САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра теории управления

Охота Даниил Вадимович

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Анализ устойчивости решений сложных систем с запаздыванием

Направление: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
ООП: Прикладная математика, фундаментальная информатика и программирование

Научный руководитель:
кандидат физ.-мат. наук, доцент
Александрова Ирина Васильевна

Рецензент:
доктор физ.-мат. наук, профессор
Александров Александр Юрьевич

Санкт-Петербург
2021

Содержание

Введение

Системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом широко используются для моделирования различных явлений и процессов. При этом методы анализа устойчивости нелинейных дифференциально-разностных систем в настоящее время развиты недостаточно. Как правило, для анализа таких систем применяется теорема об устойчивости по линейному приближению, однако это возможно далеко не всегда.

Для нелинейных систем с запаздыванием известна теорема Красовского об асимптотической устойчивости нулевого решения [1]. Согласно этой теореме, для доказательства асимптотической устойчивости достаточно построить функционал Ляпунова – Красовского, допускающий положительноопределенные оценки снизу и сверху и имеющий отрицательно-определенную производную вдоль решений системы. На построение таких функционалов для некоторых классов сложных систем с запаздыванием направлена данная работа.

В работе исследуются сложные дифференциально-разностные системы, описывающие взаимодействие двух подсистем. Среди таких классов подсистем рассмотрены линейные стационарные системы с постоянным запаздыванием и однородные стационарные системы с порядками однородности правых частей, большими единицы. Предполагается, что функции, описывающие взаимодействие между подсистемами, имеют перекрестный характер, т.е. каждая из них зависит только от состояния другой подсистемы.

Отметим, что некоторые из рассматриваемых классов систем ранее исследовались в работах А. Ю. Александрова и А. П. Жабко [2, 3, 14], в которых для систем этих классов получены условия асимптотической устойчивости нулевого решения с помощью функций Ляпунова и метода Разумихина.

Работа имеет следующую структуру. Глава 1 содержит предварительные сведения, касающиеся однородных систем с порядками однородности правых частей, строго большими единицы, (п. 1.1) и линейных стационарных систем (п. 1.2). В частности, в нем представлены конструкции функционалов Ляпунова – Красовского, известные из литературы для таких систем. Для случая однородных систем без запаздывания в п. 1.2 приведены свойства функций Ляпунова, являющихся базовым элементом конструкции функционалов Ляпунова – Красовского для однородных систем с запаздыванием. В главе 2 рассматриваются сложные системы с запаздыванием, описывающие взаимодействие двух однородных подсистем с порядками однородности правых частей, строго большими единицы. Для этого класса систем в п. 2.1 построены функционалы Ляпунова – Красовского, в п. 2.2 доказаны леммы об оценках функционалов, а в п. 2.3 функционалы применяются к построению оценок решений. Доказанные леммы показывают, что в случае асимптотической устойчивости соответствующих систем без запаздывания построенные функционалы удовлетворяют условиям теоремы Красовского. Аналогичные результаты для сложных дифференциально-разностных систем, описывающих взаимодействие линейной стационарной подсистемы и однородной подсистемы с порядком однородности правой части, большим единицы, представлены в п. 3.1, 3.2 и 3.4. В п. 3.3 построенные функционалы Ляпунова – Красовского применяются к доказательству теоремы об асимптотической устойчивости нулевого решения для последнего класса систем.

Постановка задачи

В данной работе рассматриваются сложные системы с запаздыванием двух типов. Система первого типа имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= F_1(y(t-h_1)) + R_1(t, z_t), \\ \dot{z}(t) &= F_2(z(t-h_2)) + R_2(t, y_t), \end{aligned} \tag{1}$$

где $F_1(y)$, $y \in \mathbb{R}^{n_1}$, $F_2(z)$, $z \in \mathbb{R}^{n_2}$ являются однородными функциями порядка $\mu > 1$, запаздывания $h_1, h_2 > 0$,

$$\begin{aligned} y_t : &\quad \theta \to y(t+\theta), \quad \theta \in [-h_1, 0], \\ z_t : &\quad \theta \to z(t+\theta), \quad \theta \in [-h_2, 0], \end{aligned}$$

а функции R_1, R_2 удовлетворяют ограничениям:

$$\begin{aligned} \|R_1(t, z_t)\| &\leq \beta(\|z(t)\|^{\sigma_1} + \|z(t-h_2)\|^{\sigma_1}), \\ \|R_2(t, y_t)\| &\leq \alpha(\|y(t)\|^{\sigma_2} + \|y(t-h_1)\|^{\sigma_2}), \end{aligned} \tag{2}$$

где $\sigma_1, \sigma_2 \geq 1$. Система второго типа имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= F_1(y(t-h_1)) + R_1(t, z_t), \\ \dot{z}(t) &= Az(t) + Bz(t-h_2) + R_2(t, y_t), \end{aligned} \tag{3}$$

где $F_1(y)$, $y \in \mathbb{R}^{n_1}$ является однородной функцией порядка $\mu > 1$, $A, B \in R^{n_2 \times n_2}$ — постоянные матрицы, запаздывания $h_1, h_2 > 0$, а функции $R_1(t, z_t)$, $R_2(t, y_t)$ удовлетворяют ограничениям (2).

Введем обозначения $h = max\{h_1, h_2\}$, $x(t) = (y^T(t), z^T(t))^T$, $n = n_1 + n_2$. В качестве пространства начальных функций в работе рассматривается пространство непрерывных начальных функций $([-h, 0], R^n)$ с равномерной нормой

$$\|\phi\|_h = max_{\theta \in [-h, 0]} \|\phi(\theta)\|,$$

для векторов и матриц используется евклидова норма. Через $x(t, \phi)$ обозначается решение системы (1) или (3) с начальной функцией ϕ:

$$x(\theta, \phi) = \phi(\theta), \quad \theta \in [-h, 0].$$

Всюду в работе предполагается, что функции $F_1(y)$ и $F_2(z)$ непрерывны и локально липшицевы, а функции $R_1(t, z_t)$ и $R_2(t, y_t)$ непрерывны. Отметим, что в силу однородности функций $F_1(y)$ и $F_2(z)$ и условий (2) системы (1) и (3) имеют нулевое решение.

В предположении об асимптотической устойчивости некоторых вспомогательных систем, для систем вида (1) и (3) в работе ставятся две основные задачи:

1. Построение функционалов Ляпунова — Красовского, пригодных для анализа асимптотической устойчивости решений этих систем. При этом для систем вида (1) построенные функционалы позволяют установить известные из литературы [3] условия на параметры σ_1, σ_2, μ, при которых нулевое решение системы является асимптотически устойчивым. Для систем вида (3) с помощью построенных функционалов доказана новая теорема об асимптотической устойчивости нулевого решения;

2. Построение оценок решений систем вида (1) и (3) с помощью предложенных конструкций функционалов Ляпунова — Красовского.

Обзор литературы

Работа посвящена построению функционалов Ляпунова – Красовского для некоторых классов сложных дифференциально-разностных систем.

Для линейных стационарных систем с запаздыванием в работе используются функционалы с заданной производной [1]. Первой из работ, посвященных развитию теории функционалов с заданной производной, является работа Ю.М. Репина [5]. В ней предложен квадратичный функционал общего вида. В статье [6] структура функционалов уточняется и вводится специальная матричная функция, позже получившая название матрицы Ляпунова. В этой статье также впервые указаны три основных свойства матриц Ляпунова и показано, что матрица Ляпунова является основным элементом, определяющим функционалы с заданной производной.

В работе [7] введен функционал, производная которого вдоль решений линейной стационарной системы совпадает с заранее заданной отрицательно – определенной квадратичной формой. Доказано, что такой функционал допускает локальную кубическую нижнюю оценку. В статье [8] построен так называемый функционал полного типа, производная которого вдоль решений системы совпадает в заданным отрицательно – определенным функционалом. В отличие от функционала из работы [7], такой функционал допускает глобальную квадратичную оценку снизу, благодаря чему он может быть использован, например, в задаче о построении экспоненциальных оценок решений линейных систем [1].

Для однородных систем с запаздыванием большинство результатов в литературе получено с помощью метода функций Ляпунова и теоремы Разумихина. При этом в качестве функции Ляпунова берется функция, построенная по соответствующей системе без запаздывания. Известно, что если однородная система без запаздывания асимптотически устойчива, то для нее существует однородная функция Ляпунова [9, 10]. С помощью этой функции в статье [3] для однородных систем с порядками однородности правых частей, большими единицы, доказан такой результат: из асимптотической устойчивости системы при нулевом значении запаздывания следует асимптотическая устойчивость ее нулевого решения при любых непрерывных и ограниченных запаздываниях, при этом запаздывания могут зависеть от времени. Этот результат распространен на более общий класс систем в статье [2]. Кроме того, в статьях [2, 3] рассматриваются и другие классы систем, для которых доказаны результаты об асимптотической устойчивости нулевого решения при любых запаздываниях, в том числе сложные системы, описывающие взаимодействие нескольких однородных или линейных подсистем.

Функционалы Ляпунова – Красовского для однородных систем с запаздыванием с порядками однородности правых частей, большими единицы, построены в недавних статьях [11] и [4]. Основным элементом, определяющим функционалы, являются функции Ляпунова для соответствующих систем без запаздывания в предположении о том, что эти системы асимптотически устойчивы. В работе [12] конструкции функционалов для однородных систем с запаздыванием обобщены на случай, когда соответствующая система без запаздывания предполагается неустойчивой. Функционалы Ляпунова – Красовского применены к построению оценок решений однородных дифференциально-разностных систем в статье [12]. Кроме того, в недавней работе [13] функционалы Ляпунова – Красовского построены для более общего класса систем, а именно, для обобщенно-однородных систем, в том числе с отрицательными порядками однородности правых частей.

Сложные системы с запаздыванием, описывающие взаимодействие нескольких однородных (с порядками однородности правых частей, большими единицы) и/или линейных подсистем рассматривались в работах [2, 3, 14]. При этом в статье [14] с помощью метода функций Ляпунова – Разумихина построены оценки решений таких систем. В статьях [2, 3, 14] предполагается, что линейные системы, участвующие во взаимодействии, не содержат запаздываний.

Глава 1. Предварительные сведения

В этом разделе приведены основные свойства линейных и однородных (с порядками однородности правых частей, строго большими единицы) стационарных систем, а также конструкции функционалов Ляпунова – Красовского для таких систем, используемые далее в работе.

1.1 Однородные системы

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с запаздыванием вида

$$\dot{\mathrm{x}}(t) = F(\mathrm{x}(t-h)), \quad t \geq 0, \tag{4}$$

и соответствующую ей систему без запаздывания

$$\dot{\mathrm{y}}(t) = F(\mathrm{y}(t)), \tag{5}$$

где $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$, $h > 0$, $F(\mathrm{x})$ — однородная функция порядка $\mu > 1$. Приведем основные определения и свойства, используемые далее в работе.

Определение 1. *Функция $F(\mathrm{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется однородной функцией порядка $\mu > 1$, если для любого $c \in \mathbb{R}$ и любого $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$ выполнено $F(\mathrm{x}) = c^\mu F(\mathrm{x})$.*

Утверждение 1. *[9] Если функция $F(\mathrm{x})$ является однородной функцией порядка μ, для нее выполняется оценка: $\|F(\mathrm{x})\| \leq a\|\mathrm{x}\|^\mu$, где a – некоторое положительное число.*

Утверждение 2. *[9, 10] Если система (5) асимптотически устойчива, то для нее существует функция Ляпунова $V(\mathrm{x})$, которая удовлетворяет трем условиям:*
1) функция $V(\mathrm{x})$ дважды непрерывно дифференцируема и положительно определена;
2) функция $V(\mathrm{x})$ является однородной функцией порядка $\gamma \geq 2$;
3) функция $W(\mathrm{x}) = \left(\dfrac{\partial V(\mathrm{x})}{\partial \mathrm{x}}\right)^T F(x)$ отрицательно определена и является однородной функцией порядка $\gamma + \mu - 1$.

Замечание. Известно [5], что порядок однородности γ можно выбрать произвольно, поэтому далее в работе число $\gamma \geq 2$ рассматривается как параметр.

Заметим также, что третье условие утверждения 2 означает, что функция $W(\mathrm{x})$ допускает оценку

$$W(\mathrm{x}) = \left(\frac{\partial V(\mathrm{x})}{\partial \mathrm{x}}\right)^T F(\mathrm{x}) \leq -w\|x(t)\|^{\gamma+\mu-1}, \quad w > 0. \tag{6}$$

Однородность функции V(x) влечет выполнение следующего утверждения.

Утверждение 3. *[9] Существуют такие положительные константы b_1, b_2, b_3, что выполняются неравенства:*

$$V(\mathrm{x}) \leq b_1\|\mathrm{x}\|^\gamma, \quad \left|\left|\frac{\partial V(\mathrm{x})}{\partial \mathrm{x}}\right|\right| \leq b_2\|\mathrm{x}\|^{\gamma-1}, \quad \left|\left|\frac{\partial^2 V(\mathrm{x})}{\partial \mathrm{x}^2}\right|\right| \leq b_3\|\mathrm{x}\|^{\gamma-2}.$$

Известно, что нулевое решение однородной системы обладает следующим свойством.

Теорема 1. *[3] Пусть система (5) асимптотически устойчива. Тогда нулевое решение системы (4) также асимптотически устойчиво при любых значениях $h \geq 0$.*

В работах [11, 4] на основе функции Ляпунова системы без запаздывания построен следующий функционал Ляпунова – Красовского для системы:

$$v_0(\mathrm{x}_t) = V(\mathrm{x}(t)) + \left(\frac{\partial V}{\partial \mathrm{x}}\right)^T \Bigg|_{\mathrm{x}=\mathrm{x}(t)} \cdot \int_{-h}^{0} F(\mathrm{x}(t+\theta))d\theta +$$
$$+ \int_{-h}^{0} (w_1 + (h+\theta)w_2)\|\mathrm{x}(t+\theta)\|^{\gamma+\mu-1}d\theta, \tag{7}$$

$x_t : \theta \to x(t+\theta), \quad \theta \in [-h, 0]$. Здесь $w_1, w_2 > 0$ – такие константы, что выполнено $w_0 = w - w_1 - hw_2 > 0$. Показано, что функционал (7) дифференцируем вдоль решений системы (4), и существует такое $\delta > 0$ и положительно-определенный функционал $w(\phi)$, что выполняется неравенство

$$\frac{dv_0(\mathrm{x}_t)}{dt} \leq -w(\mathrm{x}_t)$$

в окрестности $\|\mathrm{x}_t\|_h \leq \delta$. Другими словами, в предположении об асимптотической устойчивости системы функционал (7) удовлетворяет условиям теоремы Красовского (см., например, теорему 1.8 в книге [1]) для любого $h > 0$, а значит, позволяет установить асимптотическую устойчивость нулевого решения системы.

1.2 Линейные системы

Рассмотрим линейную стационарную систему дифференциальных уравнений с запаздыванием вида

$$\dot{\mathrm{z}}(t) = A\mathrm{z}(t) + B\mathrm{z}(t-h), \quad t \geq 0. \tag{8}$$

Здесь $\mathrm{z} \in R^n, A, B$ – вещественные постоянные матрицы, $h > 0$ — постоянное запаздывание.

Определение 2. *[1] Матрица $U(\tau)$ называется матрицей Ляпунова системы (8), ассоциированной с симметрической матрицей W, если она удовлетворяет следующим условиям:*
1) $\frac{d}{d\tau}U(\tau) = U(\tau)A + U(\tau-h)B, \quad \tau > 0$ (динамическое свойство),
2) $U(-\tau) = U^T(\tau), \quad \tau \geq 0$ (симметричное свойство),
3) $U(0)A + U(-h)B + A^TU(0) + B^TU(h) = -W$ (алгебраическое свойство).

Утверждение 4. *[1] Если система (8) экспоненциально устойчива, то существует матрица Ляпунова $U(\tau)$, ассоциированная с матрицей*

$$W = W_0 + W_1 + hW_2$$

, W_0, W_1, W_2 – заданные положительно-определенные матрицы.

Далее будем использовать матрицу Ляпунова из утверждения 4. Функционал полного типа для системы (8) имеет вид [1]

$$
\begin{aligned}
l(\mathrm{z}_t) = \mathrm{z}^T(t)U(0)\mathrm{z}(t) + 2\mathrm{z}^T(t)\int_{-h}^{0} U(-h-s)B\mathrm{z}(s+t)ds+ \\
+\int_{-h}^{0} \mathrm{z}^T(t+s_1)B^T \int_{-h}^{0} U(s_1-s_2)B\mathrm{z}(t+s_2)ds_2 ds_1+ \\
+\int_{-h}^{0} \mathrm{z}^T(t+\theta)[W_1+(h+\theta)W_2]\mathrm{z}(t+\theta)d\theta.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Производная данного функционала вдоль решений системы (8) равна

$$
\frac{d}{dt} l(\mathrm{z}_t) = -\mathrm{z}^T(t)W_0\mathrm{z}(t) - \mathrm{z}^T(t-h)W_1\mathrm{z}(t-h) - \int_{t-h}^{t} \mathrm{z}^T(s)W_2\mathrm{z}(s)ds,
$$

где $t \geq 0$. Необходимым и достаточным условием экспоненциальной устойчивости системы (8) является существование положительно-определенной квадратичной оценки снизу для функционала (9) [1].

Глава 2. Случай двух однородных подсистем

В этой главе строятся функционалы Ляпунова – Красовского и с их помощью решается задача о построении оценок решений для сложных диффереционально-разностных систем вида (1), описывающих взаимодействие двух однородных подсистем с разными запаздываниями. При этом предполагается, что функции $R_1(t, z_t)$ и $R_2(t, y_t)$ имеют перекрестный характер, т.е. каждая из них зависит только от состояния другой подсистемы.

Рассмотрим систему (1), в которой функции $R_1(t, z_t)$ и $R_2(t, y_t)$ удовлетворяют ограничениям (2), и две системы без запаздывания:

$$\dot{y}(t) = F_1(y(t)), \tag{10}$$
$$\dot{z}(t) = F_2(z(t)). \tag{11}$$

Далее будем считать выполненным следующее предположение.

Предположение 1. *Системы (10) и (11) асимптотически устойчивы.*

Согласно теореме 1, предположение 1 гарантирует асимптотическую устойчивость нулевого решения систем $\dot{y}(t) = F_1(y(t-h_1))$ и $\dot{z}(t) = F_2(z(t-h_2))$ при любых значениях $h_1, h_2 > 0$. В работе [3] для случая $h_1 = h_2$ с помощью метода Разумихина получен следующий результат.

Теорема 2. *Если выполнено предположение 1 и имеют место неравенства*

$$\mu > 1, \quad \sigma_1 \geq 1, \quad \sigma_2 \geq 1, \quad \sigma_1\sigma_2 > \mu^2, \tag{12}$$

то нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво при любых значениях $h_1, h_2 > 0$.

Далее в этой главе будем считать неравенства (13) выполненными.

2.1 Конструкция функционала Ляпунова — Красовского

Построим функционал для системы (1) как сумму двух функционалов вида (7):

$$v(y_t, z_t) = v_1(y_t) + v_2(z_t), \quad \text{где} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} v_1(y_t) = V_1(y(t)) + \Big(\frac{\partial V_1(y)}{\partial y}\Big)^T\Big|_{y=y(t)} \cdot \int_{-h_1}^{0} F_1(y(t+\theta))d\theta + \\ + \int_{-h_1}^{0} (w_1 + (h_1+\theta)w_2)\|y(t+\theta)\|^{\gamma_1+\mu-1}d\theta, \\ v_2(z_t) = V_2(z(t)) + \Big(\frac{\partial V_2(z)}{\partial z}\Big)^T\Big|_{z=z(t)} \cdot \int_{-h_2}^{0} F_2(z(t+\theta))d\theta + \\ + \int_{-h_2}^{0} (\widetilde{w}_1 + (h_2+\theta)\widetilde{w}_2)\|z(t+\theta)\|^{\gamma_2+\mu-1}d\theta. \end{aligned}$$

Здесь $V_1(y)$ и $V_2(z)$ — однородные функции Ляпунова порядков однородности $\gamma_1 \geq 2$ и $\gamma_2 \geq 2$ для систем (10) и (11) соответственно. Эти функции существуют в силу утверждения 2 и предположения 1. Пусть

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V_1(y)}{\partial y}\right)^T F_1(y) \leq -w\|y\|^{\gamma_1+\mu-1}, \\ \left(\frac{\partial V_2(z)}{\partial z}\right)^T F_2(z) \leq -\widetilde{w}\|z\|^{\gamma_2+\mu-1}, \end{aligned} \tag{14}$$

значения $w_1, w_2 > 0$ таковы, что $w_0 = w - w_1 - h_1 w_2 > 0$, а значения $\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2 > 0$ таковы, что $\widetilde{w}_0 = \widetilde{w} - \widetilde{w}_1 - h_2\widetilde{w}_2 > 0$.

Поскольку $V_1(y), V_2(z)$ — однородные функции Ляпунова, то для них выполняются неравенства:

$$\begin{gathered} d_{01}\|y\|^{\gamma_1} \leq V_1(y) \leq d_1\|y\|^{\gamma_1}, \quad d_{02}\|z\|^{\gamma_2} \leq V_2(z) \leq d_2\|z\|^{\gamma_2}, \\ \left\|\frac{\partial V_1(y)}{\partial y}\right\| \leq d_3\|y\|^{\gamma_1-1}, \quad \left\|\frac{\partial V_2(z)}{\partial z}\right\| \leq d_4\|z\|^{\gamma_2-1} \\ \left\|\frac{\partial^2 V_1(y)}{\partial y^2}\right\| \leq d_5\|y\|^{\gamma_1-2}, \quad \left\|\frac{\partial^2 V_2(z)}{\partial z^2}\right\| \leq d_6\|z\|^{\gamma_2-2}. \end{gathered} \tag{15}$$

В силу однородности функций F_1, F_2 верны оценки:

$$F_1(y) \le g_1\|y\|^{\mu}, \quad F_2(z) \le g_2\|z\|^{\mu}.$$

2.2 Леммы об оценках функционала

В этом разделе покажем, что если выполнено предположение 1 и неравенства (13), то функционал (13) удовлетворяет условиям теоремы Красовского. Другими словами, справедливы следующие леммы.

Лемма 1. *Существуют константы $K_1, K_2, H_1 > 0$ такие, что производная функционала $v(y_t, z_t)$ вдоль решений системы (1) допускает оценку:*

$$\begin{aligned}\frac{dv(y_t,z_t)}{dt} \le -K_1\bigg(\|y(t)\|^{\gamma_1+\mu-1} + \int_{-h_1}^{0}\|y(t+\theta)\|^{\gamma_1+\mu-1}d\theta\bigg)-\\ -K_2\bigg(\|z(t)\|^{\gamma_2+\mu-1} + \int_{-h_2}^{0}\|z(t+\theta)\|^{\gamma_2+\mu-1}d\theta\bigg)\end{aligned} \tag{16}$$

при $\|x_t\|_h < H_1$.

Доказательство. Обозначим слагаемые функционала $v_1(y_t)$ через I_1, I_2, I_3. Продифференцируем первое слагаемое функционала $v_1(y_t)$:

$$\frac{dI_1}{dt} = \left(\frac{\partial V_1(y)}{\partial y}\right)^T\Big|_{y=y(t)}(F_1(y(t-h_1)) + R_1(t,z_t)).$$

Производная слагаемого I_2 равна

$$\begin{aligned}\frac{dI_2}{dt} = \left(\frac{\partial V_1(y)}{\partial y}\right)^T\Big|_{y=y(t)}(F_1(y(t)) - F_1(y(t-h_1))) + (F_1(y(t-h_1))+\\ +R_1(t,z_t))^T\cdot\left(\frac{\partial^2 V_1(y)}{\partial y^2}\right)\Big|_{y=y(t)}\cdot\int_{t-h_1}^{t}F_1(y(s))ds.\end{aligned}$$

Рассмотрим третье слагаемое функционала $v_1(y_t)$:

$$I_3 = \int_{-h_1}^{0}(w_1 + (h_1+\theta)w_2)\|y(t+\theta)\|^{\gamma_1+\mu-1}d\theta.$$

Сделаем замену $t+\theta=s$ под знаком интеграла:

$$I_3=\int_{t-h_1}^{t}(w_1+(h_1+s-t)w_2)\|y(s)\|^{\gamma_1+\mu-1}ds.$$

Вычислим производную слагаемого I_3:

$$\frac{dI_3}{dt}=(w_1+w_2h_1)\|y(t)\|^{\gamma_1+\mu-1}-w_1\|y(t-h_1)\|^{\gamma_1+\mu-1}-$$
$$-w_2\int_{t-h_1}^{t}\|y(s)\|^{\gamma_1+\mu-1}ds.$$

Соберем все слагаемые вместе:

$$\frac{dv_1(y_t)}{dt}=\left(\frac{\partial V_1(y)}{\partial y}\right)^T\Big|_{y=y(t)}(F_1(y(t-h_1))+R_1(t,z_t))+$$
$$+\left(\frac{\partial V_1(y)}{\partial y}\right)^T\Big|_{y=y(t)}(F_1(y(t))-F_1(y(t-h_1)))+$$
$$+(F_1(y(t-h_1))+R_1(t,z_t))^T\cdot\left(\frac{\partial^2 V_1(y)}{\partial y^2}\right)\Big|_{y=y(t)}\cdot\int_{t-h_1}^{t}F_1(y(s))ds+$$
$$+(w_1+w_2h_1)\|y(t)\|^{\gamma_1+\mu-1}-w_1\|y(t-h_1)\|^{\gamma_1+\mu-1}-$$
$$-w_2\int_{t-h_1}^{t}\|y(s)\|^{\gamma_1+\mu-1}ds\le -w_0\|y(t)\|^{\gamma_1+\mu-1}-w_1\|y(t-h_1)\|^{\gamma_1+\mu-1}-$$
$$-w_2\int_{t-h_1}^{t}\|y(s)\|^{\gamma_1+\mu-1}ds+\left(\frac{\partial V_1(y)}{\partial y}\right)^T\Big|_{y=y(t)}(R_1(t,z_t))+$$
$$+(F_1(y(t-h_1))+R_1(t,z_t))^T\cdot\left(\frac{\partial^2 V_1(y)}{\partial y^2}\right)\Big|_{y=y(t)}\cdot\int_{t-h_1}^{t}F_1(y(s))ds,$$

здесь использовано первое из неравенств (14). Оценим знаконеопределенные слагаемые производной функционала $v_1(y_t)$. Оценка первого из них имеет вид

$$\left\|F_1^T(y(t-h_1))\left(\frac{\partial^2 V_1(y)}{\partial y^2}\right)\Big|_{y=y(t)}\int_{t-h_1}^{t}F_1(y(s))ds\right\|\le$$
$$\le P_1\|y(t-h_1)\|^{\mu}\|y(t)\|^{\gamma_1-2}\int_{t-h_1}^{t}\|y(s)\|^{\mu}ds\le$$

$$\leq P_1\left(h_1\|y(t-h_1)\|^{2\mu+\gamma_1-2}+h_1\|y(t)\|^{2\mu+\gamma_1-2}+\int_{t-h_1}^{t}\|y(s)\|^{2\mu+\gamma_1-2}ds\right)\leq$$

$$\leq P_1H_1^{\mu-1}\left(h_1\|y(t-h_1)\|^{\gamma_1+\mu-1}+h_1\|y(t)\|^{\gamma_1+\mu-1}+\int_{t-h_1}^{t}\|y(s)\|^{\gamma_1+\mu-1}ds\right),$$

где $P_1=g_1^2d_5$. Здесь использовано неравенство

$$A^{p_1}B^{p_2}C^{p_3}\leq A^{p_1+p_2+p_3}+B^{p_1+p_2+p_3}+C^{p_1+p_2+p_3},$$

где $A,B,C,p_1,p_2,p_3>0$.

Второе из знаконеопределенных слагаемых производной функционала $v_1(y_t)$ допускает оценку

$$\|R_1^T(t,z_t)\left(\frac{\partial^2V_1(y)}{\partial y^2}\right)\Big|_{y=y(t)}\cdot\int_{t-h_1}^{t}F_1(y(s))ds\|\leq J_1(\|z(t)\|^{\sigma_1}+\|z(t-h_2)\|^{\sigma_1})$$

$$\cdot\|y(t)\|^{\gamma_1-2}\int_{t-h_1}^{t}\|y(s)\|^{\mu}ds\leq J_1(\|z(t)\|^{\sigma_1}+\|z(t-h_2)\|^{\sigma_1})\cdot$$

$$\cdot(h_1\|y(t)\|^{\mu+\gamma_1-2}+\int_{t-h_1}^{t}\|y(s)\|^{\mu+\gamma_1-2}ds)\leq$$

$$\leq J_1((\|z(t)\|^{\mu+\gamma_2-1})^{\frac{\sigma_1}{\mu+\gamma_2-1}}+(\|z(t-h_2)\|^{\mu+\gamma_2-1})^{\frac{\sigma_1}{\mu+\gamma_2-1}})\cdot$$

$$\cdot(h_1(\|y(t)\|^{\mu+\gamma_1-1})^{\frac{\mu+\gamma_2-1}{\mu+\gamma_1-1}}+\int_{t-h_1}^{t}\left(\|y(s)\|^{\mu+\gamma_1-1}\right)^{\frac{\mu+\gamma_2-1}{\mu+\gamma_1-1}}ds)\leq$$

$$\leq 2J_1((h_1(\|z(t)\|^{\mu+\gamma_2-1})^{\rho_{10}}+h_1(\|z(t-h_2)\|^{\mu+\gamma_2-1})^{\rho_{10}})+$$

$$+h_1(\|y(t)\|^{\mu+\gamma_1-1})^{\rho_{10}}+\int_{t-h_1}^{t}\left(\|y(s)\|^{\mu+\gamma_1-1}\right)^{\rho_{10}}ds),$$

где $J_1=g_1d_5\beta$, $\rho_{10}=\frac{\mu+\gamma_1-2}{\mu+\gamma_1-1}+\frac{\sigma_1}{\mu+\gamma_2-1}$. Третье из знаконеопределенных слагаемых производной функционала $v_1(y_t)$ допускает оценку

$$\|\left(\frac{\partial V_1(y)}{\partial y}\right)^T\Big|_{y=y(t)}R_1(t,z_t)\|\leq N_1(\|z(t)\|^{\sigma_1}+\|z(t-h_2)\|^{\sigma_1})\|y(t)\|^{\gamma_1-1}\leq$$

$$\leq N_1((\|z(t)\|^{\gamma_2+\mu-1})^{\frac{\sigma_1}{\gamma_2+\mu-1}}+(\|z(t-h_2)\|^{\gamma_2+\mu-1})^{\frac{\sigma_1}{\gamma_2+\mu-1}})(\|y(t)\|^{\gamma_1+\mu-1})^{\frac{\gamma_1-1}{\gamma_1+\mu-1}}\leq$$

$$\leq N_1((\|z(t)\|^{\gamma_2+\mu-1})^{\rho_{11}}+(\|z(t-h_2)\|^{\gamma_2+\mu-1})^{\rho_{11}}+2(\|y(t)\|^{\gamma_1+\mu-1})^{\rho_{11}}),$$

где $N_1 = d_3\beta$, $\rho_{11} = \frac{\gamma_1 - 1}{\mu+\gamma_1-1} + \frac{\sigma_1}{\mu+\gamma_2-1}$. Рассмотрим подробно данные степени:

$$\rho_{10} = \frac{\sigma_1}{\gamma_2+\mu-1} + \frac{\gamma_1+\mu-2}{\gamma_1+\mu-1} = 1 + \frac{\sigma_1}{\gamma_2+\mu-1} - \frac{1}{\gamma_1+\mu-1},$$
$$\rho_{11} = \frac{\sigma_1}{\gamma_2+\mu-1} + \frac{\gamma_1-1}{\gamma_1+\mu-1} = 1 + \frac{\sigma_1}{\gamma_2+\mu-1} - \frac{\mu}{\gamma_1+\mu-1}.$$

Наложим дополнительные ограничения так, чтобы данные степени были больше единицы:

$$\sigma_1 > \frac{\gamma_2+\mu-1}{\gamma_1+\mu-1}, \quad \frac{\sigma_1}{\mu} > \frac{\gamma_2+\mu-1}{\gamma_1+\mu-1}.$$

Так как $\mu > 1$, то выполнение второго неравенства влечет выполнение первого. Аналогично, производная функционала $v_2(z_t)$ равна

$$\frac{dv_2(z_t)}{dt} = \left(\frac{\partial V_2(z)}{\partial z}\right)^T\Big|_{z=z(t)}(F_2(z(t-h_2)) + R_2(t,y_t)) +$$
$$+\left(\frac{\partial V_2(z)}{\partial z}\right)^T\Big|_{z=z(t)}(F_2(z(t)) - F_2(z(t-h_2))) +$$
$$+(F_2(z(t-h_2)) + R_2(t,y_t))^T \cdot \left(\frac{\partial^2 V_2(z)}{\partial z^2}\right)\Big|_{z=z(t)} \cdot \int_{t-h_2}^{t} F_2(z(s))ds +$$
$$+(\widetilde{w_1} + \widetilde{w_2}h_2)\|z(t)\|^{\gamma_2+\mu-1} - \widetilde{w_1}\|z(t-h_2)\|^{\gamma_2+\mu-1} - \widetilde{w_2}\int_{t-h_2}^{t}\|z(s)\|^{\gamma_2+\mu-1}ds \le$$
$$\le -\widetilde{w_0}\|z(t)\|^{\gamma_2+\mu-1} - \widetilde{w_1}\|z(t-h_2)\|^{\gamma_2+\mu-1} - \widetilde{w_2}\int_{t-h_2}^{t}\|z(s)\|^{\gamma_2+\mu-1}ds +$$
$$+\left(\frac{\partial V_2(z)}{\partial z}\right)^T\Big|_{z=z(t)}(R_2(t,y_t) + F_2(z(t))) +$$
$$+(F_2(z(t-h_2)) + R_2(t,z_t))^T \cdot \left(\frac{\partial^2 V_2(z)}{\partial z^2}\right)\Big|_{z=z(t)} \cdot \int_{t-h_2}^{t} F_2(z(s))ds,$$

здесь использовано второе из неравенств (14). Оценим знаконеопределенные слагаемые производной функционала $v_2(z_t)$. Оценка первого из них имеет вид

$$\left\|F_2^T(z(t-h_2))\left(\frac{\partial^2 V_2(z)}{\partial z^2}\right)\Big|_{z=z(t)}\int_{t-h_2}^{t} F_2(z(s))ds\right\| \le$$

$$\leq P_2 H_1^{\mu-1}\left(h_2\|z(t-h_2)\|^{\gamma_2+\mu-1}+h_2\|z(t)\|^{\gamma_2+\mu-1}+\int_{t-h_2}^{t}\|z(s)\|^{\gamma_2+\mu-1}ds\right),$$

где $P_2 = g_2^2 d_6$. Второе из знаконеопределенных слагаемых производной функционала $v_2(z_t)$ допускает оценку

$$\|R_2(t,z_t)^T\cdot\left(\frac{\partial^2 V_2(z)}{\partial z^2}\right)\Big|_{z=z(t)}\cdot\int_{t-h_2}^{t}F_2(z(s))ds\|\leq$$
$$\leq 2J_2((h_2(\|y(t)\|^{\mu+\gamma_1-1})^{\rho_{20}}+h_2((\|y(t-h_1)\|)^{\mu+\gamma_1-1})^{\rho_{20}})+$$
$$+h_2(\|z(t)\|^{\mu+\gamma_2-1})^{\rho_{20}}+\left(\int_{t-h_2}^{t}\|z(s)\|^{\mu+\gamma_2-1}\right)^{\rho_{20}}),$$

где $J_2 = g_2 d_6\alpha$, $\rho_{20} = \frac{\mu+\gamma_2-2}{\mu+\gamma_2-1}+\frac{\sigma_2}{\mu+\gamma_1-1}$. Третье из знаконеопределенных слагаемых производной функционала $v_1(z_t)$ допускает оценку

$$\left\|\left(\frac{\partial V_2(z)}{\partial z}\right)^T\Big|_{z=z(t)}R_2(t,z_t)\right\|\leq N_2((\|y(t)\|^{\gamma_1+\mu-1})^{\rho_{21}}+$$
$$+(\|y(t-h_1)\|^{\gamma_1+\mu-1})^{\rho_{21}}+2(\|z(t)\|^{\gamma_1+\mu-1})^{\rho_{21}}),$$

где $N_2 = d_4\alpha$, $\rho_{21} = \frac{\gamma_2-1}{\mu+\gamma_2-1}+\frac{\sigma_2}{\mu+\gamma_1-1}$.

Аналогичным образом проводим действие над функционалом v_2, получаем следующее неравенство на степени:

$$\frac{\sigma_2}{\mu}>\frac{\gamma_1+\mu-1}{\gamma_2+\mu-1}.$$

Объединим полученные неравенства:

$$\frac{\mu}{\sigma_1}<\frac{\gamma_1+\mu-1}{\gamma_2+\mu-1}<\frac{\sigma_2}{\mu}$$

Поскольку в силу (13) $\sigma_1\sigma_2>\mu^2$, можно добиться выполнения этого неравенства за счет выбора γ_1 и γ_2. Поскольку по условию $\|x_t\|_h\leq H_1$, имеем $\|y(t+\theta)\|\leq H_1, \theta\in[-h_1,0]$, $\|z(t+\theta)\|\leq H_1, \theta\in[-h_2,0]$. Объединяя оценки производных функционалов $v_1(y_t)$ и $v_2(z_t)$, получим следующую оценку производной функционала (13):

$$
\begin{gathered}
\frac{dv(y_t, z_t)}{dt} \leq -K_{10}\|y(t)\|^{\gamma_1+\mu-1} - K_{11}\|y(t-h_1)\|^{\gamma_1+\mu-1} - \\
-K_{12}\int_{-h_1}^{0}\|y(t+\theta)\|^{\gamma_1+\mu-1}d\theta - K_{20}\|z(t)\|^{\gamma_2+\mu-1} - \\
-K_{21}\|z(t-h_2)\|^{\gamma_2+\mu-1} - K_{22}\int_{-h_2}^{0}\|z(t+\theta)\|^{\gamma_2+\mu-1}d\theta \leq \\
\leq -K_1\bigg(\|y(t)\|^{\gamma_1+\mu-1} + \int_{-h_1}^{0}\|y(t+\theta)\|^{\gamma_1+\mu-1}d\theta\bigg) - \\
-K_2\bigg(\|z(t)\|^{\gamma_2+\mu-1} + \int_{-h_2}^{0}\|z(t+\theta)\|^{\gamma_2+\mu-1}d\theta\bigg),
\end{gathered}
$$

где

$$
\begin{gathered}
K_1 = min\{K_{10}, K_{12}\} \\
K_{10} = w_0 - P_1h_1H_1^{\mu-1} - 2J_1h_1H_1^{(\rho_{10}-1)(\mu+\gamma_1-1)} - 2N_1H_1^{(\rho_{11}-1)(\mu+\gamma_1-1)} - \\
-2J_2h_2H_1^{(\rho_{20}-1)(\mu+\gamma_1-1)} - N_2H_1^{(\rho_{21}-1)(\mu+\gamma_1-1)}, \\
K_{12} = w_2 - P_1H_1^{\mu-1} - 2J_1H_1^{(\rho_{10}-1)(\mu+\gamma_1-1)}.
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
K_2 = min\{K_{20}, K_{22}\} \\
K_{20} = \widetilde{w_0} - P_2h_2H_1^{\mu-1} - 2J_2h_2H_1^{(\rho_{20}-1)(\mu+\gamma_2-1)} - 2N_1H_1^{(\rho_{21}-1)(\mu+\gamma_1-1)} - \\
-2J_1h_1H_1^{(\rho_{10}-1)(\mu+\gamma_2-1)} - N_1H_1^{(\rho_{11}-1)(\mu+\gamma_2-1)}, \\
K_{22} = \widetilde{w_2} - P_2H_1^{\mu-1} - 2J_2H_1^{(\rho_{20}-1)(\mu+\gamma_2-1)}.
\end{gathered}
$$

Что и требовалось доказать. □

Лемма 2. *Существуют константы $m_1, m_2, H_2 > 0$ такие, что функционалы $v_1(y_t)$ и $v_2(z_t)$ допускают следующие оценки сверху:*

$$
\begin{gathered}
v_1(y_t) \leq m_1(\|y(t)\|^{\gamma_1} + \int_{-h_1}^{0}\|y(t+\theta)\|^{\gamma_1}d\theta), \\
v_2(z_t) \leq m_2(\|z(t)\|^{\gamma_2} + \int_{-h_2}^{0}\|z(t+\theta)\|^{\gamma_2}d\theta)
\end{gathered}
$$

в окрестности $\|x_t\|_h < H_2$.

Доказательство. Оценим второе слагаемое функционала $v_1(y(t))$:

$$I_2 = \left(\frac{\partial V_1}{\partial y}\right)^T\Big|_{y=y(t)} \cdot \int_{-h_1}^{0} F_1(y(t+\theta))d\theta \leq d_3\|y(t)\|^{\gamma_1-1} \cdot \int_{-h_1}^{0} g_1\|y(t+\theta)\|^{\mu}d\theta \leq$$
$$\leq d_3 g_1(h_1\|y(t)\|^{\gamma_1+\mu-1} + \int_{-h_1}^{0} \|y(t+\theta)\|^{\gamma_1+\mu-1}d\theta). \qquad (17)$$

Оценка сверху третьего слагаемого имеет вид

$$I_3 = \int_{-h_1}^{0}(w_1 + (h_1+\theta)w_2)\|y(t+\theta)\|^{\gamma_1+\mu-1}d\theta \leq$$
$$\leq (w_1 + h_1 w_2)\int_{-h_1}^{0} \|y(t+\theta)\|^{\gamma_1+\mu-1}d\theta.$$

Таким образом, функционал $v_1(y_t)$ допускает следующую оценку сверху:

$$v_1(y_t) \leq \|y(t)\|^{\gamma_1}(d_1 + d_3 h_1 g_1\|y(t)\|^{\mu-1})+ \qquad (18)$$
$$+(w_1 + h_1 w_2 + d_3 g_1)\int_{-h_1}^{0} \|y(t+\theta)\|^{\gamma_1+\mu-1}d\theta \leq$$
$$\leq a_1\|y(t)\|^{\gamma_1} + b_1\int_{-h_1}^{0} \|y(t+\theta)\|^{\gamma_1}d\theta \leq m_1(\|y(t)\|^{\gamma_1} + \int_{-h_1}^{0} \|y(t+\theta)\|^{\gamma_1}d\theta),$$

где

$$m_1 = max\{a_1, b_1\}, \quad a_1 = d_1 + d_3 h_1 g_1 H_2^{\mu-1}, \quad b_1 = (w_1 + h_1 w_2 + d_3 g_1)H_2^{\mu-1}$$

в окрестности $||x_t||_h \leq H_2$.

Аналогично, функционал $v_2(z_t)$ допускает оценку сверху вида

$$v_2 \leq \|z(t)\|^{\gamma_2}(d_2 + d_4 h_2 g_2\|z(t)\|^{\mu-1})+ \qquad (19)$$
$$+\int_{-h_2}^{0} \|z(t+\theta)\|^{\gamma_2+\mu-1}d\theta(\widetilde{w_1} + h_2\widetilde{w_2} + d_4 g_2) \leq$$
$$\leq a_2\|z(t)\|^{\gamma_2} + b_2\int_{-h_2}^{0} \|z(t+\theta)\|^{\gamma_2}d\theta \leq m_2(\|z(t)\|^{\gamma_2} + \int_{-h_2}^{0} \|z(t+\theta)\|^{\gamma_2}d\theta),$$

где

$$m_2 = max\{a_2, b_2\}, \quad a_2 = d_2 + d_4 h_2 g_2 H_2^{\mu-1}, \quad b_2 = (\widetilde{w_1} + h_2 \widetilde{w_2} + d_4 g_2) H_2^{\mu-1}$$

в окрестности $||x_t||_h \leq H_2$.

Лемма доказана. $\square$

Таким образом, суммируя оценки слагаемых функционала (13), получаем оценку на весь функционал:

$$v(y_t, z_t) \leq m_1(\|y(t)\|^{\gamma_1} + \int_{-h_1}^{0} \|y(t+\theta)\|^{\gamma_1} d\theta) + m_2(\|z(t)\|^{\gamma_2} + \int_{-h_2}^{0} \|z(t+\theta)\|^{\gamma_2} d\theta). \tag{20}$$

Лемма 3. *Существуют константы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, H_3 > 0$ такие, что функционалы $v_1(y_t)$ и $v_2(z_t)$ допускают следующие оценки снизу:*

$$v_1(y_t) \geq \alpha_1 \|y(t)\|^{\gamma_1} + \alpha_2 \int_{-h_1}^{0} \|y(t+\theta)\|^{\gamma_1+\mu-1} d\theta,$$
$$v_2(z_t) \geq \alpha_3 \|z(t)\|^{\gamma_2} + \alpha_4 \int_{-h_2}^{0} \|z(t+\theta)\|^{\gamma_2+\mu-1} d\theta$$

в окрестности $\|x_t\|_h < H_3$.

Доказательство. Воспользуемся оценкой (17):

$$|I_2| \leq d_3 g_1 (h_1 \|y(t)\|^{\gamma_1+\mu-1} + \int_{-h_1}^{0} \|y(t+\theta)\|^{\gamma_1+\mu-1} d\theta).$$

Добавим некоторый параметр $\eta > 0$ во второе слагаемое:

$$\eta^{\gamma_1-1-\mu} d_3 g_1 \Big(\frac{\|y(t)\|}{\eta}\Big)^{\gamma_1-1} \int_{-h_1}^{0} (\eta \|y(t+\theta)\|)^{\mu} d\theta) \leq$$
$$\leq d_3 g_1 \left(\frac{h_1 \|y(t)\|^{\gamma_1+\mu-1}}{\eta^{2\mu}} + \eta^{2(\gamma_1-1)} \int_{-h_1}^{0} \|y(t+\theta)\|^{\gamma_1+\mu-1} d\theta \right)$$

Получаем оценку снизу на функционал:

$$v_1(y_t) \geq \Big(d_{10} - d_3 g_1 h_1 \eta^{-2\mu} \|y(t)\|^{\mu-1}\Big) \|y(t)\|^{\gamma_1} +$$
$$+\Big(w_1 - d_3 g_1 \eta^{2(\gamma_1-1)}\Big) \int_{-h_1}^{0} \|y(t+\theta)\|^{\gamma_1+\mu-1} d\theta$$

Выберем такое $\eta > 0$, чтобы выполнялось условие $w_1 - d_3 g_1 \eta^{2(\gamma_1-1)} > 0$, а затем выберем

$$H_{31} < \sqrt[\mu-1]{\frac{d_{10}}{d_3 g_1 h_1 \eta^{-2\mu}}}.$$

Оценка на $v_2(z_t)$ получается аналогичным образом со следующим ограничением:

$$H_{32} < \sqrt[\mu-1]{\frac{d_{20}}{d_4 g_2 h_2 \eta^{-2\mu}}}.$$

Выберем $H_3 = min\{H_{31}, H_{32}\}$.
Лемма доказана. $\square$

В дальнейшем мы будем использовать более грубую оценку:

$$v(y_t, z_t) \geq \alpha_1 \|y(t)\|^{\gamma_1} + \alpha_3 \|z(t)\|^{\gamma_2}$$

Замечание. Доказательства лемм 1–3 содержат явные выражения для вычисления постоянных $K_1, K_2, m_1, m_2, \alpha_1, \alpha_3$. Кроме того, в доказательстве леммы 1 наложены ограничения на порядки однородности γ_1 и γ_2 функций Ляпунова $V_1(y)$ и $V_2(z)$.

2.3 Построение оценок решений

В этом разделе функционал (13) применяется к построению оценок решений системы (1). При этом построенные оценки будут справедливы лишь для тех решений, для которых выполнено $||x(t)|| \leq \delta = min\{H_1, H_2, H_3\}$ при всех $t \geq 0$. Введем обозначение $\gamma = min\{\gamma_1, \gamma_2\}$.

Утверждение 5. *Для любых двух чисел $v_1, v_2 \geq 0$, и любого $p \geq 1$ выполнено неравенство:*

$$(v_1 + v_2)^p \leq 2^{p-1}(v_1^p + v_2^p).$$

Лемма 4. *Пусть p и q такие, что $p > q \geq 1$. Тогда выполняется следующее неравенство*

$$\left(\|f(t)\|^q + \int_{-h}^{0} \|f(t+\theta)\|^q d\theta\right)^{\frac{p}{q}} \leq \widetilde{L}\left(\|f(t)\|^p + \int_{-h}^{0} \|f(t+\theta)\|^p d\theta\right),$$

где $\widetilde{L} = (2max\{1,h\})^{\frac{p}{q}-1}$.

Теорема 3. *Пусть Δ – положительный корень уравнения*

$$m_1(1+h_1)\Delta^{\gamma_1} + m_2(1+h_2)\Delta^{\gamma_2} = min\{\alpha_1\delta^{\gamma_1}, \alpha_3\delta^{\gamma_2}\}. \qquad (21)$$

Если $\|\phi\|_h < \Delta$, то $\|x(t,\phi)\| < \delta, \quad t \geq 0$.

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 4 в работе [12].

Замечание. Уравнение (21) можно записать в виде

$$k\Delta^{\gamma} = min\{\alpha_1\delta^{\gamma_1}, \alpha_3\delta^{\gamma_2}\}, \qquad (21')$$

где $k = m_1(1+h_1) + m_2(1+h_2)\Delta^{\gamma_2-\gamma_1}$ при $\gamma_2 \geq \gamma_1$ и соответственно $k = m_1(1+h_1)\Delta^{\gamma_1-\gamma_2} + m_2(1+h_2)$ при $\gamma_1 > \gamma_2$.

Теорема 4. *Пусть системы (10) и (11) асимптотически устойчивы и выполнены неравенства (13). Тогда для решений системы (1) с начальными функциями, удовлетворяющими условию $\|\phi\|_h < \Delta$, где Δ — положительный корень уравнения (21), верны оценки:*

$$\|y(t)\| \leq c_1\|\phi\|_h^{\frac{\gamma}{\gamma_1}}\left(1 + c_2\|\phi\|_h^{\mu-1}t\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma_1(\mu-1)}}$$

$$\|z(t)\| \leq c_3\|\phi\|_h^{\frac{\gamma}{\gamma_2}}\left(1 + c_4\|\phi\|_h^{\mu-1}t\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma_2(\mu-1)}}, \quad t \geq 0,$$

где

$$c_1 = \frac{\delta}{\Delta^{\frac{\gamma}{\gamma_1}}}, \quad c_3 = \frac{\delta}{\Delta^{\frac{\gamma}{\gamma_2}}},$$

$$c_2 = c_4 = \left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{\mu-1}{\gamma}} \left(\frac{\mu-1}{\gamma}\right) \frac{L}{\widetilde{\delta}},$$

$$\text{где } L = min\left\{ \frac{K_1}{(2max\{1, h_1\})^{\frac{\mu-1}{\gamma_1}} m_1^{\frac{\gamma_1+\mu-1}{\gamma_1}}}, \frac{K_2}{(2max\{1, h_2\})^{\frac{\mu-1}{\gamma_2}} m_2^{\frac{\gamma_2+\mu-1}{\gamma_2}}} \right\},$$

$$\widetilde{\delta} = max\left\{ (m_1(1+h_1)\delta^{\gamma_1})^{(\mu-1)(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\gamma_1})}, (m_2(1+h_2)\delta^{\gamma_2})^{(\mu-1)(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\gamma_2})} \right\}$$

Доказательство. Преобразуем оценку на производную функционала (16) с помощью Леммы 4:

$$\begin{aligned} \frac{dv(y_t, z_t)}{dt} &\le -K_1\Big(\|y(t)\|^{\gamma_1+\mu-1} + \int_{-h_1}^{0} \|y(t+\theta)\|^{\gamma_1+\mu-1} d\theta\Big) - \\ &\quad -K_2\Big(\|z(t)\|^{\gamma_2+\mu-1} + \int_{-h_2}^{0} \|z(t+\theta)\|^{\gamma_2+\mu-1} d\theta\Big) \le \\ &\le -\frac{K_1}{L_1 m_1^{\frac{\gamma_1+\mu-1}{\gamma_1}}} \cdot v_1(y_t)^{\frac{\gamma_1+\mu-1}{\gamma_1}} - \frac{K_2}{L_2 m_2^{\frac{\gamma_2+\mu-1}{\gamma_2}}} \cdot v_2(z_t)^{\frac{\gamma_2+\mu-1}{\gamma_2}} \le \\ &\le -min\left\{ \frac{K_1}{L_1 m_1^{\frac{\gamma_1+\mu-1}{\gamma_1}}}, \frac{K_2}{L_2 m_2^{\frac{\gamma_2+\mu-1}{\gamma_2}}} \right\} (v_1(y_t)^{1+\frac{\mu-1}{\gamma_1}} + v_2(z_t)^{1+\frac{\mu-1}{\gamma_2}}), \end{aligned} \tag{22}$$

где $L_1 = (2max\{1, h_1\})^{\frac{\mu-1}{\gamma_1}}$, $L_2 = (2max\{1, h_2\})^{\frac{\mu-1}{\gamma_2}}$.

По теореме 3, условие $\|\phi\|_h < \Delta$ влечет $\|x_t\|_h < \delta$ при всех $t \ge 0$.

$$v_1(y_t) \le \tilde{\delta}_1 \quad \text{и} \quad v_2(z_t) \le \tilde{\delta}_2,$$

где $\tilde{\delta}_1 = m_1(1+h_1)\delta^{\gamma_1}, \tilde{\delta}_2 = m_2(1+h_2)\delta^{\gamma_2}$. Воспользуемся утверждением 4, в котором возьмем $p = 1 + \frac{\mu-1}{\gamma}$. Запишем неравенство с учетом вида p:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{\frac{\mu-1}{\gamma}}} \cdot (v_1(y_t) + v_2(z_t))^{1+\frac{\mu-1}{\gamma}} &\le v_1(y_t)^{1+\frac{\mu-1}{\gamma}} + v_2(z_t)^{1+\frac{\mu-1}{\gamma}} \le \\ &\le \widetilde{\delta} \cdot (v_1(y_t)^{1+\frac{\mu-1}{\gamma_1}} + v_2(z_t)^{1+\frac{\mu-1}{\gamma_2}}), \end{aligned}$$

где $\widetilde{\delta} = max(\widetilde{\delta}_1^{(\mu-1)(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\gamma_1})}, \widetilde{\delta}_2^{(\mu-1)(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\gamma_2})})$. Последняя оценка следует из того, что

$$v_1^{1+\frac{\mu-1}{\gamma}} \leq \widetilde{\delta}_1^{(\mu-1)(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\gamma_1})} v_1^{1+\frac{\mu-1}{\gamma_1}},$$
$$v_2^{1+\frac{\mu-1}{\gamma}} \leq \widetilde{\delta}_2^{(\mu-1)(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\gamma_2})} v_2^{1+\frac{\mu-1}{\gamma_2}}.$$

Из оценки (22) получаем:

$$\frac{dv(y_t, z_t)}{dt} \leq -\lambda \cdot v(y_t, z_t)^{1+\frac{\mu-1}{\gamma}}, \tag{23}$$

где

$$\lambda = \frac{min\left\{\frac{K_1}{L_1 m_1^{\frac{\gamma_1+\mu-1}{\gamma_1}}}, \frac{K_2}{L_2 m_2^{\frac{\gamma_2+\mu-1}{\gamma_2}}}\right\}}{2^{\frac{\mu-1}{\gamma}}\widetilde{\delta}}.$$

Воспользуемся леммой о сравнении решений дифференциальных уравнений [15]. Для этого наряду с неравенством (23) рассмотрим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{du(t)}{dt} = -\lambda \cdot u(t)^{1+\frac{\mu-1}{\gamma}},$$
$$u(0) = u_0 = k\|\phi\|_h^{\gamma}. \tag{24}$$

Методом разделения переменных находим решение задачи Коши (24):

$$u(t) = u_0\Big(1 + \lambda(\frac{\mu-1}{\gamma})u_0^{\frac{\mu-1}{\gamma}} t\Big)^{-\frac{\gamma}{\mu-1}}.$$

Заметим, что условие $||\phi||_h < \Delta$ означает, что $v(y_0, z_0) \leq m_1(1+h_1)\|y_0\|_{h_1}^{\gamma_1} + m_2(1+h_2)\|z_0\|_{h_2}^{\gamma_2} \leq k||\phi||_h^{\gamma}$, поэтому по лемме о сравнении получаем неравенство:

$$v(y_t, z_t) \leq u_0\Big(1 + \lambda(\frac{\mu-1}{\gamma})u_0^{\frac{\mu-1}{\gamma}} t\Big)^{-\frac{\gamma}{\mu-1}}.$$

Согласно лемме 3,

$$\alpha_1\|y(t)\|^{\gamma_1} + \alpha_3\|z(t)\|^{\gamma_2} \le v(y_t, z_t) \le u_0\Big(1 + \lambda(\frac{\mu-1}{\gamma})u_0^{\frac{\mu-1}{\gamma}}t\Big)^{-\frac{\gamma}{\mu-1}}.$$

Окончательно, пользуясь тем, что $k\Delta^\gamma \le \alpha_1\delta^{\gamma_1}, k\Delta^\gamma \le \alpha_3\delta^{\gamma_2}$, получаем требуемую оценку. $\square$

Глава 3. Случай однородной и линейной подсистем

В этой главе строятся функционалы Ляпунова – Красовского для сложных дифференциально-разностных систем вида (3). Эти функционалы применяются к доказательству теоремы об асимптотической устойчивости нулевого решения, а также к построению оценок решений таких систем.

Рассмотрим систему (3) и наряду с ней две вспомогательных системы

$$\dot{y}(t) = F_1(y(t)), \tag{25}$$

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t - h_2), \tag{26}$$

здесь значение $h_2 \geq 0$ фиксировано. Далее считаем выполненным следующее предположение.

Предположение 2. *Системы (25) и (26) асимптотически устойчивы.*

В работе [2] для случая $h_2 = 0$ с помощью метода Разумихина доказана следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть $h_2 = 0$. Если выполнено предположение 2 и имеют место неравенства*

$$\mu > 1, \quad \sigma_1, \sigma_2 \geq 1, \quad \sigma_1\sigma_2 > \mu, \tag{27}$$

то нулевое решение системы (3) асимптотически устойчиво при любых значениях $h_1 \geq 0$.

В данной работе исследуется возможность обобщения теоремы 5 на случай $h_2 > 0$. Далее считаем неравенства (25) выполненными. Кроме того, в работе появится еще одно дополнительное ограничение на величину σ_2.

3.1 Конструкция функционала Ляпунова — Красовского

Построим функционал для системы (3) как сумму функционала вида (7) для однородной части и функционала вида (9) для линейной:

$$\widetilde{v}(y_t, z_t) = v_1(y_t) + l(z_t), \quad \text{где} \tag{28}$$

$$v_1(y_t) = V_1(y(t)) + \Big(\frac{\partial V_1(y)}{\partial y}\Big)^T\Big|_{y=y(t)} \cdot \int_{-h_1}^{0} F_1(y(t+\theta))d\theta +$$
$$+ \int_{-h_1}^{0} (w_1 + (h_1+\theta)w_2)\|y(t+\theta)\|^{\gamma_1+\mu-1} d\theta,$$
$$l(z_t) = z^T(t)U(0)z(t) + 2z^T(t)\int_{-h_2}^{0} U(-h_2 - s)Bz(s+t)ds +$$
$$+ \int_{-h_2}^{0} z^T(t+s_1)B^T \int_{-h_2}^{0} U(s_1 - s_2)Bz(t+s_2)ds_2 ds_1 +$$
$$+ \int_{-h_2}^{0} z^T(t+\theta)[W_1 + (h_2+\theta)W_2]z(t+\theta)d\theta.$$

Здесь $V_1(y)$ — однородная функция Ляпунова для системы (25) порядка однородности $\gamma \geq 2$ такая, что имеет место неравенство

$$\left(\frac{\partial V_1(y)}{\partial y}\right)^T F_1(y) \leq -w\|y\|^{\gamma_1+\mu-1},$$

постоянные $w_1, w_2 > 0$ таковы, что $w_0 = w - w_1 - h_2 w_2 > 0$, а матрица Ляпунова $U(\tau)$ ассоциирована с матрицей $W = W_0 + W_1 + h_2 W_2$, где W_0, W_1, W_2 — заданные положительно-определенные матрицы.

Поскольку $V_1(y)$ — функция Ляпунова, то для нее выполняются неравенства:

$$d_{10}\|y\|^{\gamma_1} \leq V_1(y) \leq d_1\|y\|^{\gamma_1}, \quad \left\|\frac{\partial V_1(y)}{\partial y}\right\| \leq d_3\|y\|^{\gamma_1-1}.$$

Так как F_1 является однородной функцией порядка μ, то выполняется оценка:

$$F_1(y) \leq g_1 \|y\|^{\mu}.$$

3.2 Леммы об оценках функционала

Пусть выполнены неравенства (27) и $\sigma_2 > \frac{\mu+1}{2}$.

Лемма 5. *Существуют константы $K_1, K_2, H_1 > 0$ такие, что производная функционала $v(y_t, z_t)$ вдоль решений системы (3) допускает оценку:*

$$\frac{dv(y_t, z_t)}{dt} \leq -K_1\Bigg(\|y(t)\|^{\gamma_1+\mu-1} + \int_{-h_1}^{0} \|y(t+\theta)\|^{\gamma_1+\mu-1} d\theta\Bigg) - \\ -K_2\Bigg(\|z(t)\|^2 + \int_{-h_2}^{0} \|z(t+\theta)\|^2 d\theta\Bigg) \qquad (29)$$

при $\|x_t\|_h < H_1$.

Доказательство. Производная функционала $v_1(y_t)$ вычислена в доказательстве леммы 1. В данном случае ограничения на степени, полученные в этой лемме, имеют вид:

$$\frac{\sigma_1}{\mu} > \frac{2}{\gamma_1 + \mu - 1}. \qquad (30)$$

Рассмотрим первое слагаемое функционала $l(z_t)$. Сделаем замену $t + s = \theta$ под знаком интеграла:

$$l_1 = 2z^T(t) \int_{t-h_2}^{t} U(-h_2 + t - \theta) B z(\theta) d\theta$$

Вычислим производную слагаемого l_1:

$$\frac{dl_1}{dt} = 2[Az(t) + Bz(t-h_2) + R_2(t, y_t)]^T \int_{t-h_2}^{t} U(-h_2 + t - \theta) B z(\theta) d\theta + \\ +2z^T(t) U(-h_2) B z(t) - 2z^T(t) U(0) B z(t - h_2) + \\ +2z^T(t) \int_{t-h_2}^{t} \frac{\partial U(-h_2 + t - \theta)}{\partial t} B z(\theta) d\theta$$

Сделаем две замены $t + s_1 = \theta_1$ и $t + s_2 = \theta_2$ под знаком интеграла, чтобы привести к виду:

$$l_2 = \int_{t-h_2}^{t} z^T(\theta_1) B^T \int_{t-h_2}^{t} U(\theta_1 - \theta_2) B z(\theta_2) d\theta_2 d\theta_1.$$

Производная слагаемого l_2:

$$\frac{dl_2}{dt} = z^T(t) B^T \int_{t-h_2}^{t} U(t-\theta) B z(\theta) d\theta -$$
$$-z^T(t-h_2) B^T \int_{t-h_2}^{t} U(t-h_2-\theta) B z(\theta) d\theta +$$
$$+\left(\int_{t-h_2}^{t} z^T(\theta) B^T U(\theta - t) d\theta\right) B z(t) -$$
$$-\left(\int_{t-h_2}^{t} z^T(\theta) B^T U(\theta - t + h_2) d\theta\right) B z(t-h_2) =$$
$$2z^T(t) B^T \int_{t-h_2}^{t} U(t-\theta) B z(\theta) d\theta - 2z^T(t-h_2) B^T \int_{t-h_2}^{t} U(t-h_2-\theta) B z(\theta) d\theta.$$

Сделаем замену $t + \theta = \zeta$ под знаком интеграла:

$$l_3 = \int_{t-h_2}^{t} z^T(\zeta)[W_1 + (h_2 + \zeta - t) W_2] z(\zeta) d\zeta.$$

Вычислим производную слагаемого l_3:

$$\frac{dl_1}{dt} = z^T(t)[W_1 + h_2 W_2] z(t) - z^T(t-h_2) W_1 z(t-h_2) - \int_{t-h_2}^{t} z^T(\zeta) W_2 z(\zeta) d\zeta.$$

Соберём все элементы производной функционала $l(z_t)$, сократив одинаковые слагаемые:

$$\frac{dl(z_t)}{dt} = 2z^T(t) U(0)[Az(t) + Bz(t-h_2) + R_2(t, y_t)] +$$
$$+2[Az(t) + R_2(t, y_t)]^T \int_{t-h_2}^{t} U(-h_2 + t - \theta) B z(\theta) d\theta + 2z^T(t) U(-h_2) B z(t) -$$
$$+2z^T(t) \int_{t-h_2}^{t} \frac{\partial U(-h_2 + t - \theta)}{\partial t} B z(\theta) d\theta + 2z^T(t) B^T \int_{t-h_2}^{t} U(t-\theta) B z(\theta) d\theta +$$

$$+z^T(t)[W_1+hW_2]z(t)-z^T(t-h_2)W_1z(t-h_2)-\int_{t-h_2}^{t} z^T(\zeta)W_2z(\zeta)d\zeta.$$

Далее, собирая элементы с $z^T(t)$, имеющие интеграл, мы получаем:

$$2z(t)^T\int_{t-h_2}^{t}\left(\frac{\partial U(-h_2+t-\theta)}{\partial t}+B^TU(t-\theta)+A^TU(-h_2+t-\theta)\right)Bz(\theta)d\theta.$$

В силу свойства симметрии $U(t)$ и динамического свойства матрицы Ляпунова имеем:

$$\frac{\partial U(-h_2+t-\theta)}{\partial t}=-B^TU(t-\theta)-A^TU(-h_2+t-\theta).$$

Из этого следует, что сумма в интеграле обнуляется. Соберём члены, образующие квадратичную форму относительно вектора $z(t)$:

$$S(t)=z^T(t)[U(0)A+A^TU(0)+U(-h_2)B+B^TU(h_2)]z(t)=-z^T(t)Wz(t)$$

в силу алгебраического свойства матрицы Ляпунова. Окончательно, производная функционала $l(z_t)$ равна

$$\frac{dl(z_t)}{dt}=-z^T(t)Wz(t)+2z^T(t)U(0)R_2(t,y_t)+$$
$$+2[R_2(t,y_t)]^T\int_{t-h}^{t}U(-h_2+t-\theta)Bz(\theta)d\theta.$$

Обозначим $Q=\max\|U(\tau)\|$ при $\tau\in[0,h_2]$. Оценим знаконеопределенные слагаемые полученной производной функционала $l(z_t)$. Оценка первого из них имеет вид

$$\|2z^T(t)U(0)R_2(t,y_t)\|\leq\widetilde{Q}\|z(t)\|(\|y(t)\|^{\sigma_2}+\|y(t-h_1)\|^{\sigma_2})\leq$$
$$\leq\widetilde{Q}((\|y(t)\|^{\gamma_1+\mu-1})^{\frac{\sigma_2}{\gamma_1+\mu-1}+\frac{1}{2}}+(\|y(t-h_1)\|^{\gamma_1+\mu-1})^{\frac{\sigma_2}{\gamma_1+\mu-1}+\frac{1}{2}}+$$
$$+2\cdot(\|z(t)\|^2)^{\frac{\sigma_2}{\gamma_1+\mu-1}+\frac{1}{2}}),\ \text{где } \widetilde{Q}=2Q\alpha.$$

Второе из знаконеопределенных слагаемых производной функционала $l(z_t)$

допускает оценку

$$\|2[R_2(t,y_t)]^T \int_{t-h_2}^{t} U(-h_2+t-\theta)Bz(\theta)d\theta\| \le$$
$$\le M(\|y(t)\|^{\sigma_2} + \|y(t-h_1)\|^{\sigma_2}) \int_{t-h_2}^{t} \|z(\theta)\|d\theta \le$$
$$\le M\cdot(h_2(\|y(t)\|^{\gamma_1+\mu-1})^{\frac{\sigma_2}{\gamma_1+\mu-1}+\frac{1}{2}} + h_2(\|y(t-h_1)\|^{\gamma_1+\mu-1})^{\frac{\sigma_2}{\gamma_1+\mu-1}+\frac{1}{2}}+$$
$$+2\int_{t-h_2}^{t}(\|z(\theta)\|^2)^{\frac{\sigma_2}{\gamma_1+\mu-1}+\frac{1}{2}}d\theta), \text{ где } M = 2Q\|B\|\alpha.$$

Покажем, что параметр $\gamma_1 \ge 2$ может быть выбран так, чтобы степень

$$1 < \frac{\sigma_2}{\gamma_1+\mu-1} + \frac{1}{2}.$$

Комбинируя это условие с (30), получим

$$\frac{1}{\sigma_2} < \frac{2}{\gamma_1+\mu-1} < \frac{\sigma_1}{\mu}.$$

Кроме того, поскольку $\gamma_1 \ge 2$, имеем

$$\frac{2}{\gamma_1+\mu-1} \le \frac{2}{\mu+1}.$$

Параметр γ_1 можно выбрать удовлетворяющим последним двум неравенствам, поскольку по условию $\sigma_1\sigma_2 > \mu$ и $\sigma_2 > \frac{\mu+1}{2}$. Поскольку все степени в оценках выбраны большими единицы, существует такое значение $H_1 > 0$, что в окрестности $||x_t||_h \le H_1$ справедлива оценка (29). Лемма доказана. $\square$

Лемма 6. *Существуют константы $m_1, m_2, H_2 > 0$ такие, что функционалы $v_1(y_t)$ и $l(z_t)$ допускают следующие оценки сверху:*

$$v_1(y_t) \le m_1(\|y(t)\|^{\gamma_1} + \int_{-h_1}^{0} \|y(t+\theta)\|^{\gamma_1}d\theta),$$
$$l(z_t) \le m_2(\|z(t)\|^2 + \int_{-h_2}^{0} \|z(t+\theta)\|^2 d\theta)$$

в окрестности $\|x_t\|_h < H_2$.

Доказательство. Оценка сверху функционала $v_1(y_t)$ приведена в лемме 2. Оценка функционала $l(z_t)$ может быть найдена в книге [1, лемма 2.13 на с. 64], при этом $m_2 = max\{m_{21}, m_{22}\}$, где $m_{21} = Q(1 + \|B\|h_2)$, $m_{22} = \|B\|Q(1 + \|B\|h_2) + \|W_1\| + h_2\|W_2\|$. $\square$

Лемма 7. *[1, лемма 2.10 на с. 60]Если система (26) асимптотически устойчива, то существует константа* $\alpha_3 > 0$ *такая, что функционал* $l(z_t)$ *допускает оценку снизу*

$$l \geq \alpha_3 \|z(t)\|^2.$$

Комбинируя леммы 3 и 6, получаем, что функционал (28) допускает оценку снизу вида:

$$v(y_t, z_t) \geq \alpha_1 \|y(t)\|^{\gamma_1} + \alpha_3 \|z(t)\|^2.$$

3.3 Теорема об асимптотической устойчивости

Леммы 3—6 означают, что функционал (28) удовлетворяет условиям теоремы Красовского (см., например, [1, теорема 1.8]). Другими словами, справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Если выполнено предположение 2 и имеют место неравенства*

$$\mu > 1, \quad \sigma_1 \geq 1, \quad \sigma_2 > \frac{\mu + 1}{2}, \quad \sigma_1 \cdot \sigma_2 > \mu,$$

то нулевое решение системы (3) асимптотически устойчиво при любых значениях $h_1 > 0$.

Теорема 6 обобщает теорему 5 на случай $h_2 > 0$. При этом она получена при более жестких ограничениях на параметр σ_2. Это связано с тем, что порядок однородности γ_2 здесь не может быть выбран произвольно, как в случае двух однородных подсистем, а фиксирован и равен двум.

3.4 Построение оценок решений

В этом разделе функционал (28) применяется к построению оценок решений системы (3). При этом построенные оценки будут справедливы лишь для тех решений, для которых выполнено $\|x(t)\| \leq \delta = min\{H_1, H_2, H_3\}$ при всех $t \geq 0$. Введем обозначение $\gamma = min\{\gamma_1, 2\} = 2$.

Теорема 7. *Пусть Δ – положительный корень уравнения*

$$m_1(1+h_1)\Delta^{\gamma_1} + m_2(1+h_2)\Delta^2 = min\{\alpha_1\delta^{\gamma_1}, \alpha_2\delta^2\}. \tag{31}$$

Если $\|\phi\|_h < \Delta$, то $\|x(t,\phi)\| < \delta, \quad t \geq 0$.

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 4 в работе [12]. Уравнение (31) можно записать в виде

$$k\Delta^2 = min\{\alpha_1\delta^{\gamma_1}, \alpha_2\delta^2\}.$$

где $k = m_1(1+h_1)\Delta^{\gamma_1-2} + m_2(1+h_2)$.

Теорема 8. *Пусть системы (25) и (26) асимптотически устойчивы. Тогда для решений системы (3) с начальными функциями, удовлетворяющими условию $\|\phi\|_h < \Delta$, где Δ — положительный корень уравнения (31), верны оценки:*

$$\|y(t)\| \leq c_1\|\phi\|_h^{\frac{2}{\gamma_1}}\Big(1 + c_2\|\phi\|_h^{\mu-1}t\Big)^{-\frac{2}{\gamma_1(\mu-1)}}$$
$$\|z(t)\| \leq c_3\|\phi\|_h\Big(1 + c_4\|\phi\|_h^{\mu-1}t\Big)^{-\frac{1}{\mu-1}}, \quad t \geq 0,$$

где

$$c_1 = \frac{\delta}{\Delta^{\frac{\gamma}{\gamma_1}}}, \quad c_3 = \frac{\delta}{\Delta},$$
$$c_2 = c_4 = \left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{\mu-1}{2}}\left(\frac{\mu-1}{2}\right)\frac{L}{\widetilde{\delta}},$$
$$L = min\left\{\frac{K_1}{(2max\{1,h_1\})^{\frac{\mu-1}{\gamma_1}}m_1^{\frac{\gamma_1+\mu-1}{\gamma_1}}}, \frac{K_2}{(2max\{1,h_2\})^{\frac{\mu-1}{2}}m_2^{\frac{\mu+1}{2}}}\right\},$$

$$\widetilde{\delta} = max\Big\{(m_1(1+h_1)\delta^{\gamma_1})^{(\mu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\gamma_1})}, 1\Big\}.$$

Доказательство проводится аналогичным образом, что и для теоремы 4. Отличие только в том, что в данном случае $\gamma = \gamma_2 = 2$.

Выводы

Для двух классов сложных систем с запаздыванием в работе построены функционалы Ляпунова — Красовского, которые пригодны для анализа асимптотической устойчивости решений этих систем. Для систем вида (3) с помощью построенных функционалов доказана новая теорема об асимптотической устойчивости нулевого решения. В сравнении с результатами, известными в литературе [3], эта теорема получена для более широкого класса систем (линейная система, участвующая во взаимодействии, предполагается системой с запаздыванием), но и при более жестком условии на порядок функций, описывающих взаимодействие между подсистемами. Также были построены оценки решений для систем вида (1) и (3) с помощью функционалов Ляпунова — Красовского. Отметим, что структура полученных оценок схожа со структурой оценок, имеющихся в литературе для однородных систем, однако порядок убывания решений зависит от порядка однородности функций Ляпунова, которые являются основными элементами используемых функционалов Ляпунова — Красовского. Эти порядки однородности могут рассматриваться как параметры для оптимизации полученных оценок.

Заключение

В данной работе построены функционалы Ляпунова–Красовского для двух систем с запаздыванием и с помощью построенных функционалов получены оценки решений. Притом, для второго класса сформулирована теорема об асимптотической устойчивости нулевого решения. Направлениями дальнейших исследований могут быть::

1. обобщение полученных результатов на произвольное количество взаимодействующих подсистем,

2. ослабление условий на параметры σ_1 и σ_2 и, в частности, условия $\sigma_2 > \frac{\mu+1}{2}$.

Список литературы

[1] Kharitonov V.L. Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices. Basel: Birkhauser. 2013.

[2] Aleksandrov A.Yu., Hu G.-D., Zhabko A.P. Delay-independent stability conditions for some classes of nonlinear systems // IEEE Trans. Autom. Control. 2014. No 59(8). P. 2209–2214.

[3] Александров А.Ю., Жабко А.П. Об асимптотической устойчивости решений нелинейных систем с запаздыванием // Сибирский мат. журнал. 2012. Т. 53, No 3. с. 495-508.

[4] Александров А. Ю., Жабко А. П., Печерский В. С. Функционалы полного типа для некоторых классов однородных дифференциально-разностных систем // Труды 8-й Международной конференции «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий», Воронеж. 2015. С. 5–8.

[5] Репин Ю.М. Квадратичные функционалы Ляпунова для систем с запаздыванием // Прикладная математика и механика. 1965. Вып. 3. С. 564–566.

[6] Infante E.F., Castelan W.B.:, A Lyapunov Functional For a Matrix Difference-Differential Equation. // Journal of differential equations. 1978. No 29. P. 439–451.

[7] Huang W. Generalization of Liapunov's Theorem in a Linear Delay System // Journal of mathematical analysis and applications. 1989. No 142. P. 83–94.

[8] Kharitonov V.L., Zhabko A.P. Lyapunov–Krasovskii approach to robust stability analysis of time-delay systems // Automatica. 2003. No 39. P. 15-20.

[9] Зубов В.И. Устойчивость движения. М.: Высшая школа. 1973.

[10] Rosier L. Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field // Syst. Control Lett. 1992. №19. P. 467–473.

[11] Zhabko A.P., Alexandrova I.V. Lyapunov direct method for homogeneous time delay systems // Proceedings of 15th IFAC Workshop on Time Delay Systems, 9–11 September, Sinaia, Romania. 2019. P. 79– 84.

[12] Portilla G., Alexandrova I.V., Mondié S., Zhabko A.P. Estimates for solutions of homogeneous time-delay systems: Comparison of Lyapunov–Krasovskii and Lyapunov–Razumikhin techniques. Submitted to International Journal of Control, 2021., http://arxiv.org/abs/2101.10139.

[13] Efimov D., Aleksandrov A. Analysis of robustness of homogeneous systems with time delays using Lyapunov-Krasovskii functionals. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2021. Vol. 31. Pp. 3730-3746.

[14] Aleksandrov A.Yu., Aleksandrova E.B., Zhabko A.P. Asymptotic Stability Conditions and Estimates of Solutions for Nonlinear Multiconnected Time-Delay Systems // Circuits Syst Signal Process. 2016. Vol. 35. Pp. 3531–3554.

[15] Khalil H.K. Nonlinear systems. Prentice-Hall Inc. 1996.