V_3 \sin \varphi_3}{\omega u_1^0} - \frac{a \cos \varphi_T}{\omega^2} + \frac{a \cos \varphi_3}{\omega^2}. \end{aligned}$$

Для синтеза траекторий будем использовать минимизацию следующего функционала по $\varphi_p, \varphi_1, \varphi_2$:

$$f_3(\varphi_p, \varphi_1, \varphi_2) = [x(T)]^2 + [y(T)]^2.$$

Тогда получим функционал вида

$$\begin{aligned}
f_3(\varphi_p, \varphi_1, \varphi_2) &= [x(T)]^2 + [y(T)]^2 = \\
&= \left[x_0 + W_x T + \frac{1}{\omega u_1^0} \left(V_0 \cos \varphi_0 + V_0 - 2V_p \cos \varphi_0 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{a}{\omega^2} \left(2 \sin \varphi_1 - 2 \sin \varphi_2 + 2 \sin \varphi_3 - \sin \varphi_0 \right) \right]^2 + \\
&\quad + \left[y_0 - W_y T + \frac{1}{\omega u_1^0} \left(2V_p \sin \varphi_p - V_0 \sin \varphi_0 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{a}{\omega^2} \left(2 \cos \varphi_1 - 2 \cos \varphi_2 + 2 \cos \varphi_3 - \cos \varphi_0 - 1 \right) \right]^2,
\end{aligned}$$

где φ_3 из (25) есть

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_T - \varphi_0}{2} - \varphi_p + \varphi_1 + \varphi_2, \quad (26)$$

V_p с помощью (22), (23) можно выразить как

$$V_p = V_0 + \frac{a}{u_1^0 \omega} \left(2\varphi_1 - \varphi_0 - \varphi_p \right).$$

Используя (22), (24) и (26), получим соотношение для T :

$$T = \frac{\varphi_p - \varphi_0 - \varphi_T}{u_1^0 \omega}.$$

Таким образом, можно провести минимизацию по трем переменным, где угол φ_p принадлежит

$$\varphi_p \in \begin{cases} [\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi], & u_1^0 = +1, \varphi_T = 0, \\ [\varphi_0, 0], & u_1^0 = +1, \varphi_T = -2\pi, \\ [\varphi_0 - 2\pi, 0], & u_1^0 = -1, \varphi_T = 0, \\ [0, \varphi_0], & u_1^0 = -1, \varphi_T = 2\pi, \end{cases}$$

УГОЛ φ_1 находится в

$$\varphi_1 \in \begin{cases} [\varphi_0, \varphi_p], & u_1^0 = +1, \varphi_T = 0, \\ [\varphi_0, \varphi_p], & u_1^0 = +1, \varphi_T = -2\pi, \\ [\varphi_p, \varphi_0], & u_1^0 = -1, \varphi_T = 0, \\ [\varphi_p, \varphi_0], & u_1^0 = -1, \varphi_T = 2\pi, \end{cases}$$

а угол φ_2 принадлежит

$$\varphi_2 \in \begin{cases} [0, \varphi_p], & u_1^0 = +1, \varphi_T = 0, \\ [-2\pi, \varphi_p], & u_1^0 = +1, \varphi_T = -2\pi, \\ [\varphi_p, 0], & u_1^0 = -1, \varphi_T = 0, \\ [\varphi_p, 2\pi], & u_1^0 = -1, \varphi_T = 2\pi. \end{cases}$$

Утверждение 3. Пусть движение управляемого объекта удовлетворяет системе (1). Если при заданных начальных данных $(x_0, y_0, \varphi_0, V_0)$ минимум функции $f_3(\varphi_p, \varphi_1, \varphi_2)$ равен нулю, тогда имеет место искомое движение.

Так как полученный функционал зависит от трех переменных, для поиска его минимума можно использовать методы многомерной минимизации, например, метод градиентного спуска. В приложении приведен пример траектории для случая:

$$(x_0, y_0, \varphi_0, V_0) = (271469.002, 115352.674, -3\pi/2, 100);$$

$u_1 = +1, \varphi_1 = -1.0472, \varphi_p = 0, \varphi_2 = -1.5708, \varphi_3 = -3.4034, \varphi_T = -2\pi$ на рис. 5.

Случай 4. Теперь рассмотрим случай, когда два момента переключения скоростью t_1 и t_2 произошли до момента переключения управления углом t_p , а другой после, т.е. $t_1 < t_2 < t_p < t_3$. Интегрируя выражения для $\dot{\varphi}(t)$ и $\dot{V}(t)$ из системы (1), получим соотношения, совпадающие с (22), (23).

По условию задачи, конечная скорость объекта должна совпадать с начальной, т.е. требуется выполнение равенства $V(T) = V_0$. Используя формулу (23), имеем соотношение $V(T) = V_0 + a(2t_1 - 2t_2 + 2t_3 - T) = V_0$, откуда

$$t_1 - t_2 + t_3 = \frac{T}{2}. \quad (27)$$

Выражая из (22) моменты времени и подставляя в (27), получим соотношение

$$\varphi_T - \varphi_0 = 2\varphi_p - 2\varphi_1 - 2\varphi_2 + 2\varphi_3. \quad (28)$$

Последовательно используем (8) для каждой точки переключения:

$$x(t_1) = x_0 + W_x(t_1) - \frac{V_1 \cos \varphi_1}{\omega u_1^0} + \frac{V_0 \cos \varphi_0}{\omega u_1^0} + \frac{a \sin \varphi_1}{\omega^2} - \frac{a \sin \varphi_0}{\omega^2},$$

$$y(t_1) = y_0 - W_y(t_1) + \frac{V_1 \sin \varphi_1}{\omega u_1^0} - \frac{V_0 \sin \varphi_0}{\omega u_1^0} + \frac{a \cos \varphi_1}{\omega^2} - \frac{a \cos \varphi_0}{\omega^2}.$$

$$x(t_2) = x(t_1) + W_x(t_2 - t_1) - \frac{V_2 \cos \varphi_2}{\omega u_1^0} + \frac{V_1 \cos \varphi_1}{\omega u_1^0} - \frac{a \sin \varphi_2}{\omega^2} + \frac{a \sin \varphi_1}{\omega^2},$$

$$y(t_2) = y(t_1) - W_y(t_2 - t_1) + \frac{V_2 \sin \varphi_2}{\omega u_1^0} - \frac{V_1 \sin \varphi_1}{\omega u_1^0} - \frac{a \cos \varphi_2}{\omega^2} + \frac{a \cos \varphi_1}{\omega^2}.$$

$$x(t_p) = x(t_2) + W_x(t_p - t_2) - \frac{V_p \cos \varphi_p}{\omega u_1^0} + \frac{V_2 \cos \varphi_2}{\omega u_1^0} + \frac{a \sin \varphi_p}{\omega^2} - \frac{a \sin \varphi_2}{\omega^2},$$

$$y(t_p) = y(t_2) - W_y(t_p - t_2) + \frac{V_p \sin \varphi_p}{\omega u_1^0} - \frac{V_2 \sin \varphi_2}{\omega u_1^0} + \frac{a \cos \varphi_p}{\omega^2} - \frac{a \cos \varphi_2}{\omega^2}.$$

$$x(t_3) = x(t_p) + W_x(t_3 - t_p) + \frac{V_3 \cos \varphi_3}{\omega u_1^0} - \frac{V_p \cos \varphi_p}{\omega u_1^0} + \frac{a \sin \varphi_3}{\omega^2} - \frac{a \sin \varphi_p}{\omega^2},$$

$$y(t_3) = y(t_p) - W_y(t_3 - t_p) - \frac{V_3 \sin \varphi_3}{\omega u_1^0} + \frac{V_p \sin \varphi_p}{\omega u_1^0} + \frac{a \cos \varphi_3}{\omega^2} - \frac{a \cos \varphi_p}{\omega^2}.$$

$$x(T) = x(t_3) + W_x(T - t_3) + \frac{V_T \cos \varphi_T}{\omega u_1^0} - \frac{V_3 \cos \varphi_3}{\omega u_1^0} - \frac{a \sin \varphi_T}{\omega^2} + \frac{a \sin \varphi_3}{\omega^2},$$

$$y(T) = y(t_3) - W_y(T - t_3) - \frac{V_T \sin \varphi_T}{\omega u_1^0} + \frac{V_3 \sin \varphi_3}{\omega u_1^0} - \frac{a \cos \varphi_T}{\omega^2} + \frac{a \cos \varphi_3}{\omega^2}.$$

Для синтеза траекторий будем использовать минимизацию следующего функционала по $\varphi_p, \varphi_1, \varphi_2$:

$$f_4(\varphi_p, \varphi_1, \varphi_2) = [x(T)]^2 + [y(T)]^2.$$

Тогда получим функционал вида

$$\begin{aligned} f_4(\varphi_p, \varphi_1, \varphi_2) &= [x(T)]^2 + [y(T)]^2 = \\ &= \left[x_0 + W_x T + \frac{1}{\omega u_1^0} \left(V_0 \cos \varphi_0 + V_0 - 2V_p \cos \varphi_0 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a}{\omega^2} \left(2 \sin \varphi_1 - 2 \sin \varphi_2 + 2 \sin \varphi_3 - \sin \varphi_0 \right) \right]^2 + \\ &\quad + \left[y_0 - W_y T + \frac{1}{\omega u_1^0} \left(2V_p \sin \varphi_p - V_0 \sin \varphi_0 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a}{\omega^2} \left(2 \cos \varphi_1 - 2 \cos \varphi_2 + 2 \cos \varphi_3 - \cos \varphi_0 - 1 \right) \right]^2, \end{aligned}$$

где φ_3 из (28) есть

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_T - \varphi_0}{2} - \varphi_p + \varphi_1 + \varphi_2, \quad (29)$$

V_p с помощью (22), (23) можно выразить как

$$V_p = V_0 + \frac{a}{u_1^0 \omega} (2\varphi_1 - 2\varphi_2 - \varphi_0 + \varphi_p).$$

Используя (22), (27) и (29), получим соотношение для T :

$$T = \frac{6\varphi_p - \varphi_0 - \varphi_T - \varphi_2}{u_1^0 \omega}.$$

Таким образом, можно провести минимизацию по трем переменным, где φ_p принадлежит

$$\varphi_p \in \begin{cases} [\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi], & u_1^0 = +1, \varphi_T = 0, \\ [\varphi_0, 0], & u_1^0 = +1, \varphi_T = -2\pi, \\ [\varphi_0 - 2\pi, 0], & u_1^0 = -1, \varphi_T = 0, \\ [0, \varphi_0], & u_1^0 = -1, \varphi_T = 2\pi, \end{cases}$$

угол φ_1 находится в

$$\varphi_1 \in \begin{cases} [\varphi_0, \varphi_p], & u_1^0 = +1, \varphi_T = 0, \\ [\varphi_0, \varphi_p], & u_1^0 = +1, \varphi_T = -2\pi, \\ [\varphi_p, \varphi_0], & u_1^0 = -1, \varphi_T = 0, \\ [\varphi_p, \varphi_0], & u_1^0 = -1, \varphi_T = 2\pi, \end{cases}$$

а угол φ_2 принадлежит

$$\varphi_2 \in \begin{cases} [0, \varphi_p], & u_1^0 = +1, \varphi_T = 0, \\ [-2\pi, \varphi_p], & u_1^0 = +1, \varphi_T = -2\pi, \\ [\varphi_p, 0], & u_1^0 = -1, \varphi_T = 0, \\ [\varphi_p, 2\pi], & u_1^0 = -1, \varphi_T = 2\pi. \end{cases}$$

Утверждение 4. Пусть движение управляемого объекта удовлетворяет системе (1). Если при заданных начальных данных $(x_0, y_0, \varphi_0, V_0)$ минимум функции $f_4(\varphi_p, \varphi_1, \varphi_2)$ равен нулю, тогда имеет место искомое движение.

Полученный функционал также зависит от трех переменных, для поиска его минимума можно воспользоваться методами многомерной минимизации, например, методом градиентного спуска. В приложении приведен пример траектории для случая:

$$(x_0, y_0, \varphi_0, V_0) = (250007.5, 167473, -\pi, 100);$$

$$u_1 = +1, \varphi_1 = -1.6416, \varphi_2 = -0.855, \varphi_p = -0.0696, \varphi_3 = -3.9977, \varphi_T = -2\pi \text{ на рис. 6.}$$

Выводы

В ходе проведенных исследований было обнаружено, что если существует движение, удовлетворяющее принципу максимума, с одной точкой переключения курсовым углом, не совпадающей с точками переключения скоростью, то оно имеет либо одну, либо три точки переключения управления скоростью. Результат сформулирован и оформлен в виде теоремы.

Используя теорему, можно заранее найти траектории движения при заданных начальных данных, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности. Следует также проверить возможность существования при тех же начальных данных траекторий с другим количеством точек переключения управления курсовым углом, удовлетворяющим принципу максимума, и выбрать из них оптимальную.

Заключение

Таким образом было показано, что движения, удовлетворяющие рассматриваемой системе и имеющие одно переключение курсовым углом, не совпадающее с точками переключения скорости, имеют либо одну точку переключения скорости, либо три.

Так как аналитически решить задачу невозможно, было использовано численное решение задачи, а именно минимизация функционала одной переменной в случае одной точки переключения скорости, и трех переменных в случае трех.

Все вычисления, моделирования движений и построения графиков были выполнены с помощью математического пакета MatLab.

Список литературы

- [1] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
- [2] Айзекс Р. Дифференциальные игры / пер. с англ. В. И. Аркина, Э. Н. Симаковой; под ред. М. И. Зеликина. М.: Мир, 1967. 384 с.
- [3] Isaacs R. Games of pursuit. Scientific report of the RAND Corporation. Santa Monica: RAND Corporation, 1951.
- [4] Бердышев Ю. И. Синтез оптимального по быстродействию управления для одной нелинейной системы четвёртого порядка // Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39. Вып. 6. С. 985–994.
- [5] Бердышев Ю. И. Синтез оптимального по быстродействию управления движением материальной точки в среде с сопротивлением. Автореф. канд. дис., Свердловск: Урал. науч. центр, 1978. 18 с.
- [6] Пацко В.С., Пятко С.Г, Кумков С. И, Федотов А. А. Оценивание движения воздушного судна на основе информационных множеств при неполных замерах координат // Науч. докл. Академия ГА. С.-Петербург, 1999; ИММ УрО РАН, Екатеринбург. 1999. 70 с.
- [7] Розов Н. Х. Постановка задачи оптимального управления. Математика на службе инженера. Основы теории оптимального управления: сб. статей. М.: Знание, 1973. С. 6–27.
- [8] Reeds J. A., Sheep L. A. Optimal paths for a car that goes both forwards and backwards // Pacific J. Math. 1990. Vol. 145, No 2. P. 367–393.
- [9] Пацко В. С., Турова В. Л. Игра «шофёр-убийца» и её модификации // Вестник Удмурт. у-та. Вып. 2. Ижевск. 2008. С. 105–110.
- [10] Patsko V. S., Turova V. L. Level sets of the value function in differential games with the homicidal chauffeur dynamics // Game Theory and Applications. 2007. Vol. 12. P. 123–152.

- [11] Золотых М. С., Моисеев И. А. Свойства точек переключения управления нелинейной системы четвёртого порядка // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. №3. С. 118–124.

Приложение

Практическая реализация одномерной минимизации проведена методом золотого сечения, многомерной – градиентным спуском. Также положено $W_x = 10, W_y = 8, a = 5, \omega = 0.01$.

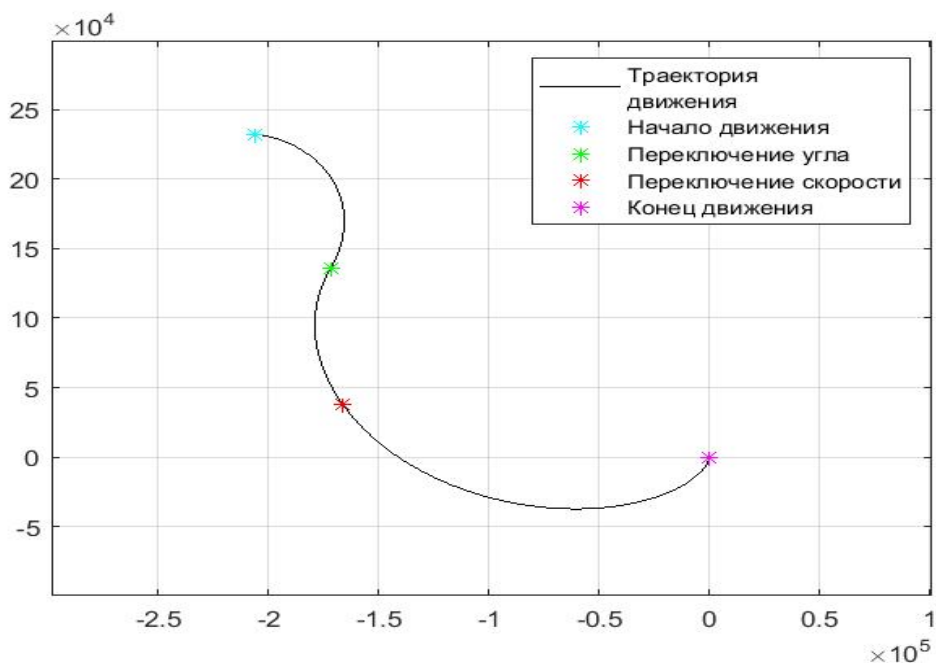


Рис. 1: Случай $t_p < t_1, u_1 = 1$.

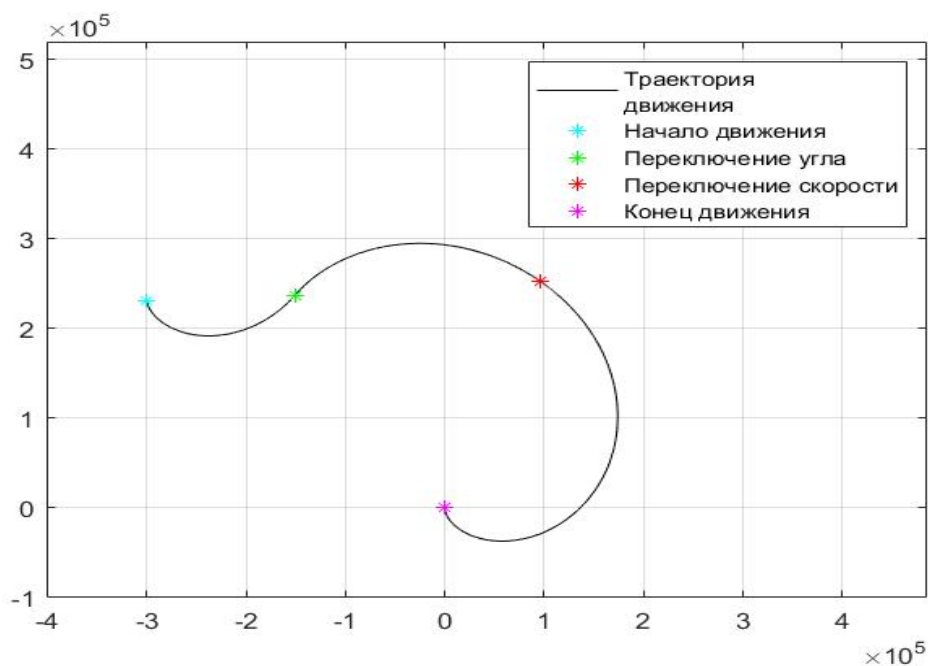


Рис. 2: Случай $t_p < t_1, u_1 = -1$.

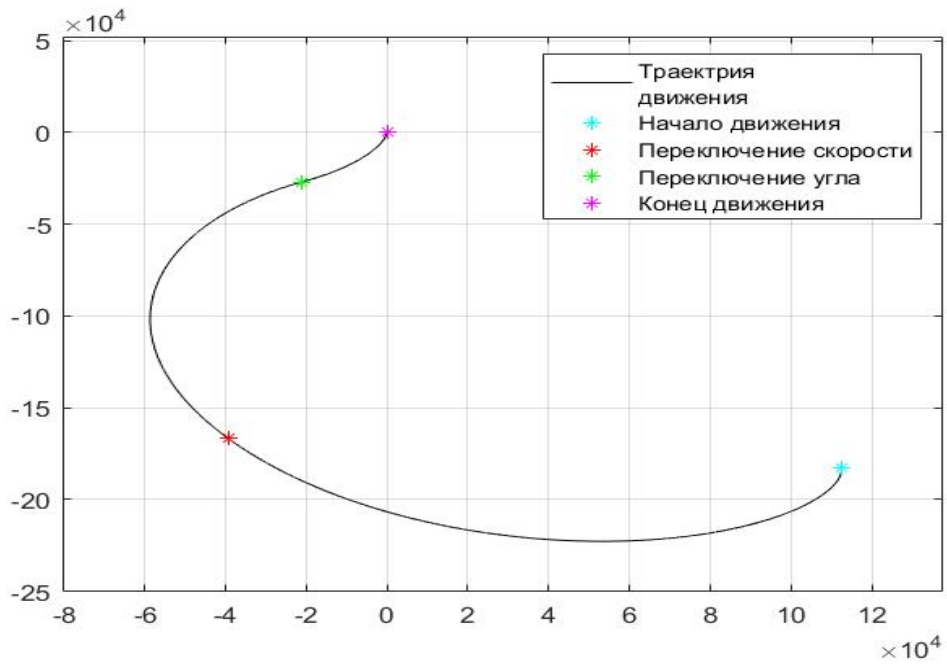


Рис. 3: Случай $t_1 < t_p$, $u_1 = 1$.

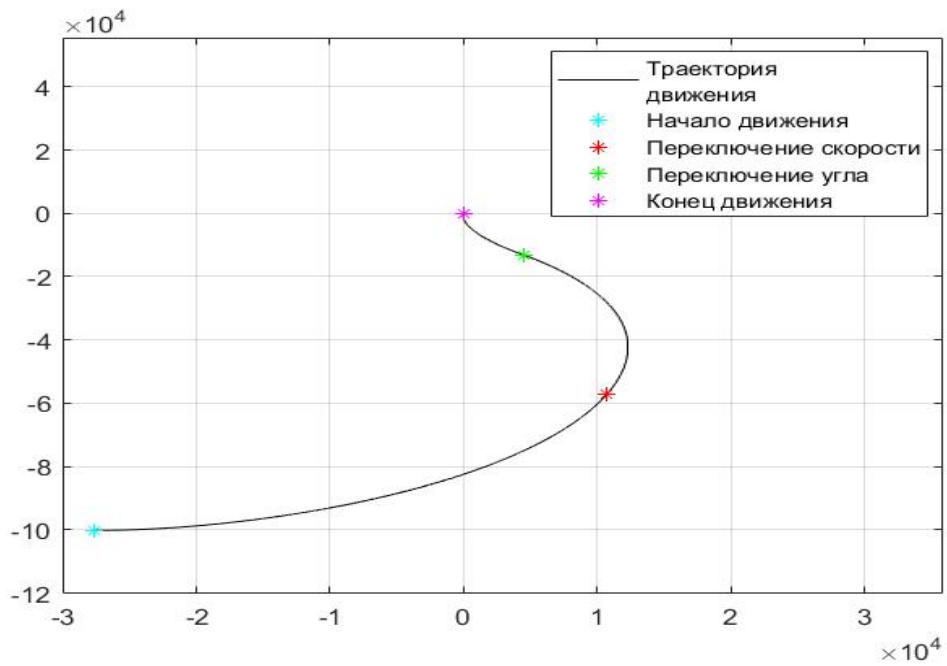


Рис. 4: Случай $t_1 < t_p$, $u_1 = -1$.

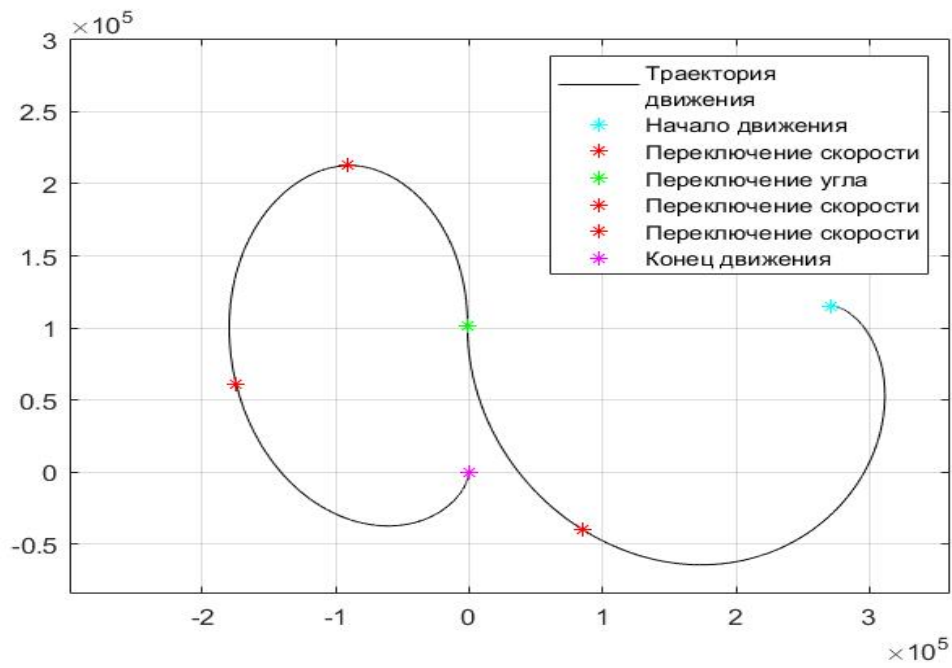


Рис. 5: Случай $t_1 < t_p < t_2 < t_3, u_1 = 1$.

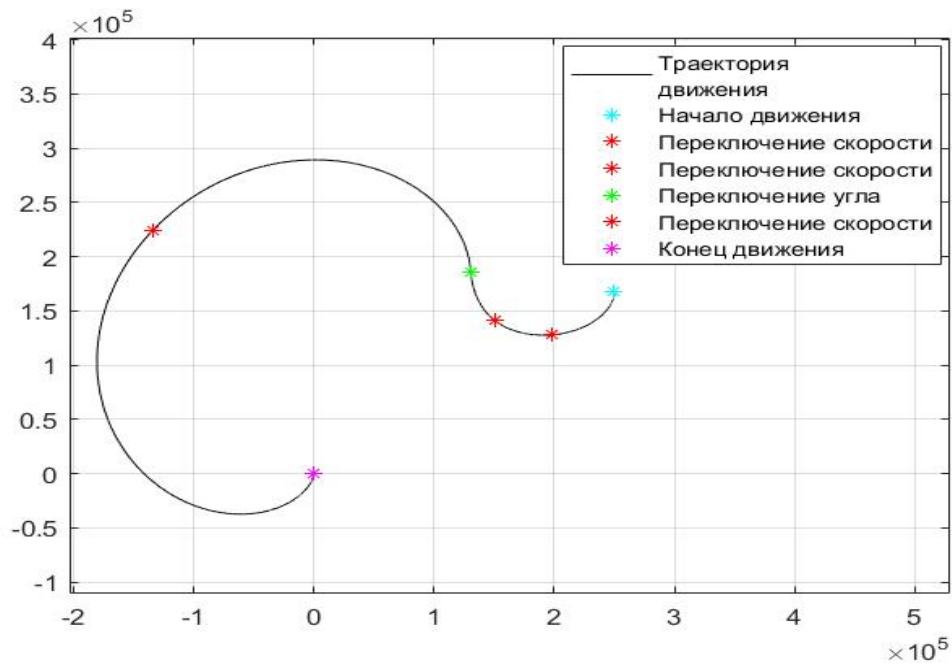


Рис. 6: Случай $t_1 < t_2 < t_p < t_3, u_1 = 1$.