

Санкт–Петербургский государственный университет

КОМАРОВА Алёна Алексеевна

Выпускная квалификационная работа

Исследование устойчивости в пространстве параметров ловушки Пеннинга-Малмберга-Сурко с вращающимся квадрупольным полем

Уровень образования: бакалавриат

Направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Основная образовательная программа СВ.5005.2017 «Прикладная математика, фундаментальная информатика и программирование»

Профиль «Математическое и программное обеспечение вычислительных машин»

Научный руководитель:

доцент, кафедра технологии программирования,
к.ф. - м.н., доцент Овсянников Александр Дмитриевич

Рецензент:

доцент, кафедра теории систем управления
электрофизической аппаратуры,
к.ф. - м.н., доцент Едаменко Николай Семенович

Санкт-Петербург

2021 г.

Содержание

| | |
|---|----|
| Введение | 3 |
| Постановка задачи | 6 |
| Глава 1. Устойчивость линейных систем | 8 |
| 1.1. Вспомогательные сведения | 8 |
| 1.2. Приведение уравнений движения к уравнениям с постоянными коэффициентами | 9 |
| Глава 2. Поиск значений параметров системы обеспечивающих устойчивое движение частиц в ловушке | 11 |
| 2.1. Построение матрицы Гурвица | 11 |
| 2.2. Нахождение областей устойчивости | 12 |
| 2.3. Применение реберной теоремы | 14 |
| 2.4. Случай биквадратного характеристического уравнения | 18 |
| Глава 3. Анализ ловушки смешанного типа | 19 |
| 3.1. Основные уравнения | 19 |
| 3.2. Нахождение характеристического полинома | 20 |
| 3.3. Нахождение областей устойчивости | 21 |
| Заключение | 25 |
| Список литературы | 28 |
| Приложение | 30 |

Введение

Электромагнитные ловушки используются при проведении научных экспериментов с целью длительного удержания и накопления частиц [1]. Области их применения представляют собой: атомную и ядерную физику, физику ускорителей, масс-спектрометрию, плазменные установки [2-4].

Во второй половине XX века возникли идеи использовать электромагнитные ловушки для удержания ионов с целью осуществления управляемого термоядерного синтеза. В то же время начались первые работы по долговременному удержанию и охлаждению заряженных частиц. В 1949 г. Д.Р. Пирсом была предложена первая конструкция такой ловушки, а в 1959 г. Х. Демельту смог создать действующую установку (названную в последствии ловушкой Пеннинга), способную долговременно удерживать одиночный электрон. В ловушке Пеннинга используется квадрупольное электрическое поле, ограничивающее вертикальные движения частиц и сильное однородное вертикальное магнитное поле, ограничивающее радиальные движения. Статический электрический потенциал создается с помощью системы из трёх электродов: кольца и двух крышек, в идеальной ловушке кольцо и крышки являются гиперболами вращения.

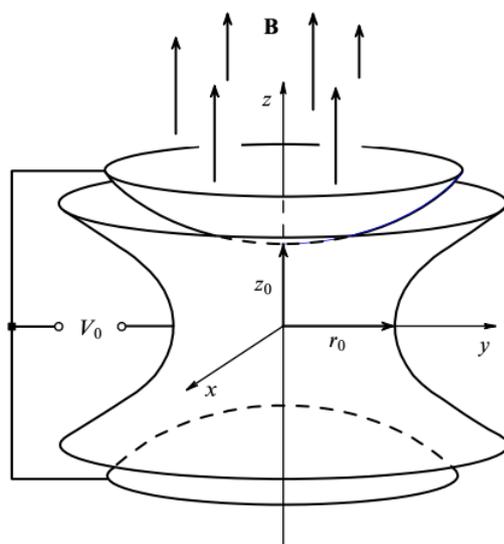


Рис. 1: Схематичное изображение ловушки Пеннинга.

Суперпозиция аксиально симметричного электрического и магнитного полей ловушки определяет достаточно сложную траекторию движения

частиц, изображенную на рисунке 2.[1]

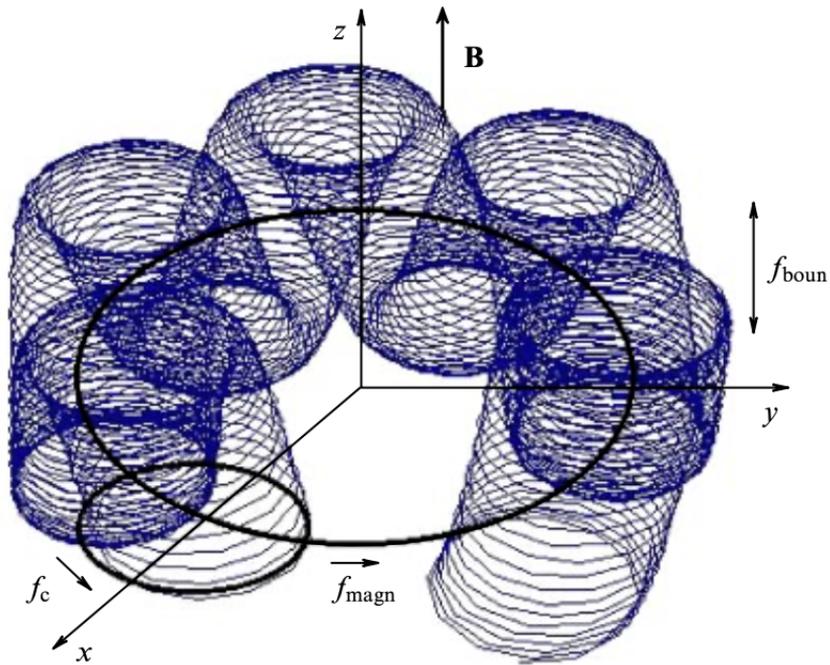


Рис. 2: Траектория движения частиц в ловушке Пеннинга.

Ловушка Пеннинга-Малмберга является модификацией ловушки Пеннинга, где гиперboloиды вращения (электроды) заменены на отрезки круглых цилиндрических труб. Наличие большого пространства внутри цилиндров позволяет, благодаря созданию большой разности потенциалов, удерживать гораздо большее число частиц, по сравнению с таковыми в не модифицированной версии ловушки.

Для решения проблемы с инъекцией частиц К.Сурко предложил схему накопления позитронов в ловушке Пеннинга-Малмберга с использованием буферного газа. Впоследствии ловушка получила название: ловушка Пеннинга-Малмберга-Сурко.

Ионные ловушки в настоящее время используются в самых разных областях физики. Рассмотрим подробнее некоторые из них, чтобы дать представление об универсальности этих устройств.

Хранение антиматерии является одной из ключевых задач для проведения опытов над антивеществом. А экстремальная изоляция частиц в ловушке позволяет даже экзотическим частицам, таким как позитроны и

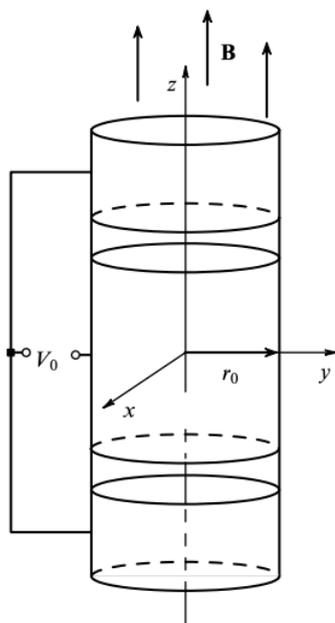


Рис. 3: Схематичное изображение ловушки Пеннинга-Малмберга.

антипротоны, храниться в течение длительного периода времени. Именно этот факт позволил ученым провести в ЦЕРНе исследования по созданию атомов антиводорода.

Спектроскопия — раздел физики, посвящённый изучению спектров электромагнитного излучения. В более широком смысле — изучение спектров различных видов излучения. Методы спектроскопии используются для исследования энергетической структуры атомов, молекул и макроскопических тел, образованных из них. Благодаря увеличенному времени удержания частиц, доступному в ионной ловушке, было проведено много важных спектроскопических исследований в радиочастотной, микроволновой и оптической областях.

Лазерное охлаждение позволило провести широкий спектр экспериментов в ионных ловушках, которые ранее были невозможны, например, наблюдение одной атомной частицы в состоянии покоя. Ранние эксперименты с лазерным охлаждением показали, что отдельные ионы или небольшие облака ионов могут быть довольно легко охлаждены до температуры, близкой к доплеровскому пределу. Это позволило вывести упомянутые выше виды спектроскопических измерений на новый уровень чувствитель-

ности и точности, в частности благодаря отсутствию эффекта Доплера. Кроме того, развитие теории лазерного охлаждения показало, что с помощью охлаждения боковой полосы (sideband cooling) можно достичь еще более низких температур. Таким образом, ионы могут быть получены в основном состоянии (ground state) потенциала с высокой вероятностью, что позволит провести новые эксперименты.

Одной из самых захватывающих областей применения ионных ловушек является квантовая обработка информации. В 1995 году Х. Сирак и П. Цоллер впервые предложили использовать пару захваченных охлажденных ионов для создания квантово-механического эквивалента классического логического вентиля. Последовала практическая реализация их идей, и с тех пор эта область быстро росла. Большую часть текущих экспериментов с захваченными ионами составляют исследования именно в этой сфере. Теперь она включает в себя квантовое моделирование, а также приложения для квантовых вычислений. Эта работа основана на многих областях, упомянутых выше, включая лазерное охлаждение, спектроскопию и ICCS. Альтернативной реализацией квантовой обработки информации с использованием ионных ловушек является использование захваченных электронов в качестве наименьших элементов для хранения информации в квантовом компьютере - кубитов [14].

Постановка задачи

В работе рассматривается динамика частиц в ловушке Пеннинга-Малмберга-Сурко с дополнительным вращающимся электрическим квадрупольным полем. Важным аспектом исследований является вопрос устойчивости движений частиц в электромагнитных полях, создаваемых внутри ловушки, при различных значениях параметров [4-8].

Потенциал поля в ловушке имеет следующий вид:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{m \omega_z^2}{q} \left(z^2 - \frac{x^2 + y^2}{2} \right) + \frac{m}{q} a \left(\frac{x^2 - y^2}{2} \cos(2\omega_r t) - xy \sin(2\omega_r t) \right). \quad (1)$$

Здесь m и q – масса и заряд частицы; ω_z – частота продольных колебаний частицы в аксиально симметричном электрическом поле электродов

ловушки. Величины a и ω_r – амплитуда и частота вращающегося поля.

Перейдем к уравнениям движения отдельных частиц. Движение заряженных частиц в поле потенциала (1) и продольном магнитном поле с учетом линейного закона торможения в буферном газе описывается следующей системой уравнений:

$$\ddot{x} = \frac{\omega_z^2}{2}x - k\dot{x} + \Omega_c\dot{y} - a(x\cos(2\omega_r t) - y\sin(2\omega_r t)), \quad (2)$$

$$\ddot{y} = \frac{\omega_z^2}{2}y - k\dot{y} - \Omega_c\dot{x} + a(y\cos(2\omega_r t) + x\sin(2\omega_r t)), \quad (3)$$

$$\ddot{z} = -\omega_z^2 z - k\dot{z}. \quad (4)$$

Здесь $\Omega_c = qB/m$ – циклотронная частота, параметр k представляет тормозящую силу, возникающую из-за рассеяния частиц в ловушке на молекулах буферного газа, a – параметр, характеризующий амплитуду вращающегося поля, ω_z – частота гармонических колебаний вдоль оси z , ω_r – частота вращения электрического поля. Поперечное и продольное движения не зависят друг от друга и могут рассматриваться отдельно.

Стандартной заменой переменных систему (2)-(4) можно привести к нормальному виду, т.е. к системе дифференциальных уравнений первого порядка с периодической матрицей. Для определения характера движения частиц в ловушке воспользуемся понятием асимптотической устойчивости по Ляпунову. Линейная однородная система асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда всякое её решение стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Для постоянной матрицы системы необходимо проверить на отрицательность вещественные части ее собственных значений. Однако в нашем случае матрица системы зависит от времени, и проверка ее на асимптотическую устойчивость затруднена.

Глава 1. Устойчивость линейных систем

1.1 Вспомогательные сведения

Напомним основные определения и сведения, касающиеся характеристических показателей для линейных систем [9].

Рассмотрим комплекснозначную функцию $f(x)$ действительного переменного, определенную в интервале $(t_0, +\infty)$. Число (или символ $-\infty$ или $+\infty$), определяемое формулой: $\chi[f] = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |f(t)|$ называется характеристическим показателем Ляпунова функции $f(t)$. Характеристический показатель равен взятому с обратным знаком характеристическому числу функции $f(t)$, введенному Ляпуновым.

Если $\chi[f] = \alpha \neq \pm\infty$, то для любого $\epsilon > 0$ справедлива формула: $f(t) = o[e^{(\alpha+\epsilon)t}]$, т. е. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|f(t)|}{e^{(\alpha+\epsilon)t}} = 0$.

Также выполняется: $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{|f(t)|}{e^{(\alpha-\epsilon)t}} = +\infty$, т. е. существует последовательность $t_k \rightarrow \infty$ такая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|f(t_k)|}{e^{(\alpha-\epsilon)t_k}} = +\infty$.

Таким образом, если $\chi[f] = \alpha$, то при $t \rightarrow \infty$ модуль функции $|f(t)|$ растет медленнее, чем любая показательная функция $e^{(\alpha+\epsilon)t}$, где $\epsilon > 0$, и по некоторой последовательности $t_k \rightarrow \infty$ быстрее, чем функция $e^{(\alpha-\epsilon)t}$.

По теореме Ляпунова о характеристических показателях решении линейной системы, каждое действительное или комплексное решение линейной системы имеет конечный характеристический показатель, если ее матрица непрерывна и ограничена. Для системы уравнений (2-4), приведенной к нормальной форме, это условие очевидно будет выполнено.

Также заметим, что множество всех собственных характеристических показателей линейной однородной дифференциальной системы с непрерывной ограниченной матрицей состоит из конечного числа элементов. Далее будет называть систему приводимой, если она приводится преобразованием Ляпунова к линейной системе с постоянной матрицей. Преобразование Ляпунова не меняет характеристические показатели системы.

Как известно, периодические линейные системы являются приводимыми, однако на практике зачастую возникают проблемы с преобразованием системы к системе с постоянной матрицей, поскольку нахождение

преобразования Ляпунова в общем случае затруднено.

Для проверки приводимой линейной неоднородной системы на асимптотическую устойчивость, необходимо и достаточно проверить все ее характеристические показатели на отрицательность.

1.2 Приведение уравнений движения к уравнениям с постоянными коэффициентами

Для системы (2)-(3) введем $\epsilon = x + iy$ и представим первые два уравнения системы в виде:

$$\ddot{\epsilon} + (k + i\Omega_c)\dot{\epsilon} - \frac{\omega_z^2}{2}\epsilon = -a\bar{\epsilon}e^{-2i\omega_r t} \quad (5)$$

$$\ddot{\bar{\epsilon}} - (k - i\Omega_c)\dot{\bar{\epsilon}} - \frac{\omega_z^2}{2}\bar{\epsilon} = -a\epsilon e^{2i\omega_r t} \quad (6)$$

Запишем характеристический полином $Q(\lambda)$ уравнения (4) и его корни μ_{\pm} :

$$Q(\lambda) = \lambda^2 + k\lambda + \omega_z^2, \mu_{\pm} = \frac{k}{2} + i\omega_b, \omega_b = \sqrt{\omega_z^2 - \frac{k^2}{4}}.$$

Характеристический полином $R(\lambda)$ уравнения (5) при $a = 0$ и его корни λ_{\pm} будут иметь следующий вид:

$$R(\lambda) = \lambda^2 + (i\Omega_c + k)\lambda - \frac{\omega_z^2}{2}, \lambda_{\pm} = \frac{i\Omega_c + k}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{(i\Omega_c + k)^2 + 2\omega_z^2}.$$

Учитывая, что $Re\lambda_- + Re\lambda_+ = -k$ и $Im\lambda_- + Im\lambda_+ = -\Omega_c$, имеем: $\lambda_+ = -(k + r_m) = i\omega_c$, $\lambda_- = r_m - i\omega_m$, $r_m = Re\lambda_-$, $\omega_m = Im\lambda_-$, $\omega_c = Im\lambda_+ = \Omega_c - \omega_m$. Здесь ω_m – модифицированная частота магнетронных колебаний, описывающая колебания частиц в скрещенных продольном магнитном и радиальном электрических полях, ω_c – модифицированная частота циклотронных колебаний:

$$\omega_m \approx \frac{\omega_z^2}{2\Omega_c}, r_m \approx \frac{k\omega_m}{\Omega_c} \ll k, \omega_b \approx \omega_z, \omega_c \approx \Omega_c.$$

Введем новую переменную $\psi = \epsilon e^{i\omega_r t}$:

$$u = x \cos(\omega_r t) - y \sin(\omega_r t), v = x \sin(\omega_r t) + y \cos(\omega_r t),$$

где $\psi = u + iv$. Умножим (5) и (6) на $e^{i\omega_r t}$ и $e^{-i\omega_r t}$ соответственно. Используя $\dot{\epsilon} e^{i\omega_r t} = \dot{\psi} - i\omega_r \psi$, $\ddot{\epsilon} e^{i\omega_r t} = \ddot{\psi} - 2i\dot{\psi}\omega_r - \omega_r^2 \psi$, получим:

$$\ddot{\psi} + (k + i(\Omega_c - 2\omega_r))\dot{\psi} + (\omega_r(\Omega_c - \omega_r - ik) - \frac{\omega_z^2}{2})\psi = -a\bar{\psi} \quad (7)$$

$$\ddot{\bar{\psi}} + (k - i(\Omega_c - 2\omega_r))\dot{\bar{\psi}} + (\omega_r(\Omega_c - \omega_r + ik) - \frac{\omega_z^2}{2})\bar{\psi} = -a\psi \quad (8)$$

Разобьем (7) и (8) на вещественную и мнимую части, в новых переменных получим стационарную, с постоянными коэффициентами систему уравнений:

$$\ddot{u} + k\dot{u} - (\Omega_c - 2\omega_r)\dot{v} + (\omega_r(\Omega_c - \omega_r) - \frac{\omega_z^2}{2} + a)u + k\omega_r v = 0 \quad (9)$$

$$\ddot{v} + k\dot{v} - (\Omega_c - 2\omega_r)\dot{u} + (\omega_r(\Omega_c - \omega_r) - \frac{\omega_z^2}{2} - a)v - k\omega_r u = 0 \quad (10)$$

Уравнение (4) не связано с уравнениями (2) и (3), значит для анализа устойчивости системы можно рассматривать их отдельно.

Глава 2. Поиск значений параметров системы обеспечивающих устойчивое движение частиц в ловушке

2.1 Построение матрицы Гурвица

Найдем характеристические числа системы (9)-(10):

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda^2 + k\lambda + \omega_r(\Omega - \omega_r) - \frac{\omega_z^2}{2} + a & -(\Omega_c - 2\omega_r)\lambda + k\omega_r \\ (\Omega_c - 2\omega_r)\lambda - k\omega_r & \lambda^2 + k\lambda + \omega_r(\Omega - \omega_r) - \frac{\omega_z^2}{2} - a \end{vmatrix} \quad (11)$$

Проверку асимптотической устойчивости системы при различных выбранных параметрах можно организовать, используя необходимые и достаточные условия устойчивости Рауса-Гурвица. Характеристический полином (11) может быть записан в следующем виде:

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) = & \lambda^4 + 2k\lambda^3 + \lambda^2(k^2 - 2\Omega_c\omega_r + 2\omega_r^2 - \omega_z^2 + \Omega_c^2) + \lambda(2k\omega_r^2 - k\omega_z^2) + \\ & + \Omega_c^2\omega_r^2 - 2\Omega_c\omega_r^3 - \Omega_c\omega_r\omega_z^2 + \omega_r^4 + \omega_r^2\omega_z^2 + \frac{\omega_z^4}{4} + k^2\omega_r^2 - a^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Необходимое условие асимптотической устойчивости выполняется, если все коэффициенты характеристического полинома (12) положительны. Легко заметить, что уже на данном этапе исследования можно оценить некоторые значения параметров ловушки, при которых система будет устойчива.

Очевидно, что коэффициенты перед λ^4 и λ^3 будут положительными, т.к. параметр k , представляющий тормозящую силу, возникающую из-за рассеяния частиц в ловушке на молекулах буферного газа, больше нуля.

Рассмотрим коэффициент перед λ^2 : $a_2 = (k^2 - 2\Omega_c\omega_r + 2\omega_r^2 - \omega_z^2 + \Omega_c^2)$. При типовых значениях ловушек, когда $\Omega_c \gg \omega_z$, коэффициент a_2 будет положительным, а значит, будет удовлетворять необходимому условию асимптотической устойчивости.

Коэффициент $a_3 = 2k\omega_r^2 - k\omega_z^2$, перед λ дает нам возможность оценить значения параметра ω_r относительно величины ω_z . Для достижения

устойчивости необходимо выполнение условия: $\omega_r^2 > \omega_z^2/2$.

Свободный член характеристического уравнения $a_4 = \Omega_c^2 \omega_r^2 - 2\Omega_c \omega_r^3 - \Omega_c \omega_r \omega_z^2 + \omega_r^4 + \omega_r 2\omega_z^2 + \frac{\omega_z^4}{4} + k^2 \omega_r^2 - a^2$ дает нам связь между значением амплитуды a и частоты ω_r . В частности, мы может получить неравенство, которое будет гарантировать выполнение необходимого условия асимптотической устойчивости для данного коэффициента: $a^2 < \Omega_c^2 \omega_r^2 - 2\Omega_c \omega_r^3 - \Omega_c \omega_r \omega_z^2 + \omega_r^4 + \omega_r 2\omega_z^2 + \frac{\omega_z^4}{4} + k^2 \omega_r^2$.

Достаточное условие выполняется, если все главные миноры в соответствующей матрице Гурвица положительны. Матрица Гурвица для полинома 4 степени имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}.$$

Здесь в соответствии с формулой (12):

$$a_0 = 1, a_1 = 2k, a_2 = (k^2 - 2\Omega_c \omega_r + 2\omega_r^2 - \omega_z^2 + \Omega_c^2), a_3 = 2k\omega_r^2 - k\omega_z^2,$$

$$a_4 = \Omega_c^2 \omega_r^2 - 2\Omega_c \omega_r^3 - \Omega_c \omega_r \omega_z^2 + \omega_r^4 + \omega_r 2\omega_z^2 + \frac{\omega_z^4}{4} + k^2 \omega_r^2 - a^2$$

2.2 Нахождение областей устойчивости

Степенью устойчивости полинома называется расстояние на комплексной плоскости от мнимой оси до самого правого корня полинома (корня с максимальной вещественной частью). Обычно предполагается, что все корни находятся в левой полуплоскости (случай асимптотической устойчивости). В этом случае степень устойчивости считается положительной. Для удобства, в случае наличия корней в правой полуплоскости будем полагать значения степени устойчивости отрицательными (случай неустойчивости). Если самый правый корень (корни) располагается на мнимой оси, степень устойчивости полагается равной нулю. Введем параметр α , позволяющий оценить степень устойчивости для системы (10)-(11). Переразложим харак-

теристический полином (12) по степеням $\xi = \lambda + \alpha$:

$$\chi(\lambda) = \chi(\xi - \alpha) = \hat{\chi}(\xi) = \chi(-\alpha) + \chi'(-\alpha)\xi + \frac{\xi''(-\alpha)}{2}\xi^2 + \frac{\xi'''(-\alpha)}{6}\xi^3 + \xi^4.$$

Если полученный полином $\hat{\chi}(\xi)$ будет удовлетворять критерию Рауса-Гурвица, то степень устойчивости полинома $\chi(\lambda)$ будет больше α . При этом степень устойчивости характеристического полинома (12), очевидно (см. например [8]), не может превышать $k/2$. Был проведен численный анализ устойчивости системы, при следующих значениях параметров: $k = 1400c^{-1}$, $\omega_z = 59.6 * 10^6$ рад /с, $\Omega_c = 4.4 * 10^9$ рад/с; ω_r принимают значения от 0 до $5 * 10^9$ рад/с, значения a изменяются от 0 до $5 * 10^{18}$ рад/с $^{-2}$.

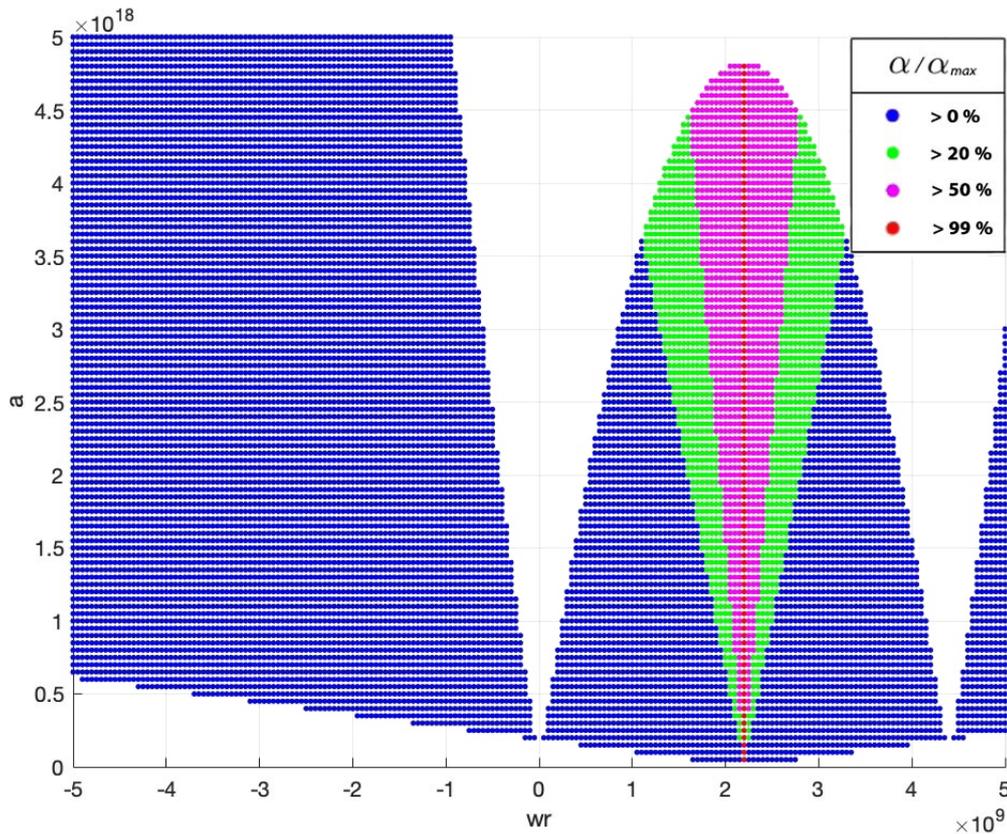


Рис. 4: Области устойчивости.

На рисунке 4 светлая область является областью неустойчивости, далее, в соответствии легендой графика, где $\alpha_{max} = k/2$, изображены области, отвечающие четырем диапазонам значений степени устойчивости:

$0\% < \alpha/\alpha_{max} < 20\%$, $20\% < \alpha/\alpha_{max} < 50\%$, $50\% < \alpha/\alpha_{max} < 99\%$, $99\% < \alpha/\alpha_{max} < 100\%$.

Из (Рис.4) видно, что максимальной степени устойчивости системы можно добиться, приняв параметр $\omega_r \approx \Omega_c/2$.

2.3 Применение реберной теоремы

При построении областей устойчивости полинома мы вычисляем значения главных миноров матрицы Гурвица на каждой итерации с определенным шагом. Чтобы проверить, действительно ли мы имеет устойчивость в определенном интервале значений параметра, нужно провести дополнительные исследования.

Будем называть полином $f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$, ($a_0 \neq 0$) устойчивым, если все его корни имеют отрицательные вещественные части.[10] Рассмотрим семейство полиномов $U = \{f(\lambda) | a \in D\}$, где a — $(n+1)$ -мерный вектор коэффициентов полинома $f(\lambda)$, а D — ограниченное множество в пространстве коэффициентов. Это семейство будет устойчиво при устойчивости всех полиномов из U .

Как правило, пытаются найти подсемейство $U_1 \subset U$, такое, что устойчивость U_1 влечет за собой устойчивость U . Семейству U_1 отвечает подмножество D_1 в пространстве коэффициентов. Такие подмножества и соответствующие им подсемейства будем называть проверочными.

Пусть D — выпуклый многогранник в пространстве коэффициентов, E — множество его ребер, а V — множество его вершин.

Согласно реберной теореме: если в семействе U множество D является выпуклым многогранником, то в качестве проверочного подмножества D_1 можно принять множество, состоящее из ребер (одномерных граней) многогранника D .

Каждое ребро является отрезком, соединяющим две вершины, если вершины соответствуют полиномам $f(1)$ и $f(2)$, то ребро будет соответствовать однопараметрическому семейству полиномов:

$$\mu f_1(\lambda) + (1 - \mu)f_2(\lambda), \mu \in [0, 1]. \quad (13)$$

В нашем случае очевидно, что мы можем построить ребро относительно параметра a , входящего в нашу систему уравнений линейно, как свободный член. Для характеристического уравнения (12) запишем полиномы $f(1)$ и $f(2)$, отвечающие вершинам:

$$f(1) = a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_{4.1}, \quad (14)$$

$$f(2) = a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_{4.2}. \quad (15)$$

Здесь коэффициенты перед λ равны соответствующим коэффициентам полинома (12), а в свободный член подставляются конкретные значения параметра a , для полинома $f(1)$: $a = a_1$, для $f(2)$: $a = a_2$.

Согласно теореме об устойчивости выпуклой комбинации[11]: если полиномы (14)-(15) являются устойчивыми, то ребро (13) будет устойчиво тогда и только тогда, когда:

$$\lambda_k(H^{-1}(f(1)))H(f(2)) \notin (-\infty, 0], k = 1, 2, 3, 4.$$

Здесь H - матрица Гурвица, λ_k - собственные числа матрицы.

Для полиномов $f(1)$, $f(2)$ матрицы Гурвица будут иметь следующий вид:

$$H(f(1)) = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_{4.1} \end{pmatrix},$$

$$H(f(2)) = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_{4.2} \end{pmatrix},$$

$$a_0 = 1, a_1 = 2k, a_2 = (k^2 - 2\Omega_c\omega_r + 2\omega^2 - \omega_z + \Omega_c^2), a_3 = 2k\omega_r^2 - k\omega_z^2,$$

$$a_{4.1} = \Omega_c^2\omega_r^2 - 2\Omega_c\omega_r^3 - \Omega_c\omega_r\omega_z^2 + \omega_r^4 + \omega_r2\omega_z^2 + \frac{\omega_z^4}{4} - a_1^2 + k^2\omega_r^2,$$

$$a_{4.2} = \Omega_c^2 \omega_r^2 - 2\Omega_c \omega_r^3 - \Omega_c \omega_r \omega_z^2 + \omega_r^4 + \omega_r 2\omega_z^2 + \frac{\omega_z^4}{4} - a_2^2 + k^2 \omega_r^2.$$

Для проверки выполнения условий вышеизложенной теоремы об устойчивости выпуклой комбинации необходимо подставить численные значения амплитуд вращающегося поля и найти значения собственных чисел матрицы $H^{-1}(f(1))H(f(2))$.

В соответствии с полученным графиком областей устойчивости (Рис.5), возьмем граничные значения параметра a : $a_1 = 1.52 * 10^{17}$ рад/с⁻², $a_2 = 1.52 * 10^{18}$, ω_r примем за $2.2 * 10^9$ рад/с (наиболее эффективная частота вращения электрического поля), остальные параметры оставим неизменными: $k = 1400$ с⁻¹, $\omega_z = 59.6 * 10^6$ рад /с, $\Omega_c = 4.4 * 10^9$ рад/с.

Из-за большой разницы в порядках коэффициентов, могут возникать проблемы с вычислением собственных чисел матрицы. Например, мы можем получить матрицу, близкую к сингулярной. Для того, чтобы этого избежать, необходимо произвести нормировку коэффициентов полиномов (14)-(15).

Для начала введем замену $\lambda = 1/t$, в результате которой получим полиномы, знаки вещественных частей корней которых будут совпадать с исходными, но их коэффициенты будут идти в обратном порядке:

$$f(1) = a_{4.1}t^4 + a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0, \quad (16)$$

$$f(2) = a_{4.2}t^4 + a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0. \quad (17)$$

Затем для (16)-(17) введем вторую замену $t = \psi * q$, где $q \in (0, 1)$:

$$f(1) = a_{4.1}(\psi * q)^4 + a_3(\psi * q)^3 + a_2(\psi * q)^2 + a_1(\psi * q) + a_0, \quad (18)$$

$$f(2) = a_{4.2}(\psi * q)^4 + a_3(\psi * q)^3 + a_2(\psi * q)^2 + a_1(\psi * q) + a_0. \quad (19)$$

Значение q нужно выбрать таким образом, чтобы все коэффициенты стали приблизительно одного порядка. Это возможно как раз благодаря их обратному расположению, так как коэффициент с самым высоким порядком оказался перед 4-ой степенью переменной.

Возьмем $q = 0.1^9$, построим матрицы Гурвица для (18)-(19) и вычис-

лим значения собственных чисел $H^{-1}(f(1))H(f(2))$ при заданных значениях параметров:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 997.2299 \\ 1.0000 \\ 1.0000 \\ 0.0158 \end{pmatrix}.$$

Все значения λ лежат в положительной полуплоскости, а значит, по вышеизложенной теореме, мы действительно имеем устойчивость в промежутке между $a_1 = 1.52 * 10^{17}$ рад/с⁻² и $a_2 = 1.52 * 10^{18}$. Данное заключение полностью соответствует результатам, полученным при построении областей устойчивости в предыдущем параграфе.

Далее, варьируя значения ω_r от 0 до $5 * 10^9$ рад/с, вычисляя на каждом отдельном шаге крайние точки устойчивости для конкретных значений параметра a , и проверяя отрезки на устойчивость согласно реберной теореме, получаем график, изображенный на рисунке 5.

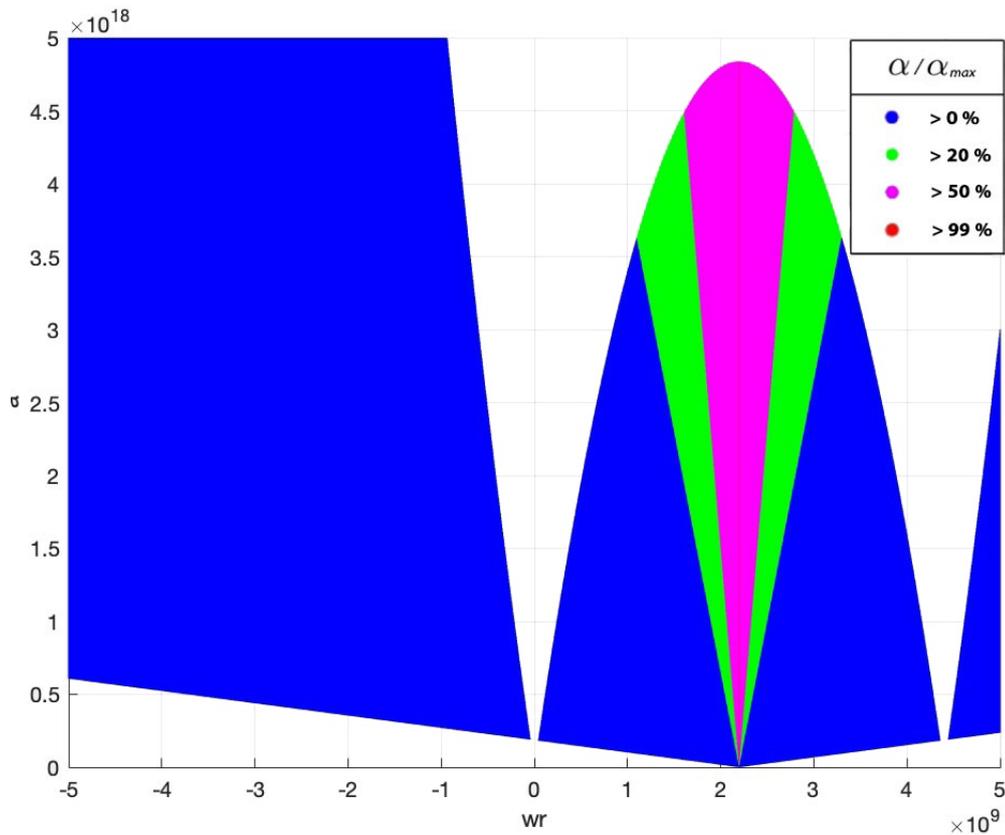


Рис. 5: Области устойчивости.

Результаты, полученные в ходе исследования степени устойчивости с использованием реберной теоремы полностью соответствуют графику областей устойчивости, изображенному на рисунке 4, полученному в предыдущем параграфе. Таким образом, мы смогли проверить правильность наших расчетов и уменьшить количество необходимых вычислений для установления факта устойчивости системы.

2.4 Случай биквадратного характеристического уравнения

Для удобства исследования устойчивости системы характеристический полином (12) можно привести к более компактному виду. При рассмотрении частного случая системы, когда частота вращающегося поля примерно равна среднему арифметическому циклотронной и магнитронной частот ($\omega_r \approx (\Omega_c + \omega_m)/2 \approx \Omega_c/2$), заметим, что уравнение (12) можно свести к биквадратному. Сделаем замену $\lambda = \mu - k/2$, а затем $\mu^2 = \nu$, и, путем несложных преобразований, получим следующий вид полинома (12):

$$\chi(\nu) = \nu^2 + \left(-\frac{k^2}{2} + \frac{\Omega_c^2}{2} - \omega_z^2\right) \nu + \frac{k^4}{16} + \frac{k^2 * \Omega_c^2}{8} + \frac{k^2 * \omega_z^2}{4} + \frac{\Omega_c^4}{16} - \frac{\Omega_c^2 * \omega_z^2}{4} + \frac{\omega_z^4}{4} - a^2.$$

В случае биквадратного характеристического уравнения мы можем в достаточно простой форме получить значения корней нашего полинома и провести их анализ. В частности, можно определить, при каких значениях параметра a корни полинома будут кратными.

Корни полинома $\chi(\nu)$ будут иметь следующий вид:

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{\left(\frac{k^2}{4} - \left((2 * a + \frac{k}{\Omega_c}) * (2 * a - \frac{k}{\Omega_c})\right)\right)} - \frac{\Omega_c^2}{4} + \frac{\omega_z^2}{2}}{2}},$$

$$\nu_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{\left(\left((2 * a + \frac{k}{\Omega_c}) * (2 * a - \frac{k}{\Omega_c})\right)\right)} + \frac{k^2}{4} - \frac{\Omega_c^2}{4} + \frac{\omega_z^2}{2}}{2}},$$

$$\nu_3 = -\sqrt{\frac{\sqrt{\left(\frac{k^2}{4} - \left(2 * a + \frac{k}{\Omega_c}\right) * \left(2 * a - \frac{k}{\Omega_c}\right)\right)} - \frac{\Omega_c^2}{4} + \frac{\omega_z^2}{2}}{2}},$$

$$\nu_4 = -\sqrt{\frac{\sqrt{\left(\left(2 * a + \frac{k}{\Omega_c}\right) * \left(2 * a - \frac{k}{\Omega_c}\right)\right)} + \frac{k^2}{4} - \frac{\Omega_c^2}{4} + \frac{\omega_z^2}{2}}{2}}.$$

Рассмотрим параметр a :

$$a = \frac{\sqrt{k^4 + 2 * k^2 * \Omega_c^2 + 4 * k^2 * \omega_z^2 + \Omega_c^4 - 4 * \Omega_c^2 * \omega_z^2 + 4 * \omega_z^4}}{4},$$

$$a = -\frac{\sqrt{k^4 + 2 * k^2 * \Omega_c^2 + 4 * k^2 * \omega_z^2 + \Omega_c^4 - 4 * \Omega_c^2 * \omega_z^2 + 4 * \omega_z^4}}{4},$$

$$a = \frac{k\Omega_c}{2},$$

$$a = -\frac{k\Omega_c}{2}.$$

Выше представлены значения амплитуды в случае, когда $(\omega_r \approx \Omega_c/2)$, при которых мы будем получать кратные значения характеристического полинома.

Глава 3. Анализ ловушки смешанного типа

3.1 Основные уравнения

Учитывая, что область использования электромагнитных ловушек очень широка и нельзя подобрать универсальные комбинации полей и значения параметров для решения всех задач, важно уметь рассматривать различные конфигурации системы и при необходимости добавлять дополнительные поля.

К рассмотренной ранее системе, которая включала в себя одно дополнительное квадрупольное поле добавим еще одно - дипольное, вращающееся

с той же частотой ω_r , но со своей амплитудой и сдвигом по фазе.

Тогда уравнения (7)-(8) примут следующий вид:

$$\ddot{\psi} + (k + i(\Omega_c - 2\omega_r))\dot{\psi} + (\omega_r(\Omega_c - \omega_r - ik) - \frac{\omega_z^2}{2})\psi = -b\bar{\psi} - a_d z \quad (20)$$

$$\ddot{\bar{\psi}} + (k - i(\Omega_c - 2\omega_r))\dot{\bar{\psi}} + (\omega_r(\Omega_c - \omega_r + ik) - \frac{\omega_z^2}{2})\bar{\psi} = -\bar{b}\psi - a_d z \quad (21)$$

$$\ddot{z} = -\omega_z^2 z - k\dot{z} - \frac{a_d}{2}(\bar{\psi} + \psi) \quad (22)$$

Здесь a_d - амплитуда колебания дипольного поля, параметр b включает в себя значение амплитуды колебания квадрупольного поля и начальную фазу и раскладывается следующим образом: $b = a_q \exp^{-2i\theta} = q + ip$.

Важно отметить, что при такой конфигурации ловушки мы уже не можем говорить о независимости продольного и поперечного движений. С добавленными коэффициентами в уравнении для z появляется зависимость от компонент поперечного движения, поэтому мы обязаны включить в рассмотрение при анализе устойчивости системы и уравнение (4), которое принимает вид (22).

3.2 Нахождение характеристического полинома

Для удобства записи используем следующие обозначения:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + (k + i(\Omega_c - 2\omega_r))\lambda + \omega_r(\Omega_c - \omega_r - ik) - \frac{\omega_z^2}{2} \quad (23)$$

$$\bar{P}(\lambda) = \lambda^2 + (k - i(\Omega_c - 2\omega_r))\lambda + \omega_r(\Omega_c - \omega_r + ik) - \frac{\omega_z^2}{2} \quad (24)$$

$$Q(\lambda) = \lambda^2 + k\lambda + \omega_z^2 \quad (25)$$

Построим матрицу для нахождения характеристического полинома системы (20)-(22).

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} P(\lambda) & b & a_d \\ \bar{b} & \bar{P}(\lambda) & a_d \\ \frac{a_d}{2} & \frac{a_d}{2} & Q(\lambda) \end{vmatrix} \quad (26)$$

Учитывая, что $b = a_q \exp^{-2i\theta} = q + ip$ и $\exp^{-2i\theta} = \cos(2\theta) - i\sin(2\theta)$:

$$\chi(\lambda) = P\bar{P}Q - \frac{a_d^2}{2}\bar{P} + \frac{a_d^2}{2}b + \frac{a_d^2}{2}\bar{b} - Qb\bar{b} - \frac{a_d^2}{2}P, \quad (27)$$

$$\chi(\lambda) = Q(\lambda)(P(\lambda)\bar{P}(\lambda) - a_q^2) - \frac{a_d^2}{2}(P(\lambda) + \bar{P}(\lambda) - 2a_q \cos(2\theta)), \quad (28)$$

$$\chi(\lambda) = Q(\lambda)(P(\lambda)\bar{P}(\lambda) - q^2 - p^2) - \frac{a_d^2}{2}(P(\lambda) + \bar{P}(\lambda) - 2q). \quad (29)$$

Таким образом, мы получили характеристическое уравнение для системы (26) и можем провести его анализ его коэффициентов и построить матрицу Гурвица для проверки необходимых условий асимптотической устойчивости системы.

3.3 Нахождение областей устойчивости

Матрица Гурвица для характеристического полинома шестой степени (29) будет иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_6 & a_5 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 \end{pmatrix}.$$

Здесь $a_i, i = 0..6$ - коэффициенты полинома перед соответствующими степенями λ .

Учитывая, что проверка устойчивости с помощью критерия Рауса-Гурвица может быть затруднена тем, что полином имеет довольно высокий порядок, целесообразно было бы воспользоваться модификацией критерия Рауса-Гурвица - критерием Лъенара-Шипара. В случае, когда все коэффициенты полинома положительны, из того факта, что положительны все определители нечетных миноров матрицы Гурвица, следует и положительность миноров с четными индексами.

Таким образом, для нахождения областей устойчивости нам достаточно проверить на положительность все коэффициенты характеристического полинома и все определители миноров с нечетными индексами, что заметно ускоряет работу программы.

Воспользуемся понятием степени устойчивости, введенным ранее, и снова разложим характеристический полином по степеням $\xi = \lambda + \alpha$:

$$\chi(\lambda) = \chi(\xi - \alpha) = \hat{\chi}(\xi) = \chi(-\alpha) + \chi'(-\alpha)\xi + \frac{\chi''(-\alpha)}{2}\xi^2 + \frac{\chi'''(-\alpha)}{6}\xi^3 + \dots + \xi^6.$$

Если полученный полином $\hat{\chi}(\xi)$ будет удовлетворять критерию Ляпунова-Шипара, то степень устойчивости полинома $\chi(\lambda)$ будет больше α . При этом степень устойчивости характеристического полинома (29) не может превышать $k/2$.

Был проведен численный анализ устойчивости системы, при следующих значениях параметров: $\theta = \pi/4$ рад, $k = 1400c^{-1}$, $\omega_z = 59.6 * 10^6$ рад /с, $\Omega_c = 4.4 * 10^9$ рад/с; ω_r принимают значения вблизи эффективной частоты $\Omega_c/2$ от $2.19 * 10^9$ до $2.21 * 10^9$ рад/с, значения a_d изменяются от 0 до $6 * 10^{16}$ рад/с⁻², значения a_q изменяются от $1 * 10^{16}$ до $2 * 10^{16}$ рад/с⁻².

Графики областей устойчивости для данных значений параметров изображены на рисунках 6-7, где светлая область является областью неустойчивости, далее, в соответствии легендой графика, где $\alpha_{max} = k/2$, изображены области, отвечающие четырем диапазонам значений степени устойчивости: $10\% < \alpha/\alpha_{max} < 20\%$, $20\% < \alpha/\alpha_{max} < 30\%$, $30\% < \alpha/\alpha_{max} < 45\%$, $45\% < \alpha/\alpha_{max} < 50\%$.

Данная область интересна для рассмотрения тем, что подробный анализ графика для степеней устойчивости вблизи частоты $\omega_r = \Omega_c/2$, но без влияния квадрупольного поля был рассмотрен в работе [12]. Анализируя эти графики, несложно заметить, что область устойчивости расширяется с увеличением амплитуды квадрупольного поля.

Другим важным аспектом исследования является область вблизи эффективной для сжатия частоты вращения системы $\omega_r = 60 * 10^6$ рад/с. Для данной области был проведен численный анализ устойчивости систе-

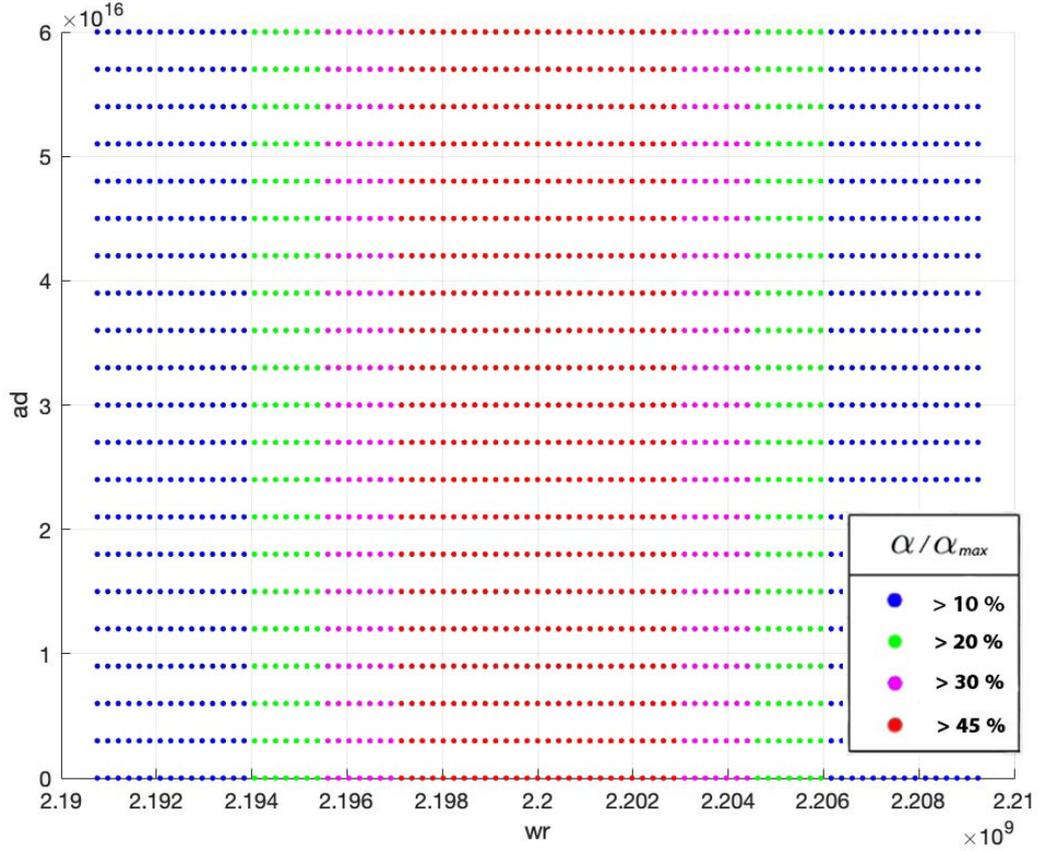


Рис. 6: Области устойчивости на плоскости $a_d \omega_r$.

мы, при следующих значениях параметров: $\theta = \pi/4$ рад, $k = 1400c^{-1}$, $\omega_z = 59.6 * 10^6$ рад /с, $\Omega_c = 4.4 * 10^9$ рад/с; ω_r принимают значения от $0.2 * 10^8$ до $1.8 * 10^8$ рад/с, значения a_d изменяются от 0 до $6 * 10^{16}$ рад/с⁻², значения a_q изменяются от $1 * 10^{16}$ до $2 * 10^{16}$ рад/с⁻².

Графики областей устойчивости для данных значений параметров изображены на рисунках 8-9, где светлая область является областью неустойчивости, далее, в соответствии легендой графика, где $\alpha_{max} = k/2$, изображены области, отвечающие четырем диапазонам значений степени устойчивости: $10\% < \alpha/\alpha_{max} < 20\%$, $20\% < \alpha/\alpha_{max} < 30\%$, $30\% < \alpha/\alpha_{max} < 45\%$, $45\% < \alpha/\alpha_{max} < 50\%$.

В работе [12] эта область также была подробно рассмотрена и проанализирована. Сравнивая полученные графики, можно отметить, что при добавлении вращающегося квадрупольного поля к дипольному значительные отличия не появляются. Максимальная степень устойчивости не превыша-

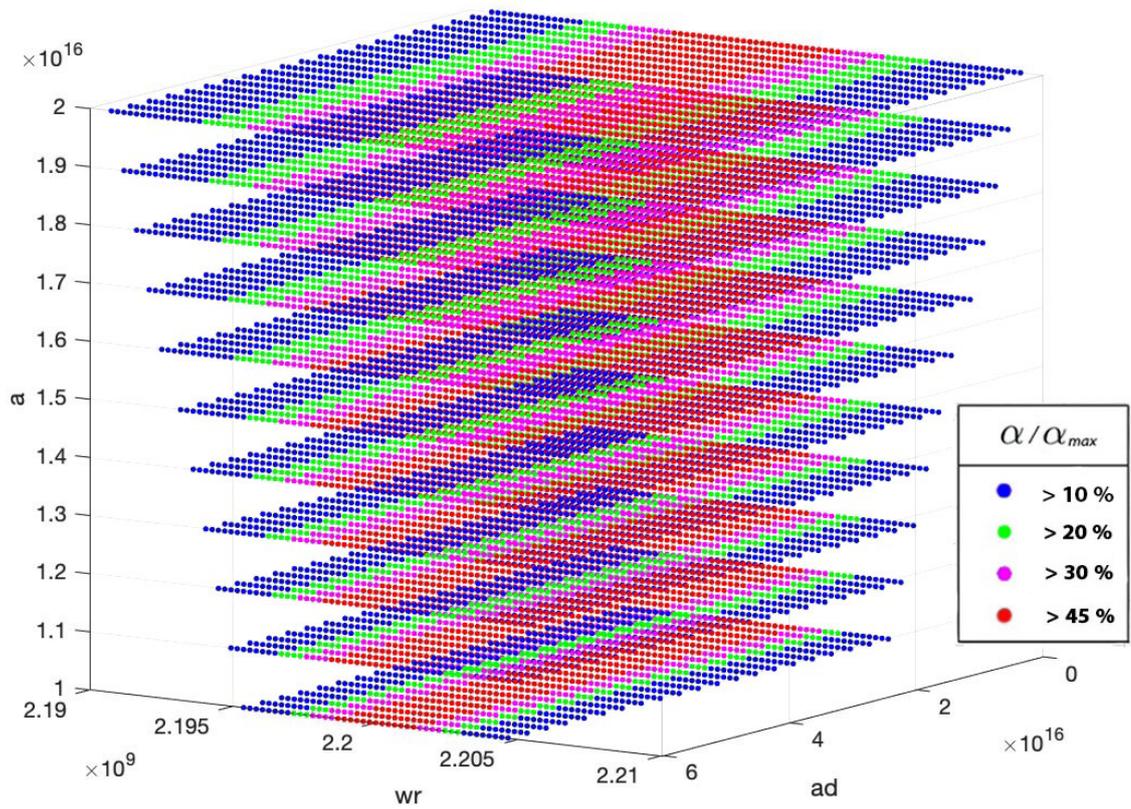


Рис. 7: Области устойчивости в пространстве параметров $a_d \omega_r a_q$.

ет значения $k/4$. На рисунке 9 показано, что даже с увеличением значения амплитуды колебания квадрупольного поля, картина устойчивости остается прежней.

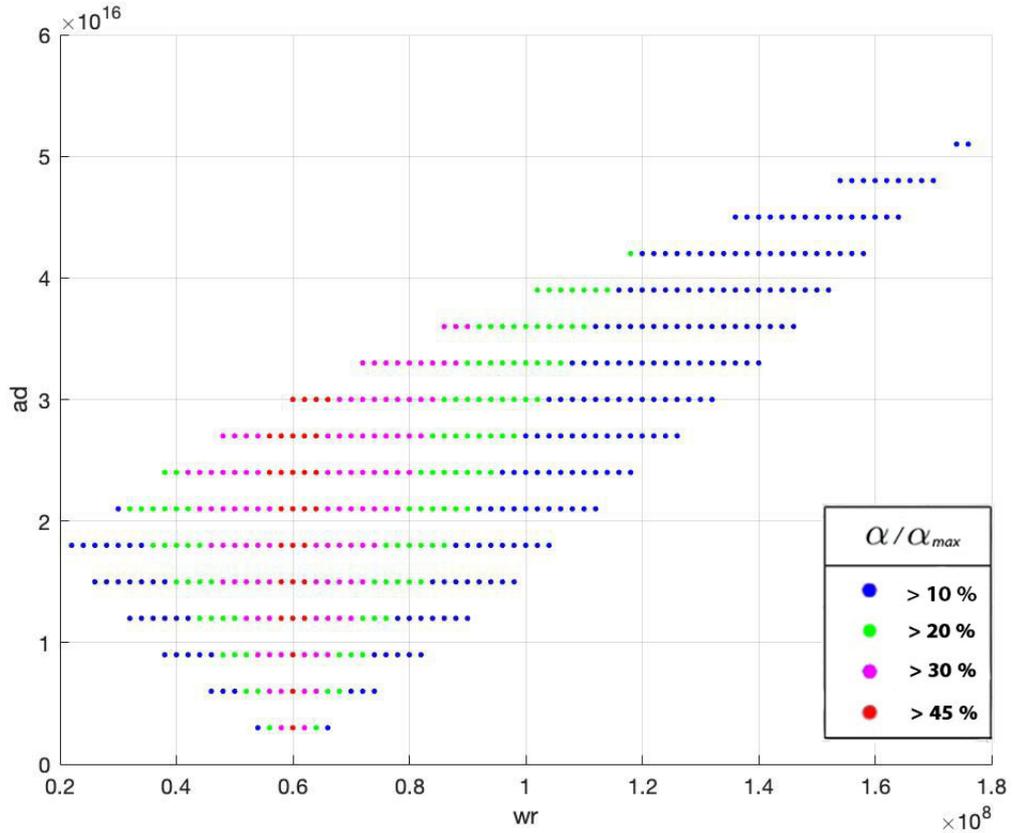


Рис. 8: Области устойчивости на плоскости $a_d \omega_r$.

Заключение

В работе рассмотрена задача поиска областей в пространстве параметров для ловушки Пеннинга-Малмберга-Сурко, обеспечивающих степень устойчивости системы в выбранном диапазоне. В среде MATLAB создана программа "GURVITS_QUADRUPOLE.m" (см. Приложение) для численного решения этой задачи с применением критерия Рауса-Гурвица. Предложенный метод анализа устойчивости системы применим при произвольных значениях параметров системы. Численный анализ рассмотренного примера конфигурации ловушки показал наибольший эффект (в смысле получаемой степени устойчивости системы) от включения вращающегося электрического квадрупольного поля при частоте вращения близкой к среднему арифметическому циклотронной и магнитронной частот ($\omega_r \approx (\Omega_c + \omega_m)/2 \approx \Omega_c/2$) и соответствующих значениях амплитуды вращающегося поля.

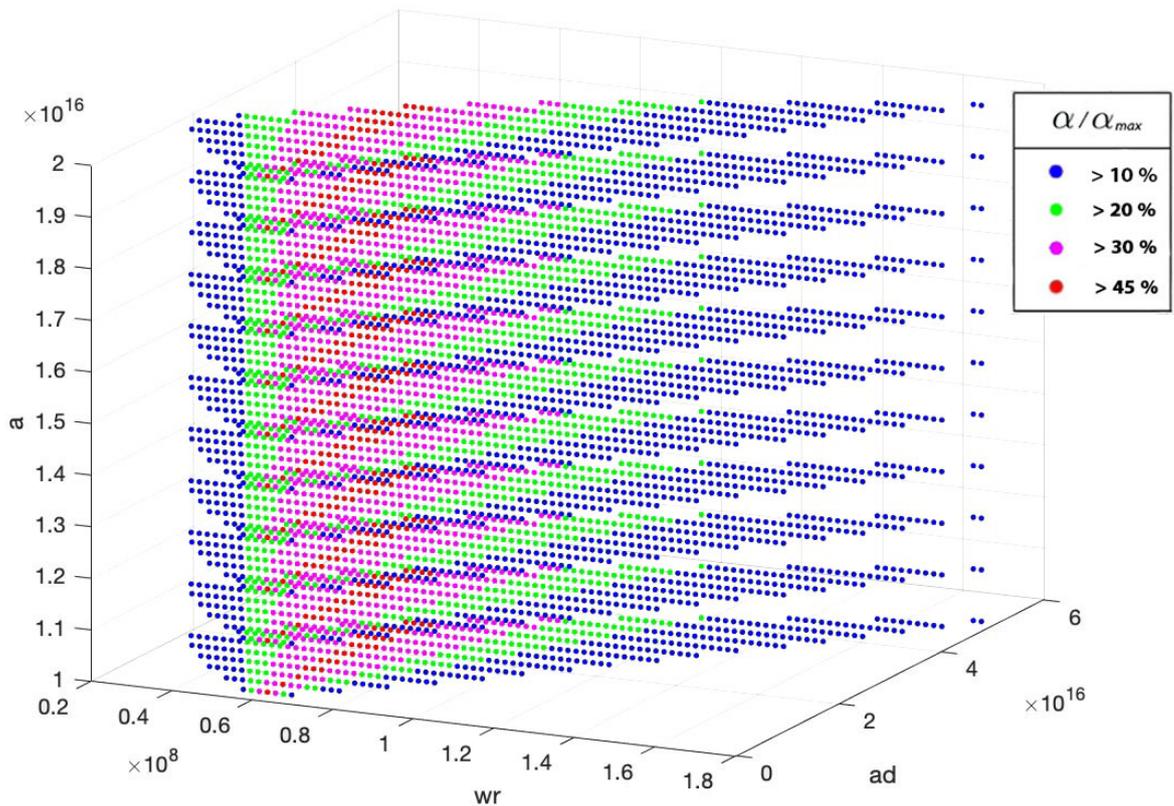


Рис. 9: Области устойчивости в пространстве параметров a_d ω_r a_q .

Также в работе применен усовершенствованный способ решения поставленной задачи - поиск областей устойчивости с использованием реберной теоремы. В среде разработки MATLAB создана соответствующая программа "EDGE_THEORY_QUADRUPOLE.m" (см. Приложение). Данный метод существенно ускоряет работу программы, поскольку уменьшает количество необходимых вычислений для установления факта устойчивости системы. В ходе работы были подтверждены и уточнены результаты, полученные с помощью использования критерия Рауса-Гурвица.

Также были исследованы области устойчивости в ловушке Пеннинга-Малмберга-Сурко с комбинацией двух вращающихся полей: квадрупольного и дипольного. В среде MATLAB создана соответствующая программа "GURVITS_QUADRUPOLE_DIPOLE.m" (см. Приложение) для численного решения этой задачи с применением модификации критерия Рауса-Гурвица - критерием Льенара-Шипара. Численный анализ рассмотренного приме-

ра конфигурации ловушки показал наибольший эффект (в смысле получаемой степени устойчивости системы) от включения вращающегося электрического квадрупольного поля при частотах вращения близких к среднему арифметическому циклотронной и магнитронной частот ($\omega_r \approx (\Omega_c + \omega_m)/2 \approx \Omega_c/2$) и к сумме модифицированных частот циклотронных и аксиальных колебаний, рассмотренных в работе[12] при соответствующих значениях амплитуд вращающихся полей.

Следует отметить, что результаты данных исследований были частично опубликованы в статьях, представленных в Известиях Иркутского государственного университета и Вестнике Санкт-Петербургского государственного университета технологии и дизайна[12]-[13].

Список литературы

- [1] Eseev M. K., Meshkov I. N. Traps for storing charged particles and antiparticles in high precision experiments // Phys. Usp. 2016. Vol. 59. P. 304–317.
- [2] T.Hasegava, M.J.Jensen, J.J.Bollinger Stability of a Penning trap with a quadrupole rotating field // Time and Frequency Division, National Institute of Standards and Technology, Boulder, Colorado 80305, USA// Department of Material Science, University of Hyogo, Hyogo 678-1297 Japan. 2005 Doi: 10.1103/PhysRevA.71.023406
- [3] Isaac C. A., Baker C. J., Mortensen T., van der Werf D. P., Charlton M. Compression of positron clouds in the independent particle regime // Physical Review Letters. 2011. Vol. 107. P. 033201(1–4).
- [4] Isaac C. A. Motional sideband excitation using rotating electric fields // Physical Review A. 2013. Vol. 87. P. 043415(1–7).
- [5] Meshkov I. N., Eseev M. K., Ovsyannikov A. D., Ovsyannikov D. A., Ponomarev V. A. Analysis of the particle dynamics stability in the Penning–Malmberg–Surko trap // Proc. XXV Russian Particle Accelerator Conference. Saint Petersburg, 2016. P. 64. doi: 10.18429/JACoW-RuPAC2016-WECAMH03
- [6] Meshkov I. N., Ovsyannikov A. D., Ovsyannikov D. A., Eseev M. K. Study of the stability of charged particle dynamics in a Penning–Malmberg–Surko trap with a rotating field // Papers of Academy of Science RAN. 2017. Vol. 476, N 6. P. 630–634. doi: 10.7868/S0869565217300065
- [7] A.D.Ovsyannikov, I.N.Meshkov, D.A.Ovsyannikov, M.K.Evseev Analysis and Modeling of the Charged Particle Beam Dynamics in Charlton Trap// ISSN 1547-4771, Physics of Particles and Nuclei Letters, 2018, Vol. 15, No. 7, pp. 754–757. © Pleiades Publishing, Ltd., 2018
- [8] Овсянников А. Д. Анализ динамики заряженных частиц в идеальной ловушке Пеннинга с вращающимся полем и буферным газом //

Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 14. Вып. 1. С. 62–75.
<https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.105>

- [9] Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Лань, 2008. — 480 с.
- [10] Жабко А.П., Харитонов В.Л. Необходимые и достаточные условия семейств полиномов, Автомат. и телемех., 1994, выпуск 10, 125-134
- [11] Bialas S. A necessary and sufficient condition for the stability of convex combinations of stable polynomials or matrices // Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences. 1985. V . 33. P . 473 - 480.
- [12] А. Д. Овсянников, А. И. Шлокова, А. А. Комарова, “Построение областей устойчивости в пространстве параметров в ловушке Пеннинга с вращающимся электрическим полем”, Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика, 35 (2021), 49–59
- [13] А. Д. Овсянников, А. И. Шлокова, А. А. Комарова, "Поиск областей устойчивости в пространстве коэффициентов в ловушке Пеннинга-Малмберга-Сурко с вращающимся электрическим квадрупольным полем, Вестник Санкт-Петербургского государственного университета технологии и дизайна. серия 1: Естественные и технические науки (2020), 3-6
- [14] Martina Knoop, Niels Madsen, Richard C. Thompson, Physics with Trapped Charged Particles// DOI:10.1142/9781783264063_0001

Приложение

GURVITS_QUADRUPOLE.m

```
syms ksi wr a lam alf
clear
clc

global k uc wz
k = 1400;
wz=59.6*10^6;
uc=4.4*10^9;

colors_ = {'.b', '.g', '.m', '.r'};

alf_arr = [0, k/10, k/4, k/2-1];

coef_main = sym(ones(length(alf_arr), 6));

for i=1:length(alf_arr)
    for j=1:6
        coef = calc_coef(alf_arr(i));
        if j > length(coef)
            break
        end
        coef_main(i,j) = coef(j);
    end
end

hold on
grid on
xlabel('wr')
ylabel('a')

coef_main_MF = matlabFunction(coef_main);

for a_i= 0:100
    a_ = 5*10^18 * a_i/100;
    for wr_i = -50:50
```

```

wr_ = 5*10^9 * wr_i / 50;
flag = true;
j = 1;
result = coef_main_MF(a_, wr_);
while flag && j < 5
    for i=1:1:6
        func = result(j, i);
        if real(func) < 0
            flag = false;
            break
        end
    end
    if flag
        plot(wr_, a_, char(colors_(j)));
    end
    j = j + 1;
end
end
end

function coef_ = calc_coef(alf)
syms ksi wr a ad lam
global k wz uc

lam = ksi - alf;

a00 = lam^2 + k*lam + (wr*(uc-wr) - wz^2/2 + a);
a01= -(uc - 2*wr)*lam +k*wr;
a10= (uc - 2*wr)*lam -k*wr;
a11= lam^2 + k*lam + (wr*(uc-wr) - wz^2/2 - a);

poly = det([a00 a01;
            a10 a11]);

coef = fliplr(coeffs(poly, ksi));

cond_3 = det([coef(2) coef(4) 0;
              coef(1) coef(3) coef(5) ;
              0 coef(2) coef(4)]);

```

```
coef_ = [coef, cond_3];
```

```
end
```

EDGE_THEORY_QUADRUPOLE.m

```
syms ksi wr a lam alf
clear
clc

global a_1 a_2 k uc wz q delta
k = 1400;
wz=59.6*10^6;
uc=4.4*10^9;
a_1=0;
a_2=5*10^18;
q = 1000000000;
delta = 5*10^14;

colors_ = {'b','g','m','r'};

alf_arr = [0, k/10, k/4, k/2-1];

coef_main = sym(ones(length(alf_arr), 6));

for i=1:length(alf_arr)
    for j=1:6
        coef = calc_coef(alf_arr(i));
        if j > length(coef)
            break
        end
        coef_main(i,j) = coef(j);
    end
end

hold on
grid on
xlabel('wr')
ylabel('a')

coef_main_MF = matlabFunction(coef_main);

for wr_ = -5*10^9:5*10^6:5*10^9
```

```

a_1=0;
a_2=5*10^18;
for j = 1:1:4
    flag = true;
    result1 = coef_main_MF(a_1, wr_);
    while not(checking_stable(j, result1))
        a_1 = a_1 + delta;
        result1 = coef_main_MF(a_1, wr_);
        if a_1 > a_2
            flag = false;
            break
        end
    end
    result2 = coef_main_MF(a_2, wr_);
    while not(checking_stable(j, result2))
        a_2 = a_2 - delta;
        result2 = coef_main_MF(a_2, wr_);
        if a_1 > a_2
            flag = false;
            break
        end
    end
    if flag
        if checking_cont_stable(j,result1,result2) > 0
            plot([wr_ wr_], [a_1 a_2], char(colors_(j)))
        end
    end
end
end

function coef_ = calc_coef(alf)
syms ksi wr a ad lam
global k wz uc

lam = ksi - alf;

a00 = lam^2 + k*lam + (wr*(uc-wr) - wz^2/2 + a);
a01= -(uc - 2*wr)*lam +k*wr;
a10= (uc - 2*wr)*lam -k*wr;

```

```

a11= lam^2 + k*lam + (wr*(uc-wr) - wz^2/2 - a);

poly = det([a00 a01;
            a10 a11]);

coef = fliplr(coeffs(poly, ksi));

cond_3 = det([coef(2) coef(4) 0;
              coef(1) coef(3) coef(5) ;
              0 coef(2) coef(4)]);

coef_ = [coef, cond_3];
end

function stable = checking_stable(j, result)
flag = true;
for i=1:1:6
    func = result(j, i);
    if func < 0
        flag = false;
        break
    end
end
end

stable = flag;
end

function cont_stable = checking_cont_stable(j,result1, result2)
global q

gur1 = [result1(j, 4)/q^3 result1(j, 5)/q^4 0 0;
        result1(j, 2)/q result1(j, 3)/q^2 result1(j, 4)/q^3 0;
        0 result1(j, 1) result1(j, 2)/q result1(j, 3)/q^2
        0 0 0 result1(j, 1)];

gur2 = [result2(j, 4)/q^3 result2(j, 5)/q^4 0 0;
        result2(j, 2)/q result2(j, 3)/q^2 result2(j, 4)/q^3 0;
        0 result2(j, 1) result2(j, 2)/q result2(j, 3)/q^2
        0 0 0 result2(j, 1)];

```

```
cont_stable = eig(gur2/gur1);  
end
```

GURVITS_QUADRUPOLE_DIPOLE.m

```
syms ksi wr a ad lam alf
clear
clc

global k uc wz tet
k = 1400;
wz=59.6*10^6;
uc=4.4*10^9;
tet = pi;

colors_ = {'.b', '.g', '.m', '.r'};

alf_arr = [k/20, k/10, 3*k/20, 0.99*k/2];

coef_main = sym(ones(length(alf_arr), 10));

for i=1:length(alf_arr)
    for j=1:10
        coef = calc_coef(alf_arr(i));
        if j > length(coef)
            break
        end
        coef_main(i,j) = coef(j);
    end
end

hold on
grid on
xlabel('wr')
ylabel('ad')
zlabel('a')

coef_main_MF = matlabFunction(coef_main);

for a_i= 1:0.5:2
    a_ = 1*10^16 * a_i;
    tic
    disp(a_i)
```

```

for wr_i = 0.9:0.0001:1.1
    wr_ = 2.2*10^9 * wr_i ;
% for wr_i = 0:0.0001:1
%     wr_ = 2*10^8 * wr_i;
for ad_i= 0:20
    ad_ = 6*10^16 * ad_i / 20;
    j = 1;
    result = coef_main_MF(a_, ad_, wr_);
    while j < 5
        flag = true;
        for i=1:1:10
            func = result(j, i);
            if func < 0
                flag = false;
            end
        end
        if flag
            plot3(wr_,ad_,a_,char(colors_(j)));
        end
        j = j + 1;
    end
end
end
toc
end

function coef_ = calc_coef(alf)
syms ksi wr_ a_ ad_ lam
global k wz uc tet

lam = ksi - alf;

Q = lam^2 + k*lam + wz^2;
P = lam^2 + (k + 1i*(uc - 2*wr_))*lam + (wr_*(uc-wr_-1i*k)) - wz^2/2;
P_ = lam^2 + (k - 1i*(uc - 2*wr_))*lam + (wr_*(uc-wr_+1i*k)) - wz^2/2;

poly = Q*(P*P_ - a_^2) - ad_^2/2*(P + P_ - 2*a_*cos(2*tet));

coef = fliplr(coeffs(poly, ksi));

```

```
cond_1 = det([coef(2) coef(4) coef(6) 0 0 0;  
             coef(1) coef(3) coef(5) coef(7) 0 0;  
             0 coef(2) coef(4) coef(6) 0 0;  
             0 coef(1) coef(3) coef(5) coef(7) 0;  
             0 0 coef(2) coef(4) coef(6) 0;  
             0 0 coef(1) coef(3) coef(5) coef(7)]);
```

```
cond_3 = det([coef(2) coef(4) coef(6) 0 ;  
             coef(1) coef(3) coef(5) coef(7) ;  
             0 coef(2) coef(4) coef(6) ;  
             0 coef(1) coef(3) coef(5)]);
```

```
cond_5 = det([coef(2) coef(4);  
             coef(1) coef(3) ]);
```

```
coef_ = [coef, cond_3, cond_5, cond_1];
```

```
end
```
