Санкт–Петербургский государственный университет

Кафедра теории управления

РЫЖОВ Михаил Валерьевич

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Анализ устойчивости линейных систем с запаздыванием: кусочно-линейное приближение функционалов Ляпунова

Направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Научный руководитель:
кандидат физ.-мат. наук, доцент
Александрова Ирина Васильевна

Рецензент:
кандидат физ.-мат. наук, доцент
Платонов Алексей Викторович

Санкт-Петербург
2021 г.

Содержание

Введение

При построении математических моделей в различных областях науки, таких как физика, химия, биология, экономика, социология, возникают системы дифференциальных уравнений с запаздываниями. Запаздывание является важной частью таких математических моделей, так как скорость процессов может зависеть не только от текущего состояния, но также и от прошлых. Поэтому для построения адекватной модели какого-либо процесса важно учитывать запаздывание.

Метод функционалов Ляпунова – Красовского играет важную роль при анализе асимптотической устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с запаздыванием, поскольку он дает эффективное достаточное условие устойчивости. Для линейных стационарных систем с запаздыванием на языке функционалов Ляпунова – Красовского может быть сформулирован критерий экспоненциальной устойчивости, который является аналогом классического критерия Ляпунова. Его достаточность известна как теорема Красовского и позволяет сделать вывод об экспоненциальной устойчивости системы при наличии положительно-определенного функционала, производная которого вдоль решений системы отрицательно определена.

В работах [1, 2, 3, 4] вводятся функционалы с заданной производной, которые удовлетворяют теореме Красовского в том и только в том случае, когда система экспоненциально устойчива, и, следовательно, являются пригодными для анализа экспоненциальной устойчивости линейных стационарных систем с запаздыванием. Эти функционалы определяются матрицей Ляпунова [5], а их производные вдоль решений исследуемых систем совпадают с заранее заданными отрицательно-определенными квадратичными формами или функционалами.

В работах [6, 7] предложен конструктивный метод анализа экспоненциальной устойчивости линейных стационарных систем с запаздыванием. В основе этого метода лежит использование функционалов с заданной производной, но их положительная определенность требуется не на всем множестве кусочно-непрерывных функций, а лишь на множестве функций, удовлетворяющих аналогу условия Разумихина. Для оценки функционалов в работе [6] используется кусочно-линейное приближение их аргументов. Но в таком случае остается необходимость вычисления интегралов от матриц Ляпунова, что влечет за собой высокое время вычислений.

Целью данной работы является построение конструктивного метода анализа экспоненциальной устойчивости линейных стационарных систем с запаздыванием, представляющего собой модификацию метода, описанного в работе [6]. Эта модификация заключается в том, что кусочно-линейное приближение предлагается использовать не для аргументов функционалов с заданной производной, а для подынтегральных выражений функционалов целиком. В результате удается избавиться от необходимости вычисления интегралов от матриц Ляпунова. Требуется лишь вычисление самих значений матриц в конечном числе точек, соответствующих узлам разбиения. А значит, ожидается существенное повышение вычислительной эффективности метода.

Постановка задачи

Рассмотрим линейную систему с произвольными постоянными запаздываниями:

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{m} A_j x(t - h_j), \quad t \geqslant 0. \tag{1}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $A_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — постоянные вещественные матрицы, $h_0 = 0$, $h_j \geqslant 0$, $j = \overline{1,m}$ — постоянные вещественные запаздывания. Пусть h — максимальное запаздывание: $h = \max h_j$, $j = \overline{1,m}$.

Обозначим через $x(t,\phi)$ решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию

$$x(\theta,\phi) = \phi(\theta), \quad \theta \in [-h, 0],$$

где

$$\phi \in PC\left([-h,0], \mathbb{R}^n\right), \quad \|\phi\|_h = \sup_{\theta\in[-h,0]} \|\phi(\theta)\|.$$

Здесь $PC\left([-h,0], \mathbb{R}^n\right)$ — пространство кусочно-непрерывных функций $\phi : [-h,0] \to \mathbb{R}^n$, x_t — состояние системы (1):

$$x_t : \theta \to x(t+\theta), \quad \theta \in [-h, 0].$$

Определение 1 [8]. Система (1) называется экспоненциально устойчивой, если существуют $\gamma \geqslant 1, \sigma > 0$ такие, что $\|x(t,\phi)\| \leqslant \gamma e^{-\sigma t} \|\phi\|_h$, $t \geqslant 0$, для любой начальной функции $\phi \in PC\left([-h,0], \mathbb{R}^n\right)$.

В данной работе ставится задача построения конструктивного метода анализа экспоненциальной устойчивости системы (1), а также его реализации в программной среде MATLAB.

Обзор литературы

Одним из способов применения теоремы Красовского к анализу устойчивости линейных стационарных систем с запаздыванием является построение функционалов Ляпунова – Красовского с заданной производной [1, 2, 3, 4]. При этом структура функционала, используемого для анализа устойчивости, выбирается таким образом, чтобы его производная вдоль решений конкретной системы совпадала с заранее известной отрицательно-определенной функцией или функционалом.

В работе Ю. М. Репина [1] впервые предложен метод построения квадратичных функционалов Ляпунова с заданной производной. В ней рассматривается квадратичный функционал общей формы, находится его производная вдоль решений, которая затем приравнивается к заранее заданному квадратичному функционалу. В результате получается система уравнений, связывающих определяющие матрицы функционалов.

В статье E. F. Infante и W. B. Castellan [2] показано, что функционалы с заданной производной определяются одной функциональной матрицей, позже названной матрицей Ляпунова [4], а также впервые сформулированы её базовые свойства: алгебраическое, динамическое и свойство симметрии.

Следующим этапом развития теории является работа W. Huang [3], в которой для широкого класса систем с распределенным запаздываем построен функционал с отрицательно-определенной производной, зависящей лишь от текущего состояния системы и представляющей собой квадратичную форму. Также в этой работе получена положительно-определенная, но лишь кубическая, оценка снизу для этого функционала.

Теория функционалов с заданной производной окончательно формируется в фундаментальной работе В. Л. Харитонова и А. П. Жабко [4]. В ней функциональная матрица, определяющая функционалы с заданной производной, названа матрицей Ляпунова, а также введен функционал полного типа, в случае экспоненциальной устойчивости системы допускающий квадратичную оценку снизу. Такой функционал удовлетворяет теореме Красовского и может быть использован для анализа экспоненциальной устойчивости системы с запаздыванием.

Подробный обзор теории представлен в книге В. Л. Харитонова [5]. Кроме того, в ней может быть найден полуаналитический метод вычисления матрицы Ляпунова.

В работах И. В. Александровой и А. П. Жабко [6, 7] предлагается конструктивный метод проверки положительной определенности функционалов с заданной производной. Доказано, что для экспоненциальной устойчивости достаточно положительной определенности функционалов лишь на множестве функций, удовлетворяющих аналогу условия Разумихина, а не на всем множестве кусочно-непрерывных начальных функций. Таким образом, задача анализа устойчивости сводится к минимизации квадратичной формы, построенной в качестве оценки функционала снизу путем кусочно-линейного приближения аргумента функционала.

В статье В. Л. Харитонова и S. Mondié [9] получены достаточные условия устойчивости линейной стационарной системы с запаздыванием, основанные на функционалах полного типа и методе дискретизации функционалов [10]. Условия сформулированы в терминах линейных матричных неравенств. Заметим, что матрица квадратичной формы функционала из статьи схожа с матрицей квадратичной формы, полученной для случая системы с одним запаздыванием в данной работе.

В статье А. В. Егорова и S. Mondié [11] представлены необходимые условия экспоненциальной устойчивости линейных систем с несколькими запаздываниями, выраженные в терминах матриц Ляпунова. А именно, доказана положительная определенность некоторой блочной матрицы, составленной из значений матрицы Ляпунова в различных точках, в случае экспоненциальной устойчивости системы. Эти условия получены путем подстановки в функционал специальных приближений, определяемых фундаментальной матрицей системы. Позднее в работе [12] показано, что при определенной размерности блочной матрицы, условия из статьи [11] становятся необходимыми и достаточными. В сравнении с матрицей квадратичной формы, полученной в данной работе, блочная матрица в статье [12] не зависит от матриц системы. Однако, оценка погрешности приближений, основанных на фундаментальной матрице, является экспоненциальной, чем обусловлена большая размерность получаемой матрицы.

В статье А. В. Егорова и В. Л. Харитонова [13] доказано, что для линейной стационарной системы с несколькими запаздываниями, матрицы Ляпунова непрерывно зависят от запаздываний системы. Также в статье предложен алгоритм приближения матрицы Ляпунова с заданной точностью для систем с произвольными запаздываниями в предположении об экспоненциальной устойчивости системы.

Глава 1. Разработка метода анализа экспоненциальной устойчивости

В данной главе доказано конструктивное достаточное условие экспоненциальной устойчивости системы (1). В нем задача анализа устойчивости сводится к задаче минимизации квадратичной формы при квадратичных ограничениях.

1.1 Предварительные сведения

Введем основные понятия в данной работе.

Определение 2 [5]. Матрица $U(\tau)$ называется матрицей Ляпунова для системы (1), если она непрерывна и удовлетворяет свойствам

1) $U'(\tau) = \sum\limits_{j=0}^{m} U(\tau - h_j)A_j, \quad \tau > 0,$

2) $U(-\tau) = U^T(\tau),$

3) $\sum\limits_{j=0}^{m} \left[U(-h_j)A_j + A_j^T U(h_j)\right] = -W,$

где W — симметричная положительно-определенная матрица.

Определение 3. Число $s \in \mathbb{C}$ называется собственным числом системы (1), если

$$\det\left(sE - \sum_{j=0}^{m} A_j e^{-sh_j}\right) = 0.$$

Определение 4 [5]. Будем говорить, что система (1) удовлетворяет условию Ляпунова, если не существует такого числа $s \in \mathbb{C}$, что s и $-s$ являются собственными числами системы (1).

Известно [5], что условие Ляпунова является необходимым и достаточным условием существования и единственности матрицы Ляпунова для произвольной симметричной положительно-определенной матрицы W.

Для анализа устойчивости нам понадобится функционал с заданной отрицательно-определенной производной [5]:

$$v_0\colon PC([-h,0],\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R},$$
$$v_0(\phi)=\sum_{j=1}^{3} I_j, \tag{2}$$

где

$$I_1=\phi^T(0)U(0)\phi(0),\quad I_2=2\phi^T(0)\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{-h_j}^{0}U^T(h_j+\theta)A_j\phi(\theta)d\theta,$$

$$I_3=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{-h_j}^{0}\phi^T(\theta_1)A_j^T\int\limits_{-h_k}^{0}U^T(\theta_2+h_k-\theta_1-h_j)A_k\phi(\theta_2)d\theta_1 d\theta_2.$$

Производная этого функционала вдоль решений системы (1) равна

$$\frac{dv_0(x_t)}{dt}=-x^T(t)Wx(t),$$

где W — симметричная положительно-определенная матрица.

Пусть $K=\sum\limits_{j=0}^{m}\|A_j\|$. Введем множество функций [6]

$$S=\left\{\phi\in C^2\left([-h,0],\mathbb{R}^n\right)\Big|\|\phi^{(l)}(\theta)\|\leqslant K^l\|\phi(0)\|,\theta\in[-h,0],l=\overline{0,2}\right\}.$$

Здесь $C^2\left([-h,0],\mathbb{R}^n\right)$ — пространство дважды непрерывно дифференцируемых функций $\phi:[-h,0]\to\mathbb{R}^n$, $\phi^{(l)}(\theta)$ — l-я производная функции $\phi(\theta)$, $\phi^{(0)}(\theta)=\phi(\theta)$.

В работе используется следующая теорема.

Теорема 1 [6]. *Пусть система (1) удовлетворяет условию Ляпунова и задан функционал (2). Тогда система (1) экспоненциально устойчива, если существует $\mu>0$ такое, что $v_0(\phi)\geqslant\mu\|\phi(0)\|^2$ на функциях $\phi\in S$.*

1.2 Кусочно-линейное приближение

Идея метода заключается в построении для функционала (2) квадратичной оценки снизу на множестве S. Если такая оценка положительно определена, то, согласно теореме 1, система (1) экспоненциально устойчива.

Будем приближать подынтегральные выражения функционала (2) кусочно-линейными функциями, поэтому разобьем каждый отрезок $[-h_j, 0]$ на N_j равных частей длины $\Delta_j = \frac{h_j}{N_j}$ точками

$$
-h_j = \theta_{j_{N_j}} < \theta_{j_{N_j-1}} < \ldots < \theta_{j_1} < \theta_{j_0} = 0,
$$

$$
\theta_{j_i} = -i\Delta_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad i = \overline{0, N_j}.
$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$
g_{ij}(s, \zeta) = U^T(s + i\Delta_j + \zeta) A_j \phi(s - (N_j - i)\Delta_j),
$$

$$
j = \overline{1, m}, \quad i = \overline{0, N_j}, \quad s \in [-\Delta_j, 0], \quad \zeta \in [-h, 0].
$$

Приблизим эту функцию кусочно-линейной функцией следующего вида:

$$
\begin{gathered}
g_{ij}(s, \zeta) = g_{ij}(0, \zeta) \left(1 + \frac{s}{\Delta_j}\right) + g_{ij}(-\Delta_j, \zeta) \left(-\frac{s}{\Delta_j}\right) + \epsilon_{ij}(s, \zeta) = \\
= U^T(i\Delta_j + \zeta) A_j \phi(-(N_j - i)\Delta_j) \left(1 + \frac{s}{\Delta_j}\right) - \\
- U^T((i-1)\Delta_j + \zeta) A_j \phi(-(N_j - i + 1)\Delta_j) \frac{s}{\Delta_j} + \epsilon_{ij}(s, \zeta), \\
j = \overline{1, m}, \quad i = \overline{0, N_j}, \quad s \in [-\Delta_j, 0], \quad \zeta \in [-h, 0],
\end{gathered} \tag{3}
$$

где ϵ_{ij} — погрешность приближения.

1.3 Оценка погрешности приближения

Оценим погрешность приближения (3). Пусть $\phi \in S$.

Лемма 1. *Погрешность приближения (3)* $\epsilon_{ij}(s,\zeta)$ *допускает следующую оценку:*

$$\|\epsilon_{ij}(s,\zeta)\| \leqslant 2K^2M\|A_j\|\|\phi(0)\|(s^2-\Delta_j s),$$
$$j=\overline{1,m},\quad i=\overline{0,N_j},\quad s\in[-\Delta_j,0],\quad \zeta\in[-h,0],$$

где $M=\max\limits_{\tau\in[0,h]}\|U(\tau)\|$.

Доказательство. Запишем выражения для ϵ_{ij} на каждом из промежутков разбиения:

$$\begin{gathered}\epsilon_{ij}(s,\zeta)=U^T(s+i\Delta_j+\zeta)A_j\phi(s-(N_j-i)\Delta_j)-\\ -\Big[U^T(i\Delta_j+\zeta)A_j\phi(-(N_j-i)\Delta_j)\left(1+\frac{s}{\Delta_j}\right)-\\ -U^T((i-1)\Delta_j+\zeta)A_j\phi(-(N_j-i+1)\Delta_j)\frac{s}{\Delta_j}\Big],\\ j=\overline{1,m},\quad i=\overline{0,N_j},\quad s\in[-\Delta_j,0],\quad \zeta\in[-h,0].\end{gathered}$$

Для оценки погрешности используем формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\begin{gathered}U^T(s+i\Delta_j+\zeta)A_j\phi(s-(N_j-i)\Delta_j)=U^T(i\Delta_j+\zeta)A_j\phi(-(N_j-i)\Delta_j)+\\ +s\Big[U'^T(i\Delta_j+\zeta)A_j\phi(-(N_j-i)\Delta_j)+U^T(i\Delta_j+\zeta)A_j\phi'(-(N_j-i)\Delta_j)\Big]+\\ +\frac{s^2}{2}\Big[U''^T(i\Delta_j+\zeta+\tau_i s)A_j\phi(-(N_j-i)\Delta_j+\tau_i s)+\\ +2U'^T(i\Delta_j+\zeta+\tau_i s)A_j\phi'(-(N_j-i)\Delta_j+\tau_i s)+\\ +U^T(i\Delta_j+\zeta+\tau_i s)A_j\phi''(-(N_j-i)\Delta_j+\tau_i s)\Big],\quad \tau_i\in(0,1).\end{gathered}$$

Повторим выполненные действия для второго слагаемого:

$$U^T((i-1)\Delta_j+\zeta)A_j\phi(-(N_j-i+1)\Delta_j) = U^T(i\Delta_j+\zeta)A_j\phi(-(N_j-i)\Delta_j)-$$
$$-\Delta_j\Big[U'^T(i\Delta_j+\zeta)A_j\phi(-(N_j-i)\Delta_j)+U^T(i\Delta_j+\zeta)A_j\phi'(-(N_j-i)\Delta_j)\Big]+$$
$$+\frac{\Delta_j^2}{2}\Big[U''^T(i\Delta_j+\zeta-\upsilon_i\Delta_j)A_j\phi(-(N_j-i)\Delta_j-\upsilon_i\Delta_j)+$$
$$+2U'^T(i\Delta_j+\zeta-\upsilon_i\Delta_j)A_j\phi'(-(N_j-i)\Delta_j-\upsilon_i\Delta_j)+$$
$$+U^T(i\Delta_j+\zeta-\upsilon_i\Delta_j)A_j\phi''(-(N_j-i)\Delta_j-\upsilon_i\Delta_j)],\quad \upsilon_i\in(0,1).$$

Подставив полученные выражения в формулу для погрешности, получим

$$\epsilon_{ij}(s,\zeta)=\frac{s^2}{2}\Big[U''^T(i\Delta_j+\zeta+\tau_i\Delta_j)A_j\phi(-(N_j-i)\Delta_j+\tau_i\Delta_j)+$$
$$+2U'^T(i\Delta_j+\zeta+\tau_i\Delta_j)A_j\phi'(-(N_j-i)\Delta_j+\tau_i\Delta_j)+$$
$$+U^T(i\Delta_j+\zeta+\tau_i\Delta_j)A_j\phi''(-(N_j-i)\Delta_j+\tau_i\Delta_j)\Big]+$$
$$+\frac{s\Delta_j}{2}\Big[U''^T(i\Delta_j+\zeta-\upsilon_i\Delta_j)A_j\phi(-(N_j-i)\Delta_j-\upsilon_i\Delta_j)+$$
$$+2U'^T(i\Delta_j+\zeta-\upsilon_i\Delta_j)A_j\phi'(-(N_j-i)\Delta_j-\upsilon_i\Delta_j)+$$
$$+U^T(i\Delta_j+\zeta-\upsilon_i\Delta_j)A_j\phi''(-(N_j-i)\Delta_j-\upsilon_i\Delta_j)\Big],$$
$$j=\overline{1,m},\quad i=\overline{0,N_j},\quad s\in[-\Delta_j,0],\quad \tau_i\in(0,1),\quad \upsilon_i\in(0,1),\quad \zeta\in[-h,0].$$

Таким образом, погрешность кусочно-линейного приближения определяется функциями U и ϕ, а так же их первыми и вторыми производными. Воспользуемся ограничениями на функцию ϕ и её производные, накладываемые принадлежностью множеству S, а так же ограничениями на U. Так как $M=\max\limits_{\tau\in[0,h]}\|U(\tau)\|$, то из определения матрицы Ляпунова следует, что

$$\|U(\tau)\|\leqslant M,\quad \|U'(\tau)\|\leqslant KM,\quad \|U''(\tau)\|\leqslant K^2M,\quad \tau\in[0,h].$$

В итоге получим следующую оценку погрешности приближения:

$$\|\epsilon_{ij}(s,\zeta)\| \leqslant 2K^2M\|A_j\|\|\phi(0)\|(s^2-\Delta_j s),$$
$$j=\overline{1,m}, \quad i=\overline{0,N_j}, \quad s\in[-\Delta_j,0], \quad \zeta\in[-h,0],$$

что и требовалось доказать.

$\square$

1.4 Приближение функционала

Построим приближение функционала (2), используя приближения вида (3), для его прдынтегральных выражений.

Рассмотрим I_2. Разобьем интегралы на суммы интегралов согласно разбиениям отрезков $[-h_j,0]$. Получим

$$I_2 = 2\phi^T(0)\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{-h_j}^{0} U^T(h_j+\theta)A_j\phi(\theta)d\theta =$$

$$= 2\phi^T(0)\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{N_j}\int\limits_{-(N_j-i+1)\Delta_j}^{-(N_j-i)\Delta_j} U^T(h_j+\theta)A_j\phi(\theta)d\theta.$$

В каждом из интегралов сделаем замену переменной по формуле $s=\theta+(N_j-i)\Delta_j$. Поскольку $\theta\in[-(N_j-i+1)\Delta_j,-(N_j-i)\Delta_j]$, то $s\in[-\Delta_j,0]$. Тогда

$$I_2 = 2\phi^T(0)\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{N_j}\int\limits_{-\Delta_j}^{0} U^T(s+i\Delta_j)A_j\phi(s-(N_j-i)\Delta_j)ds.$$

Подставим кусочно-линейное приближение (3) при $\zeta=0$ и получим

$$I_2 = \phi^T(0)\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{N_j}\Delta_j\Big(U^T(i\Delta_j)A_j\phi(-(N_j-i)\Delta_j)+$$
$$+U^T((i-1)\Delta_j)A_j\phi(-(N_j-i+1)\Delta_j)\Big)+\Upsilon_2,$$

где

$$\Upsilon_2 = 2\phi^T(0)\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{N_j}\int\limits_{-\Delta_j}^{0}\epsilon_{ij}(s,0)ds.$$

Здесь использован тот факт, что

$$\int\limits_{-\Delta_j}^{0} 1+\frac{s}{\Delta_j}ds = \frac{\Delta_j}{2}, \quad \int\limits_{-\Delta_j}^{0}\frac{s}{\Delta_j}ds = -\frac{\Delta_j}{2}, \quad j=\overline{1,m}.$$

Рассмотрим I_3 и проведем над ним аналогичные преобразования. Получим

$$I_3 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{-h_j}^{0}\phi^T(\theta_1)A_j^T\int\limits_{-h_k}^{0}U^T(\theta_2+h_k-\theta_1-h_j)A_k\phi(\theta_2)d\theta_2 d\theta_1 =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{N_j}\sum_{l=1}^{N_k}\int\limits_{-(N_j-i+1)\Delta_j}^{-(N_j-i)\Delta_j}\phi^T(\theta_1)A_j^T\times$$

$$\times\int\limits_{-(N_k-l+1)\Delta_k}^{-(N_k-l)\Delta_k}U^T(\theta_2+h_k-\theta_1-h_j)A_k\phi(\theta_2)d\theta_2 d\theta_1.$$

Далее во внешнем и внутреннем интегралах сделаем замену переменных по формулам $s_1=\theta_1+(N_j-i)\Delta_j$ и $s_2=\theta_2+(N_k-l)\Delta_k$ соответственно. Так как $\theta_1\in[-(N_j-i+1)\Delta_j,-(N_j-i)\Delta_j]$ и $\theta_2\in[-(N_k-l+1)\Delta_k,-(N_k-l)\Delta_k]$, то $s_1\in[-\Delta_j,0]$ и $s_2\in[-\Delta_k,0]$. Тогда получаем

$$I_3 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{N_j}\sum_{l=1}^{N_k}\int\limits_{-\Delta_j}^{0}\phi^T(s_1-(N_j-i)\Delta_j)A_j^T\times$$

$$\times\int\limits_{-\Delta_k}^{0}U^T(s_2+l\Delta_k-s_1-i\Delta_j)A_k\phi(s_2-(N_k-l)\Delta_k)ds_2 ds_1.$$

Подставим кусочно-линейное приближение (3) при $\zeta=-s_1-i\Delta_j$ и получим

$$I_3 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{N_j}\sum_{l=1}^{N_k}\frac{\Delta_k}{2}\times$$

$$\times\int\limits_{-\Delta_j}^{0}\phi^T(s_1-(N_j-i)\Delta_j)A_j^T\Big[U^T(l\Delta_k-s_1-i\Delta_j)A_k\phi(-(N_k-l)\Delta_k)+$$

$$+U^T((l-1)\Delta_k-s_1-i\Delta_j)A_k\phi(-(N_k-l+1)\Delta_k)\Big]ds_1+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{N_j}\sum_{l=1}^{N_k}\int\limits_{-\Delta_j}^{0}\phi^T(s_1-(N_j-i)\Delta_j)A_j^T\int\limits_{-\Delta_k}^{0}\epsilon_{lk}(s_2,-s_1-i\Delta_j)ds_2ds_1.$$

Далее подставим транспонированное приближение (3) при $\zeta=-l\Delta_k$ и $\zeta=-(l-1)\Delta_k$ в первое и второе подынтегральные выражения соответственно. В итоге получим следующее представление для I_3:

$$I_3 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{N_j}\sum_{l=1}^{N_k}\frac{\Delta_j\Delta_k}{4}\Big[\phi^T(-(N_j-i)\Delta_j)A_j^TU^T(l\Delta_k-i\Delta_j)A_k\phi(-(N_k-l)\Delta_k)+$$

$$+\phi^T(-(N_j-i+1)\Delta_j)A_j^TU^T(l\Delta_k-(i-1)\Delta_j)A_k\phi(-(N_k-l)\Delta_k)+$$

$$+\phi^T(-(N_j-i)\Delta_j)A_j^TU^T((l-1)\Delta_k-i\Delta_j)A_k\phi(-(N_k-l+1)\Delta_k)+$$

$$+\phi^T(-(N_j-i+1)\Delta_j)A_j^TU^T((l-1)\Delta_k-(i-1)\Delta_j)A_k\phi(-(N_k-l+1)\Delta_k)\Big]+\Upsilon_3,$$

где группа слагаемых, зависящих от погрешности, обозначена через Υ_3:

$$\Upsilon_3 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{N_j}\sum_{l=1}^{N_k}\Big(\int\limits_{-\Delta_j}^{0}\phi^T(s_1-(N_j-i)\Delta_j)A_j^T\int\limits_{-\Delta_k}^{0}\epsilon_{kl}(s_2,-s_1-i\Delta_j)ds_2ds_1+$$

$$+\frac{\Delta_k}{2}\int\limits_{-\Delta_j}^{0}\epsilon_{ij}^T(s,-l\Delta_k)dsA_k\phi(-(N_k-l)\Delta_k)+$$

$$+\frac{\Delta_k}{2}\int\limits_{-\Delta_j}^{0}\epsilon_{ij}^T(s,-(l-1)\Delta_k)dsA_k\phi(-(N_k-l+1)\Delta_k)\Big).$$

Таким образом, функционал (2) представлен в виде

$$v_0(\phi) = \Lambda + \Upsilon,$$

где

$$\Lambda = \phi_0^T U(0)\phi_0 +$$
$$+\phi_0^T \sum_{j=1}^{m} \Delta_j \Bigg(2 \sum_{i=1}^{N_j-1} U^T(i\Delta_j) A_j \phi_{N_j-i}^{(j)} + U(0) A_j \phi_{N_j}^{(j)} + U^T(N_j\Delta_j) A_j \phi_0 \Bigg) +$$
$$+\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \Delta_j \Delta_k \Bigg(\sum_{i=1}^{N_j-1} \sum_{l=1}^{N_k-1} \phi_{N_j-i}^{(j)T} A_j^T U^T(l\Delta_k - i\Delta_j) A_k \phi_{N_k-l}^{(k)} +$$
$$+\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_j-1} \Big(\phi_{N_j-i}^{(j)T} A_j^T U^T(N_k\Delta_k - i\Delta_j) A_k \phi_0 + \phi_{N_j-i}^{(j)T} A_j^T U^T(-i\Delta_j) A_k \phi_{N_k}^{(k)} \Big) +$$
$$+\frac{1}{2} \sum_{l=1}^{N_k-1} \Big(\phi_0^T A_j^T U^T(l\Delta_k - N_j\Delta_j) A_k \phi_{N_k-l}^{(k)} + \phi_{N_j}^{(j)T} A_j^T U^T(l\Delta_k) A_k \phi_{N_k-l}^{(k)} \Big) +$$
$$+\frac{1}{4} \Big(\phi_0^T A_j^T U^T(N_k\Delta_k - N_j\Delta_j) A_k \phi_0 + \phi_0^T A_j^T U^T(-N_j\Delta_j) A_k \phi_{N_k}^{(k)} +$$
$$+\phi_{N_j}^{(j)T} A_j^T U^T(N_k\Delta_k) A_k \phi_0 + \phi_{N_j}^{(j)T} A_j^T U(0) A_k \phi_{N_k}^{(k)} \Big) \Bigg),$$
$$\Upsilon = \Upsilon_2 + \Upsilon_3.$$

Здесь $\phi_k^{(j)} = \phi(-k\Delta_j), \quad \phi_0 = \phi(0), \quad k = \overline{1, N_j}, \quad j = \overline{1, m}.$

1.5 Оценка функционала

Будем предполагать, что $\phi \in S$. Оценим группу слагаемых Υ, пользуясь леммой 1. Начнем с Υ_2:

$$|\Upsilon_2| \leqslant 2\|\phi(0)\| \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{N_j} \int_{-\Delta_j}^{0} \|\epsilon_{ij}(s,0)\| ds \leqslant \frac{10}{3} \|\phi(0)\|^2 M \sum_{j=1}^{m} (h_j \Delta_j^2 \|A_j\|) K^2.$$

Здесь использован тот факт, что

$$\int\limits_{-\Delta_j}^{0} \left(s^2 - \Delta_j s\right) ds = \frac{5}{6}\Delta_j^3.$$

Таким образом

$$\Upsilon_2 \geqslant -\frac{10}{3}\|\phi(0)\|^2 M \sum_{j=1}^{m}(h_j \Delta_j^2 \|A_j\|)K^2.$$

Теперь разделим величину Υ_3 на три группы слагаемых и аналогично оценим снизу каждую из них при помощи леммы 1. Получим

$$|\Upsilon_{3,1}| \leqslant \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{N_j}\sum_{l=1}^{N_k}\int\limits_{-\Delta_j}^{0} \|\phi(s_1 - (N_j - i)\Delta_j)\|\|A_j\| \times$$

$$\times \int\limits_{-\Delta_k}^{0} \|\epsilon_{lk}(s_2, -s_1 - i\Delta_j)\| ds_2 ds_1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{5}{3}\|\phi(0)\|^2 M \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}(h_j h_k \Delta_k^2 \|A_j\|\|A_k\|)K^2,$$

следовательно

$$\Upsilon_{3,1} \geqslant -\frac{5}{3}\|\phi(0)\|^2 M \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}(h_j h_k \Delta_k^2 \|A_j\|\|A_k\|)K^2.$$

Проведем аналогичные действия со второй группой слагаемых:

$$|\Upsilon_{3,2}| \leqslant \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{N_j}\sum_{l=1}^{N_k}\frac{\Delta_k}{2}\int\limits_{-\Delta_j}^{0} \|\epsilon_{ij}(s, -l\Delta_k)\| ds \|A_k\|\|\phi(-(N_k - l)\Delta_k)\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{5}{6}\|\phi(0)\|^2 M \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}(h_j h_k \Delta_j^2 \|A_j\|\|A_k\|)K^2,$$

следовательно

$$\Upsilon_{3,2} \geqslant -\frac{5}{6}\|\phi(0)\|^2 M \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}(h_j h_k \Delta_j^2 \|A_j\|\|A_k\|)K^2.$$

Третье слагаемое оценивается идентично второму. Таким образом,

$$\Upsilon_{3,3} \geqslant -\frac{5}{6}\|\phi(0)\|^2 M \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}(h_j h_k \Delta_j^2 \|A_j\|\|A_k\|)K^2.$$

Окончательно, величина Υ допускает следующую оценку:

$$\Upsilon \geqslant -\delta\|\phi(0)\|^2,$$

где

$$\delta = \frac{10}{3} M K^2 \sum_{j=1}^{m} h_j \Delta_j^2 \|A_j\| \left(1 + \sum_{k=1}^{m} h_k \|A_k\|\right).$$

Заметим, что δ — постоянная величина, причем $\delta > 0$. Погрешность приближения стремится к нулю, когда все значения Δ_j, $j = \overline{1,m}$ стремятся к нулю.

Величина Υ оценена, и квадратичная оценка снизу функционала $v_0(\phi)$ на функциях $\phi \in S$ имеет вид:

$$v_0(\phi) \geqslant \Lambda - \delta\|\phi(0)\|^2, \quad \phi \in S.$$

Полученная оценка функционала (2) представляет собой квадратичную форму относительно вектора

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1^{(1)} \\ \vdots \\ \phi_{N_1}^{(1)} \\ \phi_1^{(2)} \\ \vdots \\ \phi_{N_m}^{(m)} \end{pmatrix}.$$

Теорема 1 означает, что если эта оценка положительна, когда $\|\phi(0)\| \neq 0$, то система (1) экспоненциально устойчива. Поясним, что функция $\phi \in S$ является тождественно нулевой тогда и только тогда, когда $\|\phi(0)\| = 0$. В этом случае неравенство $v_0(\phi) \geqslant \mu\|\phi(0)\|^2$ верно. Если же $\|\phi(0)\| \neq 0$, то можно взять такую функцию $\psi \in S$, что $\psi(\theta) = \frac{\phi(\theta)}{\|\phi(0)\|}$, $\theta \in [-h, 0]$, и проверять неравенство $v_0(\psi) \geqslant \mu$. Для такой функции $\|\psi(0)\| = 1$. Следующая теорема является основным результатом работы.

Теорема 2. *Если выполнено условие Ляпунова и существуют значения $N_1, \dots, N_m$ такие, что*

$$\min_{\substack{\|\phi_k^{(j)}\| \leqslant 1,\, \|\phi_0\| = 1, \\ k = \overline{1, N_j},\, j = \overline{1, m}}} \Lambda - \delta > 0,$$

то система (1) экспоненциально устойчива.

На данный момент не существует метода точного вычисления матриц Ляпунова для систем с несоизмеримыми запаздываниями, в отсутствие предположения об экспоненциальной устойчивости системы, поэтому данная теорема имеет ограниченное практическое применение. При этом для систем с кратными запаздываниями известен полуаналитический метод вычисления матриц Ляпунова [5], поэтому рассмотрим частные случаи системы с одним и с кратными запаздываниями.

Глава 2. Частные случаи

В этой главе рассмотрим два частных случая системы (1): систему с одним запаздыванием и систему с кратными запаздываниями, получим аналоги теоремы 2 для этих случаев.

2.1 Случай системы с одним запаздыванием

Рассмотрим систему (1) с одним запаздыванием:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h). \tag{4}$$

Отрезок $[-h, 0]$ разобьем на N отрезков равной длины $\Delta = \frac{h}{N}$.

Введем вектор

$$\Psi = \begin{pmatrix} \phi_0/2 \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_{N-1} \\ \phi_N/2 \end{pmatrix},$$

где $\phi_j = \phi(-j\Delta)$, $j = \overline{0, N}$. Тогда квадратичную форму Λ можно записать в следующем виде:

$$\Lambda = \phi_0^T U(0)\phi_0 + 2\Delta\phi_0^T Q\Psi + \Delta^2 \Psi^T R \Psi,$$

где Q и R — блочные матрицы, составленные из значений матрицы Ляпунова в узлах разбиения и A_1:

$$Q = \begin{pmatrix} U^T(N\Delta)A_1 & U^T((N-1)\Delta)A_1 & \ldots & U^T(\Delta)A_1 & U(0)A_1 \end{pmatrix},$$

$$R = \{A_1^T U^T((i-j)\Delta)A_1\}_{i,j=0}^N.$$

Величина δ в этом случае имеет вид:

$$\delta = \frac{10}{3}\Delta^2 M \left(\|A_0\| + \|A_1\|\right)^2 h\|A_1\| \left(1 + h\|A_1\|\right).$$

В результате получим достаточное условие экспоненциальной устойчивости для системы (4).

Теорема 3. *Если выполнено условие Ляпунова и существует значение N такое, что*

$$\min_{\substack{\|\phi_j\|\leqslant 1,\, \|\phi_0\|=1,\\ j=\overline{1,N}}} \left[\phi_0^T U(0)\phi_0 + 2\Delta\phi_0^T Q\Psi + \Delta^2\Psi^T R\Psi\right] - \delta > 0,$$

то система (4) экспоненциально устойчива.

2.2 Случай системы с кратными запаздываниями

Рассмотрим систему (1) с несколькими кратными запаздываниями,

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{m} A_j x(t - jh). \tag{5}$$

Каждый отрезок $[-jh, 0]$ разобьем на jN отрезков равной длины $\Delta = \frac{h}{N}$. Введем векторы

$$\Psi_k = \begin{pmatrix} \phi_0/2 \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_{kN-1} \\ \phi_{kN}/2 \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1, m},$$

где $\phi_j = \phi(-j\Delta)$, $j = \overline{0, mN}$. Тогда квадратичная форма Λ представима следующим образом:

$$\Lambda = \phi_0^T U(0)\phi_0 + 2\Delta\phi_0^T \sum_{k=1}^{m} Q_k\Psi_k + \Delta^2 \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} \Psi_k^T R_{kl}\Psi_l,$$

где Q_k и R_{kl} — блочные матрицы, определяемые значениями матрицы Ляпунова в узлах разбиений и матрицами системы

$$Q_k = \Big(U^T(kN\Delta)A_k \ \ U^T((kN-1)\Delta)A_k \ \ \ldots \ \ U^T(\Delta)A_k \ \ U(0)A_k \Big),$$

$$R_{kl} = \left\{ A_k^T U^T((i-j)\Delta)A_l \right\}_{i=\overline{0,kN},\, j=\overline{0,lN}}.$$

Величина δ в этом случае будет иметь следующий вид:

$$\delta = \frac{10}{3} h\Delta^2 M K^2 \sum_{j=1}^{m} j\|A_j\| \left(1 + h\sum_{k=1}^{m} k\|A_k\|\right).$$

В итоге, получим достаточное условие экспоненциальной устойчивости для системы (5).

Теорема 4. *Если выполнено условие Ляпунова и существует значение N такое, что*

$$\min_{\substack{\|\phi_j\|\leqslant 1,\, \|\phi_0\|=1,\\ j=\overline{1,mN}}} \left[\phi_0^T U(0)\phi_0 + 2\Delta\phi_0^T \sum_{k=1}^{m} Q_k\Psi_k + \Delta^2 \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} \Psi_k^T R_{kl}\Psi_l \right] - \delta > 0,$$

то система (5) экспоненциально устойчива.

Глава 3. Примеры

Теперь проиллюстрируем полученный метод на примерах: используем теоремы 3 и 4 для оценки областей экспоненциальной устойчивости систем вида (4) и (5) в пространстве параметров a и b. Во всех примерах для вычисления матрицы Ляпунова используется полуаналитический метод [5], а в качестве W берется еденичная матрица. Во всех примерах красные линии — границы области устойчивости или границы D-разбиения, а синие точки соответствуют паре значений параметров, при которых выполнено условие одной из теорем 3 или 4. Проверка теорем 3 и 4 программно реализована в среде MATLAB.

3.1 Пример 1

Начнем со скалярного уравнения с одним запаздыванием:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t-h). \tag{6}$$

Здесь a и b — постоянные вещественные коэффициенты, $h \geqslant 0$ — постоянное вещественное запаздывание.

Область экспоненциальной устойчивости данного уравнения в пространстве параметров a и b описывается следующими неравенствами [8]:

$$a < \frac{1}{h}, \quad a < -b < \frac{\omega}{sin(\omega h)},$$

где ω — корень уравнения $a = \omega ctg(\omega h)$ такой, что $0 < \omega < \frac{\pi}{2h}$ при $a = 0$. На рисунках граница области устойчивости, при $h = 1$, изображена линией. Точки на рисунках соответствуют парам значений (a, b), в которых, при фиксированном N, выполняется условие теоремы 3. На рисунках 1–3 видно, что область устойчивости, полученная с помощью теоремы 3, с ростом N приближается к точной области экспоненциальной устойчивости уравнения (6).

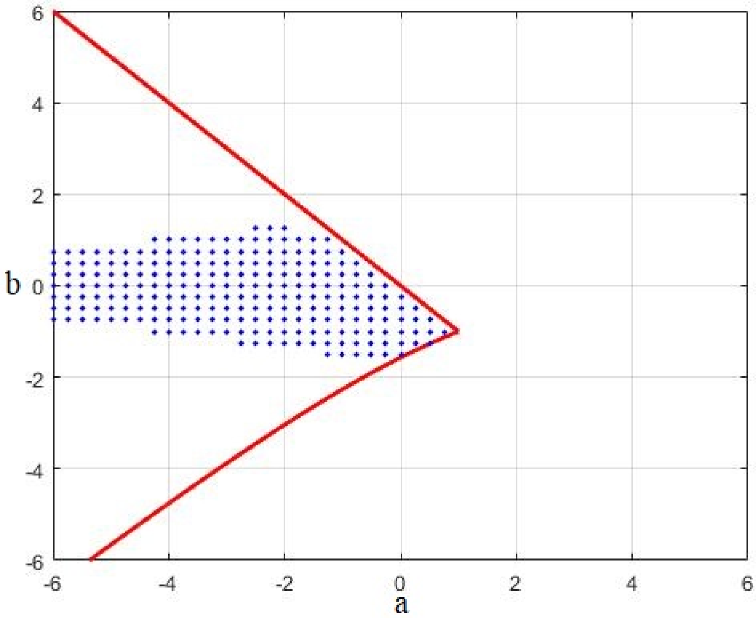

Рис. 1. Область экспоненциальной устойчивости уравнения (6) в плоскости параметров a и b, $N = 5$

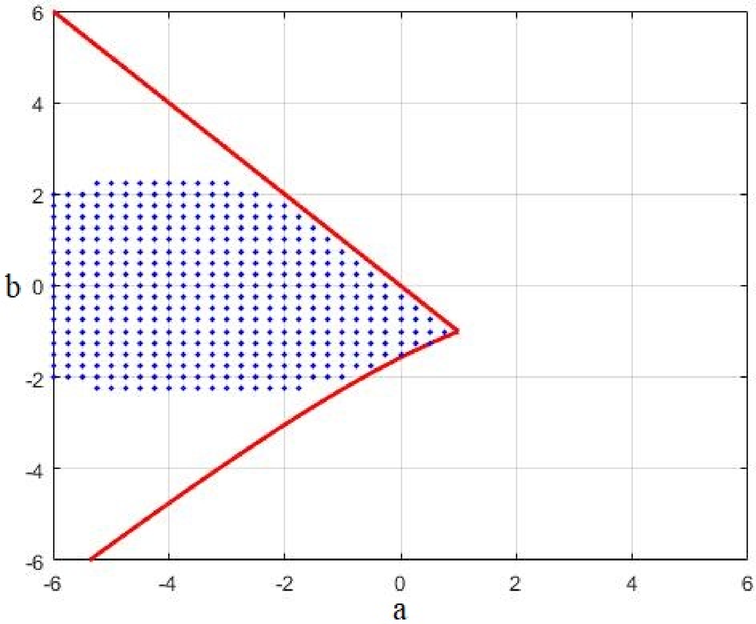

Рис. 2. Область экспоненциальной устойчивости уравнения (6) в плоскости параметров a и b, $N = 15$

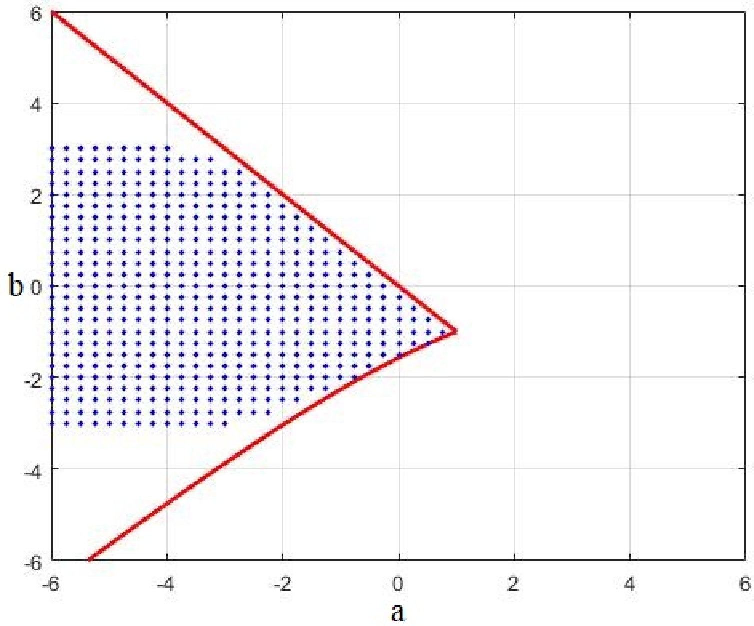

Рис. 3. Область экспоненциальной устойчивости уравнения (6) в плоскости параметров a и b, $N = 25$

3.2 Пример 2

Рассмотрим скалярное уравнение с двумя кратными запаздываниями, исследованное в работах [6] и [14]:

$$\dot{x}(t) = -2x(t) + ax(t-1) + bx(t-2). \tag{7}$$

Здесь a и b — постоянные вещественные коэффициенты.

Линии D-разбиения в пространстве параметров a и b задаются прямой $a+b=2$ и кривыми, которые можно задать следующими уравнениями:

$$a = \frac{\omega cos(2\omega) + 2sin(2\omega)}{sin(\omega)}, \quad b = \frac{-\omega cos(\omega)}{sin(\omega)} - 2, \omega \in \left((k-1)\pi, k\pi\right), k \in \mathbb{N}.$$

В работе [14] получено, что единственной областью экспоненциальной устойчивости уравнения при $a, b \in [-12, 12]$ является область, содержащая начало координат. Этот результат подтверждается применением теоремы

4 при $a, b \in [-12, 12]$ (см. рис. 4–6).

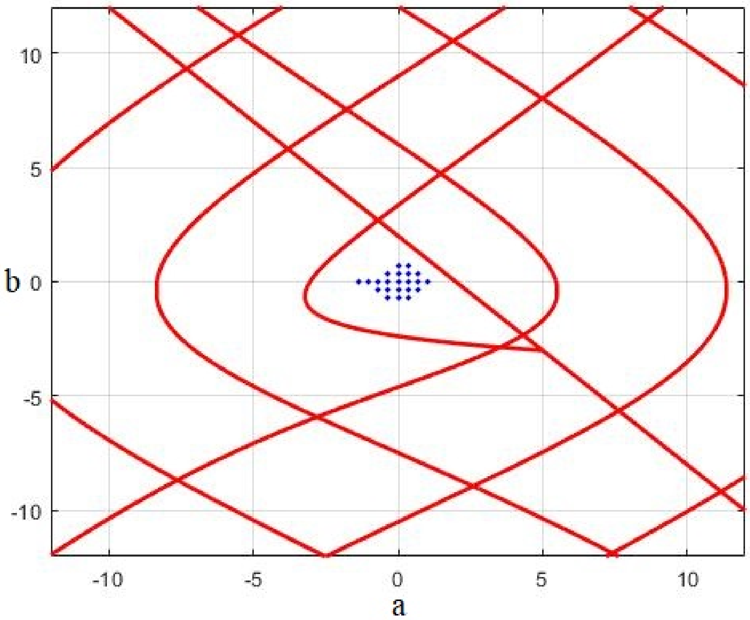

Рис. 4. Область экспоненциальной устойчивости уравнения (7) в плоскости параметров a и b, $N = 5$

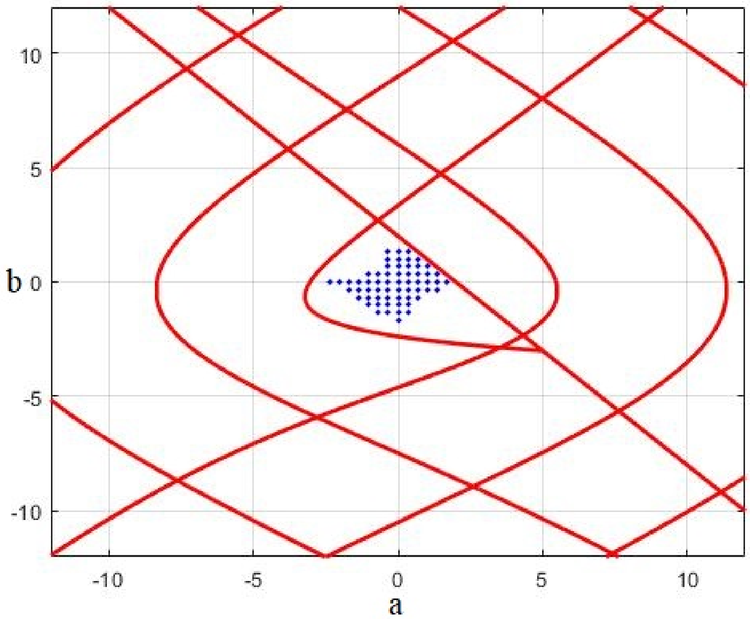

Рис. 5. Область экспоненциальной устойчивости уравнения (7) в плоскости параметров a и b, $N = 15$

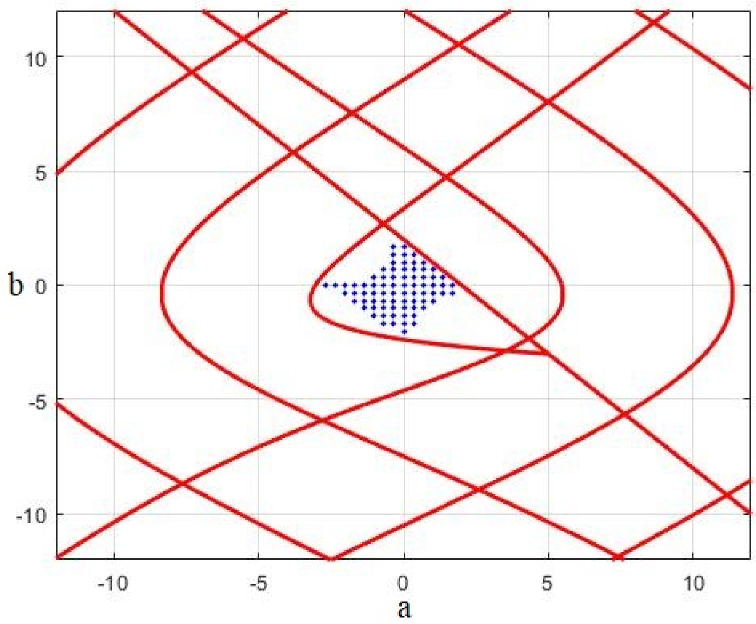

Рис. 6. Область экспоненциальной устойчивости уравнения (7) в плоскости параметров a и b, $N = 25$

3.3 Пример 3

Исследуем уравнение, рассмотренное в работах [8] и [6]:

$$\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t-1) + by(t-1) = 0.$$

Сведем данное уравнение к системе второго порядка с одним запаздыванием и получим:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & -a \end{pmatrix} x(t-1). \tag{8}$$

Линии D-разбиения в пространстве параметров a и b, соответствующие данной системе, изображенные на рисунке 7, задаются прямой $b = 0$ и кривой, задаваемой следующими уравнениями:

$$a = \omega sin(\omega), \quad b = \omega^2 cos(\omega), \quad \omega > 0.$$

Точки на рисунках 8—10 соответствуют тем значениям параметров a и b, для которых выполнено условие теоремы 3 при различных значениях N.

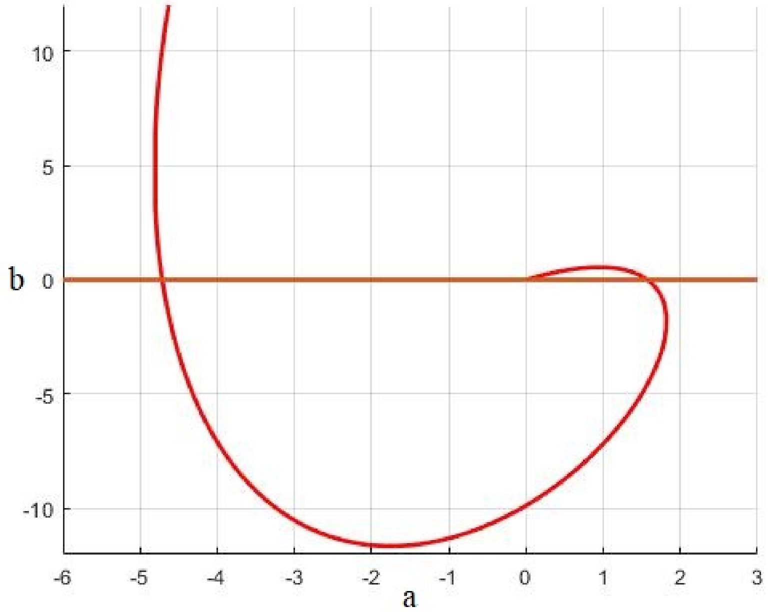

Рис. 7. Границы D-разбиения для системы (8)

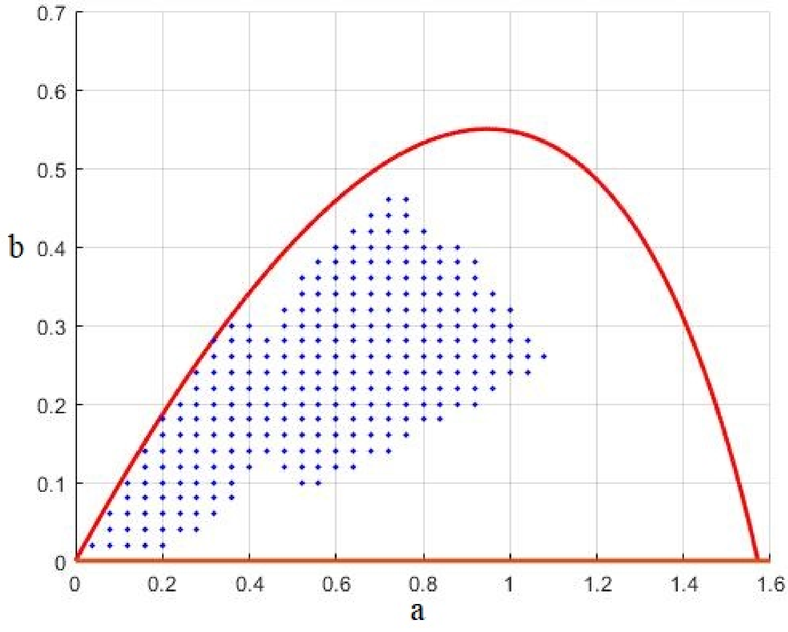

Рис. 8. Область экспоненциальной устойчивости уравнения (8) в плоскости параметров a и b, $N = 5$

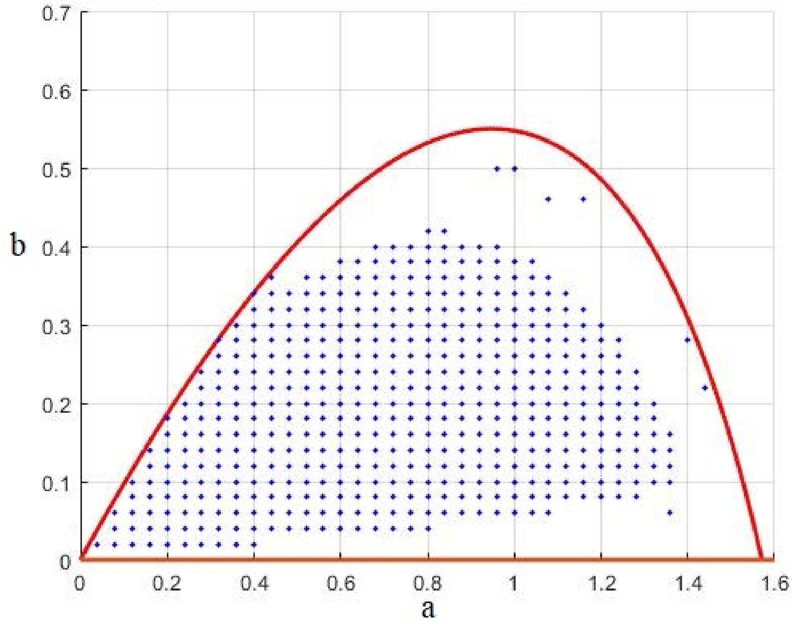

Рис. 9. Область экспоненциальной устойчивости уравнения (8) в плоскости параметров a и b, $N = 15$

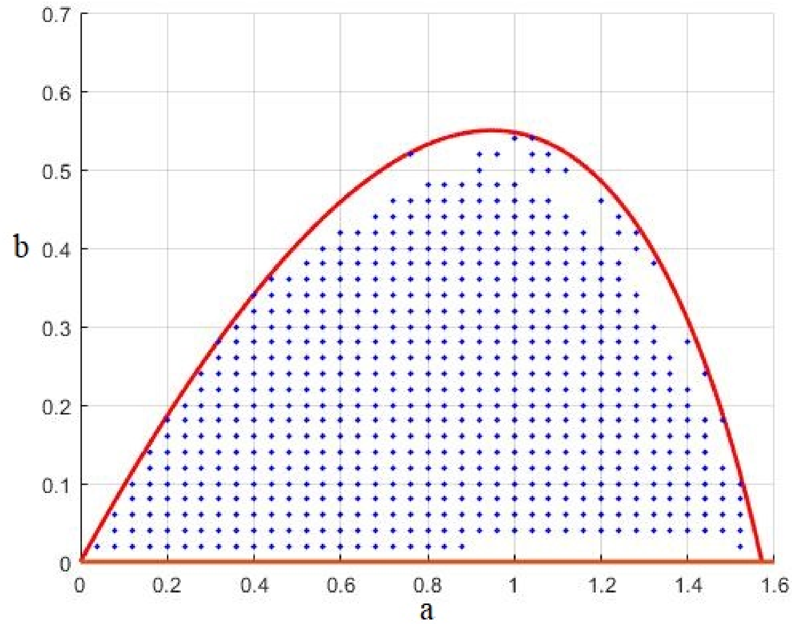

Рис. 10. Область экспоненциальной устойчивости уравнения (8) в плоскости параметров a и b, $N = 25$

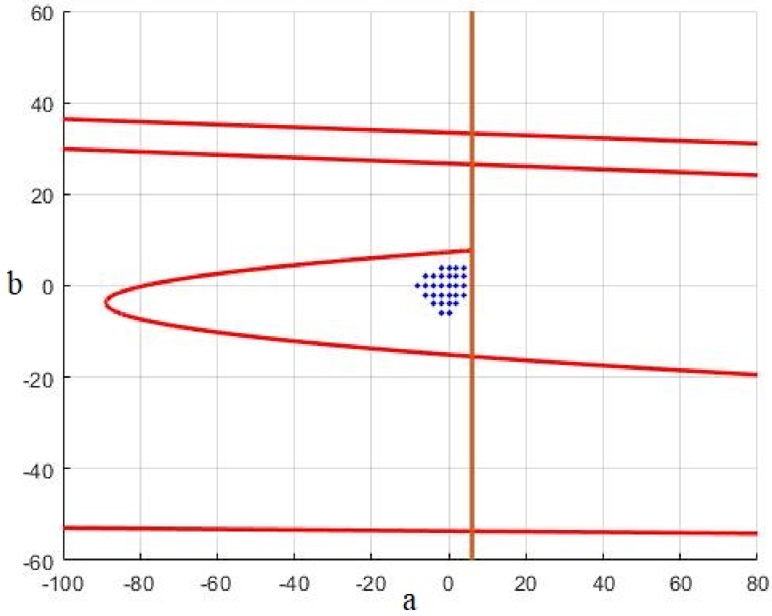

Рис. 11. Область экспоненциальной устойчивости уравнения (9) в плоскости параметров a и b, $N = 5$

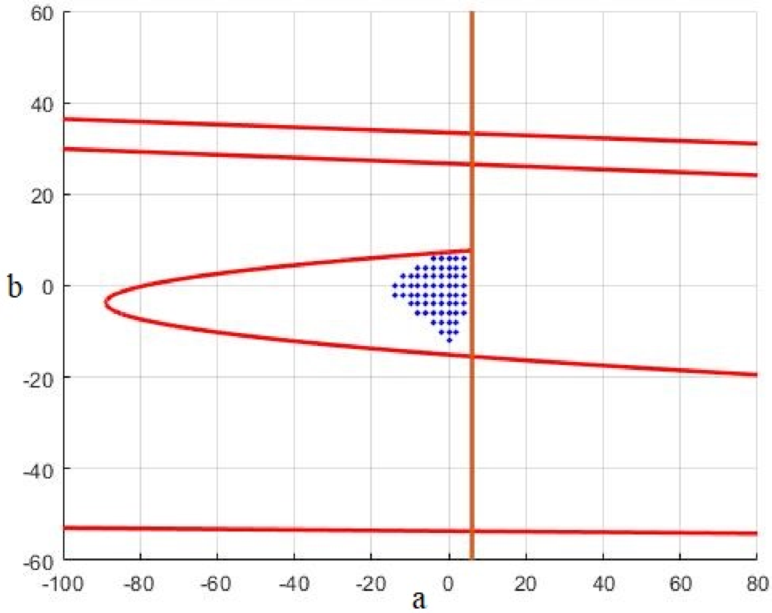

Рис. 12. Область экспоненциальной устойчивости уравнения (9) в плоскости параметров a и b, $N = 15$

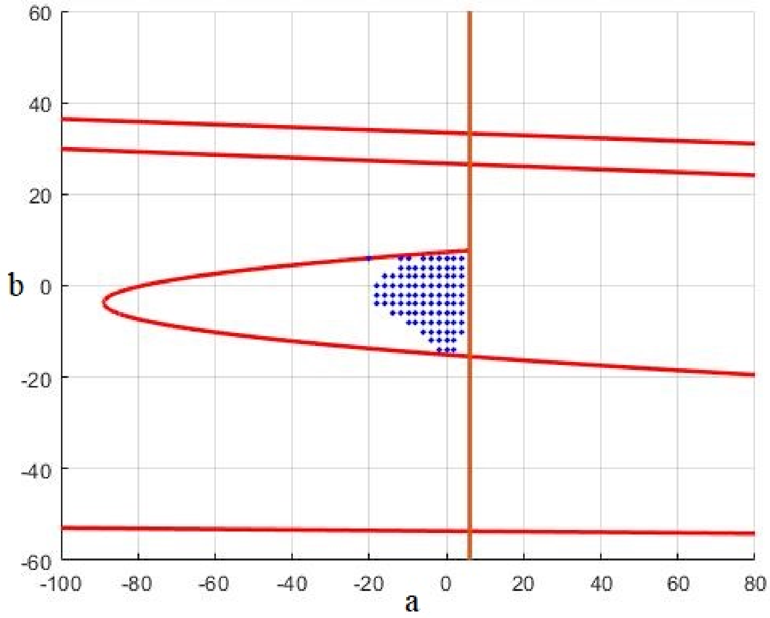

Рис. 13. Область экспоненциальной устойчивости уравнения (9) в плоскости параметров a и b, $N = 25$

3.4 Пример 4

Теперь рассмотрим систему с двумя запаздываниями, исследованную в некоторых работах, в том числе в работах [6] и [14]:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -7.1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} x(t - 0.1) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} x(t - 0.15). \qquad (9)$$

Линии D-разбиения для этой системы заданы прямой $a = 6$ и кривой:

$$a = \frac{(6 - \omega^2)ctg(0.15\omega) - 7.1\omega}{sin(0.1\omega) + ctg(0.15\omega)cos(0.1\omega)},$$

$$b = \frac{6 - \omega^2 + 7.1\omega ctg(0.1\omega)}{\omega(ctg(0.1\omega)cos(0.15\omega) + sin(0.15\omega))}, \quad \omega \in [0, +\infty).$$

Из исследований этой системы известно, что единственная область экспоненциальной устойчивости системы при $a, b \in [-100, 100]$ содержит точку $(0, 0)$. Применяя теорему 4 к системе в пространстве параметров a, b при различных N, получим, что точки, удовлетворяющие теореме, находятся внутри области экспоненциальной устойчивости (см. рис. 11–13). Заметим, что для точки $(-40, -1)$ условия теоремы 4 выполняются при $N = 49$, а для точки $(-60, -1)$ — при $N = 56$. Это подтверждает наблюдение о том, что с ростом N область экспоненциальной устойчивости, полученная с помощью теоремы 4, приближается к точной области экспоненциальной устойчивости.

Выводы

В данной работе доказаны новые достаточные условия экспоненциальной устойчивости систем вида (1), (4), (5), и на их основе построен конструктивный метод анализа экспоненциальной устойчивости линейных стационарных систем с запаздыванием. Идея метода заключается в построении для функционала (2) квадратичной оценки снизу на множестве S. Положительная определенность этой оценки, согласно теореме 1, влечет за собой экспоненциальную устойчивость системы (1). Также для систем (1), (4) и (5) произведена оценка погрешности построенных приближений, и показано, что эта оценка стремится к нулю с уменьшением шага разбиения.

Известно [5], что если система экспоненциально устойчива, то $v_0(\phi) > 0$ для любых функций $\phi \in S$ таких, что $\|\phi(0)\| \neq 0$. Это означает, что если система экспоненциально устойчива, тогда для неё обязательно найдется такое значение N (или значения $N_1, \ldots, N_m$), при которых условия теорем 2–4 будут выполнены. Иначе говоря, оценка функционала, минимум которой проверяется на положительность, стремится к точному значению функционала при $N \to \infty$, и полученные достаточные условия устойчивости стремятся к необходимым. Рассмотренные примеры подтверждают этот вывод.

Работоспособность метода продемонстрированна на примерах в программной среде MATLAB. Важно отметить, что в сравнении с методом, предложенным в статье [12], полученная оценка погрешности не содержит экспонент, а является полиномиальной относительно норм матриц и запаздываний. Следовательно, предложенный метод может давать более быструю сходимость, однако точного сравнения не проводилось.

Заключение

Получен конструктивный метод анализа экспоненциальной устойчивости линейных стационарных систем с запаздыванием, являющийся модификацией метода, предложенного в работах [6, 7]. Этот метод реализован в программной среде MATLAB и протестирован на различных примерах. По сравнению с работами [6, 7] повышена вычислительная эффективность метода за счет отсутствия операции вычисления интегралов от матрицы Ляпунова.

Предложенный подход к анализу устойчивости в дальнейшем может быть распространен на другие классы линейных стационарных систем с запаздыванием, такие как системы с распределенным запаздыванием и системы нейтрального типа.

Список литературы

[1] Репин М. Ю. Квадратичные функионалы Ляпунова для систем с запаздыванием // Прикладная математика и механика. 1965. Т. 29 С. 564-566.

[2] Infante E. F., Castelan W. B. A Liapunov functional for a matrix difference-differential equation // Journal of Differrential Equations, 1978. Vol. 29, No 3. P. 439-451.

[3] Huang W. Generalization of Liapunov's theorem in a linear delay system // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1989. Vol. 142, No 1. P. 83-94.

[4] Kharitonov V. L., Zhabko A. P. Lyapunov-Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems // Automatica, 2003. Vol. 39, No 1. P. 15-20.

[5] Kharitonov V. L. Time-delay systems. Lyapunov functionals and matrices. Basel: Birkhäuser, 2013. 311 p.

[6] Медведева И. В. Конструктивные методы анализа экспоненциальной устойчивости систем запаздывающего типа: дис. ... канд. физ.-мат. наук. СПб., 2014. 150с.

[7] Medvedeva I. V., Zhabko A. P. Synthesis of Razumikhin and Lyapunov-Krasovskii approaches to stability analysis of time delay systems // Automatica, 2015. Vol. 51. P. 372-377.

[8] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения / Пер. с англ. Под ред. Л. Э. Эльсгольца. М., 1967. 548 с.

[9] Kharitonov V. L., Mondié S. Stability analysis of linear time delay systems via piecewise linear complete Lyapunov–Krasovskii functionals // IFAC Proceeding Volumes, 2004. Vol. 37, No. 21. P. 103-108.

[10] Gu K., Kharitonov V. L., Chen J. Stability of time-delay systems. Boston: Birkhäuser, 2003. 353 p.

[11] Egorov A. V., Mondié S. Necessary stability conditions for linear delay systems // Automatica, 2014. Vol. 50. P. 3204-3208.

[12] Gomez M. A., Egorov A. V., Mondié S. Lyapunov matrix based necessary and sufficient condition by finite number of mathematical operations for retarded type systems // Automatica, 2019. Vol. 108. 108475.

[13] Egorov A. V., Kharitonov V. L. Approximation of delay Lyapunov matrices // International Journal of Control, 2018. Vol. 91, No. 11. P. 2588-2596.

[14] Егоров А. В. Новые условия экспоненциальной устойчивости линейных систем с запаздыванием: дис. ... канд. физ.-мат. наук. СПб., 2013. 135 с.