

Санкт–Петербургский государственный университет

Чеботарева Ангелина Андреевна

Выпускная квалификационная работа

*Линейно-квадратичная дифференциальная игра
управления объемами вредных выбросов с
функционалом в форме Больца*

Уровень образования: бакалавриат

Направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Основная образовательная программа СВ.5005.2015 «Прикладная математика, фундаментальная информатика и программирование»

Научный руководитель:

профессор, д.ф. - м.н. Громова Екатерина Викторовна

Санкт-Петербург

2021 г.

Содержание

Введение	4
Обзор литературы	5
Постановка задачи	6
Глава 1.	
Кооперативная дифференциальная игра со смешан- ным функционалом выигрыша	8
1.1. Характеристические функции	8
1.1.1 α -характеристическая функция	8
1.1.2 δ -характеристическая функция	9
1.1.3 ζ -характеристическая функция	10
1.1.4 η -характеристическая функция	10
1.2. Вектор Шепли	11
1.3. Модель игры	11
1.3.1 Кооперативное решение	11
1.3.2 Равновесие по Нэшу	13
1.4. Выражения для характеристических функций	14
1.4.1 Построение α -характеристической функции	15
1.4.2 Построение δ -характеристической функции	16
1.4.3 Построение ζ -характеристической функции	17
1.4.4 Построение η -характеристической функции	18
1.4.5 Связь характеристических функций	20
1.5. Значение информации	21
1.5.1 Некооперативный случай	21
1.5.2 Кооперативный вариант	22
1.6. Ценность кооперации	24
Глава 2.	
Теоретико-игровая задача управления вредными вы- бросами на примере предприятий города Пенза	26
2.1. Параметры модели	26
2.2. Управления и траектории для игроков	28

2.3. Выигрыш игроков	29
2.4. Значения характеристических функций	30
2.5. Значения вектора Шепли	30
2.6. Значение информации	34
2.6.1 Некооперативный случай	34
2.6.2 Кооперативный случай	35
2.7. Ценность кооперации	37
Вывод	42
Заключение	43
Список литературы	44

Введение

Как известно, самые разные области жизни человека могут быть описаны при помощи теории дифференциальных игр. В данной области одним из важнейших разделов с теоретической и практической точки зрения является раздел, изучающий кооперативные игры управления объемами вредных выбросов.

В работе описано построение модели, где выигрыш каждого игрока представляет собой смешанный функционал Больца. То есть функция прибыли имеет не только интегральную, но и терминальную составляющую.

Работа имеет следующую структуру. В главе I описывается построение характеристических функций 4 различных типов, а именно: α , δ , ζ , η . Для рассматриваемой модели строятся оптимальные управления и управления, равновесные по Нэшу, также находятся соответствующие им траектории. На основе каждой вычисленной характеристической функции строится вектор Шепли. Далее, вводятся две новые характеристики для дифференциальных игр: значение информации и ценность кооперации. С помощью первого параметра можно оценить, какие потери понесет игрок в случае плохой информированности о параметрах модели. Вторая характеристика помогает оценить потери в случае отказа игрока от кооперации.

Во II главе теоретические рассуждения из главы I рассмотрены на реальных данных предприятий города Пенза. В первую очередь вычислены значения всех типов характеристических функций и соответствующие им вектора Шепли. Далее рассчитываются введенные характеристики ценности информации и значения кооперации, а также эти величины вычисляются в процентном соотношении.

Обзор литературы

Описание модели, на основе которой построен случай, рассматриваемый в данной работе, может быть найдено в работах [1] – [3].

Способы построения характеристических функций описаны в [4] – [11]. Связь характеристических функций, основанная на модели без терминального члена можно найти в [12]. Нахождение оптимальных управлений методом максимума Понтрягина описаны в книге [14]. Понятие «значение информации» можно найти в [15], однако в данной работе оно будет введено по-другому.

В данной работе были использованы данные трех предприятий города Пенза за 2016 год, которые были найдены в источниках [18] – [16].

Постановка задачи

Рассмотрим теоретико–игровую модель управления вредными выбросами, основанную на работах [1]–[3]. Предполагается, что на территории рассматриваемого региона располагается n стационарных источников загрязнения воздуха, то есть в игре участвуют n игроков (предприятий). Каждый игрок имеет промышленное производство на своей территории. Пусть производство предприятия i пропорционально объему вредных выбросов u_i . Таким образом, под стратегией игрока i понимается выбор скорости загрязнения вредных выбросов u_i в атмосферу в единицу времени, где $u_i \in [0, b_i]$, $b_i > 0$, $i = \overline{1, n}$.

Общий уровень загрязнения обозначим через $x(t)$. Пусть для нашей задачи n источников участвуют в загрязнении окружающей среды. Тогда динамика общего уровня загрязнений $x(t)$ описывается дифференциальным уравнением (1), которое имеет начальное условие (2).

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n u_i(t), \quad t \in [t_0, T], \quad (1)$$

$$x(t_0) = x_0. \quad (2)$$

Игра начинается в момент t_0 из состояния x_0 и заканчивается в момент T . Будем решать задачу в классе программных управлений $u_i(t)$, где $t \in [t_0, T]$.

Мы изучаем модель управления объемами вредных выбросов, в которой, в отличие от [3], выигрыш является смешанным, то есть имеет не только интегральную, но и терминальную часть, соответствующую штрафам игроков за загрязнение среды в последний момент времени. Таким образом, имеет место предположение о том, что в терминальный момент игры игроки выплачивают штраф, прямо пропорциональный уровню загрязнений $x(T)$. Тогда выигрыш игрока $i = \overline{1, n}$ представляет собой смешанный

функционал Больца

$$K_i(x_0, T - t_0, u) = \int_{t_0}^T \left(\left(b_i - \frac{1}{2} u_i(t) \right) u_i(t) - d_i x \right) dt - D_i x(T), \quad (3)$$

где $u = \{u_i\}$, $i = \overline{1, n}$;

$b_i \geq 0$ – коэффициент, равный отношению общего дохода от производства i -й компанией к объему общего загрязнения соответствующей компании;

$d_i \geq 0$ – расходы i -го игрока на устранение единицы общего загрязнения;

$D_i \geq 0$ – величина штрафа на единицу загрязнений.

Целью каждого игрока является максимизация функционала, который соответствует его выигрышу:

$$K_i(x_0, T - t_0, u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)) \rightarrow \max.$$

В работе будет рассмотрен кооперативный вариант игры. В данном случае игроки заранее договариваются об использовании оптимальных управлений $u^*(t) = (u_1^*(t), u_2^*(t), \dots, u_n^*(t))$. Управления выбираются таким образом, чтобы:

$$\sum_{i=1}^n K_i(x_0, T - t_0, u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)) \rightarrow \max_{u_1, u_2, \dots, u_n}. \quad (4)$$

То есть перед нами стоит задача оптимизации, где $x(t)$ удовлетворяет условию (1) с начальным условием (2).

Траектория $x^*(t)$ является кооперативной, если на ней достигается максимум выражения (4). В данной работе будем искать решения в классе программных управлений $u_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, $t \in [t_0, T]$.

Глава 1.

Кооперативная дифференциальная игра со смешанным функционалом выигрыша

1.1 Характеристические функции

Известно о существовании различных типов характеристических функций, а именно: α –, δ –, ζ –, η –характеристические функции (см. также [2]). Технические аспекты их построения описаны подробно [4] – [5].

1.1.1 α -характеристическая функция

При построении α –характеристической функции используется классический подход Дж. Неймана, О. Моргенштерна, сформулированный в 1944 году в работе [6]. Согласно данному подходу, под $V(S)$ понимается максимальный гарантированный выигрыш коалиции S , а само значение $V(S)$ может быть вычислено на основе вспомогательной антагонистической игры между коалицией S и анти-коалицией $N \setminus S$. Таким образом, коалиция S действует в качестве максимизирующего игрока, а коалиция $N \setminus S$ – минимизирующего:

$$V^\alpha(x_0, t_0, T, S) = \begin{cases} 0, & \text{если } S = \{\emptyset\}, \\ \max_{u_i, i \in S} \min_{u_j, j \in N \setminus S} \sum_{i \in S} K_i(x_0, T - t_0, u_S, u_{N \setminus S}), & \text{если } S \subset N, \\ \max_{u_1, \dots, u_n} \sum_{i=1}^n K_i(x_0, T - t_0, u_1, \dots, u_n), & \text{если } S = N. \end{cases} \quad (5)$$

Доказано [7], что $V^\alpha(x_0, t_0, T, S)$ является супераддитивной функцией, то есть удовлетворяет следующему свойству:

$$V(x_0, t_0, T, S_1 \cup S_2) \geq V(x_0, t_0, T, S_1) + V(x_0, t_0, T, S_2), \\ \forall S_1, S_2 \in N, S_1 \cap S_2 = \emptyset. \quad (6)$$

Однако этот тип характеристической функции обладает значительными вычислительными сложностями.

1.1.2 δ -характеристическая функция

В работе Л.А. Петросяна, Дж. Заккура [8] был предложен другой конструктивный подход для построения характеристической функции (δ -характеристическая функция).

$V(x_0, t_0, T, S)$ как сила коалиции S может быть вычислена следующим образом: игроки из S максимизируют свой суммарный выигрыш $K_i(u_S, u_{N \setminus S}^N)$ в то время как оставшиеся игроки из множества $N \setminus S$ используют стратегии из равновесия по Нэшу $u_{N \setminus S}^N = \{u_j^N\}_{j \in N \setminus S}$. Таким образом, имеем 2-этапную процедуру для построения характеристической функции:

- 1) находим равновесие по Нэшу $\{u_i^N\}$ для всех игроков $i \in N$;
- 2) «замораживаем» стратегии из равновесия по Нэшу u_j^N для игроков $j \in N \setminus S$ а для игроков из коалиции S находим максимум их суммарного выигрыша по $u_S = \{u_i\}_{i \in S}$. Тогда формальное определение имеет следующий вид:

$$V^\delta(x_0, t_0, T, S) = \begin{cases} 0, & \text{если } S = \{\emptyset\}, \\ \max_{u_i, i \in S; u_j, j \in N \setminus S} \sum_{i \in S} K_i(u_S, u_{N \setminus S}), & \text{если } S \subset N, \\ \max_{u_1, \dots, u_n} \sum_{i=1}^n K_i(x_0, T - t_0, u_1, \dots, u_n), & \text{если } S = N. \end{cases} \quad (7)$$

Построенная таким образом характеристическая функция имеет следующие преимущества. Во-первых, она требует меньшее количество вычислительных затрат. Во-вторых, вычисленное значение V^δ основано на уже вычисленном равновесии по Нэшу, что существенно упрощает дальнейшие вычисления. В-третьих, данное определение характеристической функции имеет понятную экономическую интерпретацию, а именно, то, что игроки, не вступившие в коалицию S не будут образовывать анти-коалицию $N \setminus S$, что соответствует их «неагрессивному» поведению.

В общем случае, δ -характеристическая функция не является супераддитивной, то есть не удовлетворяет условию (6), в отличие от (5). А также актуальным становится вопрос о существовании и единственности равновесия по Нэшу.

1.1.3 ζ -характеристическая функция

Для построения функции данного типа будем использовать двухэтапную процедуру: на первом этапе находим n -набор оптимальных управлений, максимизирующий суммарный выигрыш всех n игроков; на втором этапе для игроков, входящих в коалицию K , используем полученные на первом этапе оптимальные управления, в то время как игроки из множества $N \setminus S$ минимизируют суммарный выигрыш игроков из коалиции K . Тогда имеем:

$$V^\zeta(x_0, t_0, T, S) = \begin{cases} 0, & \text{если } S = \{\emptyset\}, \\ \min_{u_j, j \in N \setminus S} \sum_{i \in S} K_i(x_0, T - t_0, u_S^*, u_{N \setminus S}), & \text{если } S \subset N, \\ \max_{u_1, \dots, u_n} \sum_{i=1}^n K_i(x_0, T - t_0, u_1, \dots, u_n), & \text{если } S = N. \end{cases} \quad (8)$$

Доказано [9], что V^ζ является супераддитивной характеристической функцией, в отличие от (7). А также, ζ -характеристическая функция может быть вычислена в два этапа с использованием выражений для оптимальных управлений, что существенно упрощает процесс вычислений по сравнению с построением α -характеристической функции.

1.1.4 η -характеристическая функция

Данный тип характеристической функции [10] обладает следующим преимуществом: вычислительный процесс упрощен, так как игроки из коалиции S используют построенные ранее оптимальные стратегии $u_S^* = \{u_i^*\}_{i \in S}$ из оптимального набора u^* , а игроки из $N \setminus S$ действуют аналогично тому, как при построении δ -характеристической функции, то есть используют u_i^{NE} :

$$V^\eta(x_0, t_0, T, S) = \begin{cases} 0, & \text{если } S = \{\emptyset\}, \\ \sum_{i \in S} K_i(x_0, T - t_0, u_S^*, u_{N \setminus S}^{NE}), & \text{если } S \subset N, \\ \max_{u_1, \dots, u_n} \sum_{i=1}^n K_i(x_0, T - t_0, u_1, \dots, u_n), & \text{если } S = N. \end{cases} \quad (9)$$

1.2 Вектор Шепли

Рассмотрим вектор Шепли в качестве кооперативного принципа оптимальности в заданной игре:

$$Sh_i(x_0, t_0, T) = \sum_{S \subset N, i \in S} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} (V(S, x_0, t_0, T) - V(S \setminus \{i\}, x_0, t_0, T)). \quad (10)$$

Он представляет собой дележ, который удовлетворяет свойствам индивидуальной и коллективной рациональности. Для игры из трех участников вектор Шепли имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} Sh_1(x_0, T - t_0) &= \frac{1}{3} [V(\cdot, \{1, 2, 3\}) - V(\cdot, \{2, 3\})] + \frac{1}{3} V(\cdot, \{1\}) + \\ &+ \frac{1}{6} [V(\cdot, \{1, 2\}) - V(\cdot, \{2\}) + V(\cdot, \{1, 3\}) - V(\cdot, \{3\})], \\ Sh_2(x_0, t_0, T) &= \frac{1}{3} [V(\cdot, \{1, 2, 3\}) - V(\cdot, \{1, 3\})] + \frac{1}{3} V(\cdot, \{2\}) + \\ &+ \frac{1}{6} [V(\cdot, \{1, 2\}) - V(\cdot, \{1\}) + V(\cdot, \{2, 3\}) - V(\cdot, \{3\})], \quad (11) \\ Sh_3(x_0, T - t_0) &= \frac{1}{3} [V(\cdot, \{1, 2, 3\}) - V(\cdot, \{1, 2\})] + \frac{1}{3} V(\cdot, \{3\}) + \\ &+ \frac{1}{6} [V(\cdot, \{1, 3\}) - V(\cdot, \{1\}) + V(\cdot, \{2, 3\}) - V(\cdot, \{2\})]. \end{aligned}$$

1.3 Модель игры

1.3.1 Кооперативное решение

Рассмотрим теоретико-игровую модель, для которой выполняются следующие предположения: количество игроков равно 3, то есть $n = 3$; начальное условие (1) $x(t_0) = 0$.

Воспользуемся методом максимума Понтрягина [14] для решения задачи (4). Для этого необходимо построить Гамильтониан:

$$(x, u, \psi) = \sum_{i=1}^3 \left(\left(b_i - \frac{1}{2} u_i \right) u_i - d_i x \right) - \sum_{i=1}^3 D_i x(T) + \psi(t) (u_1 + u_2 + u_3),$$

$$H_i(x, u, \psi) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{2} u_i^2 + u_i (\psi(t) + b_i) - d_i x \right) - \sum_{i=1}^3 D_i x(T) \rightarrow \max.$$

Найдем первую производную по u_i :

$$\frac{dH(x, u, \psi)}{du_i} = b_i - u_i + \psi(t) = 0,$$

$$u_i = b_i + \psi(t).$$

Решая сопряженную систему,

$$\dot{\psi}(t) = \frac{d\psi}{dt} = -\frac{dH}{dx} = d_{123}.$$

Для поставленной задачи с терминальным членом:

$$\psi(T) = -D_{123}.$$

Таким образом, находим $\psi(t)$:

$$\psi(T) - \psi(t) = d_{123}(T - t); \quad \psi(t) = -D_{123} - d_{123}(T - t),$$

где $d_{123} = d_1 + d_2 + d_3$, $D_{123} = D_1 + D_2 + D_3$.

Итак, получаем оптимальное управление для всех трех игроков, которые по нашему предположению образуют коалицию:

$$u^*(t) = \begin{pmatrix} b_1 - d_{123}(T - t) - D_{123} \\ b_2 - d_{123}(T - t) - D_{123} \\ b_3 - d_{123}(T - t) - D_{123} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Введем дополнительные ограничения на параметры модели, гарантирующие, что полученные здесь и далее для некоторых других вспомогательных задач оптимизации управления являются допустимыми и при-

надлежат компакту $[0, b_i]$:

$$\begin{aligned} D_i &\in [0, \min(b_1 - D_{123}, b_2 - D_{123}, b_3 - D_{123})], \\ d_i &\in [0; \frac{\min(b_1, b_2, b_3) - D_{123}}{T} - d_{123}], \quad i = \overline{1, 3}. \end{aligned} \quad (13)$$

Подставив полученные управления (12) в (1) с начальным условием (2), получим следующую траекторию:

$$x^*(t) = \frac{3d_{123}}{2}(t^2 - t_0^2) + (b_{123} - 3D_{123} - 3Td_{123})(t - t_0) + x_0.$$

1.3.2 Равновесие по Нэшу

$$H_i(x, u, \psi) = \left(b_i - \frac{1}{2}u_i\right)u_i - d_i x - D_i x(T) + \psi(t)(u_1 + u_2 + u_3).$$

Из условия оптимальности первого порядка

$$\frac{dH_i(x, u, \psi)}{du_i} = b_i - u_i + \psi_i(t) = 0,$$

получим следующие выражения для оптимальных управлений:

$$u_i^{NE} = b_i + \psi_i(t), \quad i = \overline{1, 3}.$$

Сопряженные переменные $\psi_i(t)$ могут быть найдены из дифференциальных уравнений

$$\dot{\psi}_i(t) = \frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{dH_i(x, u, \psi)}{dx} = d_{123}.$$

Для поставленной задачи с терминальным членом:

$$\psi_i(T) = -D_i, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Из чего можно заключить, что оптимальные управления в данном случае

имеют вид:

$$u^{NE}(t) = \begin{pmatrix} b_1 - d_1(T - t) - D_1 \\ b_2 - d_2(T - t) - D_2 \\ b_3 - d_3(T - t) - D_3 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Аналогично управлениям для кооперативного варианта игры необходимо, чтобы (14) удовлетворяли условиям (13).

Траектория, которая соответствует оптимальному управлению, примет вид:

$$x^{NE}(t) = \frac{d_{123}}{2} (t^2 - t_0^2) + (b_{123} - D_{123} - T d_{123}) (t - t_0) + x_0.$$

Для наглядности рассмотрим график (рис. 1), который иллюстрирует общий уровень загрязнения для кооперативной и некооперативной игр.

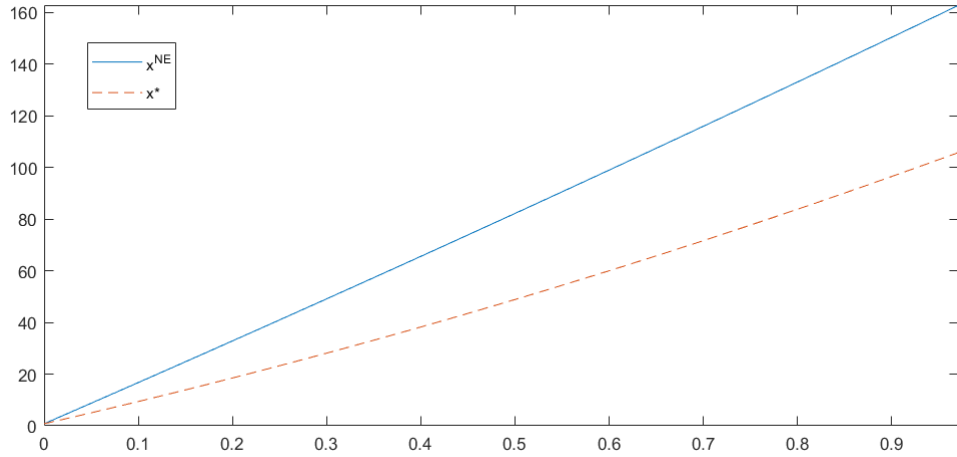


Рис. 1: Уровень загрязнений $x(t)$ при кооперативной и некооперативной игре.

Таким образом, общее загрязнение воздуха в кооперативном случае меньше, чем в некооперативном в каждый момент времени $t \in [t_0; T]$. Иными словами, (рис. 1) показывает, что кооперативный вариант игры ведет к снижению уровня загрязнения на промежутке времени $[t_0; T]$.

1.4 Выражения для характеристических функций

С помощью определений (5) – (9) найдем выражения для всех типов характеристических функций (см. также [11])

1.4.1 Построение α -характеристической функции

- Построим α -характеристическую функцию для гранд-коалиции $S = N$. В данном случае, каждый игрок использует управление, которое доставляет максимум суммарному выигрышу всех игроков, то есть управления определяются выражением (12). Таким образом,

$$\begin{aligned} V^\alpha(N, T - t_0) &= \sum_{i=1}^3 K_i(t_0, u_1^*, u_2^*, u_3^*) = \frac{(T - t_0)^3 d_N^2}{2} - \\ &\quad - \frac{(T - t_0)^2 d_N}{2} (2b_N + 3D_N) + \\ &\quad + \frac{(T - t_0)}{2} (2\tilde{b}_N - 2d_N x_0 + 3\tilde{D}_N - 2b_N D_N) - x_0 D_N, \end{aligned}$$

Введем систему обозначений:

$$\begin{aligned} d_N &= d_1 + d_2 + d_3, \quad d_{ij} = d_i + d_j; \\ b_{ij} &= b_i + b_j, \quad b_N = b_1 + b_2 + b_3, \quad \tilde{b}_N = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2; \\ D_N &= D_1 + D_2 + D_3, \quad D_{ij} = D_i + D_j, \quad \tilde{D}_N = D_1^2 + D_2^2 + D_3^2. \end{aligned}$$

- Для того, чтобы построить $V^\alpha(\{i\}, T - t_0)$, $i = \overline{1, 3}$, воспользуемся определением (5). Во-первых, необходимо сначала найти такие управления $u_j, u_k, i \neq j \neq k \in N$, где достигается $\min_{u_j, u_k} K_i(t_0, u_i, u_j, u_k)$. Такие управления найдем с помощью принципа максимума Понтрягина. Они примут вид:

$$u_j = b_j, \quad u_k = b_k.$$

Во-вторых, пользуясь тем же методом, необходимо найти управление u_i , где достигается $\max_{u_i} \min_{u_j, u_k} K_i(t_0, u_i, u_j, u_k)$. Оно примет вид:

$$u_i = b_i - d_i(T - t) - D_i,$$

$$V^\alpha(\{i\}, T - t_0) = \frac{(T - t_0)}{2} (b_1^2 - 2D_1 b_{123} + 2D_1^2) - x_0 D_1 - \frac{(T - t_0)^3}{6} d_1^2 + (T - t)^2 (3b_{123} d_1 - 3D_1 d_1) + x_0 d_1 (T - t_0).$$

- Аналогичным образом находим $V^\alpha(\{i, j\}, T - t_0)$.

Сначала необходимо найти такое управление $u_k, i \neq j \neq k \in N$, где достигается $\min_{u_k} (K_i(t_0, u_i, u_j, u_k) + K_j(t_0, u_i, u_j, u_k))$. Такие управления найдем с помощью принципа максимума Понтрягина. Оно примет вид:

$$u_k = b_k.$$

Во-вторых, пользуясь тем же методом, необходимо найти управления u_i, u_j , где достигается $\max_{u_i, u_j} \min_{u_k} (K_i(t_0, u_i, u_j, u_k) + K_j(t_0, u_i, u_j, u_k))$. Они примут вид:

$$u_i = b_i - (d_i + d_j)(T - t) - (D_i + D_j).$$

Тогда характеристическая функция для коалиции $S = \{i, j\}$ имеет вид:

$$V^\alpha(\{i, j\}, T - t_0) = \frac{(T - t_0)}{2} (\tilde{b}_{ij} - 2d_{ij}x_0 - 6D_{ij}^2 + b_N D_{ij}) - \frac{(T - t_0)^2}{2} (b_N d_{ij} - 2d_{ij} D_{ij}) + \frac{(T - t_0)^3}{3} d_{ij}^2.$$

1.4.2 Построение δ -характеристической функции

Воспользуемся определением (7). Для нахождения δ -характеристической функции процесс упрощается, так как игроки, которые не входят в коалицию S , используют в качестве стратегий равновесие по Нэшу. Тогда перед нами стоит задача найти управления $u_S, S \in N$, которые максимизируют $\sum_{i \in S} K_i(t_0, u_S, u_{N \setminus S})$.

- При построении $V^\delta(\{i\}, T - t_0), i \in N$ будут использованы следующие

управления:

$$\begin{aligned} u_i &= b_i - d_i(T - t) - D_i, \\ u_j &= u_j^{NE} = b_j - d_j(T - t) - D_j, \\ u_k &= u_k^{NE} = b_k - d_k(T - t) - D_k. \end{aligned}$$

Соответственно, $V^\delta(\{i\}, T - t_0)$, определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} V^\delta(\{i\}, T - t_0) &= \frac{(T - t_0)^3}{6}(3d_i^2 + 2d_1d_{jk}) + \\ &+ \frac{(T - t_0)^2}{2}(D_id_N + D_{jk}d_i - d_ib_N) + \\ &+ \frac{(T - t_0)}{2}(2D_iD_{jk} - 2D_ib_N - 2d_ix_0 + D_i^2 + b_i^2) - D_ix_0. \end{aligned}$$

- При построении $V^\delta(\{i, j\}, T - t_0)$ используем следующие управления:

$$\begin{aligned} u_i &= b_i - (d_i + d_j)(T - t) - (D_i + D_j), \\ u_j &= b_j - (d_i + d_j)(T - t) - (D_i + D_j), \\ u_k &= u_k^{NE} = b_k - d_k(T - t) - D_k. \end{aligned}$$

Соответствующее значение характеристической функции:

$$\begin{aligned} V^\delta(\{i, j\}, T - t_0) &= \frac{(T - t_0)^3}{3}(d_{ij}^2 + d_kd_{ij}) + \\ &+ \frac{(T - t_0)}{2}(\tilde{b}_{ij} - 2x_0D_{ij} - 2x_0d_{ij} + 2D_{ij}^2 + 2D_kD_{ij} + 2D_{ij}b_N) + \\ &+ \frac{(T - t_0)^2}{2}(2D_{ij}d_N + D_kd_{ij} - d_{ij}b_N). \end{aligned}$$

1.4.3 Построение ζ -характеристической функции

Воспользуемся определением (8). Для построения характеристической функции данного типа в качестве $u_{S \in N}$ используются уже найденные управления (12), а $u_{S \setminus N}$ - такие, что достигается $\min_{u_j, j \in S \setminus N} (\sum_{i \in S} K_i(t_0, u_S^*, u_{S \setminus N}))$

- При построении $V^\zeta(\{i\}, T - t_0)$ используем управления:

$$\begin{aligned} u_i &= b_i - (d_i + d_j + d_k)(T - t) - (D_i + D_j + D_k), \\ u_j &= b_j, \\ u_k &= b_k. \end{aligned}$$

Характеристическая функция примет следующий вид:

$$\begin{aligned} V^\zeta(\{i\}, T - t_0) &= \frac{(T - t_0)^3}{6}(-\tilde{d}_N - 2d_{jk}) - D_i x_0 + \\ &+ \frac{(T - t_0)^2}{2}(D_i d_i - D_{jk} d_{jk} - b_N d_i) + \\ &+ \frac{(T - t_0)}{2}(b_i^2 - 2D_i b_N - 2D_j D_k - 2d_i x_0 + D_i^2 - \tilde{D}_{jk}). \end{aligned}$$

- Для построения $V^\zeta(\{i, j\}, T - t_0)$ с помощью принципа максимума Понтрягина находим управление $u_k, k \in N$, минимизирующее суммарный выигрыш, откуда получаем следующее выражение для управлений:

$$\begin{aligned} u_i &= b_i - (d_i + d_j + d_k)(T - t) - (D_i + D_j + D_k), \\ u_j &= b_j - (d_i + d_j + d_k)(T - t) - (D_i + D_j + D_k), \\ u_k &= b_k. \end{aligned}$$

Тогда характеристическая функция принимает вид:

$$\begin{aligned} V^\zeta(\{i, j\}, T - t_0) &= \frac{(T - t_0)}{2}(\tilde{b}_{ij} - 2x_0 d_{ij} + 2D_{ij}^2 - 2D_{ij} b_N - D_k^3) + \\ &+ \frac{(T - t_0)^2}{2}(2D_{ij} d_{ij} - 2D_k d_k - b_N d_{ij}) + \frac{(T - t_0)^3}{3}(d_{ij}^2 - d_k^2). \end{aligned}$$

1.4.4 Построение η -характеристической функции

Воспользуемся определением (9). Вычислительный процесс для η -характеристической функции является наиболее упрощенным по сравне-

нию с характеристическими функциями, описанными ранее, так как не требуется дополнительных вычислений после нахождения $u^*(t)$, $u^{NE}(t)$.

- При построении $V^\eta(\{i\}, T - t_0)$ используются управления вида:

$$\begin{aligned} u_i &= b_i - (d_i + d_j + d_k)(T - t) - (D_i + D_j + D_k), \\ u_j &= u_j^{NE} = b_j - d_j(T - t) - D_j, \\ u_k &= u_k^{NE} = b_k - d_k(T - t) - D_k. \end{aligned}$$

Тогда выражение для $V^\eta(\{i\}, T - t_0)$ примет вид:

$$\begin{aligned} V^\eta(\{i\}, T - t_0) &= \frac{(T - t_0)^3}{6}(2d_i^2 - d_N^2) + \frac{(T - t_0)^2}{2}(D_N d_N - d_i b_N) + \\ &+ \frac{(T - t_0)}{2}(b_i^2 - 2D_i b_N - D_N + 2D_i^2 + 4D_i D_{jk} - 2d_i x_0) - D_i x_0. \end{aligned}$$

- Для $V^\eta(\{i, j\}, T - t_0)$ используются управления вида:

$$\begin{aligned} u_i &= b_i - (d_i + d_j + d_k)(T - t) - (D_i + D_j + D_k), \\ u_j &= b_i - (d_i + d_j + d_k)(T - t) - (D_i + D_j + D_k), \\ u_k &= u_k^{NE} = b_k - d_k(T - t) - D_k. \end{aligned}$$

Выражение для $V^\eta(\{i, j\}, T - t_0)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} V^\eta(\{i, j\}, T - t_0) &= \frac{(T - t_0)}{2}(\tilde{b}_{ij} + 2d_{ij}x_0 + 2D_{ij}^2 - 2D_{ij}b_N + D_k D_{ij} - 2D_k^2) + \\ &+ \frac{(T - t_0)^2}{2}((2D_{ij} + D_k)d_{ij} - b_N d_{ij} + d_k(D_{ij} + 2D_k)) + \\ &+ (T - t_0)^3(d_{ij}d_N - d_k^2) - x_0 D_{ij}. \end{aligned}$$

1.4.5 Связь характеристических функций

Теперь рассмотрим, как связаны найденные характеристические функции (см. также [11] – [13]). Вычислим некоторые разности, а именно:

$$\begin{aligned} V^\alpha(\{i\}, T - t_0) - V^\delta(\{i\}, T - t_0) &= \\ &= -\frac{(T - t_0)}{6} (2(T - t_0)^2 d_i d_{jk} + 3D_i d_N (T - t_0) + 6D_i D_{jk}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V^\alpha(\{i, j\}, T - t_0) - V^\delta(\{i, j\}, T - t_0) &= \\ &= -\frac{(T - t_0)}{6} (2(T - t_0) d_{ij} d_k + 3(T - t_0) (D_{ij} d_k + D_k d_{ij}) + 6D_{ij} D_k). \end{aligned}$$

Рассмотрев разности $V^\zeta(\{i\}, T - t_0) - V^\eta(\{i\}, T - t_0)$ и $V^\zeta(\{i, j\}, T - t_0) - V^\eta(\{i, j\}, T - t_0)$, легко убедиться, что они совпадают с рассчитанными $V^\alpha(\{i\}, T - t_0) - V^\delta(\{i\}, T - t_0)$ и $V^\alpha(\{i, j\}, T - t_0) - V^\delta(\{i, j\}, T - t_0)$ соответственно. Приходим к выводу:

$$V^\alpha(\cdot) - V^\delta(\cdot) = V^\zeta(\cdot) - V^\eta(\cdot).$$

Также несложно проверить, что для характеристических функций выполняется следующее соотношение:

$$\begin{aligned} V^\delta(S, T - t_0) &\geq V^\alpha(S, T - t_0), \forall S \subseteq N, \\ V^\alpha(S, T - t_0) &\geq V^\zeta(S, T - t_0), \forall S \subseteq N. \end{aligned}$$

Таким образом, α , δ , ζ –характеристические функции связаны неравенствами:

$$V^\zeta(\cdot) \leq V^\alpha(\cdot) \leq V^\delta(\cdot).$$

Аналогичным образом устанавливается взаимосвязь между δ , ζ , η –характеристическими функциями:

$$V^\zeta(\cdot) \leq V^\eta(\cdot) \leq V^\delta(\cdot).$$

1.5 Значение информации

1.5.1 Некооперативный случай

Введем в рассмотрение новую характеристику для дифференциальных игр, которую назовем «значение информации» (по аналогии с value of information [15])

Рассмотрим ситуацию, в которой игроки не обладают полной информацией о параметрах модели. Тогда перед нами стоит задача рассчитать, какие потери понесет игрок.

Предположим, что игроки не знают о том, что в последний момент игры им будет назначен терминальный штраф $D_i x(T)$, то есть в терминах нашей модели они предполагают, что $D_i = 0, i = \overline{1, 3}$, хотя на самом деле это не так. В предположениях игроков функционал выигрыша для каждого игрока $i, i = \overline{1, 3}$, выглядит следующим образом:

$$\bar{K}_i(x_0, T, u) = \int_{t_0}^T \left(\left(b_i - \frac{1}{2}u_i(t) \right) u_i(t) - d_i x \right) dt. \quad (15)$$

Тогда в равновесии по Нэшу игроки будут использовать управления

$$\bar{u}^{NE}(t) = \begin{pmatrix} b_i - d_i(T - t) \\ b_j - d_j(T - t) \\ b_k - d_k(T - t) \end{pmatrix}. \quad (16)$$

На самом деле функционалом выигрыша игроков является не (15), а (3). Значит, для того чтобы найти выигрыш игрока нужно подставить полученные управления (16) в (3) и вычислить значение этого функционала. Получаем:

$$\begin{aligned} K_i(x_0, T, \bar{u}^{NE}) &= \frac{(T - t_0)^3 d_i (d_N + d_{jk})}{6} + \\ &+ \frac{(T - t_0)^2 (D_i d_N - d_i b_N)}{2} - (T - t_0) \left(D_i b_N + d_i x_0 - \frac{b_i^2}{2} \right) - D_i x_0. \end{aligned}$$

Для наглядности рассмотрим график (3), который показывает изменения прибыли i -ого игрока в зависимости от увеличения коэффициента D_i в

условиях неполной информированности о параметрах модели и при владении всей информацией.

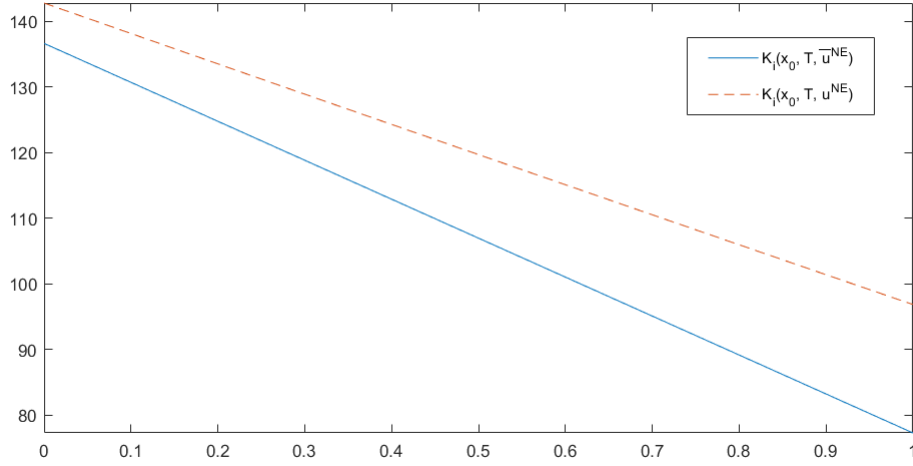


Рис. 2: Сравнение выигрыша игрока i в зависимости от D_i .

Для того чтобы оценить характеристику «значение информации», рассмотрим разность:

$$\begin{aligned}
 VI &= K_i(x_0, T, u^{NE}) - K_i(x_0, T, \bar{u}^{NE}) = \\
 &= \frac{(T - t_0)(D_i(D_N + D_{jk}) + (T - t_0)d_i D_{jk})}{2}. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Теперь можно ввести новую величину, чтобы узнать выигрыш относительно базовой величины, а именно:

$$NVI_i = \frac{K_i(x_0, T, u^{NE}) - K_i(x_0, T, \bar{u}^{NE})}{K_i(x_0, T, u^{NE})} \times 100\%. \quad (18)$$

С помощью (18) можно оценить потери каждого игрока в условиях неполной информированности в процентах.

1.5.2 Кооперативный вариант

Описанный в разделе (1.5.1) метод для расчета значения информации может быть расширен для кооперативного случая игры следующим

образом:

$$NVI_i^C = \frac{\xi_i - \bar{\xi}_i}{\xi_i} \times 100\%, \quad (19)$$

где $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ это кооперативное решение, например значение соответствующей компоненты вектора Шепли или τ -значение, вычисленное в условиях владения полной информацией; а $\{\bar{\xi}_i\}_{i=1}^n$ рассчитанное при недостатке информации.

Рассмотрим вектор Шепли в соответствии с определением (10). Тогда выражение (19) будет вычислено с помощью вектора Шепли:

$$NVI_i^C = \frac{Sh_i - \bar{Sh}_i}{Sh_i} \times 100\%,$$

где $\{Sh_i\}_{i=1}^n$ это значение, вычисленное в условиях владения полной информацией; а $\{\bar{Sh}_i\}_{i=1}^n$ рассчитанное при недостатке информации.

На Рис. наглядно изображено, как ведут себя компоненты вектора Шепли игрока i в зависимости от параметра D_i для случая при недостатке информации и для случая полного владения параметрами модели.

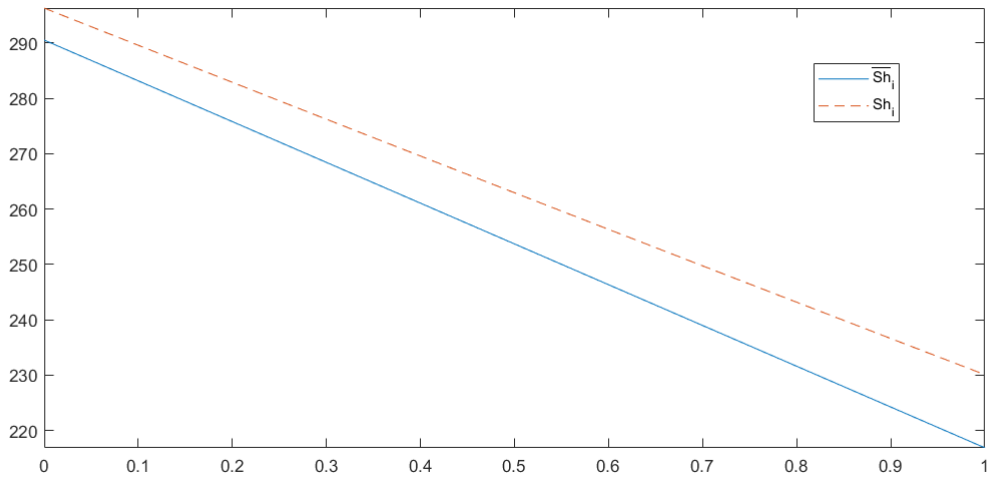


Рис. 3: Компонента вектора Шепли игрока i в зависимости от D_i .

1.6 Ценность кооперации

Введем в рассмотрение новое понятие для дифференциальных игр: ценность кооперации. Для этого необходимо проанализировать ситуацию а также потери игрока в случае, где он отказывается от участия в коалициях для максимизации общего выигрыша (4).

На первом этапе нам понадобится вектор Шепли. С его помощью мы сможем найти выигрыш, который равен среднему вкладу игрока в благо-состояние тотальной коалиции. На следующем этапе из найденного зна-чения вектора Шепли мы вычитаем выигрыш игрока, при использовании управлений из равновесия по Нэшу. Таким образом, определение понятия «ценность кооперации» можно выразить следующим образом:

$$VC = Sh_i - K_i(x_0, T, u^{NE}). \quad (20)$$

Значение вектора Шепли, соответствующее компоненте дележа игрока i , есть величина, определенная с помощью выражения (10). Для нахождения вектора Шепли можно воспользоваться характеристической функцией лю-бого типа. Ввиду преимуществ α -характеристической функции восполь-зуемся ей. Процесс построения подробно описан в разделе (1.4.1). Находим соответствующие значения характеристической функции и подставляем в (11):

$$\begin{aligned} Sh_i^\alpha = & \frac{(T - t_0)^3(\tilde{d}_{jk} + 4d_i^2)}{12} + \frac{4(t - T_0)^3(d_id_j + d_id_k + d_jd_k)}{9} + (T - t_0)^2 D_i d_i + \\ & + \frac{2(T - t_0)^2 D_i d_j k + D_j k d_i}{3} + \frac{(T - t_0)^2(3D_j d_j + 3D_k d_k + 2D_j d_k + 2D_k d_j)}{12} + \\ & + \frac{(T - t_0)^2 d_i b_N}{2} + \frac{(T - t_0)(4D_i D_{jk} + D_j D_k)}{3} - (T - t_0) D_i (b_N - D_i) + \\ & + \frac{(T - t_0)(\tilde{D}_{jk} + 2b_i^2)}{4} + x_0. \end{aligned}$$

Для наглядности рассмотрим график (4), на котором изображена зависи-мость прибыли i -ого игрока от параметра D_i в равновесии по Нэшу и соответствующая компонента вектора Шепли.

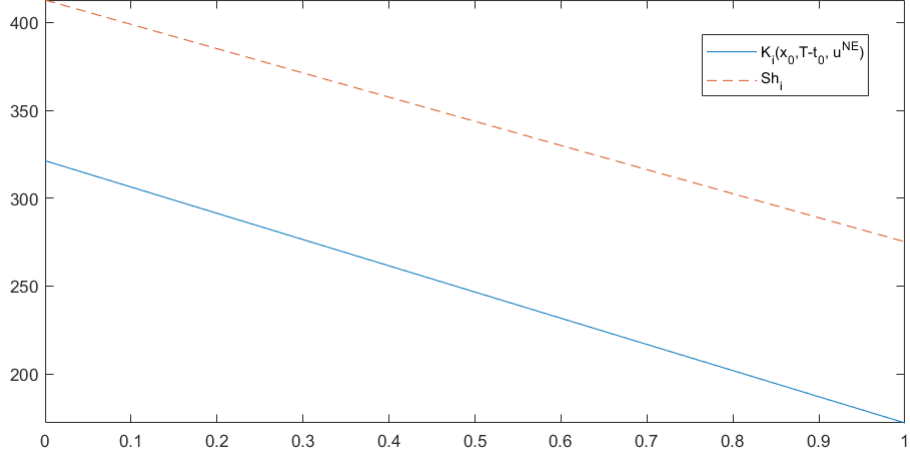


Рис. 4: Прибыль игрока i и компонента вектора Шепли в зависимости от D_i .

Подставим найденные значения в (20):

$$\begin{aligned}
 VC = & \left(\frac{D_3}{3} + \frac{(T-t_0)d_3}{3} \right) x_0 + \frac{D_3(T-t_0)b_1}{3} - \frac{(T-t_0)b_3^2}{6} - \frac{(T-t_0)^3 d_3^2}{18} - \\
 & - \frac{(T-t_0)^3 d_{12}d_3}{9} + \frac{(T-t_0)^2 (b_{123}d_3 - d_3 D_{123} - D_3 d_{12})}{6} - \\
 & - \frac{(T-t_0)D_3(D_{123} + D_{12} + b_{23})}{3}.
 \end{aligned}$$

Также можно оценить введенную характеристику относительно, воспользовавшись формулой:

$$NVC_i = \frac{Sh_i - K_i(x_0, T, u^{NE})}{Sh_i} \times 100\%. \quad (21)$$

Глава 2.

Теоретико-игровая задача управления вредными выбросами на примере предприятий города Пенза

С каждым годом экологические проблемы становятся все более актуальными. На это влияет, в частности, развитие промышленности. Как известно, нерациональное использование природных ресурсов и отсутствие природоохранных мероприятий на различных предприятиях приводят к истощению и загрязнению окружающей среды. Одна из важнейших проблем экологического урегулирования состоит в том, чтобы снизить объем вредных выбросов в атмосферу.

Промышленность Пензенской области - это ведущая отрасль экономики, влияющая на социально-экономическое состояние региона. В данной работе рассмотрим три предприятия, влияющих на экологическую обстановку. Первая компания, «Фотон», экспортирует садовые комплекты мебели из дерева для открытых площадок (см. также [16]). Следующее предприятие – «Пензадизельмаш» специализируется на производстве дизелей, турбокомпрессоров, насосов для нужд народного хозяйства и товаров народного потребления (см. также [17]). Последняя компания «Пензинский хлебзавод №2» – является крупнейшим хлебопекарным предприятием и одним из основных поставщиков хлебобулочных изделий в городе Пенза и Пензенской области (см. также [18]).

Далее на основе имеющихся данных [16] – [18] формализуем задачу и сформулируем дифференциальную игру трех лиц, в которой игроками являются: ЗАО «Фотон», ОАО «Пензадизельмаш», ОАО «Пензинский хлебзавод №2».

2.1 Параметры модели

Для подсчета параметров модели b_i, d_i будем использовать данные об источниках загрязнения за 2016 год.

Коэффициент $b_i > 0$ равен отношению общего дохода от производ-

ства i -ой компании (P_i) к общему объему загрязнения соответствующей компанией (V_i):

$$b_i = \frac{P_i}{V_i}. \quad (22)$$

Параметр $d_i > 0$ определяет расходы i -го игрока на устранение единицы общего загрязнения. Через L_i обозначим платеж i -ой компании за загрязнение воздуха, тогда:

$$d_i = \frac{L_i}{V_1 + V_2 + V_3}. \quad (23)$$

Таблица (1) содержит в себе информацию за 2016 год об общих доходах и объемах загрязнения каждой компании.

Таблица 1: Данные о предприятиях.

Компания	P_i (млн руб/год)	V_i (тонн/год)
ЗАО "Фотон"	136,76	920,729
ОАО "Пензадизельмаш"	1730	1068,36
ОАО "Пензинский хлебзавод №2"	1060	604,69

Информация о выплатах компаний за загрязнение окружающей среды представлен в Таблице (2).

Таблица 2: Выплаты за загрязнение воздуха.

Компания	L_i (руб/год)
ЗАО "Фотон"	865485,2
ОАО "Пензадизельмаш"	875092,1
ОАО "Пензинский хлебзавод №2"	2273785,55

Используя формулы (22), (23) а также значения из таблицы (1) и таблицы (2), получим следующие коэффициенты модели: таблица (3).

Таблица 3: Данные о предприятиях.

Компания	b_i	d_i
ЗАО "Фотон"	148534,48	421,61
ОАО "Пензадизельмаш"	1619303,9	426,29
ОАО "Пензинский хлебзавод №2"	1752944,9	876,62

Зафиксируем некоторые числовые параметры:

$$t_0 = 0, \quad x_0 = 0, \quad T = 1.$$

2.2 Управления и траектории для игроков

Рассматривая параметры, выписанные в Таблице (3), выпишем оптимальные управления игроков (24):

$$\begin{aligned} u_1^* &= \frac{1723 t}{1000} + \frac{146811}{1000} - D_{123}, \\ u_2^* &= \frac{1723 t}{1000} + \frac{889274009428951101}{549755813888000} - D_{123}, \\ u_3^* &= \frac{1723 t}{1000} + \frac{481371963076378613}{274877906944000} - D_{123}. \end{aligned} \quad (24)$$

Для таких управлений кооперативная траектория примет следующий вид (25) :

$$x^*(t) = \frac{5169 t^2}{2000} - t \left(3 D_{123} - \frac{386545627274883899}{109951162777600} \right). \quad (25)$$

Также выпишем с помощью введенных в Таблице (3) коэффициентов управления для случая равновесия по Нэшу (26):

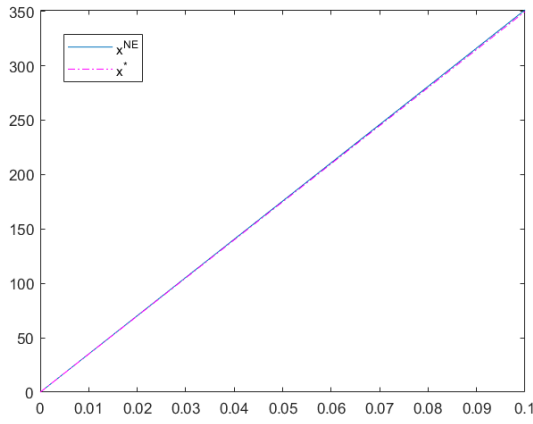
$$\begin{aligned} u_1^{NE} &= \frac{421 t}{1000} + \frac{148113}{1000} - D_1, \\ u_2^{NE} &= \frac{213 t}{500} + \frac{889987042719563837}{549755813888000} - D_2, \\ u_3^{NE} &= \frac{219 t}{250} + \frac{481604784663560181}{274877906944000} - D_3. \end{aligned} \quad (26)$$

Тогда траектория для управлений (26) примет вид (27)

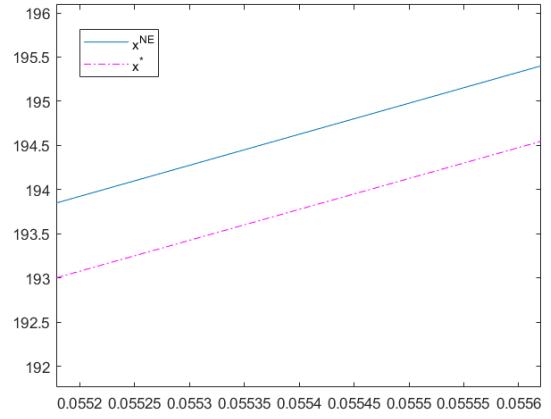
$$x^{NE}(t) = \frac{1723 t^2}{2000} - t \left(D_{123} - \frac{1934622594909077543}{549755813888000} \right). \quad (27)$$

Для наглядности нанесем на график траектории (25) и (27), получим рис. (5).

Из рис. (5) можно сделать вывод, что траектории практически совпадают, однако, уровень загрязнений, соответствующий оптимальным управ-



а)



б)

Рис. 5: Сравнение кооперативной и некооперативной траекторий: а) реальное, б) увеличенное.

лениям u^* (кооперативный вариант игры), немного ниже, чем при некооперативном варианте игры с управлениями u^{NE} .

2.3 Выигрыш игроков

Численное значение некооперативного решение представлено в таблице (4).

Таблица 4: Выигрыши компаний при использовании управлений, равновесных по Нэшу.

Компания	$K_i(x_0, T - t_0, u^{NE})$
"Фотон"	$0, 2D_{23} - 0, 5D_1^2 + D_1(D_{123} - 3519) + 10290$
"Пензадизельмаш"	$0, 2D_{13} - 0, 5D_2^2 + D_2(2D_{123} - 3519) + 1310321$
"Пензинский хлебзавод №2"	$0, 4D_{12} - 0, 5D_3^2 + D_3(2D_{123} - 3519) + 1534864$

Таблица (5) показывает общий выигрыш при кооперации и его отличие от суммы выигрышей при использовании равновесных по Нэшу управлений.

Таблица 5: Общий выигрыш при кооперации.

$\sum_{i=1}^3 K_i(x_0, T - t_0, u^*)$	$D_{123}(3D_{123} - 3518) - 3D_{123}^2 + 2855475$
$\sum_{i=1}^3 K_i(u^*) - \sum_{i=1}^3 K_i(u^{NE})$	$\tilde{D}_{123} - 0, 6D_{12} - 0, 4D_3$

2.4 Значения характеристических функций

В таблицах (6) – (9) вычислены значения характеристических функций всех типов для различных коалиций.

Таблица 6: α -характеристическая функция.

$V^\alpha(\{1\}, x_0, T - t_0)$	$D_1(D_1 - 3520) - 0,5D_1^2 + 10290$
$V^\alpha(\{2\}, x_0, T - t_0)$	$D_2(D_2 - 3520) - 0,5D_2^2 + 1310321$
$V^\alpha(\{3\}, x_0, T - t_0)$	$D_3(D_3 - 3520) - 0,5D_3^2 + 1534864$
$V^\alpha(\{1, 2\}, x_0, T - t_0)$	$D_{12}(2D_{12} - 3519) - D_{12}^2 + 1320611$
$V^\alpha(\{1, 3\}, x_0, T - t_0)$	$D_{13}(2D_{13} - 3519) - D_{13}^2 + 1545154$
$V^\alpha(\{2, 3\}, x_0, T - t_0)$	$D_{23}(2D_{23} - 3519) - D_{23}^2 + 2845185$
$V^\alpha(\{N\}, x_0, T - t_0)$	$D_N(3D_N - 3518) - 1,5D_{123} + 2855476$

Таблица 7: δ -характеристическая функция.

$V^\delta(\{1\}, x_0, T - t_0)$	$0,2D_{23} + D_1(D_{123} - 3519) - 0,5D_1^2 + 10290$
$V^\delta(\{2\}, x_0, T - t_0)$	$0,2D_{13} + D_2(D_{123} - 3519) - 0,5D_2^2 + 1310321$
$V^\delta(\{3\}, x_0, T - t_0)$	$0,4D_{12} + D_3(D_{123} - 3519) - 0,5D_3^2 + 1534864$
$V^\delta(\{1, 2\}, x_0, T - t_0)$	$0,4D_3 + D_{12}(2D_{12} + D_3 - 3519) - D_{12}^2 + 1320611$
$V^\delta(\{1, 3\}, x_0, T - t_0)$	$0,6D_2 + D_{13}(2D_{13} + D_2 - 3519) - D_{13}^2 + 1545155$
$V^\delta(\{2, 3\}, x_0, T - t_0)$	$0,6D_1 + D_{23}(2D_{23} + D_1 - 3519) - D_{23}^2 + 2845186$

Таблица 8: ζ -характеристическая функция.

$V^\zeta(\{1\}, x_0, T - t_0)$	$D_1(D_{123} - 3519) - 0,6D_{123} - 0,5D_{123}^2 + 10289$
$V^\zeta(\{2\}, x_0, T - t_0)$	$D_2(D_{123} - 3519) - 0,6D_{123} - 0,5D_{123}^2 + 1310320$
$V^\zeta(\{3\}, x_0, T - t_0)$	$D_3(D_{123} - 3519) - 0,4D_{123} - 0,5D_{123}^2 + 1534864$
$V^\zeta(\{1, 2\}, x_0, T - t_0)$	$D_{12}(2D_{123} - 3519) - 0,8D_{123} - D_{123}^2 + 1320611$
$V^\zeta(\{1, 3\}, x_0, T - t_0)$	$D_{13}(2D_{123} - 3519) - 0,4D_{123} - D_{123}^2 + 1545154$
$V^\zeta(\{2, 3\}, x_0, T - t_0)$	$D_{23}(2D_{123} - 3519) - 0,4D_{23} - D_{123}^2 + 2845185$

2.5 Значения вектора Шепли

Так же нам необходимы значения вектора Шепли, которые вычислены на основе всех четырех характеристических функций по определению (11).

Таблица 9: η -характеристическая функция.

$V^\eta(\{1\}, \cdot)$	$D_1(D_1 + 2D_{23} - 3519) - 0,4D_{23} - 0,6D_1 - 0,5D_{123}^2 + 10289$
$V^\eta(\{2\}, \cdot)$	$D_2(2D_{13} + D_2 - 3519) - 0,6D_2 - 0,4D_{13} - 0,5D_{123}^2 + 1310321$
$V^\eta(\{3\}, \cdot)$	$D_3(2D_{12} + D_3 - 3519) + 0,01D_{12} - 0,4D_3 - 0,5D_{123}^2 + 1534864$
$V^\eta(\{1, 2\}, \cdot)$	$D_{12}(2D_{12} + 3D_3 - 3518) - 0,8D_{12} - 0,4D_3 - D_{123}^2 + 1320611$
$V^\eta(\{1, 3\}, \cdot)$	$D_{13}(2D_{13} + 3D_2 - 3518) + 0,2D_2 - 0,4D_{13} - D_{123}^2 + 1545154$
$V^\eta(\{2, 3\}, \cdot)$	$D_{23}(3D_1 + 2D_{23} - 3518) + 0,2D_1 - 0,4D_{23} - D_{123}^2 + 2845186$

$$\begin{aligned}
 Sh_1^\alpha(x_0, T - t_0) = & \frac{D_1 (D_1 - 3520)}{3} - \frac{D_2 (D_2 - 3520)}{6} - \frac{D_3 (D_3 - 3520)}{6} + \\
 & + \frac{D_1 (4 D_1 + 2 D_2 + 2 D_3 - 7038)}{6} + \frac{D_2 (2 D_1 - 2 D_2 - 4 D_3 + 3519)}{6} + \\
 & + \frac{D_3 (2 D_1 - 4 D_2 - 2 D_3 + 3519)}{6} + \frac{D_{123}(3 D_{123} - 3518)}{3} + 10290 - \\
 & - D_1^2 - \frac{D_2^2}{4} - \frac{D_3^2}{4} - \frac{4 D_1 D_2}{3} - \frac{4 D_1 D_3}{3} - \frac{D_2 D_3}{3}, \quad (28)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Sh_2^\alpha(x_0, T - t_0) = & \frac{D_2 (D_2 - 3520)}{3} - \frac{D_1 (D_1 - 3520)}{6} - \frac{D_3 (D_3 - 3520)}{6} + \\
 & + \frac{D_1 (-2 D_1 + 2 D_2 - 4 D_3 + 3519)}{6} + \frac{D_2 (2 D_1 + 4 D_2 + 2 D_3 - 7038)}{6} + \\
 & + \frac{D_3 (-4 D_1 + 2 D_2 - 2 D_3 + 3519)}{6} + \frac{D_{123} (3 D_{123} - 3518)}{3} + 1310321 - \\
 & - \frac{D_1^2}{4} - D_2^2 - \frac{D_3^2}{4} - \frac{4 D_1 D_2}{3} - \frac{D_1 D_3}{3} - \frac{4 D_2 D_3}{3},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Sh_3^\alpha(x_0, T - t_0) = & \frac{D_3 (D_3 - 3520)}{3} - \frac{D_2 (D_2 - 3520)}{6} - \frac{D_1 (D_1 - 3520)}{6} + \\
 & + \frac{D_1 (-2 D_1 - 4 D_2 + 2 D_3 + 3519)}{6} + \frac{D_2 (-4 D_1 - 2 D_2 + 2 D_3 + 3519)}{6} + \\
 & + \frac{D_3 (2 D_1 + 2 D_2 + 4 D_3 - 7038)}{6} + \frac{D_{123} (3 D_{123} - 3518)}{3} + 1534864 - \\
 & - \frac{D_1^2}{4} - \frac{D_2^2}{4} - D_3^2 - \frac{D_1 D_2}{3} - \frac{4 D_1 D_3}{3} - \frac{4 D_2 D_3}{3}; \quad (29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Sh_1^\delta(x_0, T-t_0) &= \frac{421 D_{23}}{4000} - \frac{651 D_1}{2000} + \frac{D_1 (D_{123} - 3519)}{3} - \frac{D_{23} (D_{123} - 3519)}{6} + \\
&+ \frac{D_1 (4 D_1 + 3 D_2 + 3 D_3 - 7038)}{6} + \frac{D_2 (-2 D_2 - 3 D_3 + 3519)}{6} + \\
&+ \frac{D_3 (-3 D_2 - 2 D_3 + 3519)}{6} + \frac{D_{123} (3 D_{123} - 3518)}{3} + 10290 - \\
&- D_1^2 - \frac{D_2^2}{4} - \frac{D_3^2}{4} - \frac{4 D_1 D_2}{3} - \frac{4 D_1 D_3}{3} - \frac{D_2 D_3}{3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Sh_2^\delta(x_0, T-t_0) &= \frac{213 D_{13}}{2000} - \frac{1297 D_2}{4000} - \frac{D_{13} (D_{123} - 3519)}{6} + \frac{D_2 (D_{123} - 3519)}{3} + \\
&+ \frac{D_1 (-2 D_1 - 3 D_3 + 3519)}{6} + \frac{D_2 (3 D_1 + 4 D_2 + 3 D_3 - 7038)}{6} + \\
&+ \frac{D_3 (-3 D_1 - 2 D_3 + 3519)}{6} + \frac{D_{123} (3 D_{123} - 3518)}{3} + 1310321 - \\
&- \frac{D_1^2}{4} - D_2^2 - \frac{D_3^2}{4} - \frac{4 D_1 D_2}{3} - \frac{D_1 D_3}{3} - \frac{4 D_2 D_3}{3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Sh_3^\delta(x_0, T-t_0) &= \frac{219 D_{12}}{1000} - \frac{847 D_3}{4000} - \frac{D_{12} (D_{123} - 3519)}{6} + \frac{D_3 (D_{123} - 3519)}{3} + \\
&+ \frac{D_1 (-2 D_1 - 3 D_2 + 3519)}{6} + \frac{D_2 (-3 D_1 - 3 D_2 + 3519)}{6} + \\
&+ \frac{D_3 (3 D_1 + 3 D_2 + 4 D_3 - 3519)}{6} + \frac{D_{123} (3 D_{123} - 3518)}{3} + 1534864 - \\
&- \frac{D_1^2}{4} - \frac{D_2^2}{4} - D_3^2 - \frac{D_1 D_2}{3} - \frac{4 D_1 D_3}{3} - \frac{4 D_2 D_3}{3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Sh_1^\zeta(x_0, T-t_0) &= \frac{D_1 (D_{123} - 3519)}{3} - \frac{23 D_{123}}{200} - \frac{D_{23} (D_{123} - 3519)}{6} - \frac{D_{123}^2}{2} + \\
&+ \frac{D_1 (2 D_{123} - 3519)}{3} - \frac{D_{23} (2 D_{123} - 3519)}{6} + \frac{D_{123} (3 D_{123} - 3518)}{3} + 10290,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Sh_2^\zeta(x_0, T-t_0) &= \frac{D_2 (D_{123} - 3519)}{3} - \frac{89 D_{123}}{800} - \frac{D_{13} (D_{123} - 3519)}{6} - \frac{D_{123}^2}{2} - \\
&- \frac{D_{13} (2 D_{123} - 3519)}{6} + \frac{D_2 (2 D_{123} - 3519)}{3} + \frac{D_1 (3 D_{123} - 3518)}{3} + 1310321,
\end{aligned}$$

$$Sh_3^\zeta(x_0, T-t_0) = \frac{181 D_{123}}{800} - \frac{D_{12} (D_{123} - 3519)}{6} + \frac{D_3 (D_{123} - 3519)}{3} - \frac{D_{123}^2}{2} - \frac{D_{12} (2 D_{123} - 3519)}{6} + \frac{D_3 (2 D_{123} - 3519)}{3} + \frac{D_{123} (3 D_{123} - 3518)}{3} + 1534864;$$

$$Sh_1^\eta(x_0, T-t_0) = \frac{D_1 (D_1 + 2 D_2 + 2 D_3 - 3519)}{3} - \frac{39 D_{23}}{4000} - \frac{881 D_1}{2000} - \frac{D_2 (2 D_1 + D_2 + 2 D_3 - 3519)}{6} - \frac{D_3 (2 D_1 + 2 D_2 + D_3 - 3519)}{6} - \frac{D_{123}^2}{2} + \frac{D_1 (4 D_1 + 5 D_2 + 5 D_3 - 7038)}{6} + \frac{D_2 (-4 D_1 - 2 D_2 - D_3 + 3518)}{6} + \frac{D_3 (-4 D_1 - D_2 - 2 D_3 + 3518)}{6} + \frac{D_{123} (3 D_{123} - 3518)}{3} + 10290,$$

$$Sh_2^\eta(x_0, T-t_0) = \frac{D_2 (2 D_1 + D_2 + 2 D_3 - 3519)}{3} - \frac{871 D_2}{2000} - \frac{19 D_{13}}{4000} - \frac{D_1 (D_1 + 2 D_2 + 2 D_3 - 3519)}{6} - \frac{D_3 (2 D_1 + 2 D_2 + D_3 - 3519)}{6} - \frac{D_{123}^2}{2} + \frac{D_1 (-2 D_1 - 4 D_2 - D_3 + 3518)}{6} + \frac{D_2 (5 D_1 + 4 D_2 + 5 D_3 - 7038)}{6} + \frac{D_3 (-D_1 - 4 D_2 - 2 D_3 + 3518)}{6} + \frac{D_{123} (3 D_{123} - 3518)}{3} + 1310321,$$

$$Sh_3^\eta(x_0, T-t_0) = \frac{1781 D_{12}}{4000} + \frac{29 D_3}{2000} - \frac{D_1 (D_1 + 2 D_2 + 2 D_3 - 3519)}{6} - \frac{D_2 (2 D_1 + D_2 + 2 D_3 - 3519)}{6} + \frac{D_3 (2 D_1 + 2 D_2 + D_3 - 3519)}{3} - \frac{D_{123}^2}{2} + \frac{D_1 (-2 D_1 - D_2 - 4 D_3 - 3518)}{6} + \frac{D_2 (-D_1 - 2 D_2 - 4 D_3 + 3518)}{6} + \frac{D_3 (5 D_1 + 5 D_2 + 4 D_3 - 7038)}{6} + \frac{D_{123} (3 D_{123} - 3518)}{3} + 1534864.$$

2.6 Значение информации

2.6.1 Некооперативный случай

Рассчитаем характеристику «значение информации», описанную в разделе (1.5) для трех предприятий города Пенза.

Данные для выигрыша каждого игра в ситуации равновесия по Нэшу приведены в таблице (4). Теперь необходимо рассчитать выигрыши игроков в случае неполной информированности о параметрах модели. Известные параметры (таблица (3)) необходимо подставить в (15), таким образом получаем:

Таблица 10: Выигрыш в случае плохой информированности.

Компания	$K_i(x_0, T - t_0, \bar{u}^{NE})$
"Фотон"	$10290 - 3519D_1$
"Пензадизельмаш"	$1310321 - 3519D_2$
"Пензинский хлебзавод №2"	$1534564 - 3519D_3$

Для того, чтобы оценить значение информации в деятельности компаний необходимо рассмотреть (17) для каждого игрока, то есть разность найденных значений в таблицах (4) и (15). Результат содержится в таблице (11)

Таблица 11: Значение информации

$K_1(x_0, T, u^{NE}) - K_1(x_0, T, \bar{u}^{NE}) =$	$0, 2D_{23} + D_1D_{123} - 0, 5D_1^2$
$K_2(x_0, T, u^{NE}) - K_2(x_0, T, \bar{u}^{NE}) =$	$0, 2D_{13} + D_2D_{123} - 0, 5D_2^2$
$K_3(x_0, T, u^{NE}) - K_3(x_0, T, \bar{u}^{NE}) =$	$0, 4D_{12} + D_3D_{123} - 0, 5D_3^2$

Мы можем оценить выигрыш относительно, для этого необходимо воспользоваться формулой (18). Полученный результат содержится в таблице (12).

Теперь узнаем, как NVI_i зависит от D_i . Для этого зафиксируем D_j и $D_k, i \neq j \neq k$, для наглядности выражения нанесены на график: рис. (6).

Теперь попробуем рассмотреть $D_i = d_i, i = \overline{1, 3}$ и выпишем для такого случая значения $NVI_i, i = \overline{1, 3}$ с помощью формулы (18), полученные значения запишем в таблицу (13).

Таблица 12: Относительное значение информации для некооперативного случая

NVI_1	$\frac{0,2D_{23}+D_1D_{123}-0,5D_1^2}{0,2D_{23}-0,5D_1^2+D_1(D_{123}-3519)+10290}$
NVI_2	$\frac{0,2D_{13}+D_2D_{123}-0,5D_2^2}{0,2D_{13}-0,5D_2^2+D_2(2D_{123}-3519)+1310321}$
NVI_3	$\frac{0,4D_{12}+D_3D_{123}-0,5D_3^2}{0,4D_{12}-0,5D_3^2+D_3(2D_{123}-3519)+1534864}$

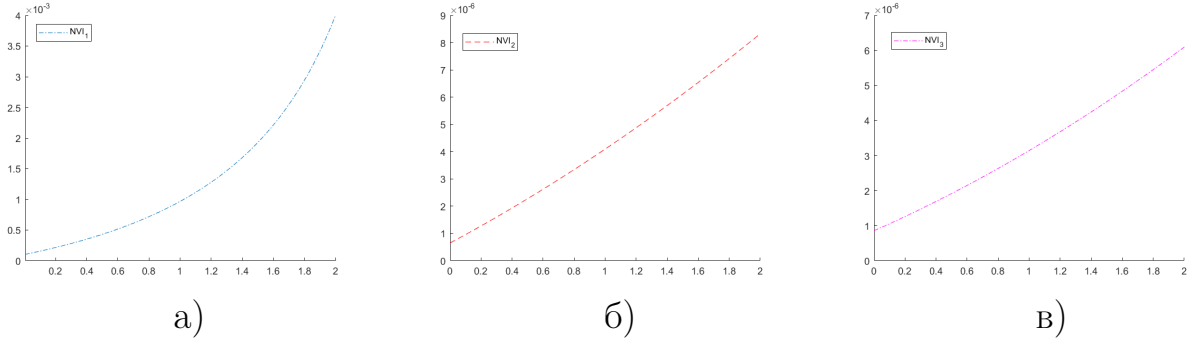


Рис. 6: Зависимость: а) NVI_1 от D_1 , б) NVI_2 от D_2 , в) NVI_3 от D_3 .

Также попробуем самостоятельно установить значение штрафа в последний момент времени. Для этого положим $D_j = d_j$, $D_k = d_k$ для значений, вычисленных в таблице (13), возьмем производную по D_i и решим данное уравнение, отбросив отрицательные значения. Такую процедуру проведем для каждого игрока. Полученные результаты запишем в таблицу 14.

2.6.2 Кооперативный случай

Характеристику значения информации для кооперативного случая на реальных данных города Пенза можно оценить, используя рассуждения из раздела (1.5.2).

Компоненты вектора Шепли уже были найдены для каждого игрока (28) – (29) в случае полной информированности о параметрах модели. Теперь необходимо найти компоненты вектора Шепли в случае недостатка информации с помощью имеющихся коэффициентов (таблица (3)).

Воспользуемся формулой (19), чтобы в процентах оценить значения NVI_i^C .

Таблица 13: Относительная величина значения информации в некооперативном случае при $D_i = d_i, i = \overline{1, 3}$.

Компания	Точное значение NVI_i	NVI_i
"Фотон"	$\frac{300441607265373388800}{29057740980219797159621}$	0,01033%
"Пензадизельмаш"	$\frac{18527211309631057222583294361600}{263711617697357499436366373772242819}$	0,00007%
"Пензинский хлебзавод №2"	$\frac{22616674902786953697591243571200}{231476450038262149533537480592064633}$	0,00009%

Таблица 14: Значения для штрафов

D_1	D_2	D_3
7,01	745,8	872,92

Фиксируя параметры D_j и $D_k, i \neq j \neq k$, можно на рис. (7) рассмотреть зависимость NVI_i^C от D_i .

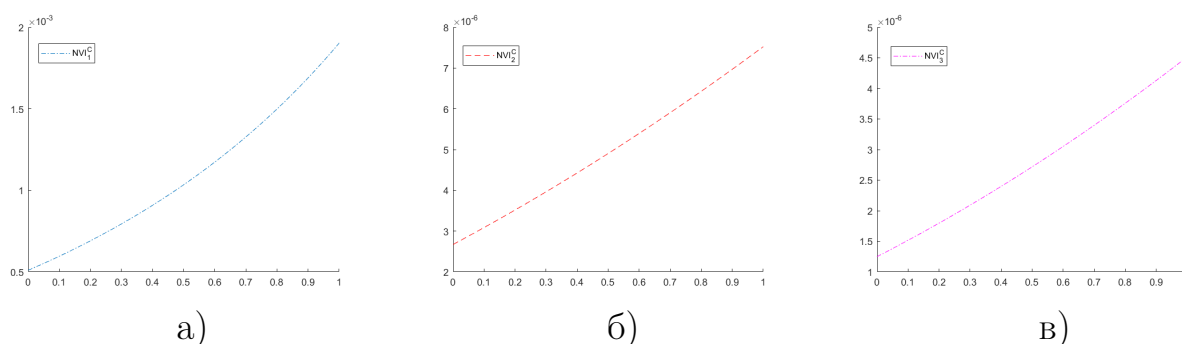


Рис. 7: Зависимость: а) NVI_1^C от D_1 , б) NVI_2^C от D_2 , в) NVI_3^C от D_3 .

Немного упростим модель и примем $D_i = d_i, i = \overline{1, 3}$ и выпишем для такого случая значения $NVI_i^C, i = \overline{1, 3}$ с помощью формулы (19), полученные значения запишем в таблицу (16).

Таблица 15: Компоненты вектора Шепли в случае неполной информированности.

Компания	$\overline{Sh}_i^\alpha(x_0, T - t_0)$
"Фотон"	$-3519D_1 + 0,5D_2 + 0,5D_3 + 10290$
"Пензадизельмаш"	$0,5D_1 - 3519D_2 + 0,5D_3 + 1310321$
"Пензинский хлебзавод №2"	$0,7D_1 + 0,7D_2 - 3519D_3 + 1534864$

Таблица 16: Относительная величина значения информации кооперативного случая при $D_i = d_i, i = \overline{1, 3}$.

Компания	Точное значение NVI_i^C	NVI_i^C
"Фотон"	$\frac{27921042256208855040}{1937507496706619883499}$	0,01441%
"Пензадизельмаш"	$\frac{25735174612346615568069243699200}{263711915763911838793810714806628227}$	0,00009%
"Пензинский хлебзавод №2"	$\frac{28804671269386835704093763174400}{231476725235755653900356509518266489}$	0,00012%

Попробуем самостоятельно установить значение штрафа в последний момент времени. Для этого положим $D_j = d_j, D_k = d_k$ для значений, вычисленных по формуле $\frac{Sh_i - \overline{Sh}_i}{S_i}$, возьмем производную по D_i и решим данное уравнение, отбросив отрицательные значения. Такую процедуру проведем для каждого игрока. Полученные результаты запишем в таблицу (17)

Таблица 17: Значения для штрафов

D_1	D_2	D_3
6,66	745,47	872,81

2.7 Ценность кооперации

Для того, чтобы рассчитать характеристику, введенную в разделе (1.6), необходимо воспользоваться формулой (20), то есть вычислить значения вектора Шепли и выигрыша игрока в ситуации равновесия по Нэшу.

Значения вектора Шепли рассчитаны в выражениях (28) – (29), а выигрыш каждого игрока - в таблице (3). Воспользовавшись формулой (20),

получим следующие результаты:

$$\begin{aligned}
Sh_1^\alpha - K_1 = & \frac{D_1 (D_1 - 3520)}{3} - \frac{421 D_{23}}{2000} - D_1 (D_{123} - 3519) - \frac{D_2 (D_2 - 3520)}{6} - \\
& - \frac{D_3 (D_3 - 3520)}{6} + \frac{D_1 (4 D_1 + 2 D_2 + 2 D_3 - 7038)}{6} + \\
& + \frac{D_2 (2 D_1 - 2 D_2 - 4 D_3 + 3519)}{6} + \frac{D_3 (2 D_1 - 4 D_2 - 2 D_3 + 3519)}{6} - \\
& - \frac{D_1^2}{2} - \frac{D_2^2}{4} - \frac{D_3^2}{4} - \frac{4 D_1 D_2}{3} - \frac{4 D_1 D_3}{3} - \frac{D_2 D_3}{3} + \frac{D_{123} (3 D_{123} - 3518)}{3} + \frac{1265879}{6000000},
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
Sh_2^\alpha - K_2 = & \frac{D_2 (D_2 - 3520)}{3} - \frac{213 D_{23}}{1000} - D_2 (D_{123} - 3519) - \frac{D_1 (D_1 - 3520)}{6} - \\
& - \frac{D_3 (D_3 - 3520)}{6} + \frac{D_1 (-2 D_1 + 2 D_2 - 4 D_3 + 3519)}{6} + \\
& + \frac{D_2 (2 D_1 + 4 D_2 + 2 D_3 - 7038)}{6} + \frac{D_3 (-4 D_1 + 2 D_2 - 2 D_3 + 3519)}{6} - \\
& - \frac{D_1^2}{4} - \frac{D_2^2}{2} - \frac{D_3^2}{4} - \frac{4 D_1 D_2}{3} - \frac{D_1 D_3}{3} - \frac{4 D_2 D_3}{3} + \frac{D_{123} (3 D_{123} - 3518)}{3} + \frac{845331}{4000000},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Sh_3^\alpha - K_3 = & \frac{D_3 (D_3 - 3520)}{3} - \frac{219 D_{12}}{500} - D_3 (D_{123} - 3519) - \frac{D_1 (D_1 - 3520)}{6} - \\
& - \frac{D_2 (D_2 - 3520)}{6} + \frac{D_1 (-2 D_1 - 4 D_2 + 2 D_3 + 3519)}{6} + \\
& + \frac{D_2 (-4 D_1 - 2 D_2 + 2 D_3 + 3519)}{6} + \frac{D_3 (2 D_1 + 2 D_2 + 4 D_3 - 7038)}{6} - \\
& - \frac{D_1^2}{4} - \frac{D_2^2}{4} - \frac{D_3^2}{2} - \frac{D_1 D_2}{3} - \frac{4 D_1 D_3}{3} - \frac{4 D_2 D_3}{3} + \frac{D_{123} (3 D_{123} - 3518)}{3} + \frac{1040631}{4000000}.
\end{aligned} \tag{31}$$

Теперь каждое выражение (30) – (31) необходимо разделить на соответствующее значение Sh_i^α , которое рассчитано в уравнениях (28) – (29), тогда мы, воспользуясь формулой (21), получим относительную величину

характеристики «ценность кооперации». Для наглядности нанесем данные выражения на график, зафиксировав некоторые параметры, имеем рис. (8)

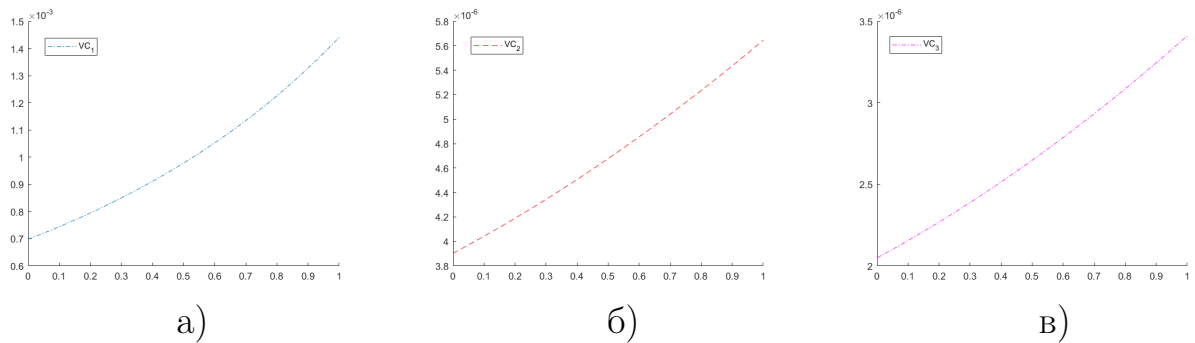


Рис. 8: Зависимость: а) NVC_1 от D_1 , б) NVC_2 от D_2 , в) NVC_3 от D_3 .

Упростим задачу и примем $D_i = 0, i = \overline{1, 3}$. Тогда с помощью формулы (21), вычислим значения NVC_i для каждой компании, результаты запишем в таблицу (18).

Таблица 18: Относительная величина ценности кооперации при $D_i = 0, i = \overline{1, 3}$, построенная на основе α -характеристической функции.

Компания	Точное значение NVC_i	NVC_i
"Фотон"	$\frac{13918486798574551040}{6788697102758407716843}$	0,00205%
"Пензадизельмаш"	$\frac{4258093633419392062014776934400}{264013602837403303441733382954463107}$	0,000016%
"Пензинский хлебзавод №2"	$\frac{3931392764348097414698945740800}{231942220896974159375411811218096249}$	0,000017%

Аналогичные рассуждения можно применить, используя вектор Шепли, построенный на основе других характеристических функций. Тогда, используя δ -характеристическую функцию, получим результаты, записанные в таблицу (19).

Таблица 19: Относительная величина ценности кооперации при $D_i = 0, i = \overline{1, 3}$, построенная на основе δ -характеристической функции.

Компания	Точное значение NVC_i	NVC_i
"Фотон"	$\frac{13918486798574551040}{6788697102758407716843}$	0,002%
"Пензадизельмаш"	$\frac{4258093633419392062014776934400}{264013602837403303441733382954463107}$	0,00002%
"Пензинский хлебзавод №2"	$\frac{3931392764348097414698945740800}{231942220896974159375411811218096249}$	0,002%

При использовании ζ -характеристической функции, получим результаты, записанные в таблицу (20).

Таблица 20: Относительная величина ценности кооперации при $D_i = 0, i = \overline{1, 3}$, построенная на основе ζ -характеристической функции.

Компания	Точное значение NVC_i	NVC_i
"Фотон"	$\frac{1984891167019368448}{1357731432489754587951}$	0.0014%
"Пензадизельмаш"	$\frac{9222834631549025242374681395200}{792040772997747223233690712166895241}$	0,00001%
"Пензинский хлебзавод №2"	$\frac{5734146724450618735736966348800}{231942238924513760400625021598302329}$	0,00002%

В результате использования η -характеристической функции при построении вектора Шепли, получим результаты, записанные в таблицу (21).

Таблица 21: Относительная величина ценности кооперации при $D_i = 0, i = \overline{1, 3}$, построенная на основе η -характеристической функции.

Компания	Точное значение NVC_i	NVC_i
"Фотон"	$\frac{1984891167019368448}{1357731432489754587951}$	0,0014%
"Пензадизельмаш"	$\frac{9222834631549025242374681395200}{792040772997747223233690712166895241}$	0,00001%
"Пензинский хлебзавод №2"	$\frac{5734146724450618735736966348800}{231942238924513760400625021598302329}$	0,00002%

Снова мы можем самостоятельно установить штраф в конечный момент времени. Для этого необходимо от NVC_i взять производную по D_i ,

в то время как $D_j = D_k = 0$, приравнять к нулю и решить, отбросив отрицательные значения, тогда получим величины штрафов, записанные в таблицу (22).

Таблица 22: Значения для штрафов NVC

	D_1	D_2	D_3
α	6,3	744,85	872,53
δ	6,3	744,85	872,53
ζ	6,22	744,81	872,51
η	6,22	744,81	872,51

Можно заметить, что найденные значения штрафов практически не отличаются в зависимости от использования характеристической функции для построения вектора Шепли.

Вывод

В данной работе была изучена теоретико-игровая модель управления объемами вредных выбросов, которая имеет не только интегральную, но и терминальную составляющую. Актуальность темы исследования демонстрируется изучением модели на основе реальных данных города Пенза. Базируясь на проделанной работе, можно сделать следующие выводы.

Во-первых были введены две новые характеристики для дифференциальных игр: значение информации и ценность кооперации. Первый параметр, впервые введенный в данной работе (по аналогии с «value of information»), был использован для оценки потерь игроков в случае плохой информированности о параметрах модели. А точнее, в предположении, что штраф за загрязнение окружающей среды в последний момент времени равен нулю. Второй параметр, также рассмотренный в настоящей работе впервые, несет следующий смысл: потери игрока в случае отказа от участия в кооперации. Эта характеристика была построена на основе вектора Шепли с помощью различных типов характеристических функций. Также обе характеристики были нормированы и выражены в процентном соотношении.

Во-вторых были найдены максимально возможные штрафы, которые могут быть назначены игрокам в конечный момент времени. Нужно отметить, что найденные значения штрафов практически не отличаются в зависимости от использования характеристической функции для построения вектора Шепли.

В-третьих, были выявлены связи между характеристическими функциями различных типов. Ранее это было описано для модели без терминального члена, а в данной работе аналогичные действия распространены на модель с функционалом в форме Больца.

Заключение

В процессе изучения линейно–квадратичной дифференциальной игры управления объемами вредных выбросов с функционалом в форме Больца были введены две новые характеристики. Применение теоретико–игрового подхода показало, что решения проблемы загрязнения атмосферного воздуха при совместном урегулировании может принести экономическую выгоду игрокам и улучшить экологическую обстановку в регионе.

При рассмотрении модели на реальных данных города Пенза, были вычислены потери игроков в случае плохой информированности о параметрах модели и в случае отказа от кооперации. Оказалось, что полученные потери не существенно влияют на прибыль компаний.

Таким образом, все поставленные задачи были выполнены.

В дальнейшем планируется продолжать работу с моделью данного типа. Например, видится возможным распространение введенных характеристик на случай частичной кооперации или на случай распада гранд-коалиции.

Список литературы

- [1] Haurie A., Zaccour G. Differential game models of global environmental management // *Annals of Dynamic Games*, Boston, 1994. P. 124–132.
- [2] Громова Е. В. Теоретико–игровые задачи со случайной продолжительностью: диссертация доктора физико–математических наук. Санкт–Петербургский государственный университет, Санкт–Петербург, 2016.
- [3] Gromova E. The Shapley value as a sustainable cooperative solution in differential games of three players // *Recent Advances in Game Theory and Applications, Static and Dynamic Game Theory: Foundations and Applications*. 2016. P. 67–91.
- [4] Gromova E., Marova E. On the characteristic function construction technique in differential games with prescribed and random duration // *Contributions to Game Theory and Management*, 2018. Vol. 11. P. 53–66.
- [5] Викулова А. А. О нестандартном построении характеристической функции в кооперативной игре управления вредными выбросами // *Процессы управления и устойчивость*, 2016. Т. 3, No 1. С. 617–621.
- [6] Фон Нейман, Дж. и О. Моргенштейн. Теория игр и экономическое поведение / Фон Нейман, Дж. и О. Моргенштейн. - М.: Наука, 1970, - 625 с.
- [7] Петросян Л. А. Кооперативные дифференциальные игры и их приложения / Л. А. Петросян, Н. Н. Данилов. - Томск: Изд-во Томского университета, 1985, - 273 с.
- [8] Petrosjan L. Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction / L. Petrosjan, G. Zaccour. // *Journal of Economic Dynamics and Control*, 27 (3), 2003, P. 381–398.

- [9] Gromova E., Petrosyan L. On an approach to constructing a characteristic function in cooperative differential games // Autom Remote Control, 2017. Vol. 78(9). P. 1680–1692.
- [10] Gromova E., Marova E. Coalition and Anti-coalition Interaction in Cooperative Differential Games // IFAC–PapersOnLine, 2018. Vol. 51. P. 479–483.
- [11] Барсу́к П. И. Совместное урегулирование загрязнений окружающей среды методами кооперативных игр: выпускная квалификационная работа бакалавра. Санкт–Петербургский государственный университет, Санкт–Петербург, 2020. <http://hdl.handle.net/11701/26508>
- [12] A substitute for the classical Neumann–Morgenstern characteristic function in cooperative differential games. Ekaterina Gromova, Ekaterina Marova, Dmitry Gromov
- [13] Савин К. А., Громова Е. В. О свойствах характеристических функций в игре с многосторонними внешними влияниями. // Процессы управления и устойчивость. 2021. (Принято к публикации).
- [14] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов // Москва: Наука, 1983. С. 393.
- [15] Raiffa H., Schlaifer R. Applied Statistical Decision Theory. New York: Wiley, 1961. 356 p
- [16] Эколого-экономическая эффективность мероприятий по уменьшению выбросов в атмосферный воздух на предприятии ЗАО "Фотон" (г. Пенза). 2019. №1.
- [17] Образование и наука в современном мире. Инновации. 2018. №5. С. 226-232
- [18] Образование и наука в современном мире. Инновации. 2018. №5. С. 233-240.