Санкт–Петербургский государственный университет

БЕЛОВ Александр Иванович

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Разработка новых критериев устойчивости линейных систем с запаздыванием

Уровень образования: бакалавриат
Направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
Основная образовательная программа СВ.5005.2017 «Прикладная математика, фундаментальная информатика и программирование»
Профиль «Прикладная математика, информатика и процессы управления»

Научный руководитель:
кандидат физ.-мат. наук, доцент
Александрова Ирина Васильевна

Рецензент:
кандидат физ.-мат. наук, доцент
Еремин Алексей Сергеевич

Санкт-Петербург
2021 г.

Содержание

Обозначения и сокращения

- $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ — множества вещественных, комплексных, натуральных и целых чисел соответственно,
- $\mathrm{Re}(s)$ — вещественная часть числа $s \in \mathbb{C}$,
- $\det(A)$ — определитель матрицы A,
- $\lambda_{\min}(W)$ — минимальное собственное число положительно-определенной симметричной матрицы $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$,
- $PC\left([-h,0],\mathbb{R}^n\right)$ — пространство кусочно-непрерывных функций, определенных на отрезке $[-h,0]$ и действующих в пространство $\mathbb{R}^n$,
- $\|x\|$ — евклидова норма вектора $x \in \mathbb{R}^n$,
- $\|X\|$ — евклидова норма матрицы $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$,
- $\|\varphi\|_h := \sup \|\varphi(\theta)\|$, $\theta \in [-h,0]$, где функция $\varphi \in PC\left([-h,0],\mathbb{R}^n\right)$,
- $M := \sum_{i=0}^{m} \|A_i\|$, где A_i — матрицы системы (1.1),
- $L := 1+\sum_{i=1}^{m} \big\|A_i\big\| h_i$, где A_i — матрицы системы (1.1), h_i — величины запаздывания
- $\|U\| := \max \|U(\tau)\|$, $\tau \in [0,h]$, где U — матрица Ляпунова системы (1.1),
- D — множество функций $\varphi \in PC([-h,0],R^n)$ таких, что

  $$\varphi(\theta) = e^{\alpha\theta}(\cos(\beta\theta)C_1 - \sin(\beta\theta)C_2), \quad \theta \in [-h,0],$$

  где $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяют условиям $\big\|C_1\big\| = 1$, $\big\|C_2\big\| \leqslant 1$, числа α, β принадлежат отрезку $[0,M]$,
- $\lceil x \rceil$ — верхняя целая часть числа x, т. е. единственное число $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $x \leqslant n < x+1$.

Введение

В данной работе предложен критерий устойчивости линейных дифференциальных систем с произвольным числом запаздываний, основанный на методе функционалов Ляпунова – Красовского и так называемых матрицах Ляпунова.

С помощью дифференциальных систем с запаздыванием описываются многочисленные процессы, происходящие в физике, химии, биологии и других науках. Благодаря изучению таких систем можно более детально проанализировать и предсказать поведение этих процессов в будущем. В качестве примера таких процессов можно привести изменение температуры воды в душе в зависимости от поворота крана, происходящее не сразу, а с некоторым запаздыванием, поскольку воде с новой температурой требуется преодолеть расстояние от крана до конца душевой лейки. Еще один пример из биологии: одним из первых уравнений, описывающих численность популяции, было уравнение Мальтуса $\dot{x}(t) = ax(t)$, в котором скорость прироста популяции пропорциональна числу всех особей, живущих в данный момент. Однако, строго говоря, численность популяции зависит не от всех особей, а только от взрослых, способных размножаться. Но каждая такая взрослая особь была рождена, скажем, h лет назад, так что численность популяции в настоящее время зависит от числа особей, родившихся h лет назад, т. е. описывается уравнением $\dot{x}(t) = ax(t-h)$.

Одной из важнейших характеристик решений дифференциальных уравнений является устойчивость. Грубо говоря, если решение устойчиво, то другие решения, немного отличающиеся от него в начальный момент времени, будут оставаться вблизи него при любых значениях времени. Если решение неустойчиво, то слабо отклоняющиеся от него решения в начальный момент в конце могут отклоняться довольно сильно. Примером использования устойчивости решений может служить пример В. И. Арнольда [1, с. 24–26]: рыбы в пруду или озере, которых люди решили постоянно вылавливать в одном и том же количестве, при этом желая максимизировать количество добываемых рыб, но так, чтобы все рыбы не исчезли. Такая модель отлова возможна и имеет постоянное решение, приводящее к равновесию в численности рыб, но это решение неустойчивое, что может привести к тому, что небольшое превышение нормы по отлову рыб приведет к гибели всей популяции. Однако, если использовать вторую модель отлова, согласно которой в каждый момент времени вылавливается количество рыб, пропорциональное текущему количеству, мы придем к положению равновесия, которое будет устойчивым. Поэтому небольшое превышение по количеству отлавливаемых рыб не приведет к исчезновению целой популяции, а лишь немного снизит ее общую численность, причем количество вылавливаемых рыб в положении равновесия будет точно таким же, как и в случае с первой моделью.

Таким образом, действительно очень важным на практике, например, в биологии или в физике, является исследование того, является ли решение системы устойчивым.

Устойчивость линейных систем с запаздыванием, как и в случае линейных систем без запаздывания, можно исследовать с помощью нахождения собственных чисел систем, однако в случае с запаздыванием этот подход несколько теряет свое преимущество, поскольку собственных чисел становится бесконечно много.

Одним из подходов, используемых для исследования устойчивости линейных систем с запаздыванием, является построение матрицы Ляпунова и изучение положительной определенности квадратичного функционала с заданной отрицательно-определенной производной вдоль решений системы, построенного с помощью этой матрицы [13].

Эти функционалы можно использовать не только для анализа устойчивости системы, но и для оценки робастной устойчивости, построения экспоненциальных оценок решений системы, построения стабилизирующего управления и в других задачах [13].

Одной из основных проблем описанного подхода является конструктивная проверка положительной определенности квадратичных функционалов. Данная работа направлена на решение этой проблемы.

Постановка задачи

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{m} A_i x(t - h_i), \quad t \geqslant 0, \tag{1.1}$$

где $0 = h_0 < h_1 < \cdots < h_m =: h$ и A_i, $i = 0, 1, \ldots, m$ — некоторые вещественные матрицы размерности $n \times n$.

Определение 1.1. *[13] Пусть W — положительно-определенная симметричная матрица размерности $n \times n$. Непрерывная матрица*

$$U \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times n}$$

называется матрицей Ляпунова системы (1.1), ассоциированной с W, если она удовлетворяет трем свойствам:

1. *Динамическое свойство:*

$$U'(\theta) = \sum_{i=0}^{m} U(\theta - h_i) A_i, \quad \theta \geqslant 0,$$

под $U'(0)$ понимается правая односторонняя производная,

2. *Симметрическое свойство:*

$$U(-\theta) = U^T(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R},$$

3. *Алгебраическое свойство:*

$$\sum_{i=0}^{m} [U(-h_i) A_i + A_i^T U(h_i)] = -W.$$

Определение 1.2. *[13] Пусть существует матрица Ляпунова U системы (1.1), ассоциированная с некоторой матрицей W. Определим квадра-*

тичный функционал

$$v_0\colon PC\left([-h,0],\mathbb{R}^n\right)\to\mathbb{R},$$

$$v_0(\varphi):=\varphi^T(0)U(0)\varphi(0)+2\varphi^T(0)\sum_{i=1}^{m}\int_{-h_i}^{0}U(-h_i-\theta)A_i\varphi(\theta)d\theta+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\int_{-h_i}^{0}\int_{-h_j}^{0}\varphi^T(\theta_1)A_i^TU(\theta_1-\theta_2+h_i-h_j)A_j\varphi(\theta_2)d\theta_1 d\theta_2,$$

где $PC\left([-h,0],\mathbb{R}^n\right)$ — пространство кусочно-непрерывных функций, определенных на отрезке $[-h,0]$ и действующих в пространство $\mathbb{R}^n$.

Целью работы является разработка новых критериев экспоненциальной устойчивости системы (1.1). Основная задача сводится к нахождению конструктивных условий положительной определенности квадратичного функционала из определения 1.2.

Вторая задача касается практического применения полученных условий для исследования устойчивости системы (1.1) и состоит в написании программы, позволяющей проверить экспоненциальную устойчивость системы (1.1) за конечное число математических операций.

Обзор литературы

В монографии [4] собраны классические результаты по теории линейных уравнений с запаздыванием.

На настоящий момент существует два класса подходов к изучению экспоненциальной устойчивости системы (1.1).

Первая группа подходов основана на нахождении корней характеристического уравнения

$$\det\left(sE - \sum_{i=0}^{m} e^{-sh_i} A_i\right) = 0 \tag{1.2}$$

системы (1.1), а вторая — на применении аналога второго метода Ляпунова для систем с запаздыванием.

Методы из первой группы применимы в том случае, когда запаздывание системы рассматривается как параметр. Они основаны на нахождении условий, при которых уравнение (1.2) имеет чисто мнимые корни.

В данной группе имеются как аналитические методы, сводящие задачу к поиску корней полинома от двух переменных (2-D stability tests [9]), применимые для систем небольших размерностей, с помощью которых можно определить максимальную величину запаздывания, при котором система устойчива, в предположении об устойчивости системы без запаздывания, так и методы, которые можно эффективно реализовать численно, например, различные матричные тесты (constant-matrix tests [9]), методы, основанные на исследовании пучков матриц (matrix-pencil techniques [15]).

Также отметим метод D-разбиений [15]. Этот метод позволяет найти границы областей в пространстве параметров, в каждой из которых всем системам соответствует одинаковое число корней характеристического уравнения (1.2), лежащих в правой комплексной полуплоскости. В частности, те области, в которых таких корней нет, являются областями экспоненциальной устойчивости системы.

Для проверки устойчивости системы (1.1) с фиксированными матрицами системы и величинами запаздываний используются методы второй группы. В данной группе содержится два метода, первый называется методом функционалов Ляпунова–Красовского, второй — методом Разумихина.

Для изучения экспоненциальной устойчивости системы (1.1) более эффективен первый метод, однако метод Разумихина применим к более широкому классу систем [9].

Метод функционалов Ляпунова–Красовского основан на теореме о том, что система (1.1) экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда найдется положительно-опреденный функционал, производная которого вдоль решений системы отрицательно определена [9].

На практике данный метод используется двумя способами. В первом способе берется произвольный положительно-определенный функционал и исследуется, когда его производная вдоль решений системы отрицательно определена. В этом случае получаются достаточные условия экспоненциальной устойчивости системы, выраженные в виде некоторых линейных матричных неравенств (LMI) [7].

Во втором способе строится функционал с заданной отрицательной производной вдоль решений системы и исследуются условия, при которых он положительно определен. Поскольку в данном способе функционал берется не произвольным образом, а строится по системе, могут быть получены необходимые и достаточные условия ее экспоненциальной устойчивости.

В статьях [3], [10], [11], [12] можно проследить историю создания теории исследования экспоненциальной устойчивости систем с запаздыванием (1.1) через функционалы с заданной отрицательно-определенной производной вдоль решений системы. В статье [12] представлен современный вид квадратичного функционала из определения 1.2, построенного через матрицу Ляпунова (см. определение 1.1).

В книге [13] можно найти обзор результатов, связанных с методом функционалов с заданной производной.

Проблема описанного метода заключается в том, что сложно найти конструктивные условия положительной определенности квадратичного функционала из определения 1.2.

В недавней работе [8] найден способ проверки положительной определенности функционалов за конечное число математических операций, в котором задача сводится к анализу положительной определенности некоторой матрицы. Однако размерность получаемой матрицы оказывается довольно большой, что делает полученный способ малоприменимым на практике.

В текущей работе также получен способ проверки экспоненциальной устойчивости системы за конечное число операций, принципиально отличающийся от способа в [8] лишь тем, что использованы другие начальные функции для подстановки в определение (1.2) квадратичного функционала. В [8] использовались начальные функции, построенные с помощью фундаментальной матрицы системы (из-за чего и получается большая размерность матрицы, связанная с экспоненциальной природой фундаментальной матрицы), здесь используются начальные функции, соответствующие решениям неустойчивых систем – решениям, построенным по собственным числам с положительными вещественными частями. Показано, что положительную определенность функционалов с заданной производной достаточно проверять лишь на таких начальных функциях. Тем не менее, полученный в текущей работе критерий устойчивости также встречает все те проблемы, что и критерий, полученный в работе [8].

Большинство известных методов изучения экспоненциальной устойчивости системы (1.1) сталкиваются с существенными трудностями в том случае, когда запаздывания в системе несоизмеримы [9].

Глава 1. Системы линейных уравнений с запаздыванием

Приведем основные определения и вспомогательные утверждения, используемые в работе.

Определение 1.1. *[4] Решением системы (1.1) с начальной функцией φ, где $\varphi \in PC\left([-h,0],\mathbb{R}^n\right)$, назовем любую непрерывную при $t > 0$ и непрерывно-дифференцируемую при $t > h$ функцию $x(t)$, такую что*

$$\begin{aligned} x(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-h,0], \\ \dot{x}(t) &= \sum_{i=0}^{m} A_i x(t-h_i), \quad t > 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

При этом равенство (1.1) считается выполненным на отрезке $[0,h]$ за исключением, быть может, конечного числа точек.

Определение 1.2. *[4] Система (1.1) называется экспоненциально устойчивой, если существуют числа $\gamma \geqslant 1, \sigma > 0$ такие, что любое решение $x(t)$ системы (1.1) с начальной функцией φ удовлетворяет неравенству*

$$\|x(t)\| \leqslant \gamma e^{-\sigma t} \|\varphi\|_h, \quad t \geqslant 0.$$

Определение 1.3. *[4] Число $s \in \mathbb{C}$ называется собственным числом системы (1.1), если*

$$\det\left(sE - \sum_{i=0}^{m} e^{-sh_i} A_i\right) = 0.$$

Определение 1.4. *[4] Пусть $s \in \mathbb{C}$ — собственное число системы (1.1). Вектор $C \in \mathbb{C}^n$ называется собственным вектором, соответствующим числу s, если $C \neq 0$ и*

$$\left(sE - \sum_{i=0}^{m} e^{-sh_i} A_i\right) C = 0.$$

Определение 1.5. *[4] Будем говорить, что система (1.1) удовлетворяет условию Ляпунова, если у нее не существует числа $s \in \mathbb{C}$ такого, что s и $-s$ — собственные числа системы.*

Теорема 1.1. *[13] Система (1.1) является экспоненциально устойчивой тогда и только тогда, когда все ее собственные числа лежат в открытой левой полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) < 0\}$.*

Лемма 1.1. *[8] Для произвольной матрицы*

$$F \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad \det(F) = 0$$

существуют векторы $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^n$ такие, что:

1. $F(C_1 + iC_2) = 0$,
2. $\|C_1\| = 1$, $\|C_2\| \leq 1$,
3. $C_1^T C_2 = 0$.

Далее в работе везде, где упоминается матрица Ляпунова U или квадратичный функционал v_0 для системы (1.1), предполагается выполнение условия Ляпунова. В этом случае известно [13], что для любой положительно-определенной симметричной матрицы W матрица Ляпунова U и квадратичный функционал v_0 существуют и единственны.

Глава 2. Критерий экспоненциальной устойчивости линейной системы с запаздыванием

В данной главе получен новый критерий экспоненциальной устойчивости системы (1.1).

В работе [2] (см. теорему 2.4) с помощью начальных функций

$$\varphi(\theta) = e^{s\theta}C, \quad \theta \in [-h, 0],$$

где $s = \alpha + i\beta$ — собственное число системы (1.1) с положительной вещественной частью, $C = C_1 + iC_2$ — соответствующий ему собственный вектор, доказано следующее утверждение. Если система (1.1) неустойчива, то существует функция из этого семейства, на вещественной части которой функционал v_0 принимает отрицательное значение.

Более строго, из доказательства теоремы 2.4 [2] следует следующая

Лемма 2.1. *Пусть система (1.1) удовлетворяет условию Ляпунова. Тогда для любого собственного числа системы $s = \alpha + i\beta$ с положительной вещественной частью $\alpha > 0$ и любых векторов $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^n$, $C_1 \neq 0$ таких, что функция $x(t) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t)C_1 - \sin(\beta t)C_2)$ является решением системы (1.1) следует*

$$v_0(\varphi) \leqslant -\mu \left\|\varphi(0)\right\|^2, \quad \mu = \frac{\lambda_{\min}(W)}{4\alpha},$$

где $\varphi\colon [-h, 0] \to \mathbb{R}^n,\ \forall \theta \in [-h, 0]\ \varphi(\theta) = e^{\alpha\theta}\left(\cos(\beta\theta)C_1 - \sin(\beta\theta)C_2\right).$

Из этой леммы вытекает следующий критерий экспоненциальной устойчивости для линейной системы с запаздыванием.

Теорема 2.1 (Критерий устойчивости линейной системы с запаздыванием)**.** *Система (1.1) экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию Ляпунова и* $\forall \varphi \in D\, v_0\,(\varphi) > 0$. *Определение множества D приведено на с. 3.*

Доказательство. Необходимость. Пусть система (1.1) экспоненциально устойчива. Из [13] известно, что в этом случае она удовлетворяет условию

Ляпунова и для любой функции $\varphi \in PC([-h,0],\mathbb{R}^n)$ существует интеграл $\int_0^\infty x^T(t)Wx(t)dt$, где $x(t)$ — решение системы (1.1) с начальной функцией φ, причем

$$v_0(\varphi) = \int_0^\infty x^T(t)Wx(t)dt.$$

Отсюда имеем $v_0(\varphi) = \int_0^\infty x^T(t)Wx(t)dt \geqslant \lambda_{\min}(W)\int_0^\infty \|x(t)\|^2 dt$. По условию начальная функция φ принадлежит множеству D, откуда $\|x(0)\| = \|\varphi(0)\| = \|C_1\| = 1$. Таким образом, по непрерывности подынтегральной функции получим $\int_0^\infty \|x(t)\|^2 dt > 0$, откуда $v_0(\varphi) > 0$.

Достаточность покажем от противного. Пусть система не является экспоненциально устойчивой, тогда по теореме 1.1 не все ее собственные числа лежат в открытой левой полуплоскости. Значит, существует собственное число s, лежащее в открытой правой полуплоскости либо на мнимой оси. На мнимой оси оно лежать не может, потому что выполнено условие Ляпунова.

Таким образом, имеем собственное число $s = \alpha + i\beta$, $\alpha > 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\beta \geqslant 0$, поскольку если $\beta < 0$, то можно взять сопряженное число $\overline{s}$, которое также является собственным числом системы.

Поскольку s является собственным числом, то существует ненулевой вектор C такой, что $(sE - \sum_{i=0}^m e^{-sh_i}A_i)C = 0$ или $s\mathrm{C} = (\sum_{i=0}^m e^{-sh_i}A_i)C$, откуда

$$|s| \leqslant \sum_{i=0}^m |e^{-sh_i}|\,\|A_i\| \leqslant \sum_{i=0}^m \|A_i\|,$$

так как $|e^{-sh_i}| = e^{-\alpha h_i} < 1$ для любого h_i. Отсюда следует, что

$$\alpha = |\alpha| \leqslant |s| \leqslant \sum_{i=0}^m \|A_i\|, \quad \beta = |\beta| \leqslant |s| \leqslant \sum_{i=0}^m \|A_i\|.$$

Таким образом, получили, что $\alpha \in [0,M]$, $\beta \in [0,M]$, где $M := \sum_{i=0}^m \|A_i\|$.

Поскольку $\det(sE - \sum_{i=0}^m e^{-sh_i}A_i) = 0$, то из леммы 1.1, примененной к матрице $F := sE - \sum_{i=0}^{m} e^{-sh_i} A_i$, следует, что существует собственный вектор $C = C_1 + iC_2$, соответствующий числу s, такой, что $\|C_1\| = 1$, $\|C_2\| \leqslant 1$.

Из определения собственного числа следует, что функция $x(t) := e^{st}C$ — решение системы. Но если $x(t)$ — решение, то по линейности системы (1.1) и $\mathrm{Re}(x(t)) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t)C_1 - \sin(\beta t)C_2)$ — решение. По лемме 2.1 получаем, что $v_0\left(\varphi\right) < 0$, где

$$\varphi(\theta) := e^{\alpha\theta}\left(\cos(\beta\theta)C_1 - \sin(\beta\theta)C_2\right), \quad \theta \in [-h, 0].$$

С другой стороны из рассуждений выше следует, что $\varphi \in D$, откуда по условию $v_0\left(\varphi\right) > 0$. Противоречие.

Глава 3. Конструктивный критерий экспоненциальной устойчивости линейной системы с запаздыванием

В этой главе покажем, как можно проверить условие теоремы 2.1 за конечное число математических операций.

3.1 Сведение квадратичного функционала к квадратичной формы

Если в определение квадратичного функционала v_0 подставить конкретную функцию

$$\varphi\colon [-h,0] \to \mathbb{R}^n, \quad \varphi(\theta) = e^{\alpha\theta}(\cos(\beta\theta)C_1 - \sin(\beta\theta)C_2), \quad \theta \in [-h,0]$$

и привести подобные слагаемые при комбинациях векторов C_1, C_2, то его можно представить в виде квадратичной формы с некоторой матрицей $S(\alpha,\beta)$, действующей на вектор $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$. Вид матрицы $S(\alpha,\beta)$ описан в следующей лемме.

Лемма 3.1. *Квадратичный функционал v_0 на функциях $\varphi \in D$ имеет вид*

$$v_0(\varphi) = \begin{pmatrix} C_1^T & C_2^T \end{pmatrix} \begin{bmatrix} S_{1,1}(\alpha,\beta) & S_{1,2}(\alpha,\beta) \\ S_{1,2}^T(\alpha,\beta) & S_{2,2}(\alpha,\beta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

где

$$S_{1,1}(\alpha,\beta) := U(0) + \sum_{i=1}^{m} \int_{-h_i}^{0} \left(U(-\theta - h_i)A_i + A_i^T U(\theta + h_i)\right) e^{\alpha\theta}\cos(\beta\theta)d\theta +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \int_{-h_i}^{0}\int_{-h_j}^{0} e^{\alpha\theta_1}\cos(\beta\theta_1)A_i^T U(\theta_1 - \theta_2 + h_i - h_j)A_j e^{\alpha\theta_2}\cos(\beta\theta_2)d\theta_1 d\theta_2,$$

$$S_{1,2}(\alpha,\beta) := -\sum_{i=1}^{m}\int_{-h_i}^{0} U(-\theta-h_i)A_i e^{\alpha\theta}\sin(\beta\theta)d\theta\ -$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\int_{-h_i}^{0}\int_{-h_j}^{0} e^{\alpha\theta_1}\cos(\beta\theta_1)A_i^T U(\theta_1-\theta_2+h_i-h_j)A_j e^{\alpha\theta_2}\sin(\beta\theta_2)d\theta_1 d\theta_2,$$

$$S_{2,2}(\alpha,\beta) :=$$

$$:= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\int_{-h_i}^{0}\int_{-h_j}^{0} e^{\alpha\theta_1}\sin(\beta\theta_1)A_i^T U(\theta_1-\theta_2+h_i-h_j)A_j e^{\alpha\theta_2}\sin(\beta\theta_2)d\theta_1 d\theta_2.$$

Из леммы 3.1 и теоремы 2.1 следует следующая

Теорема 3.1. *Система (1.1) экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда удовлетворяет условию Ляпунова и* $\forall\alpha \in [0, M]$, $\beta \in [0, M]$

$$\min \begin{pmatrix} C_1^T & C_2^T \end{pmatrix} \begin{bmatrix} S_{1,1}(\alpha,\beta) & S_{1,2}(\alpha,\beta) \\ S_{1,2}^T(\alpha,\beta) & S_{2,2}(\alpha,\beta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} > 0,$$

где минимум берется по всем векторам $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^n : \|C_1\| = 1,\ \|C_2\| \leqslant 1.$

Замечание 3.1. *Минимум квадратичной формы достигается, так как* $\{(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^{2n} : \|C_1\| = 1,\ \|C_2\| \leqslant 1\}$ *— это компактное множество.*

Теорема 3.1 хорошо работает на практике в качестве необходимого условия экспоненциальной устойчивости системы, но она не позволяет численно определить, является ли система экспоненциально устойчивой, поскольку для достаточного условия требуется проверить бесконечно много матриц $S(\alpha, \beta)$.

3.2 Предварительные оценки функционала

Следующие леммы дают теоретические оценки функционала v_0 на функциях $\varphi \in D$.

Лемма 3.2. *Если система (1.1) экспоненциально устойчива, то*

$$\forall \varphi \in D \ v_0(\varphi) > a_1, \quad a_1 > 0,$$

где $a_1 := \frac{\lambda_{\min}(W)}{4}\delta$. *Здесь* δ *находится как корень уравнения* $MLe^{M\delta} = \frac{1}{4\delta}$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из доказательства теоремы 2.3 работы [2], если взять в качестве числа α, участвующего в доказательстве теоремы, величину $\alpha := 2$.

Лемма 3.3. *Если система (1.1) неустойчива и удовлетворяет условию Ляпунова, то*

$$\exists \varphi \in D \ v_0(\varphi) \leqslant -a_2, \quad a_2 > 0,$$

где $a_2 := \frac{\lambda_{\min}(W)}{4M}$.

Доказательство. Возьмем функцию $\varphi \in D$, которая получилась при доказательстве достаточности теоремы 2.1. Отсюда имеем $\|\varphi(0)\| = 1$ и $\alpha \in [0, M]$, откуда по лемме 2.1

$$v_0(\varphi) \leqslant -\frac{\lambda_{\min}(W)}{4\alpha}\|\varphi(0)\|^2 = -\frac{\lambda_{\min}(W)}{4\alpha} \leqslant -\frac{\lambda_{\min}(W)}{4M}.$$

3.3 Построение конечной сетки, необходимой и достаточной для проверки экспоненциальной устойчивости системы

Здесь и далее до конца главы для простоты рассмотрим систему с одним запаздыванием

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-h). \tag{3.1}$$

Следующая лемма выражает оценку для значений функционала системы (3.1) на функциях $\varphi \in D$.

Лемма 3.4. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется*

$$\delta := \frac{\varepsilon}{4\|U\|\,\|B\|\,h^2 + 8\|U\|\,\|B\|^2 h^3}, \quad \delta > 0$$

такое, что для любых функций $\varphi, \widetilde{\varphi} \in D$:

$$\varphi(\theta) := e^{\alpha\theta}(\cos(\beta\theta)C_1 - \sin(\beta\theta)C_2), \quad \theta \in [-h, 0],$$

$$\widetilde{\varphi}(\theta) := e^{\widetilde{\alpha}\theta}(\cos(\widetilde{\beta}\theta)C_1 - \sin(\widetilde{\beta}\theta)C_2), \quad \theta \in [-h, 0],$$

для которых $|\alpha - \widetilde{\alpha}| \leqslant \delta, \ |\beta - \widetilde{\beta}| \leqslant \delta$ *следует, что*

$$|v_0(\varphi) - v_0(\widetilde{\varphi})| \leqslant \varepsilon.$$

Обозначение для $\|U\|$ *приведено на с. 3.*

Доказательство. По лемме 3.1 и неравенству треугольника получим

$$|v_0(\varphi) - v_0(\widetilde{\varphi})| \leqslant$$

$$\leqslant \left|C_1^T S_{1,1}(\alpha,\beta)C_1 - C_1^T S_{1,1}(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})C_1\right| + \left|C_1^T S_{1,2}(\alpha,\beta)C_2 - C_1^T S_{1,2}(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})C_2\right| +$$

$$+ \left|C_2^T S_{1,2}^T(\alpha,\beta)C_1 - C_2^T S_{1,2}^T(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})C_1\right| + \left|C_2^T S_{2,2}(\alpha,\beta)C_2 - C_2^T S_{2,2}(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})C_2\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\|S_{1,1}(\alpha,\beta) - S_{1,1}(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})\right\| + \left\|S_{1,2}(\alpha,\beta) - S_{1,2}(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})\right\| +$$

$$+ \left\|S_{1,2}^T(\alpha,\beta) - S_{1,2}^T(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})\right\| + \left\|S_{2,2}(\alpha,\beta) - S_{2,2}(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})\right\|.$$

Для получения последнего неравенства были использованы неравенство Коши – Шварца $|(u,v)| \leqslant \|u\| \|v\|$, $u, v \in \mathbb{R}^n$, свойство подчиненной нормы матрицы $\|Au\| \leqslant \|A\| \|u\|$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, u \in \mathbb{R}^n$ и условие леммы, согласно которому векторы C_1, C_2 удовлетворяют условию

$$\|\mathrm{C}_1\| = 1, \quad \left\|\mathrm{C}_2\right\| \leqslant 1.$$

По определению матриц имеем

$$\left\| S_{1,1}(\alpha,\beta) - S_{1,1}(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant 2\left\|B\right\|\left\|U\right\| \int_{-h}^{0} \left| e^{\alpha\theta}\cos(\beta\theta) - e^{\widetilde{\alpha}\theta}\cos(\widetilde{\beta}\theta) \right| d\theta \; +$$

$$+ \left\|B\right\|^{2}\left\|U\right\| \times$$

$$\times \int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0} \left| e^{\alpha\theta_1}\cos(\beta\theta_1)e^{\alpha\theta_2}\cos(\beta\theta_2) - e^{\widetilde{\alpha}\theta_1}\cos(\widetilde{\beta}\theta_1)e^{\widetilde{\alpha}\theta_2}\cos(\widetilde{\beta}\theta_2) \right| d\theta_1 d\theta_2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\left\|B\right\|\left\|U\right\| \int_{-h}^{0} \left| e^{\alpha\theta}\cos(\beta\theta) - e^{\widetilde{\alpha}\theta}\cos(\widetilde{\beta}\theta) \right| d\theta +$$

$$+ \left\|B\right\|^{2}\left\|U\right\| \times$$

$$\times \int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0} \left| e^{\alpha\theta_1}\cos(\beta\theta_1)e^{\alpha\theta_2}\cos(\beta\theta_2) - e^{\widetilde{\alpha}\theta_1}\cos(\widetilde{\beta}\theta_1)e^{\alpha\theta_2}\cos(\beta\theta_2) \right| d\theta_1 d\theta_2 \; +$$

$$+ \left\|B\right\|^{2}\left\|U\right\| \times$$

$$\times \int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0} \left| e^{\widetilde{\alpha}\theta_1}\cos(\widetilde{\beta}\theta_1)e^{\alpha\theta_2}\cos(\beta\theta_2) - e^{\widetilde{\alpha}\theta_1}\cos(\widetilde{\beta}\theta_1)e^{\widetilde{\alpha}\theta_2}\cos(\widetilde{\beta}\theta_2) \right| d\theta_1 d\theta_2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\left\|B\right\|\left\|U\right\| \int_{-h}^{0} \left| e^{\alpha\theta}\cos(\beta\theta) - e^{\widetilde{\alpha}\theta}\cos(\widetilde{\beta}\theta) \right| d\theta +$$

$$+ \left\|B\right\|^{2}\left\|U\right\| \int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0} \left| e^{\alpha\theta_1}\cos(\beta\theta_1) - e^{\widetilde{\alpha}\theta_1}\cos(\widetilde{\beta}\theta_1) \right| d\theta_1 d\theta_2 +$$

$$+\|B\|^2\|U\|\int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0}\left|e^{\alpha\theta_2}\cos(\beta\theta_2)-e^{\widetilde{\alpha}\theta_2}\cos(\widetilde{\beta}\theta_2)\right|d\theta_1 d\theta_2.$$

Оценим отдельно интеграл $\int_{-h}^{0}\left|e^{\alpha\theta}\cos(\beta\theta)-e^{\widetilde{\alpha}\theta}\cos(\widetilde{\beta}\theta)\right|d\theta$, стоящий во всех слагаемых последней суммы

$$\int_{-h}^{0}\left|e^{\alpha\theta}\cos(\beta\theta)-e^{\widetilde{\alpha}\theta}\cos(\widetilde{\beta}\theta)\right|d\theta\leqslant$$

$$\leqslant\int_{-h}^{0}\left|e^{\alpha\theta}\cos(\beta\theta)-e^{\widetilde{\alpha}\theta}\cos(\beta\theta)\right|d\theta+\int_{-h}^{0}\left|e^{\widetilde{\alpha}\theta}\cos(\beta\theta)-e^{\widetilde{\alpha}\theta}\cos(\widetilde{\beta}\theta)\right|d\theta\leqslant$$

$$\leqslant\int_{-h}^{0}\left|e^{\alpha\theta}-e^{\widetilde{\alpha}\theta}\right|d\theta+\int_{-h}^{0}\left|\cos(\beta\theta)-\cos(\widetilde{\beta}\theta)\right|d\theta=$$

$$=\int_{-h}^{0}e^{\xi(\theta)}\left|\alpha\theta-\widetilde{\alpha}\theta\right|d\theta+\int_{-h}^{0}\left|-\sin\left(\eta\left(\theta\right)\right)\right|\left|\beta\theta-\widetilde{\beta}\theta\right|d\theta\leqslant$$

$$\leqslant\int_{-h}^{0}\left|\alpha\theta-\widetilde{\alpha}\theta\right|d\theta+\int_{-h}^{0}\left|\beta\theta-\widetilde{\beta}\theta\right|d\theta=\left|\alpha-\widetilde{\alpha}\right|\frac{h^2}{2}+\left|\beta-\widetilde{\beta}\right|\frac{h^2}{2}.$$

Предпоследнее равенство в оценке получено с помощью формулы конечных приращений Лагранжа $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$, $\xi\in(a,b)$. Значение $\xi(\theta)$ принадлежит интервалу $(\min(\alpha\theta,\widetilde{\alpha}\theta),\max(\alpha\theta,\widetilde{\alpha}\theta))$, откуда следует $\xi(\theta)<0$. Значение $\eta(\theta)\in\Big(\min(\beta\theta,\widetilde{\beta}\theta),\max(\beta\theta,\widetilde{\beta}\theta)\Big)$.

Окончательно получим

$$\left\|S_{1,1}(\alpha,\beta)-S_{1,1}(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})\right\|\leqslant\|B\|\,\|U\|\,h^2\left(|\alpha-\widetilde{\alpha}|+|\beta-\widetilde{\beta}|\right)+$$

$$+\|B\|^2\|U\|\,h^3\left(|\alpha-\widetilde{\alpha}|+|\beta-\widetilde{\beta}|\right).$$

Для остальных слагаемых аналогично получаем

$$\left\|S_{1,2}(\alpha,\beta)-S_{1,2}(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})\right\|+\left\|S_{1,2}^T(\alpha,\beta)-S_{1,2}^T(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\|B\|\,\|U\|\,h^2\left(|\alpha-\widetilde{\alpha}|+|\beta-\widetilde{\beta}|\right)+2\,\|B\|^2\,\|U\|\,h^3\left(|\alpha-\widetilde{\alpha}|+|\beta-\widetilde{\beta}|\right),$$

$$\left\|S_{2,2}(\alpha,\beta)-S_{2,2}(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})\right\|\leqslant\|B\|^2\,\|U\|\,h^3\left(|\alpha-\widetilde{\alpha}|+|\beta-\widetilde{\beta}|\right).$$

Отсюда, приводя подобные при $|\alpha-\widetilde{\alpha}|+|\beta-\widetilde{\beta}|$, имеем

$$\left|v_0\left(\varphi(C_1,C_2,\alpha,\beta)\right)-v_0\left(\widetilde{\varphi}(C_1,C_2,\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left(2\,\|B\|\,\|U\|\,h^2+4\,\|B\|^2\,\|U\|\,h^3\right)\left(|\alpha-\widetilde{\alpha}|+|\beta-\widetilde{\beta}|\right),$$

откуда видно, что для заданного $\varepsilon>0$ значение δ из условия леммы удовлетворяет требуемой точности.

Для системы (1.1) формула для δ, полученная в лемме 3.4 будет несколько другой. В ее знаменателе будет больше слагаемых, слагаемые будут взяты с другими коэффициентами, но они также будут зависеть от норм матриц системы $\|A_i\|$, величины $\|U\|$ и величин запаздывания h_i.

Теперь все готово, чтобы сформулировать конструктивный критерий экспоненциальной устойчивости системы (3.1).

Зафиксируем число a_1, удовлетворяющее лемме 3.2.

Теорема 3.2. *Система (3.1) экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда удовлетворяет условию Ляпунова и* $\forall(\alpha,\beta)\in S^*$

$$\min_{C_1,C_2\in\mathbb{R}^n:\|C_1\|=1,\ \|C_2\|\leqslant 1}\begin{pmatrix}C_1^T & C_2^T\end{pmatrix}\begin{bmatrix}S_{1,1}(\alpha,\beta) & S_{1,2}(\alpha,\beta)\\ S_{1,2}^T(\alpha,\beta) & S_{2,2}(\alpha,\beta)\end{bmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}>a_1,$$

где S^* *— это равномерная конечная сетка, заданная на квадрате*

$$[0,M]\times[0,M].$$

Число узлов в сетке S^* равно $(N+1)^2$, где

$$N := \left\lceil \frac{M}{2\delta} \right\rceil,$$

а δ берется из леммы 3.4 для числа $\varepsilon := a_1$.

Доказательство. Необходимость. По условию теоремы имеем

$$\forall \varphi \in D \ v_0(\varphi) > a_1, \quad a_1 > 0,$$

откуда по лемме 3.1

$$\forall \varphi \in D \ v_0\left(\varphi\right) = \begin{pmatrix} C_1^T & C_2^T \end{pmatrix} \begin{bmatrix} S_{1,1}(\alpha,\beta) & S_{1,2}(\alpha,\beta) \\ S_{1,2}^T(\alpha,\beta) & S_{2,2}(\alpha,\beta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} > a_1,$$

т. е. для всех $(\alpha,\beta) \in [0,M] \times [0,M]$

$$\min_{C_1,C_2 \in \mathbb{R}^n : \|C_1\|=1, \ \|C_2\| \leqslant 1} \begin{pmatrix} C_1^T & C_2^T \end{pmatrix} \begin{bmatrix} S_{1,1}(\alpha,\beta) & S_{1,2}(\alpha,\beta) \\ S_{1,2}^T(\alpha,\beta) & S_{2,2}(\alpha,\beta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} > a_1,$$

отсюда, учитывая условие теоремы, согласно которому

$$S^* \subseteq [0,M] \times [0,M],$$

получаем требуемое утверждение.

Достаточность. Возьмем произвольную функцию $\varphi \in D$:

$$\varphi(\theta) = e^{\alpha\theta}(\cos(\beta\theta)C_1 - \sin(\beta\theta)C_2), \quad \theta \in [-h,0].$$

По определению

$$S^* := \{(\alpha,\beta) \in [0,M] \times [0,M] \mid \exists k_1,k_2 \in \mathbb{N} : \alpha = \frac{M}{N}k_1, \, \beta = \frac{M}{N}k_2\},$$

поэтому любая точка (α,β) попадет в некоторый квадрат с вершинами

$$(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}), \quad (\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}+\frac{M}{N}), \quad (\widetilde{\alpha}+\frac{M}{N},\widetilde{\beta}), \quad (\widetilde{\alpha}+\frac{M}{N},\widetilde{\beta}+\frac{M}{N}),$$

где вершины квадрата принадлежат сетке S^*. Другими словами числа α, β принадлежат отрезкам $[\widetilde{\alpha}, \widetilde{\alpha} + \frac{M}{N}], [\widetilde{\beta}, \widetilde{\beta} + \frac{M}{N}]$ соответственно. Поскольку $\frac{M}{N} \leqslant 2\delta$, числа α, β принадлежат отрезкам $[\widetilde{\alpha}, \widetilde{\alpha} + 2\delta], [\widetilde{\beta}, \widetilde{\beta} + 2\delta]$. Максимальное расстояние, на котором α находится от точек $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\alpha} + 2\delta$, равно δ и достигается в случае, когда α находится в середине отрезка. Аналогично для β.

Таким образом, для любой точки $(\alpha, \beta) \in [0, M] \times [0, M]$ найдется точка $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \in S^*$ такая, что

$$|\alpha - \widetilde{\alpha}| \leqslant \delta, \quad |\beta - \widetilde{\beta}| \leqslant \delta.$$

Возьмем функцию $\widetilde{\varphi}$:

$$\widetilde{\varphi}(\theta) = e^{\widetilde{\alpha}\theta}(\cos(\widetilde{\beta}\theta)C_1 - \sin(\widetilde{\beta}\theta)C_2), \quad \theta \in [-h, 0].$$

По лемме 3.4 $|v_0(\varphi) - v_0(\widetilde{\varphi})| \leqslant a_1$, откуда $v_0(\varphi) \geqslant v_0(\widetilde{\varphi}) - a_1 > 0$. Последнее неравенство выполняется за счет того, что из леммы 3.1 и условия теоремы следует

$$v_0\left(\widetilde{\varphi}\right) = \begin{pmatrix} C_1^T & C_2^T \end{pmatrix} \begin{bmatrix} S_{1,1}(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) & S_{1,2}(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \\ S_{1,2}^T(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) & S_{2,2}(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} > a_1.$$

Таким образом, для произвольной функции $\varphi \in D$ получили, что $v_0(\varphi) > 0$, и по теореме 2.1 заключаем, что система (3.1) экспоненциально устойчива.

Зафиксируем число a_2, удовлетворяющее лемме 3.3.

Теорема 3.3. *Система (3.1) экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда удовлетворяет условию Ляпунова и* $\forall (\alpha, \beta) \in S^*$

$$\min_{C_1, C_2 \in \mathbb{R}^n : \|C_1\| = 1, \ \|C_2\| \leqslant 1} \begin{pmatrix} C_1^T & C_2^T \end{pmatrix} \begin{bmatrix} S_{1,1}(\alpha, \beta) & S_{1,2}(\alpha, \beta) \\ S_{1,2}^T(\alpha, \beta) & S_{2,2}(\alpha, \beta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} > 0,$$

где S^* *— равномерная конечная сетка, заданная на квадрате*

$$[0, M] \times [0, M].$$

Число узлов в сетке S^* равно $(N+1)^2$, где

$$N := \left\lceil \frac{M}{2\delta} \right\rceil,$$

где δ берется из леммы 3.4 для числа $\varepsilon := a_2$.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 3.1.

Достаточность. Предположим, что система (1.1) не является экспоненциально устойчивой. Тогда, по лемме 3.3 найдется функция $\varphi \in D$ такая, что

$$v_0(\varphi) \leqslant -a_2, \quad a_2 > 0.$$

Дословно повторяя доказательство достаточности теоремы 3.2 для функции φ, получим функцию $\widetilde{\varphi}$ такую, что $|v_0(\varphi) - v_0(\widetilde{\varphi})| \leqslant a_2$, откуда

$$v_0(\widetilde{\varphi}) \leqslant v_0(\varphi) + a_2 \leqslant 0.$$

Из леммы 3.1 следует, что

$$v_0\left(\widetilde{\varphi}\right) = \begin{pmatrix} C_1^T & C_2^T \end{pmatrix} \begin{bmatrix} S_{1,1}(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) & S_{1,2}(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \\ S_{1,2}^T(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) & S_{2,2}(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

где $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \in S^*$. Отсюда и из условия теоремы вытекает, что $v_0(\widetilde{\varphi}) > 0$. Противоречие.

Число N, описывающее количество узлов в сетке S^* из теорем 3.2, 3.3, описывается формулой

$$N := \left\lceil \frac{2M \left\| U \right\| \left\| B \right\| h^2 + 4M \left\| U \right\| \left\| B \right\|^2 h^3}{\varepsilon} \right\rceil, \tag{3.2}$$

где $\varepsilon := a_1$ либо $\varepsilon := a_2$.

Если посмотреть на числитель формулы (3.2), то видно, что с ростом норм матриц системы и величины запаздывания h, число узлов в сетке S^* также увеличивается.

Однако, для фиксированной системы (1.1), число N можно снизить, если увеличить число ε, находящееся в знаменателе формулы (3.2).

3.4 Алгоритм

Следующий алгоритм, позволяет увеличить число ε из формулы (3.2).

1 Проверяем условие Ляпунова системы (3.1), если оно не выполняется, то система не является экспоненциально устойчивой.

2 Выбираем произвольную начальную сетку $S_0 \subseteq [0, M] \times [0, M]$.

3 Имея сетку S_n, считаем число

$$\varepsilon_n := \min_{(\alpha,\beta)\in S_n} \min_{\substack{C_1,C_2\in\mathbb{R}^n:\\ \|C_1\|=1,\ \|C_2\|\leqslant 1}} \begin{pmatrix} C_1^T & C_2^T \end{pmatrix} \begin{bmatrix} S_{1,1}(\alpha,\beta) & S_{1,2}(\alpha,\beta) \\ S_{1,2}^T(\alpha,\beta) & S_{2,2}(\alpha,\beta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

3.1 Если $\varepsilon_n \leqslant 0$, то система (3.1) не является экспоненциально устойчивой.

3.2 Если $n \geqslant 1$, $\varepsilon_n = \varepsilon_{n-1}$, то система (3.1) экспоненциально устойчива.

3.3 В противном случае строим равномерную сетку

$$S_{n+1} \subseteq [0, M] \times [0, M]$$

такую, что число узлов в сетке S_{n+1} равно $(N + 1)^2$, где N определяется по формуле (3.2) с числом $\varepsilon := \varepsilon_n > 0$. Переходим к шагу 3 с сеткой S_{n+1}.

3.5 Корректность алгоритма

Обоснуем корректность алгоритма, описанного в п. 3.4.

Если система (3.1) не удовлетворяет условию Ляпунова на шаге 1, то она не является экспоненциально устойчивой по теореме 3.1.

Если $\varepsilon_n \leqslant 0$ на шаге 3.1, то система (3.1) не является экспоненциальной устойчивой по теореме 3.1.

Пусть $n \geqslant 1$, $\varepsilon_n = \varepsilon_{n-1}$ на шаге 3.2.

Возьмем произвольную функцию $\varphi \in D$. Дословно повторяя доказательство достаточности теоремы 3.2, получим функцию $\widetilde{\varphi}$ такую, что $|v_0(\varphi) - v_0(\widetilde{\varphi})| \leqslant \varepsilon_{n-1} = \varepsilon_n$, откуда $v_0(\varphi) \geqslant v_0(\widetilde{\varphi}) - \varepsilon_n$.

Из леммы 3.1 следует

$$v_0\left(\widetilde{\varphi}\right) = \begin{pmatrix} C_1^T & C_2^T \end{pmatrix} \begin{bmatrix} S_{1,1}(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) & S_{1,2}(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \\ S_{1,2}^T(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) & S_{2,2}(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

где $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \in S_n$. Отсюда и из определения числа ε_n вытекает, что $v_0(\widetilde{\varphi}) \geqslant \varepsilon_n$. Таким образом, для произвольной функции $\varphi \in D$ получаем

$$v_0(\varphi) \geqslant v_0(\widetilde{\varphi}) - \varepsilon_n \geqslant 0,$$

откуда $v_0(\varphi) \geqslant 0$, и так как мы находимся на шаге 3.2 условие Ляпунова для системы (3.1) выполнено. Из доказательства теоремы 2.1 видно, что условия $\forall \varphi \in D$ $v_0(\varphi) \geqslant 0$ и условия Ляпунова достаточно для экспоненциальной устойчивости системы (3.1).

3.6 Конечность алгоритма

Равномерные сетки S_n, которые строятся в результате работы алгоритма, вообще говоря, не вложены друг в друга. Если дополнительно выбирать сетку S_{n+1} с числом узлов, большим или равным числу узлов, полученным на шаге 3.3 алгоритма, такую, что $S_n \subseteq S_{n+1}$, то будет справедлива следующая

Теорема 3.4. *Если сетки S_n выбирать вложенными друг в друга, то описанный алгоритм завершится за конечное количество итераций.*

Доказательство. Введем число $\overline{v}_0(D) := \min_{\varphi \in D} |v_0(\varphi)|$. Число $\overline{v}_0(D)$ достигается, поскольку множество

$$\{(C_1, C_2, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{2n+2} : \|C_1\| = 1, \|C_2\| \leqslant 1, \alpha, \beta \in [0, M]\}$$

является компактом и $v_0(\varphi)$ непрерывная функция на нем как композиция непрерывных функций v_0 и φ.

Предположим сначала, что для системы (3.1) число $\overline{v}_0(D) > 0$.

Введем равномерную сетку $S_{\max}$ на множестве $[0, M] \times [0, M]$, число узлов которой равно $(N_{\max} + 1)^2$, где

$$N_{\max} := \left\lceil \frac{2M\left\|U\right\|\left\|B\right\|h^2 + 4M\left\|U\right\|\left\|B\right\|^2 h^3}{\overline{v}_0(D)} \right\rceil.$$

Введем обозначение $\overline{M} := 2M\left\|U\right\|\left\|B\right\|h^2 + 4M\left\|U\right\|\left\|B\right\|^2 h^3$. Это обозначение вводится для краткости и используется только в пределах доказательства данной теоремы.

Число узлов в сетке из последовательности S_n равно $(N_n + 1)^2$, где число N_n можно описать, например, формулой $N_n := 2^k N_{n-1}$, где число $k \in \mathbb{N}$ выбирается таким образом, что $N_n = 2^k N_{n-1} \geqslant \left\lceil \frac{\overline{M}}{\varepsilon_{n-1}} \right\rceil$, т. е

$$k := \left\lceil \log_2 \frac{\left\lceil \frac{\overline{M}}{\varepsilon_{n-1}} \right\rceil}{N_{n-1}} \right\rceil.$$

Получили, что число N_n для сетки S_n определяется формулой

$$N_n := 2^{\left\lceil \log_2 \frac{\left\lceil \frac{\overline{M}}{\varepsilon_{n-1}} \right\rceil}{N_{n-1}} \right\rceil} N_{n-1}.$$

Из этой формулы видно, что число узлов в сетке S_n всегда больше либо равно числу узлов в сетке S_{n-1}.

Предположим, что процесс не заканчивается. Тогда, число узлов в сетках последовательности S_n строго возрастает, поскольку если бы две сетки S_n, S_{n-1} имели одинаковое число узлов, то числа $\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1}$ совпали бы и процесс закончился. Таким образом, число узлов в сетках S_n стремится к бесконечности. Возьмем сетку S_n такую, что число узлов в ней больше, чем $(2N_{\max} + 1)^2$, т. е.

$$2^{\left\lceil \log_2 \frac{\left\lceil \frac{\overline{M}}{\varepsilon_{n-1}} \right\rceil}{N_{n-1}} \right\rceil} N_{n-1} > 2\left\lceil \frac{\overline{M}}{\overline{v}_0(D)} \right\rceil.$$

Отсюда имеем следующую импликацию

$$2^{\left\lceil \log_2 \frac{\left\lceil \frac{\overline{M}}{\varepsilon_{n-1}} \right\rceil}{N_{n-1}} \right\rceil} > \frac{2\left\lceil \frac{\overline{M}}{\overline{v}_0(D)} \right\rceil}{N_{n-1}} \implies$$

$$\implies \left\lceil \log_2 \frac{\left\lceil \frac{\overline{M}}{\varepsilon_{n-1}} \right\rceil}{N_{n-1}} \right\rceil > \log_2 \frac{\left\lceil \frac{\overline{M}}{\overline{v}_0(D)} \right\rceil}{N_{n-1}} + 1 > \left\lceil \log_2 \frac{\left\lceil \frac{\overline{M}}{\overline{v}_0(D)} \right\rceil}{N_{n-1}} \right\rceil .$$

Предположим, что $\varepsilon_{n-1} > \overline{v}_0(D)$. Получаем следующую цепочку импликаций

$$\frac{\left\lceil \frac{\overline{M}}{\overline{v}_0(D)} \right\rceil}{N_{n-1}} \geqslant \frac{\left\lceil \frac{\overline{M}}{\varepsilon_{n-1}} \right\rceil}{N_{n-1}} \implies \log_2 \frac{\left\lceil \frac{\overline{M}}{\overline{v}_0(D)} \right\rceil}{N_{n-1}} \geqslant \log_2 \frac{\left\lceil \frac{\overline{M}}{\varepsilon_{n-1}} \right\rceil}{N_{n-1}} \implies$$

$$\implies \left\lceil \log_2 \frac{\left\lceil \frac{\overline{M}}{\overline{v}_0(D)} \right\rceil}{N_{n-1}} \right\rceil \geqslant \left\lceil \log_2 \frac{\left\lceil \frac{\overline{M}}{\varepsilon_{n-1}} \right\rceil}{N_{n-1}} \right\rceil .$$

Противоречие с полученным выше неравенством.

Таким образом, $\varepsilon_{n-1} \leqslant \overline{v}_0(D)$, с другой стороны, поскольку все сетки $S_n \subseteq [0, M] \times [0, M]$ и $\varepsilon_n > 0$, по свойствам минимума для любой сетки S_n имеем

$$\varepsilon_n \geqslant \overline{v}_0(D),$$

откуда следует, что $\varepsilon_{n-1} = \overline{v}_0(D)$. Поскольку $S_{n-1} \subseteq S_n$, по свойству минимума $\varepsilon_n \leqslant \varepsilon_{n-1}$. Поскольку для сетки S_n также $\varepsilon_n \geqslant \overline{v}_0(D)$, получаем $\varepsilon_n = \overline{v}_0(D)$ и таким образом, начиная с сетки S_n, значение ε_n точно становится равно предыдущему значению ε_{n-1} и процесс заканчивается.

Рассмотрим случай $\overline{v}_0(D) = 0$. Предположим, что существует функция $\varphi_0 \in D$, на которой $v_0(\varphi_0) < 0$. Тогда по непрерывности квадратичного функционала имеем окрестность точки $\varphi_0 \in D$, в которой для всех φ $v_0(\varphi) < 0$. Предположим, что процесс не заканчивается. Количество узлов сеток S_n стремится к бесконечности, откуда понятно, что рано или поздно хотя бы один узел некоторой сетки S_n попадет в проекцию окрестности точки $\varphi_0 \in D$ на множество $[0, M] \times [0, M]$, соответствующее число ε_n окажется меньше нуля и процесс закончится.

Пусть теперь $\forall \varphi \in D \; v_0(\varphi) \geqslant 0$, причем за счет условия $\overline{v}_0(D) = 0$ имеется функция $\varphi_0 \in D$, на которой $v_0(\varphi_0) = 0$. Однако, системы (3.1), удовлетворяющей таким условиям, не существует. С одной стороны, она не является экспоненциально устойчивой по теореме 2.1. С другой стороны из доказательства теоремы 2.1 видно, что условия $\forall \varphi \in D \; v_0(\varphi) \geqslant 0$ и условия Ляпунова достаточно для экспоненциальной устойчивости системы, и в данном случае они оба предполагаются выполненными.

Глава 4. Применение критерия для исследования устойчивости систем с запаздыванием

4.1 Алгоритм проверки необходимого условия критерия

На практике теорему 3.1 можно использовать следующим образом. Задаем систему (1.1). Предположим, что у нее кратные запаздывания. Вычисляем матрицу Ляпунова этой системы, используя полуаналитический метод, описанный в [13]. В качестве матрицы W во всех примерах взята единичная матрица. Условие Ляпунова эквивалентно невырожденности некоторой матрицы, получающейся в процессе вычисления матрицы Ляпунова [13]. Далее задаем равномерную сетку на множестве $[0, M] \times [0, M]$ с произвольным числом разбиения сетки N таким, что количество узлов сетки равно $(N+1)^2$ и проверяем выполнение условия

$$\min_{C_1, C_2 \in \mathbb{R}^n : \|C_1\|=1, \|C_2\| \leqslant 1} \begin{pmatrix} C_1^T & C_2^T \end{pmatrix} \begin{bmatrix} S_{1,1}(\alpha, \beta) & S_{1,2}(\alpha, \beta) \\ S_{1,2}^T(\alpha, \beta) & S_{2,2}(\alpha, \beta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} > 0 \qquad (4.1)$$

для всех матриц $S(\alpha, \beta)$ с параметрами (α, β) из взятой сетки.

Условие (4.1) предполагает решение задачи глобальной оптимизации для некоторой квадратичной функции с нелинейными ограничениями. В примерах минимум (4.1) находится с помощью встроенной функции fmincon системы Matlab.

Вместо проверки условия (4.1) можно проверять неотрицательную определенность матриц $S(\alpha, \beta)$. Это следует из доказательства теоремы 2.1, в котором множество D можно заменить на множество функций φ таких, что $\varphi(\theta) = e^{\alpha\theta}(\cos(\beta\theta)C_1 - \sin(\beta\theta)C_2),\ \theta \in [-h, 0]$, где C_1, C_2, α, β некоторые параметры такие, что $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^n,\ \alpha, \beta \in [0, M]$.

Неотрицательную определенность матрицы $S(\alpha, \beta)$ можно проверять через нахождение собственных чисел, но на практике собственные числа матрицы зачастую оказываются близки к нулю, из-за чего, в результате погрешностей, программа может выдавать неверный результат. Гораздо лучше себя ведет проверка неотрицательной определенности матрицы через разложение Холецкого с помощью встроенной функции cholcov системы Matlab.

4.2 Иллюстративные примеры

В каждом из нижеизложенных примеров берется семейство систем вида
$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{m} A_i(a,b)x(t-h_i),$$
в которых коэффициенты матриц A_i зависят от двух вещественных параметров a, b и исследуется экспоненциальная устойчивость этого семейства в плоскости параметров (a, b). Такой частный случай позволяет наглядно представить множества устойчивых и неустойчивых систем, и вместе с тем подобранные примеры имеют всю сложность произвольных линейных систем с запаздыванием вида (1.1).

Если точка (a, b) удовлетворяет необходимому условию критерия, то она отмечается синей точкой на рисунке, если не удовлетворяет, то не отмечается ничем. В результате получается набор синих изолированных точек, и еще для наглядности на рисунке отмечаются красные линии — линии D-разбиения, получающиеся методом, описанным в [15]. Области, на которые линии D-разбиения делят плоскость параметров $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, обладают тем свойством, что в них системы имеют одно и то же количество собственных чисел с положительной вещественной частью, в частности, либо все являются экспоненциально устойчивыми, либо неустойчивыми.

Пример 1. Рассмотрим скалярное уравнение с одним запаздыванием
$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t-h). \tag{4.2}$$

Линии D-разбиения известны из [4] и описываются прямой $b = -a$ и кривыми
$$(a,b) = \left(\frac{w\cos(wh)}{\sin(wh)}, \frac{-w}{\sin(wh)}\right),\ w \in \left(\frac{\pi k}{h}, \frac{\pi(k+1)}{h}\right), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.3}$$

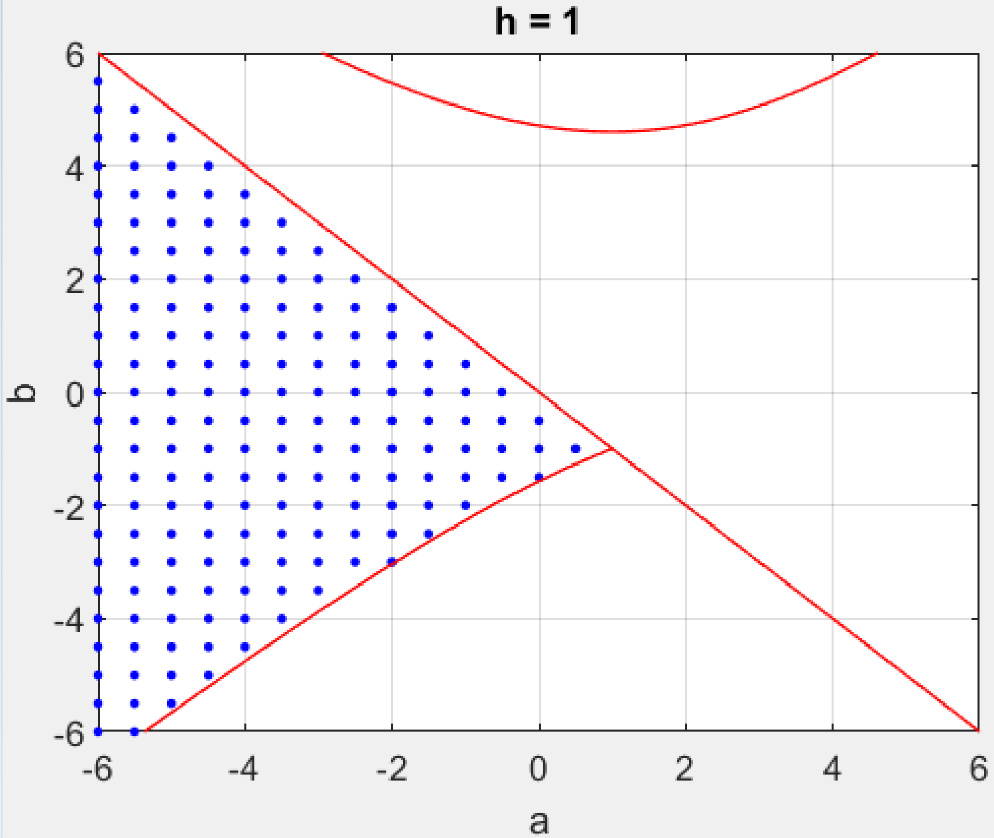

Рис. 1: Система (4.2), N = 10

Область экспоненциальной устойчивости этого уравнения хорошо известна: это все точки (a, b), находящиеся ниже прямой $b = -a$ и выше кривой из семейства, описываемого формулой (4.3) с параметром $k = 0$.

На рисунке 1 представлены результаты работы критерия на множестве параметров $(a, b) \in [-6, 6] \times [-6, 6]$, с одинаковым шагом по обоим параметрам, равным $0, 5$, и выбранным числом разбиения сетки $N = 10$. Изображенные линии D-разбиения — прямая $b = -a$ и две кривые из формулы (4.3) с $k = 0$ и $k = 1$.

Как видно из рисунка 1, при $N = 10$ область неустойчивости в плоскости a и b, полученная с помощью критерия, совпадает с известной точной областью неустойчивости. В данном примере проверялась неотрицательность матрицы $S(\alpha, \beta)$ через собственные числа.

Пример 2. Следующая система рассмотрена, например, в [5]:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & -a \end{pmatrix} x(t-h). \tag{4.4}$$

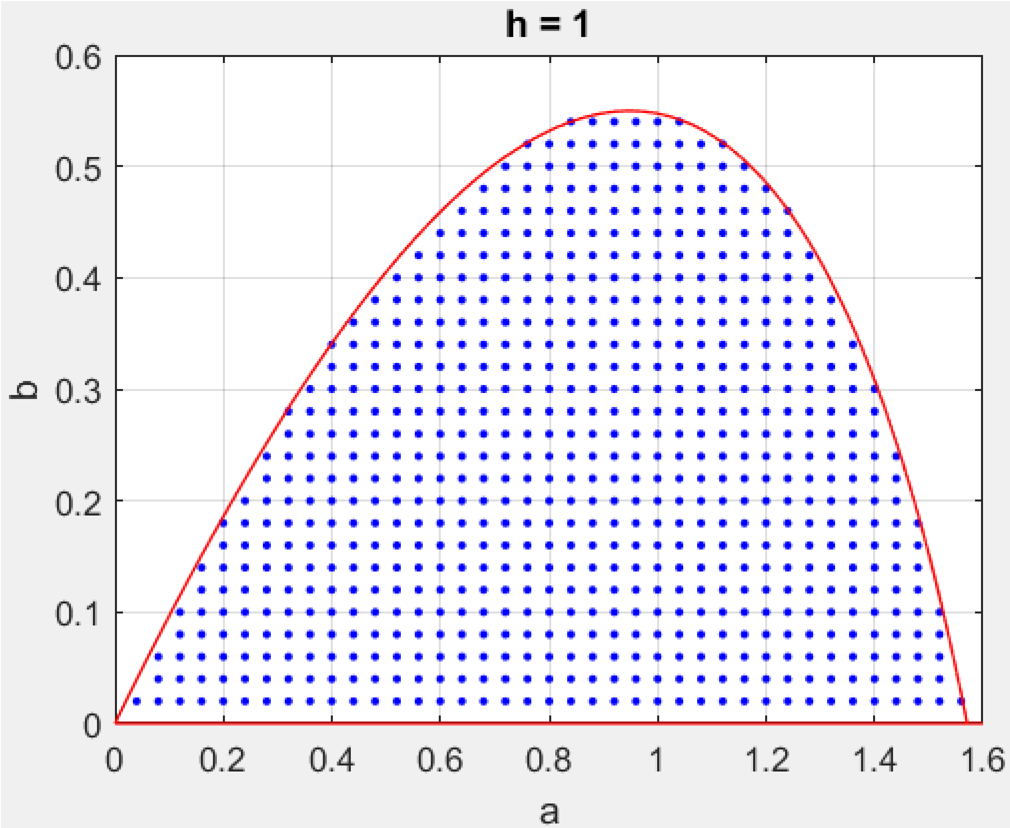

Рис. 2: Система (4.4), N = 10

Линиями D-разбиения являются прямая $b = 0$ и кривая

$$(a, b) = (w \sin(w), w^2 \cos(w)), \quad w > 0.$$

Областью экспоненциальной устойчивости является участок плоскости, заключенный между прямой $b = 0$ и этой кривой, лежащий в прямоугольнике $[0,\ 1,6] \times [0,\ 0,6]$.

На рисунке 2 изображены результаты работы критерия в этой зоне с шагом $0,02$ по a и $0,04$ по b, $N = 10$. В этом примере проверялось условие (4.1).

Пример 3. Следующий пример, рассматривался, например, в работе [14]:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} x(t-h). \tag{4.5}$$

Области экспоненциальной устойчивости этой системы в плоскости a и b

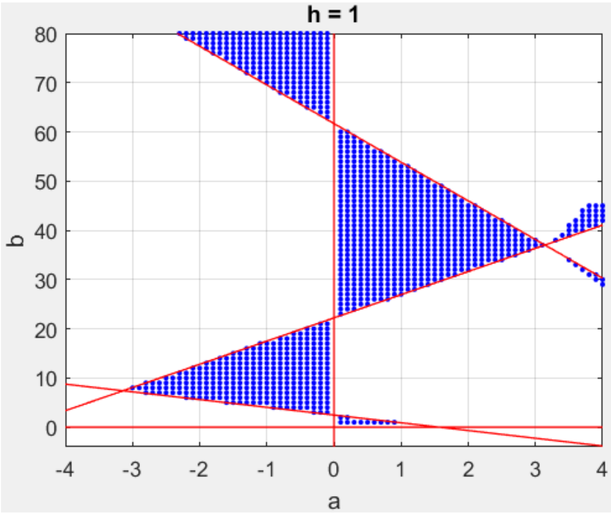

Рис. 3: Система (4.5), N = 3

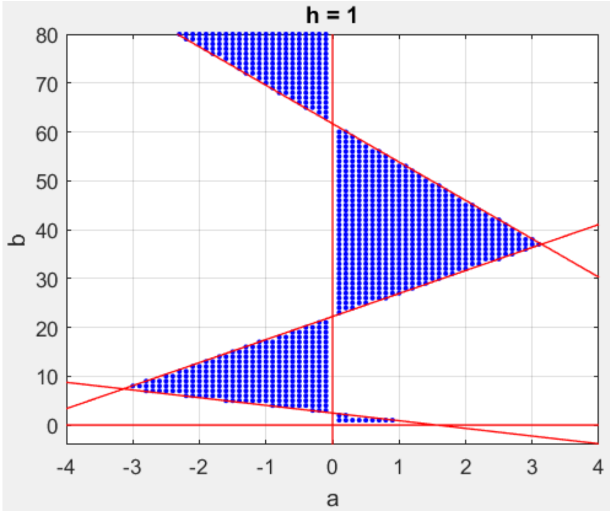

Рис. 4: Система (4.5), N = 6

ограничены прямыми $a = 0$ и $b = 0$ и отрезками прямых

$$b = (-1)^{l+1}\frac{2l+1}{2}\pi a + (\frac{2l+1}{2}\pi)^2, \quad l = 0, 1, \dots,$$

и формируют треугольники, примыкающие к прямой $a = 0$ и лежащие выше прямой $b = 0$.

На рисунках 3 и 4 приведены результаты работы критерия в прямоугольнике $(a, b) \in [-4, 4] \times [-4, 80]$ с шагом $0,1$ по a и шагом 1 по b при $N = 3$ и $N = 6$ соответственно. При $N = 6$ остаются только точки из областей экспоненциальной устойчивости системы.

Пример 4. Перейдем теперь к примерам с несколькими запаздываниями. Следующий пример рассмотрен, например, в работе [6]:

$$\dot{x}(t) = -2x(t) + ax(t-1) + bx(t-2). \tag{4.6}$$

Область экспоненциальной устойчивости уравнения содержит точку $(0, 0)$ и изображена на рисунках 5 и 6. Здесь $(a, b) \in [-12, 12] \times [-12, 12]$, и параметры берутся с шагом $0,25$ по обеим переменным, $N = 20$.

Если проверять условие (4.1), то видно, что на рисунке 5 остаются несколько точек из области неустойчивости. Эти точки практически находятся на линиях D-разбиения данной системы, не отмеченных на рисунке. Полученный эффект скорее всего связан с тем, что функция fmincon находит локальный минимум с положительным значением, тогда как глобальный минимум по теореме 3.1 не превосходит значение выше нуля.

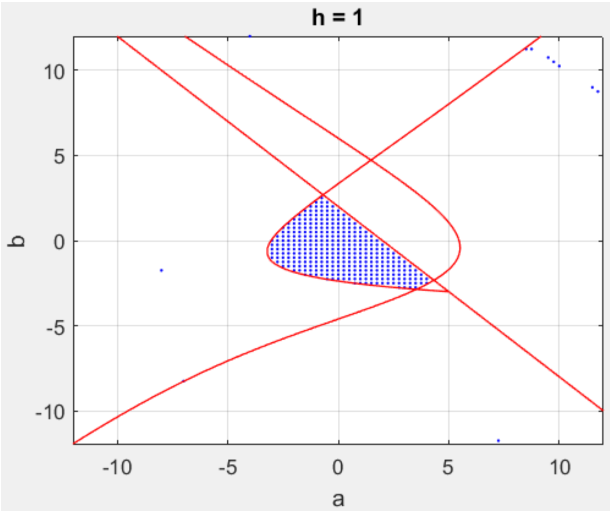

Рис. 5: Система (4.6), N = 20, квадратичная форма

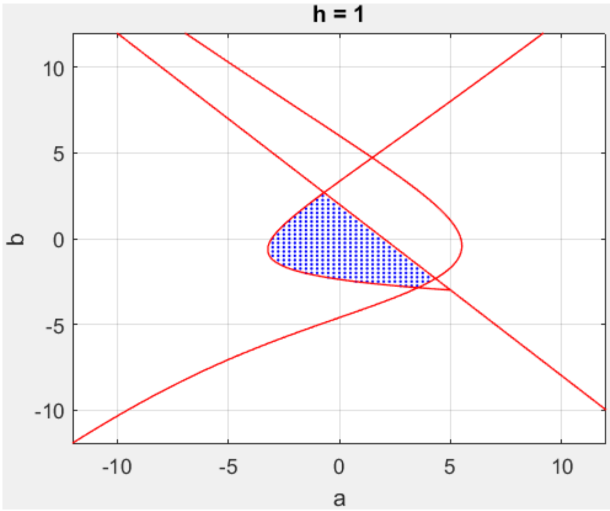

Рис. 6: Система (4.6), N = 20, разложение Холецкого

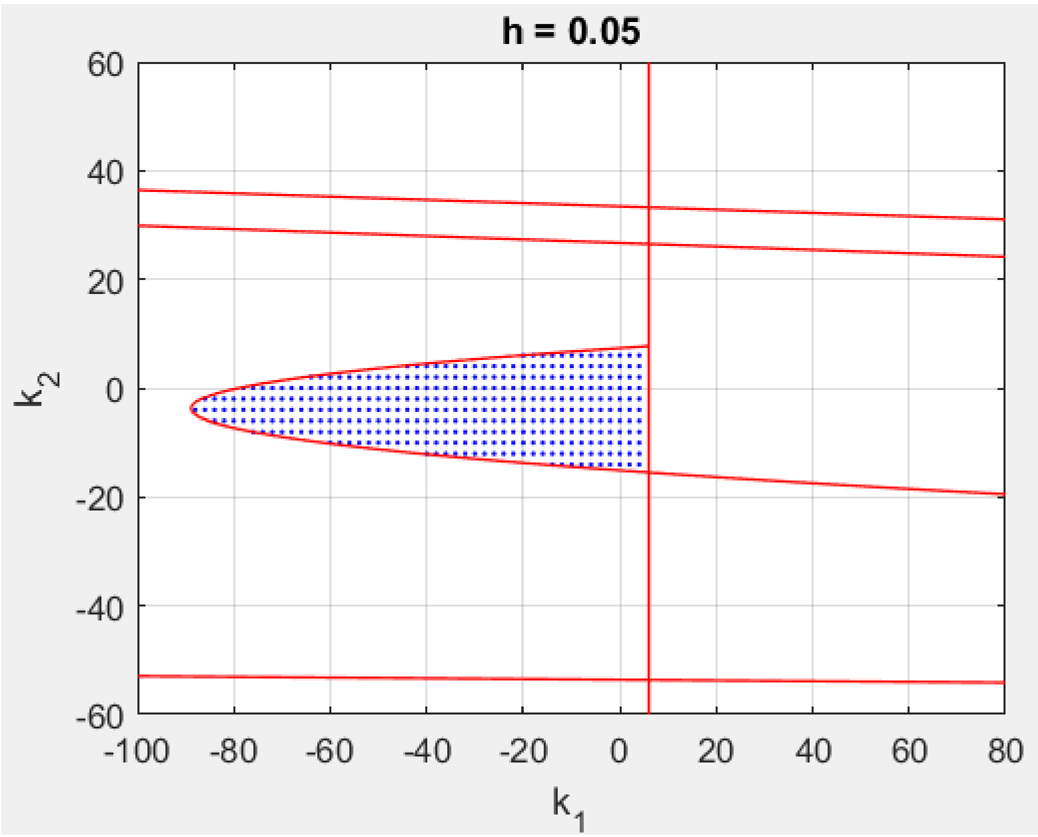

Рис. 7: Система (4.7), N = 10

Пример 5. Следующая система рассмотрена, например, в [5]:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -7,1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & 0 \end{pmatrix} x(t-0,1) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} x(t-0,15). \quad (4.7)$$

Здесь базовое запаздывание $h = 0,05$. Параметры k_1, k_2 принадлежат множеству $[-100, 80] \times [-60, 60]$ и берутся с шагом 2 по обоим параметрам. Значение $N = 10$. Линии D-разбиения — прямая $k_1 = 6$ и кривая

$$(k_1, k_2) = \left(\frac{-7,1w - (w^2-6)\operatorname{ctg}(3wh)}{\operatorname{ctg}(3wh)\cos(2wh) + \sin(2wh)}, \frac{-w^2 + 6 - k_1\cos(2wh)}{w\sin 3wh} \right), \ w \geqslant 0.$$

Область экспоненциальной устойчивости изображена на рисунке 7. В данном примере проверялась неотрицательность матрицы $S(\alpha, \beta)$ через разложение Холецкого.

4.3 Сравнение конечных алгоритмов проверки критерия

Снова рассмотрим систему из примера 2 предыдущего параграфа

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & -a \end{pmatrix} x(t-1). \quad (4.8)$$

(a,b)	N	$N\left(\frac{\lambda_{\min}(W)}{4M}\right)$
$(0,2,\ 0,1)$	13	247
$(0,8,\ 0,2)$	131	579

Таблица 1: Сравнение чисел разбиения для сеток

Рассмотрим точки из области экспоненциальной устойчивости системы (4.8) в плоскости a и b, см. первую колонку таблицы 1. Во второй колонке приведено число разбиения N для сетки, полученной на финальной итерации алгоритма параграфа 3.4. Для обеих точек алгоритм завершился за одну итерацию, следующую после начальной. В третьей колонке приведено число разбиения N для сетки S^* из теоремы 3.3, для которой в качестве ε использовалось число из леммы 3.3.

В качестве матрицы W была взята единичная матрица. В качестве $\|U\|$ взято число

$$\max_{\tau \in [0,h], \tau = \frac{hk}{100}, k \in \mathbb{N}} \|U(\tau)\|,$$

где h — величина запаздывания данной системы, $h = 1$. Начальная сетка S_0 бралась равномерной с числом разбиения $N = 1$. Для нахождения чисел ε_n снова использовалась фунция fmincon, но, как показывает пример 2 предыдущего параграфа, для данной системы значение локального минимума, находимое функцией fmincon, предположительно совпадает со значением глобального минимума.

Таблица 1 показывает, что число узлов для сетки полученной в результате работы алгоритма, меньше, чем в сетке, полученной в теореме 3.3. Также видно, что с ростом норм матриц системы увеличивается число узлов в сетках, полученных обоими способами.

Выводы

В данной работе достигнуты следующие результаты:

1. Получен новый критерий экспоненциальной устойчивости линейных стационарных дифференциальных систем с запаздыванием.

2. Реализован алгоритм, с помощью которого можно определить экспоненциальную устойчивость данной линейной системы с запаздыванием за конечное число математических операций.

Время работы критерия растет с увеличением норм матриц системы и величин запаздывания, что делает возможным его применение на практике лишь для ограниченного класса систем. На практике для систем небольших размерностей необходимое условие критерия дает точную область экспоненциальной устойчивости уже при небольших числах разбиения N равномерной сетки.

Дальнейшая работа может проходить в следующих направлениях:

- численная реализация условия теоремы 2.1: минимизация значения функционала по параметрам $\alpha, \beta \in [0, M]$ и векторам $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^n$: $\|C_1\| = 1, \|C_2\| \leqslant 1$, в отличие от минимизации только по C_1, C_2 в задаче (4.1).

- расширение класса систем, устойчивость которых можно эффективно исследовать с помощью данного критерия,

- замена множества D, лежащего в основе данного критерия,

- распространение критерия на системы других типов.

Заключение

В данной работе получен критерий экспоненциальной устойчивости линейных дифференциальных систем с произвольным числом запаздываний, позволяющий сводить проверку устойчивости системы к проверке выполнения условия Ляпунова и решению задачи глобальной оптимизации, где целевая функция и ограничения являются квадратичными функциями.

Список литературы

[1] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва: МЦНМО, 2014. 341 с.

[2] Медведева И. В. Конструктивные методы анализа экспоненциальной устойчивости линейных систем запаздывающего типа: дис. ... канд. физ.-мат. наук. СПб., 2014. 150 с.

[3] Репин Ю. М. Квадратичные функционалы Ляпунова для систем с запаздыванием // Прикладная математика и механика. 1965. Т. 29. С. 564-566.

[4] Bellman R., Cooke K. L. Differential-difference equations. N. Y.: Academic Press, 1963. 482 p.

[5] Delice I. I., Sipahi R. Controller design for delay-independent stability of multiple time-delay systems via Déscartes's rule of signs // 9th IFAC Workshop on Time Delay Systems. Prague, Czech Republic. 2010. P. 144-149.

[6] Egorov A. V., Mondie S. Necessary conditions for the exponential stability of time-delay systems via the Lyapunov delay matrix // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2014. Vol. 24(12). P. 1760-1771.

[7] Fridman E. Tutorial on Lyapunov-based methods for time-delay systems // European Journal of Control. 2014. Vol. 20(6). P. 271-283.

[8] Gomez M. A., Egorov A. V., Mondie S. Lyapunov matrix based necessary and sufficient stability condition by finite number of mathematical operations for retarded type systems // Automatica. 2019. No 108, 108475.

[9] Gu K., Kharitonov V. L., Chen J. Stability of time delay systems. Boston: Birkhäuser, 2003. 353 p.

[10] Huang W. Generalization of Liapunov's theorem in a linear delay system // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1989. Vol. 142, No 1. P. 83-94.

[11] Infante E. F., Castelan W. B. A Liapunov functional for a matrix difference-differential equation // Journal of Differential Equations. 1978. Vol. 29, No 3. P. 439-451.

[12] Kharitonov V. L., Zhabko A. P. Lyapunov–Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems // Automatica. 2003. Vol. 39, No 1. P. 15-20.

[13] Kharitonov V. L. Time-delay systems. Lyapunov functionals and matrices. Basel: Birkhäuser, 2013. 311 p.

[14] Mondie S., Egorov A. V. Some necessary conditions for the exponential stability of one delay systems // 8th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control. Merida City, Mexico. 2011. P. 1-6.

[15] Niculescu S. I. Delay effects on stability: a robust control approach. Heidelberg: Springer, 2001. 383 p.