Санкт-Петербургский государственный университет

Кафедра механики управляемого движения

Дмитриева Анна Сергеевна

Выпускная квалификационная работа

Полные линеаризованные системы для задачи двух тел: эллиптический случай

Научный руководитель,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент
Потоцкая И.Ю.

Санкт-Петербург

2021

Оглавление

Введение

В современном мире с развитием технологий, ускорением вычислительных процессов и увеличением памяти компьютеров, растут и задачи, возлагаемые на вычислительные устройства. Однако в последние годы темпы роста мощностей новых устройств не идут ни в какое сравнение с теми, что были еще лет 10-20 назад. Это связано во многом с тем, что мы приближаемся к физическим пределам скорости работы компьютеров, а решение этой проблемы еще не придумано. По этой причине сейчас особенно важно исследовать различные численные методы решения задач, чтобы при необходимости можно было использовать наиболее оптимальный алгоритм.

Системы дифференциальных уравнений активно используются в описании всевозможных процессов физики, химии, биологии и пр. Большинство из задач современных естественных наук в той или иной мере использует дифференциальные уравнения, так как они наиболее удобны для описания поведения процессов во времени, а также исследование дифференциальных уравнений позволяет судить об описываемых изменениях без непосредственного решения, строить предположения о дальнейшей динамике развития, предсказывать исход этих процессов, изучать влияние внешних воздействий и многое, многое другое. Однако не существует какого-то общего аналитического способа решения любого дифференциального уравнения, тем более системы таких уравнений (что в реальной жизни встречается намного чаще). Поэтому при интегрировании дифференциальных уравнений широко используются численные методы. Выбор таких методов достаточно велик. Наиболее распространены пошаговые методы. Хорошо к быстрой смене шага приспособлены явные методы Рунге –Кутта и рядов Тейлора.

Метод рядов Тейлора часто имеет преимущество в точности вычислений. Но сложность применения этого метода заключается в необходимости многократного вычисления коэффициентов рядов. В общем случае это может сделать программную реализацию метода более громоздкой и медленной. Но в случае, когда интегрируемая система имеет полиномиальные правые части, коэффициенты Тейлора вычисляются по простой рекуррентной формуле, и этот численный метод становится предпочтительнее для решения сложных задач.

Одной из таких задач является задача двух тел. Это одна из самых известных задач классической механики, которая заключается в том, чтобы определить движение двух материальных точек, взаимодействующих только друг с другом. Примеры такой задачи очевидны: взаимное движение планеты и спутника, планеты и звезды или электрон, вращающийся вокруг атомного ядра. Математическая модель задачи двух тел может быть представлена в виде полной полиномиальной системы уравнений в частных производных. Решение такой системы может быть получено методом рядов Тейлора. Но до недавнего времени литературы, описывающей такой алгоритм для подобных систем, не было. Только в начале мая 2021 года в «Вестнике СПбГУ» была опубликована статья «Estimates for Taylor series method to polynomial total systems of PDEs» (Бабаджанянц Л.К, Потоцкая И.Ю., Пупышева Ю.Ю.), дающая необходимые математические инструменты для интегрирования полных полиномиальных систем УрЧП методом Тейлора.

Поэтому представляемую мной научную работу можно рассматривать как подготовительный этап к решению полной полиномиальной системы уравнений в частных производных, моделирующей задачу двух тел. Здесь, в качестве знакомства с методом рядов Тейлора, представлено интегрирование им линеаризованной модели задачи двух тел. Практический смысл такой работы заключается в изучении самой модели и численного метода, получении навыков программной реализации алгоритма и её отладки на фиктивных модельных значениях.

Кроме того, результаты моей научной работы в дальнейшем можно будет распространять и на другие линейные полные системы УрЧП.

Объектом исследования данной работы является задача двух тел, а предметом – система дифференциальных уравнений для этой задачи и численные методы для их решения.

Выполнение этой работы состояло из следующих этапов: изучение научно-методической литературы, анализ, моделирование.

Работа имеет следующую структуру. Первая глава посвящена описанию задачи двух тел. Во второй главе описывается система полиномиальных уравнений в частных производных для данной задачи, которая в последствии линеаризуется, и описанию метода рядов Тейлора. Третья глава посвящена описанию программной реализации метода Тейлора для полученной системы.

Постановка задачи

Целью работы являются линеаризация системы полиномиальных уравнений в частных производных для задачи двух тел и решение полученной системы методом рядов Тейлора.

Основываясь на этой цели ставятся следующие задачи:

1. Изучение задачи двух тел.
2. Изучение представления задачи двух тел в виде полиномиальной системы уравнений в частных производных.
3. Линеаризация системы для получения формул для коэффициентов Тейлора.
4. Программная реализация метода в среде MATLAB

Обзор литературы

Во время написания данной работы использовалась следующая научная и учебно-методическая литература.

Для изучения задачи двух тел в первой главе были взяты книги [3] и [4].

Системы полиномиальных уравнений в частных производных для задачи двух тел были взяты из [2], [5].

Источником теоретической информации по использованию метода Тейлора была работа [1].

Глава 1. Задача двух тел

1.1 Постановка задачи

Задача двух тел заключается в изучении их движения под действием гравитационных сил взаимного притяжения. Эти два тела считаются изолированными от других тел и любых других воздействий. Как и в большинстве случаев я рассматривала задачу о движении двух материальных точек, то есть полагая, что масса каждого из тел целиком сосредоточена в его центре масс, и пренебрегая формой и размером тел. Я рассматривала относительно движение, когда начало системы отсчета было помещено в центр масс одного из тел.

Таким образом задача двух тел состоит в определении движения двух тел, взаимодействующих только друг с другом. Распространённые примеры включают спутник, обращающийся вокруг планеты, планета, обращающаяся вокруг звезды, две звезды, обращающиеся вокруг друг друга (двойная звезда), и классический электрон, движущийся вокруг атомного ядра.

1.2 Кеплеровы элементы орбиты

Для того, чтобы записать решение задачи двух тел, нам понадобятся Кеплеровы элементы орбиты и эксцентрическая аномалия, поэтому напомним их. Положение небесного тела в пространстве в задаче двух тел определяется Кеплеровыми элементами орбиты:

- большая полуось,
- эксцентриситет,
- наклонение,
- долгота восходящего узла,
- аргумент перицентра,
- средняя аномалия.

Первые два определяют форму орбиты, третий, четвёртый и пятый — ориентацию плоскости орбиты по отношению к базовой системе координат, шестой — положение тела на орбите. Разберем их все по порядку.

1. Большая полуось. В случае эллиптической орбиты (именно он рассматривается в этой работе), большая полуось - это большая полуось орбиты, то есть половина расстояния от перицентра до апоцентра.

2. Эксцентриситет. Выражается формулой: $\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$. Тут a – большая полуось орбиты, а b – малая.

В зависимости от эксцентриситета орбита представляет собой:

- 0 –окружность
- От 0 до 1 – эллипс
- 1 – парабола
- От 1 до бесконечности - гипербола, а малая полуось – мнимое число
- Бесконечность – прямая

3. Наклонение (наклон орбиты). Угол между плоскостью орбиты и плоскостью отсчета (базовой плоскостью).

Если наклонение от 0 до 90 градусов движение тела называется прямым. Если от 90 до 180, то обратным.

4. Долгота восходящего узла. Определяет угол в базовой плоскости, образуемый между базовым направлением на нулевую точку и направлением на точку восходящего узла орбиты, в которой орбита пересекает базовую плоскость в направлении с юга на север.

5. Аргумент перицентра. определяется как угол между направлениями из притягивающего центра на восходящий узел орбиты и на перицентр (ближайшую к притягивающему центру точку орбиты небесного тела), или угол между линией узлов и линией апсид.

6. Средняя аномалия. Средняя аномалия есть угловое расстояние от перицентра гипотетического тела, движущегося с постоянной угловой скоростью, равной среднему движению.

Угловые элементы проиллюстрированы на Рис 1.1.

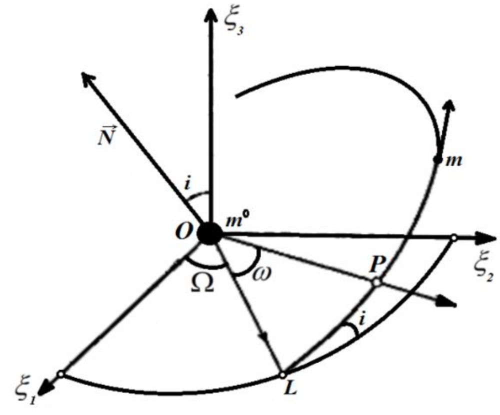


Рис 1.1: *$\vec{N}$ – нормаль к плоскости орбиты, $\overrightarrow{OL}$ – вектор линии узлов, L – восходящий узел, P – перицентр, i – наклонение, Ω – долгота восходящего узла, ω – аргумент перицентра.*

Чтобы определить эксцентрическую аномалию, нарисуем орбиту и создадим вспомогательную окружность с центром в центре орбиты и радиусом равным большой полуоси (Рис 1.2). Эксцентрическая аномалия – угол, определяющийся как показано на Рис 1.2.

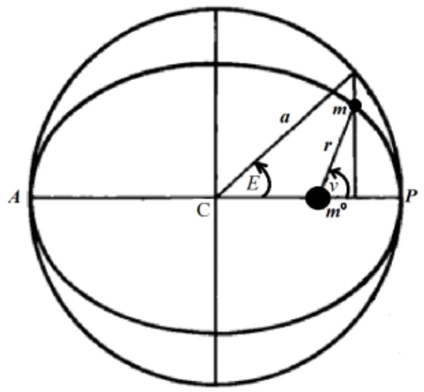


Рис 1.2: *C – центр эллипса (орбиты), P – перицентр, A – апоцентр, m^0 – масса центрального тела, m – масса тела, движущегося по орбите, E – эксцентрическая аномалия.*

1.3 Уравнения движения в эллиптическом случае.

Рассмотрим уравнения движения точки массы m в центральном Ньютоновском поле массы m^0, используя относительную декартову систему координат в точке с массой m^0:

$$\ddot{\xi}_i = -\mu\xi_i r^{-3} \left(\text{или } \dot{\xi}_i = \eta_i \;\; \dot{\eta}_i = -\mu\xi_i r^{-3} \right) \;\; i \in [1:3]$$

И решения этой системы в общем виде в эллиптическом случае:

$$\xi_i/a \;=\; A_i\sqrt{1-\;e^2}\sin E + B_i(\cos E - e), i \in [1:3], r/a = (1 - e\cos E),$$

$$A_1 = -\sin\omega\cos\Omega - \cos\omega\sin\Omega\cos i\,,\; B_1 = \cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i,$$

$$A_2 = -\sin\omega\sin\Omega - \cos\omega\cos\Omega\cos i\,,\; B_2 = \cos\omega\sin\Omega - \sin\omega\cos\Omega\cos i,$$

$$A_3 = \cos\Omega\sin i\,,\; B_3 = \sin\omega\sin i,$$

$$E - e\sin E = M, \qquad M = \;M_0 + n(t-\;t_0), \qquad n = \;\sqrt{\frac{\mu}{a^3},\;\; \mu = \gamma(m^0 + m),}$$

где a (большая полуось), e (эксцентриситет), M_0 (средняя аномалия в момент t_0), Ω (долгота восходящего узла), i (наклонение), ω (аргумент перицентра) – Кеплеровы элементы орбиты; E (эксцентрическая аномалия), M (средняя аномалия) – функции времени, а γ - гравитационная постоянная.

Глава 2. Система дифференциальных уравнений для задачи двух тел.

2.1 Полиномиальные системы

Запишем полиномиальные системы для нахождения координат и скоростей (опираясь на решение задачи двух тел из 1.3). В таблице ниже запишем введенные функции и аргументы.

$\varphi_1 = E, \varphi_2 = \sin E; \varphi_3 = \cos E; \varphi_4 = (1 - e\cos E)^{-1}$ $\varphi_5 = \mathrm{a}^{-1/2}$, $\varphi_6 = (1-e^2)^{1/2}$, $\varphi_7 = (1-e^2)^{-1/2}$, $\varphi_8 = \xi_1$, $\varphi_9 = \xi_2$, $\varphi_{10} = \xi_3$, $\varphi_{11} = \eta_1$, $\varphi_{12} = \eta_2$, $\varphi_{13} = \eta_3$,	$t_1 = t,\ t_2 = \mathrm{a}$, $t_3 = e, t_4 = \mathrm{M}_0$,
$\varphi_{14} = A_1,\ \varphi_{15} = A_2, \varphi_{16} = A_3,\ \ \varphi_{17} = B_1, \varphi_{18} = B_2$, $\varphi_{19} = B_3$, $\varphi_{20} = A_4 = \sin\omega\cos i, \varphi_{21} = B_4 = \cos\omega\cos i$, $\varphi_{22} = A_5 = \sin\Omega, \varphi_{23} = B_5 = \cos\Omega$	$t_5 = i,\ t_6 = \Omega$, $t_7 = \omega$;

Будем рассматривать функции $\varphi_i, i = 1, \dots 23$ как функции от t. Теперь выпишем системы дифференциальных уравнений в частных производных. Первая система:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1} = \sqrt{\mu}\varphi_4\varphi_5^3, \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_2} = -\frac{3(t_1-t_0)\sqrt{\mu}}{2}\varphi_4\varphi_5^5, \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_3} = \varphi_2\varphi_4, \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_4} = \varphi_4,$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial t_1} = \sqrt{\mu}\varphi_3\varphi_4\varphi_5^3, \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_2} = -\frac{3(t_1-t_0)\sqrt{\mu}}{2}\varphi_3\varphi_4\varphi_5^5, \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_3} = \varphi_3\varphi_2\varphi_4, \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_4} = \varphi_3\varphi_4,$$

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial t_1} = -\sqrt{\mu}\varphi_2\varphi_4\varphi_5^3,$$

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial t_2} = \frac{3(t_1-t_0)\sqrt{\mu}}{2}\varphi_2\varphi_4\varphi_5^5, \frac{\partial\varphi_3}{\partial t_3} = -\varphi_4\varphi_2^2, \frac{\partial\varphi_3}{\partial t_4} = -\varphi_2\varphi_4,$$

$$\frac{\partial\varphi_4}{\partial t_1} = -\sqrt{\mu}t_3\varphi_2\varphi_4^3\varphi_5^3, \qquad \frac{\partial\varphi_4}{\partial t_2} = -\frac{3(t_1-t_0)\sqrt{\mu}}{2}t_3\varphi_2\varphi_4^3\varphi_5^5,$$

$$\frac{\partial\varphi_4}{\partial t_3} = \varphi_3\varphi_3^2 - t_3\varphi_2^2\varphi_4^3, \qquad \frac{\partial\varphi_4}{\partial t_4} = -t_3\varphi_2\varphi_4^3,$$

$$\frac{\partial\varphi_5}{\partial t_j} = 0, \qquad j = 1,3,4, \qquad \frac{\partial\varphi_5}{\partial t_2} = \frac{1}{2}\varphi_3^5$$

$$\frac{\partial\varphi_7}{\partial t_j}=\frac{\partial\varphi_6}{\partial t_j}=0\ j=1{,}2{,}4,\frac{\partial\varphi_6}{\partial t_3}=-t_3\varphi_7,\frac{\partial\varphi_7}{\partial t_3}=t_3\varphi_7^3,$$

$$\frac{\partial\varphi_{7+i}}{\partial t_1}=t_2\varphi_4\varphi_5^3\sqrt{\mu}(A_i\varphi_6\varphi_3-B_i\varphi_2),$$

$$\frac{\partial\varphi_{7+i}}{\partial t_2}=(\varphi_3-t_3)B_i+\varphi_6\varphi_3A_i+\frac{3}{2}(t_1-t_0)t_2\varphi_4\varphi_5^5\sqrt{\mu}(B_i\varphi_2-A_i\varphi_6\varphi_3),$$

$$\frac{\partial\varphi_{7+i}}{\partial t_3}=t_2\big(A_i\varphi_6\varphi_2\varphi_4\varphi_3-A_it_3\varphi_2\varphi_7-B_i(1+\varphi_4\varphi_2^2)\big),$$

$$\frac{\partial\varphi_{7+i}}{\partial t_4}=t_2\varphi_4(A_i\varphi_6\varphi_3-B_i\varphi_2),$$

$$\frac{\partial\varphi_{10+i}}{\partial t_1}=-\Big(\mu t_3\varphi_2\varphi_4^3\varphi_5^4(A_i\varphi_6\varphi_3-B_i\varphi_2)\Big)-\mu\varphi_4^2\varphi_5^4(B_i\varphi_3+A_i\varphi_6\varphi_2),$$

$$\frac{\partial\varphi_{10+i}}{\partial t_2}=\frac{1}{2}\sqrt{\mu}\,\varphi_4\varphi_5^3(A_i\varphi_6\varphi_3-B_i\varphi_2)$$

$$+\frac{3}{2}\mu(t_1-t_0)\varphi_4^2\varphi_5^6[t_3\varphi_2\varphi_4(A_i\varphi_6\varphi_3-B_i\varphi_2)+(A_i\varphi_2\varphi_6+B_i\varphi_3)],$$

$$\frac{\partial\varphi_{10+i}}{\partial t_3}=\sqrt{\mu}\,\varphi_5\varphi_4^2(\varphi_3-t_3\varphi_4\varphi_2^2)(A_i\varphi_6\varphi_3-B_i\varphi_2)$$

$$-\sqrt{\mu}\,\varphi_5\varphi_4(B_i\varphi_2\varphi_4\varphi_3+\varphi_2^2\varphi_6\varphi_4A_i+t_3\varphi_3\varphi_7A_i),$$

$$\frac{\partial\varphi_{10+i}}{\partial t_4}=\sqrt{\mu}\,\varphi_5\varphi_4^2[t_3\varphi_2\varphi_4(A_i\varphi_6\varphi_3-B_i\varphi_2)-(A_i\varphi_2\varphi_6+B_i\varphi_3)]$$

И вторая:

$$\frac{\partial\varphi_{14}}{\partial t_6}=-\varphi_{15},\frac{\partial\varphi_{14}}{\partial t_7}=-\varphi_{17},\frac{\partial\varphi_{14}}{\partial t_5}=\varphi_{16}\varphi_{22},$$

$$\frac{\partial\varphi_{17}}{\partial t_6}=-\varphi_{18},\frac{\partial\varphi_{17}}{\partial t_7}=\varphi_{14},\frac{\partial\varphi_{17}}{\partial t_5}=\varphi_{19}\varphi_{22},$$

$$\frac{\partial\varphi_{15}}{\partial t_6}=\varphi_{14},\frac{\partial\varphi_{15}}{\partial t_7}=-\varphi_{18},\frac{\partial\varphi_{15}}{\partial t_5}=-\varphi_{16}\varphi_{23},$$

$$\frac{\partial\varphi_{18}}{\partial t_6} = \varphi_{17}, \frac{\partial\varphi_{18}}{\partial t_7} = \varphi_{15}, \frac{\partial\varphi_{18}}{\partial t_5} = -\varphi_{19}\varphi_{23},$$

$$\frac{\partial\varphi_{16}}{\partial t_6} = 0, \frac{\partial\varphi_{16}}{\partial t_7} = -\varphi_{19}, \frac{\partial\varphi_{16}}{\partial t_5} = \varphi_{21},$$

$$\frac{\partial\varphi_{19}}{\partial t_6} = 0, \frac{\partial\varphi_{19}}{\partial t_7} = \varphi_{16}, \frac{\partial\varphi_{19}}{\partial t_5} = \varphi_{20},$$

$$\frac{\partial\varphi_{20}}{\partial t_6} = 0, \frac{\partial\varphi_{20}}{\partial t_7} = \varphi_{21}, \frac{\partial\varphi_{20}}{\partial t_5} = -\varphi_{19},$$

$$\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial t_6} = 0, \frac{\partial\varphi_{21}}{\partial t_7} = -\varphi_{20}, \frac{\partial\varphi_{21}}{\partial t_5} = -\varphi_{16},$$

$$\frac{\partial\varphi_{22}}{\partial t_6} = \varphi_{23}, \frac{\partial\varphi_{22}}{\partial t_7} = 0, \frac{\partial\varphi_{22}}{\partial t_5} = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi_{23}}{\partial t_6} = -\varphi_{22}, \frac{\partial\varphi_{23}}{\partial t_7} = 0, \frac{\partial\varphi_{23}}{\partial t_5} = 0.$$

2.2 Линеаризация

Пусть $(\varphi_1^*, \varphi_2^*, \dots, \varphi_{23}^*)$ – положение равновесие вокруг, которого мы будем линеаризовать систему. Введем отклонение $\delta_i(t) = \varphi_i(t) - \varphi_i^*$, $i \in [1:23]$. Тогда $\frac{\partial\varphi_i(t)}{\partial t_j} = \frac{\partial\delta_i(t)}{\partial t_j}, i \in [1:23]\ j \in [1:7]$. С учетом этого запишем все частные производные для каждого $\delta_i(t)$ и выделим линейную часть. Получим:

$$\frac{\partial\delta_1(t)}{\partial t_1} = \left(\delta_4{\varphi_5^*}^3 + 3\varphi_4^*{\varphi_5^*}^2\delta_5 + \varphi_4^*{\varphi_5^*}^3\right)\sqrt{\mu},$$

$$\frac{\partial\delta_1(t)}{\partial t_2} = -\frac{3}{2}\sqrt{\mu}(t_1 - t_0)\left(\delta_4{\varphi_5^*}^5 + 5\delta_5{\varphi_5^*}^4\varphi_4^* + {\varphi_5^*}^5\varphi_4^*\right),$$

$$\frac{\partial\delta_1(t)}{\partial t_3} = \delta_2\varphi_4^* + \varphi_2^*(\delta_4 + \varphi_4^*),$$

$$\frac{\partial\delta_1(t)}{\partial t_4} = \delta_4 + \varphi_4^*,$$

$$\frac{\partial\delta_2(t)}{\partial t_1} = \sqrt{\mu}\ \left(\delta_3\varphi_4^*\varphi_5^{*^3} + \varphi_3^*\left(\delta_4\varphi_5^{*^3} + 3\delta_5\varphi_5^{*^2}\varphi_4^* + \varphi_4^*\varphi_5^{*^3}\right)\right),$$

$$\frac{\partial\delta_2(t)}{\partial t_2} = -\frac{3}{2}\sqrt{\mu}(t_1 - t_0)\left(\delta_3\varphi_5^{*5}\varphi_4^* + \varphi_3^*\left(\delta_4\varphi_5^{*5} + 5\delta_5\varphi_5^{*4}\varphi_4^* + \varphi_5^{*5}\varphi_4^*\right)\right),$$

$$\frac{\partial\delta_2(t)}{\partial t_3} = \delta_2\varphi_3^*\varphi_4^* + \varphi_2^*(\delta_3\varphi_4^* + \delta_1\varphi_3^* + \varphi_3^*\varphi_4^*),$$

$$\frac{\partial\delta_2(t)}{\partial t_4} = \delta_3\varphi_4^* + \delta_4\varphi_3^* + \varphi_3^*\varphi_4^*,$$

$$\frac{\partial\delta_3(t)}{\partial t_1} = -\sqrt{\mu}\left(\delta_2\varphi_4^*\varphi_5^{*^3} + \varphi_2\left(\delta_4\varphi_5^{*^3} + 3\delta_5\varphi_5^{*^2}\varphi_4^* + \varphi_4^*\varphi_5^{*^3}\right)\right),$$

$$\frac{\partial\delta_3(t)}{\partial t_2} = \frac{3}{2}\sqrt{\mu}(t_1 - t_0)\left(\delta_2\varphi_4^*\varphi_5^{*5} + \varphi_2^*\left(\delta_4\varphi_5^{*5} + 5\delta_5\varphi_5^{*4}\varphi_4^* + \varphi_5^{*5}\varphi_4^*\right)\right),$$

$$\frac{\partial\delta_3(t)}{\partial t_3} = -\left(\delta_4\varphi_2^{*^2} + 2\delta_2\varphi_2^*\varphi_4^* + \varphi_4^*\varphi_2^{*^2}\right),$$

$$\frac{\partial\delta_3(t)}{\partial t_4} = -(\delta_2\varphi_4^* + \delta_4\varphi_2^* + \varphi_2^*\varphi_4^*),$$

$$\frac{\partial\delta_4(t)}{\partial t_1} = -\sqrt{\mu}t_3\left(\delta_2\varphi_4^{*^3}\varphi_5^{*^3} + \varphi_2^*\left(3\delta_4\varphi_4^{*^2}\varphi_5^{*^3} + 3\delta_5\varphi_5^{*^2}\varphi_4^{*^3} + \varphi_4^{*^3}\varphi_5^{*^3}\right)\right),$$

$$\frac{\partial\delta_4(t)}{\partial t_2} = \frac{3}{2}\sqrt{\mu}(t_1 - t_0)t_3\left(\delta_2\varphi_4^{*3}\varphi_5^{*5}\right.$$
$$\left. + \varphi_2^*\left(3\delta_4\varphi_4^{*2}\varphi_5^{*5} + 5\delta_5\varphi_5^{*4}\varphi_4^{*3} + \varphi_4^{*3}\varphi_5^{*5}\right)\right),$$

$$\frac{\partial\delta_4}{\partial t_3} = \delta_3\varphi_4^{*^2} + \varphi_3^*\left(2\varphi_4^*\delta_4 + \varphi_4^{*^2}\right) - t_3\left(\varphi_2^{*^2}\varphi_4^{*^3} + 2\delta_2\varphi_2^*\varphi_4^{*^3} + 3\delta_4\varphi_4^{*^2}\varphi_2^{*^2}\right),$$

$$\frac{\partial\delta_4(t)}{\partial t_4} = -t_3\left(\delta_2\varphi_4^{*3} + \varphi_2^*\left(3\delta_4\varphi_4^{*2} + \varphi_4^{*3}\right)\right),$$

$$\frac{\partial\delta_5(t)}{\partial t_j} = 0\ , j = 1, 3, 4,\ \frac{\partial\delta_5}{\partial t_2} = \frac{1}{2}\left(3\delta_5\varphi_5^{*^2} + \varphi_5^{*^3}\right)$$

$$\frac{\partial\delta_6(t)}{\partial t_j} = \frac{\partial\delta_7(t)}{\partial t_j} = 0, j = 1, 2, 4, \frac{\partial\delta_6(t)}{\partial t_3} = -t_3(\delta_7 + \varphi_7^*),$$

$$\frac{\partial\delta_7(t)}{\partial t_3} = t_3\left(3\delta_7\varphi_7^{*2} + \varphi_7^{*3}\right),$$

$$\frac{\partial \delta_{7+i}(t)}{\partial t_1} = t_2\sqrt{\mu}\Big[{\varphi_5^*}^3\varphi_4^*\big(A_i(\delta_3\varphi_6^* + \delta_6\varphi_3^* + \varphi_3^*\varphi_6^*) - B_i(\delta_2 + \varphi_2^*)\big)$$
$$+ \big(\delta_4{\varphi_5^*}^3 + 3\delta_5{\varphi_5^*}^2\varphi_4^*\big)(A_i\varphi_3^*\varphi_6^* - B_i\,\varphi_2^*)\Big],$$

$$\frac{\partial \delta_{7+i}(t)}{\partial t_2} = (\delta_3 + \varphi_3^* - t_3)B_i + A_i(\delta_3\varphi_6^* + \delta_6\varphi_3^* + \varphi_3^*\varphi_6^*)$$
$$+ \frac{3}{2}\sqrt{\mu}(t_1 - t_0)t_2\Big[\varphi_4^*{\varphi_5^*}^5\big(B_i(\delta_2 + \varphi_2^*) - A_i(\delta_3\varphi_6^* + \delta_6\varphi_3^* + \varphi_3^*\varphi_6^*)\big)$$
$$+ \delta_4{\varphi_5^*}^5(B_i\varphi_2^* - A_i\varphi_3^*\varphi_6^*) + 5\delta_5{\varphi_5^*}^4\varphi_4^*(B_i\varphi_2^* - A_i\varphi_3^*\varphi_6^*)\Big],$$

$$\frac{\partial \delta_{7+i}(t)}{\partial t_3} = t_2\Big(A_i(\varphi_2^*\varphi_3^*\varphi_4^*\varphi_6^* + \delta_2\varphi_3^*\varphi_4^*\varphi_6^* + \delta_3\varphi_2^*\varphi_4^*\varphi_6^* + \delta_4\varphi_2^*\varphi_3^*\varphi_6^*$$
$$+ \delta_6\varphi_2^*\varphi_3^*\varphi_4^*) - A_it_3(\delta_2\varphi_7^* + \delta_7\varphi_2^* + \varphi_2^*\varphi_7^*)$$
$$- B_i\Big(1 + \delta_4{\varphi_2^*}^2 + \varphi_4^*\big(2\delta_2\varphi_2^* + {\varphi_2^*}^2\big)\Big)\Big),$$

$$\frac{\partial \delta_{7+i}(t)}{\partial t_4} = t_2\Big[\delta_4(A_i\varphi_3^*\varphi_6^* + B_i\varphi_2^*)$$
$$+ \varphi_4^*\big(A_i(\delta_3\varphi_6^* + \delta_6\varphi_3^* + \varphi_3^*\varphi_6^*) - B_i(\delta_2 + \varphi_2^*)\big)\Big],$$

$$\frac{\partial \delta_{10+i}(t)}{\partial t_1} = -\mu t_3\Big(\varphi_2^*{\varphi_4^*}^3{\varphi_5^*}^4\big(A_i(\delta_3\varphi_6^* + \delta_6\varphi_3^* + \varphi_3^*\varphi_6^*) - B_i(\delta_2 + \varphi_2^*)\big)$$
$$+ \big(\delta_2{\varphi_4^*}^3{\varphi_5^*}^4 + 3\delta_4{\varphi_4^*}^2\varphi_2^*{\varphi_5^*}^4 + 4\delta_5{\varphi_5^*}^3\varphi_2^*{\varphi_4^*}^3\big)(A_i\varphi_3^*\varphi_6^* - B_i\,\varphi_2^*)\Big)$$
$$- \mu\Big({\varphi_4^*}^2{\varphi_5^*}^4\big(B_i(\delta_3 + \varphi_3^*) + A_i(\delta_2\varphi_6^* + \delta_6\varphi_2^* + \varphi_2^*\varphi_6^*)\big)$$
$$+ \big(2\delta_4\varphi_4^*{\varphi_5^*}^4 + 4\delta_5{\varphi_5^*}^3{\varphi_4^*}^2\big)(A_i\varphi_2^*\varphi_6^* + B_i\,\varphi_3^*)\Big),$$

$$\frac{\partial \delta_{10+i}(t)}{\partial t_2} = \frac{1}{2}\sqrt{\mu}\,\Big[{\varphi_5^*}^3\varphi_4^*\Big(A_i(\delta_3\varphi_6^* + \delta_6\varphi_3^* + \varphi_3^*\varphi_6^*) - B_i(\delta_2 + \varphi_2^*)$$
$$+ \big(\delta_4^*{\varphi_5^*}^3 + 3\delta_5{\varphi_5^*}^2\varphi_4^*\big)(A_i\varphi_3^*\varphi_6^* - B_i\varphi_2^*)\Big)\Big]$$
$$+ \frac{3}{2}\mu(t_1$$
$$- t_0)\Big({\varphi_4^*}^2{\varphi_5^*}^6\big[t_3\varphi_2^*\varphi_4^*\big(A_i(\delta_3\varphi_6^* + \delta_6\varphi_3^* + \varphi_3^*\varphi_6^*) - B_i(\delta_2 + \varphi_2^*)\big)$$
$$+ t_3(\delta_2\varphi_4^* + \delta_4\varphi_2^*)(A_i\varphi_3^*\varphi_6^* - B_i\varphi_2^*) + B_i(\delta_3 + \varphi_3^*)$$
$$+ A_i(\delta_2\varphi_6^* + \delta_6\varphi_2^* + \varphi_2^*\varphi_6^*)\big]$$
$$+ \Big(2\delta_4\varphi_4^*{\varphi_5^*}^6 + 6\delta_5{\varphi_5^*}^5{\varphi_4^*}^2\Big)\big[t_3{\varphi_4}^*\varphi_2^*(A_i\varphi_3^*\varphi_6^* - B_i\varphi_2^*) + B_i\varphi_3^*$$
$$+ A_i\varphi_2^*\varphi_6^*\big]\Big),$$

$$\frac{\partial\delta_{10+i}(t)}{\partial t_3} = \sqrt{\mu}\Bigg({\varphi_4^*}^2\varphi_5^*\ \Big(\big(\varphi_3^* - t_3{\varphi_2^*}^2\varphi_4^*\big)\big(A_i(\delta_3\varphi_6^* + \delta_6\varphi_3^* + \varphi_3^*\varphi_6^*)$$

$$- B_i(\delta_2 + \varphi_2^*)\big)$$

$$+ \Big(\delta_3 - t_3\big(2\delta_2\varphi_2^*\varphi_4^* + \delta_4{\varphi_2^*}^2\big)\Big)\left(A_i\varphi_3^*\varphi_6^* - B_i\,\varphi_2^*\right)\Big)$$

$$+ \left(2\delta_4\varphi_4^*\varphi_5^* + \delta_5{\varphi_4^*}^2\right)\big(\varphi_3^* - t_3{\varphi_2^*}^2\varphi_4^*\big)(A_i\varphi_3^*\varphi_6^* - B_i\,\varphi_2^*)\Bigg)$$

$$- \sqrt{\mu}\Big(\varphi_4^*\varphi_5^*\Big(B_i(\varphi_2^*\varphi_3^*\varphi_4^* + \delta_2\varphi_3^*\varphi_4^* + \delta_3\varphi_2^*\varphi_4^* + \delta_4\varphi_2^*\varphi_3^*)$$

$$+ A_i\big({\varphi_2^*}^2\varphi_4^*\varphi_6^* + 2\delta_2\varphi_2^*\varphi_4^*\varphi_6^* + \delta_4{\varphi_2^*}^2\varphi_6^* + \delta_6{\varphi_2^*}^2\varphi_4^*\big)$$

$$+ A_i t_3(\delta_3\varphi_7^* + \delta_7\varphi_3^* + \varphi_3^*\varphi_7^*)\Big)$$

$$+ (\delta_4\varphi_5^* + \delta_5\varphi_4^*)\big(B_i\,\varphi_2^*\varphi_3^*\varphi_4^* + A_i\,{\varphi_2^*}^2\varphi_4^*\varphi_6^* + A_i t_3\varphi_3^*\varphi_7^*\big)\Big),$$

$$\frac{\partial\delta_{10+i}(t)}{\partial t_4} = \sqrt{\mu}({\varphi_4^*}^2\varphi_5^*[t_3\varphi_4^*\varphi_2^*(A_i(\delta_3\varphi_6^* + \delta_6\varphi_3^* + \varphi_3^*\varphi_6^*) - B_i(\delta_2 + \varphi_2^*))$$

$$+ t_3(\delta_2\varphi_4^* + \delta_4\varphi_2^*)(A_i\varphi_3^*\varphi_6^* - B_i\varphi_2^*) - (B_i(\delta_3 + \varphi_3^*)$$

$$+ A_i(\delta_2\varphi_6^* + \delta_6\varphi_2^* + \varphi_2^*\varphi_6^*))]$$

$$+ \big(2\delta_4\varphi_4^*\varphi_5^*$$

$$+ \delta_5{\varphi_4^*}^2)[t_3\varphi_2^*\varphi_4^*(A_i\varphi_3^*\varphi_6^* - B_i\varphi_2^*) - (B_i\varphi_3^* + A_i\varphi_2^*\varphi_6^*)]\big), i\,\epsilon\,[1:3]$$

$$\frac{\partial\delta_{14}(t)}{\partial t_5} = \delta_{16}\varphi_{22}^* + \delta_{22}\varphi_{16}^* + \varphi_{16}^*\varphi_{22}^*, \frac{\partial\delta_{14}(t)}{\partial t_6} = -(\delta_{15} + \varphi_{15}^*), \frac{\partial\delta_{14}(t)}{\partial t_7}$$

$$= -(\delta_{17} + \varphi_{17}^*),$$

$$\frac{\partial\delta_{15}(t)}{\partial t_6} = -\varphi_{14}^* - \delta_{14},\quad \frac{\partial\delta_{15}(t)}{\partial t_7} = -\varphi_{18}^* - \delta_{18},$$

$$\frac{\partial\delta_{15}(t)}{\partial t_5} = -(\varphi_{16}^*\varphi_{23}^* + \delta_{16}\varphi_{23}^* + \delta_{23}\varphi_{16}^*),$$

$$\frac{\partial\delta_{16}(t)}{\partial t_5} = \delta_{21} + \varphi_{21}^*, \frac{\partial\delta_{16}(t)}{\partial t_6} = 0, \frac{\partial\delta_{16}(t)}{\partial t_7} = -(\delta_{19} + \varphi_{19}^*),$$

$$\frac{\partial\delta_{17}(t)}{\partial t_6} = -\varphi_{18}^* - \delta_{18}, \frac{\partial\delta_{17}(t)}{\partial t_7} = \varphi_{14}^* + \delta_{14}, \frac{\partial\delta_{17}(t)}{\partial t_5}$$

$$= \varphi_{19}^*\varphi_{22}^* + \delta_{19}\varphi_{22}^* + \delta_{22}\varphi_{19}^*,$$

$$\frac{\partial\delta_{18}(t)}{\partial t_5} = -(\delta_{19}\varphi_{23}^* + \delta_{23}\varphi_{19}^* + \varphi_{19}^*\varphi_{23)}^*, \frac{\partial\delta_{18}(t)}{\partial t_6} = \delta_{17} + \varphi_{17}^*\,, \frac{\partial\delta_{18}(t)}{\partial t_7}$$

$$= \delta_{15} + \varphi_{15}^*,$$

$$\frac{\partial \delta_{19}(t)}{\partial t_6} = 0, \frac{\partial \delta_{19}(t)}{\partial t_7} = \varphi_{16}^* + \delta_{16}, \frac{\partial \delta_{19}(t)}{\partial t_5} = \varphi_{20}^* + \delta_{20},$$

$$\frac{\partial \delta_{20}(t)}{\partial t_5} = -(\delta_{19} + \varphi_{19}^*), \frac{\partial \delta_{20}(t)}{\partial t_6} = 0, \frac{\partial \delta_{20}(t)}{\partial t_7} = \delta_{21} + \varphi_{21}^*,$$

$$\frac{\partial \delta_{21}(t)}{\partial t_6} = 0, \frac{\partial \delta_{21}(t)}{\partial t_7} = -(\varphi_{20}^* + \delta_{20}), \frac{\partial \delta_{21}(t)}{\partial t_5} = -(\varphi_{16}^* + \delta_{16}),$$

$$\frac{\partial \delta_{22}(t)}{\partial t_5} = 0, \frac{\partial \delta_{22}(t)}{\partial t_6} = \delta_{23} + \varphi_{23}^*, \frac{\partial \delta_{22}(t)}{\partial t_7} = 0,$$

$$\frac{\partial \delta_{23}(t)}{\partial t_6} = -(\varphi_{22}^* + \delta_{22}); \frac{\partial \delta_{23}(t)}{\partial t_7} = 0; \frac{\partial \delta_{23}(t)}{\partial t_5} = 0.$$

2.3 Метод рядов Тейлора

Линеаризованная система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t_\nu} = a_\nu + A_\nu \delta, \nu = 1, \dots, 23$$

Значит будем рассматривать задачу Коши:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t_\nu} = a_\nu + A_\nu \delta, \nu = 1, \dots, 23, \delta(t_0) = \delta_0$$

Тогда по методу рядов Тейлора решение будем искать в виде:

$$\delta_{\tau_\omega} = T_{N_\omega} \delta(\tau_\omega, \tau_{\omega-1}, \delta_{\tau_{\omega-1}}), \omega = 1, 2, \dots, \qquad N_\omega = (N_{\omega,1}, \dots, N_{\omega,7}) \in (0:\infty)^7,$$

$$\tau_0 = t_0, \tau_\omega = \tau_{\omega-1} + h_\omega, \qquad \tau_\omega = (\tau_{\omega,1}, \dots, \tau_{\omega,7}),$$

$$h_\omega = (h_{\omega,1}, \dots, h_{\omega,7}) \in C^7,$$

$$T_{N_\omega} \delta(\tau_\omega, \tau_{\omega-1}, \delta_{\tau_{\omega-1}}) = \sum_{m=0}^{N_\omega} \frac{\delta_0^{(m)} (t - t_0)^m}{m!}, \delta_0^{(m)} = \frac{\partial^{|m|} \delta}{\partial t^m},$$

$$|m| = m_1 + \dots + m_7, \delta^{(0)} = \delta$$

Здесь $T_{N_\omega} \delta(\tau_\omega, \tau_{\omega-1}, \delta_{\tau_{\omega-1}})$ - коэффициенты Тейлора, где $\delta_0^{(m)}$ – частная производная порядка m, τ_ω- момент времени, а h_ω – шаг метода. Причем для h_ω должно выполняться условие:

$$|h_{\omega,\nu}| < R_\nu(\tau_{\omega-1}, \delta_{\tau_{\omega-1}}), \nu = 1, \dots, 7$$

Тут $R_\nu(\tau_{\omega-1}, \delta_{\tau_{\omega-1}}), \nu = 1, \dots, 7$ - радиус сходимости. Естественно попытаться выбирать максимально большие возможные шаги. Для этого воспользуемся оценкой из [1]:

$$\rho_\nu = \frac{1}{s_\nu}, s_\nu = \|A_\nu\|_\infty = \max_{i\in[1:23]} s_{\nu,i}\,, s_{\nu,i} = \sum_{j=1}^{23} |a_{\nu,i,j}|\,, A_\nu = (a_{\nu,i,j}), \nu = 1, \dots, 7$$

Такие ρ_ν возьмем за шаг метода.

Глава 3. Численный эксперимент

3.1 Описание программы

Программа написана на внутреннем языке программирования среды MatLab. Она состоит из нескольких функций, выполняющих вспомогательные вычисления, и скрипта, предназначенного для запуска программы.

1. Вводятся начальные значения: μ, $t_1 = t$, t_2 =a, $t_3 = e$, t_4 = M_0, $t_5 = i$, t_6 =Ω, $t_7 = \omega$ - соответственно начальный момент времени, большая полуось орбиты, эксцентриситет, средняя аномалия в начальный момент времени, наклонение, долгота восходящего узла и аргумент перицентра.
2. Вычисляются A(1), A(2), A(3), B(1), B(2), B(3) – значения параметров A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 по формулам из 1.3.
3. Вычисляется вектор F – значения φ в начальной точке по формулам из таблицы в 2.1.
4. Задается вектор fi – положение равновесия φ^*
5. Вычисляется отклонение F = F – fi
6. Строится матрица значений полученных методом рядов Тейлора: в цикле каждую итерацию считается новое значение, используя формулу $\delta_i = \delta_{i-1} + \delta^{(1)} * h_i$ – считается сначала шаг S = R(t, t0, fi, mu) (функция R принимает значения вектора t, начального момента времени, вектора положения равновесия, значение μ и реализует метод вычисления оптимального шага из 2.3), а после новое значение отклонения F = F + syst (t, F, t0, fi, mu, S) (функция syst принимает значения вектора t, вектора отклонений, начального момента времени, вектора положения равновесия, значение μ, шаг h_i и вычисляет $\delta^{(1)} * h_i$) и следующий момент времени $\tau_i = \tau_{i-1} + h_i$ - t = t + S.
7. Из полученных величин строится график величин $\varphi_8 = \xi_1$, $\varphi_9 = \xi_2$, $\varphi_{10} = \xi_3$;

   Функции R(t, t0, fi, mu) и syst (t, F, t0, fi, mu, S) представлены во вложениях.

3.2 Результаты эксперимента

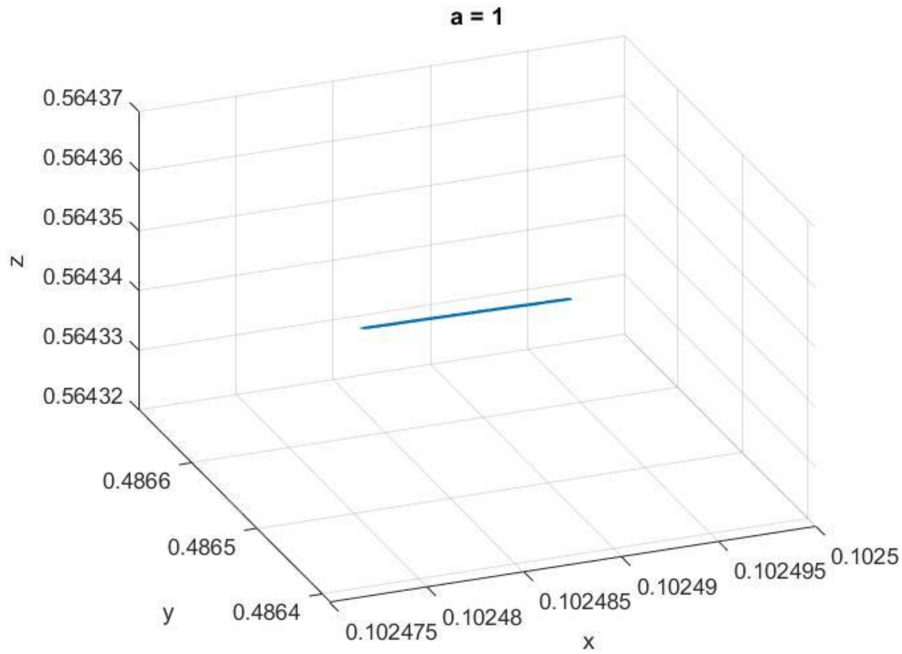
Рассмотрим такие начальные данные:

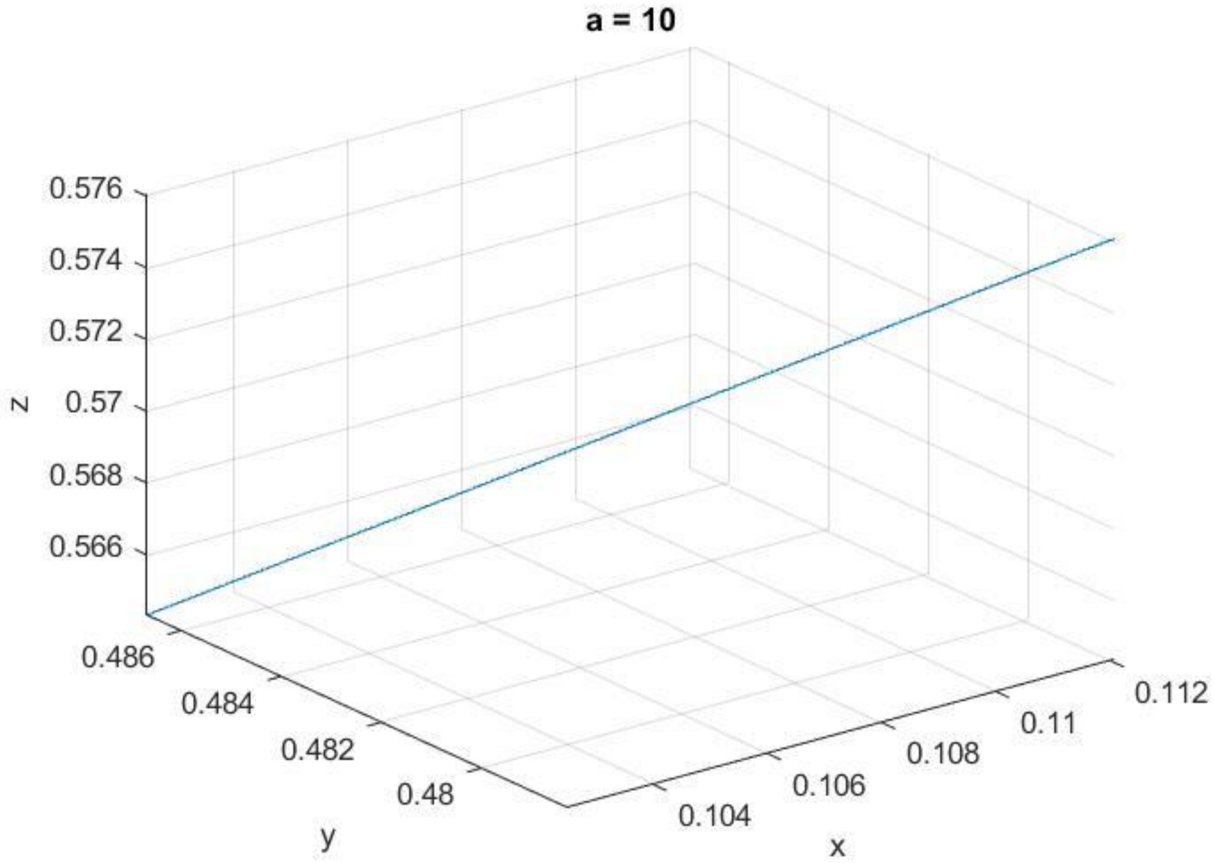
μ = 9.8*(1.9889169e+10 + 1.89863e+2),
t= 0,
a_0 =0.778194564622574,
e =0.048425472281527694,
M_0 = 313.3830012166574,
i = 1.305185101881517,
Ω = 1.049431512298086,
ω = 1.736540415423883.

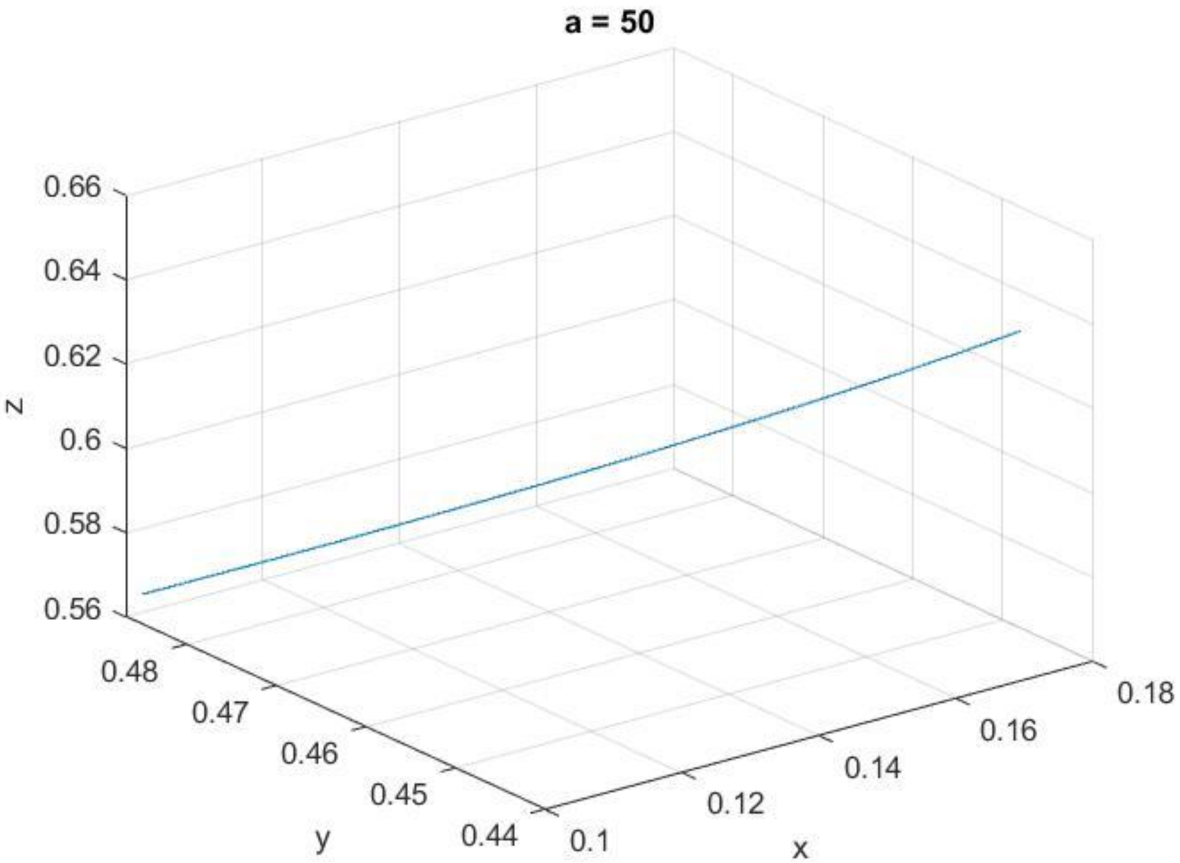
А значение положения, от которого будем считать отклонение, будем выбирать в зависимости от большой полуоси a:

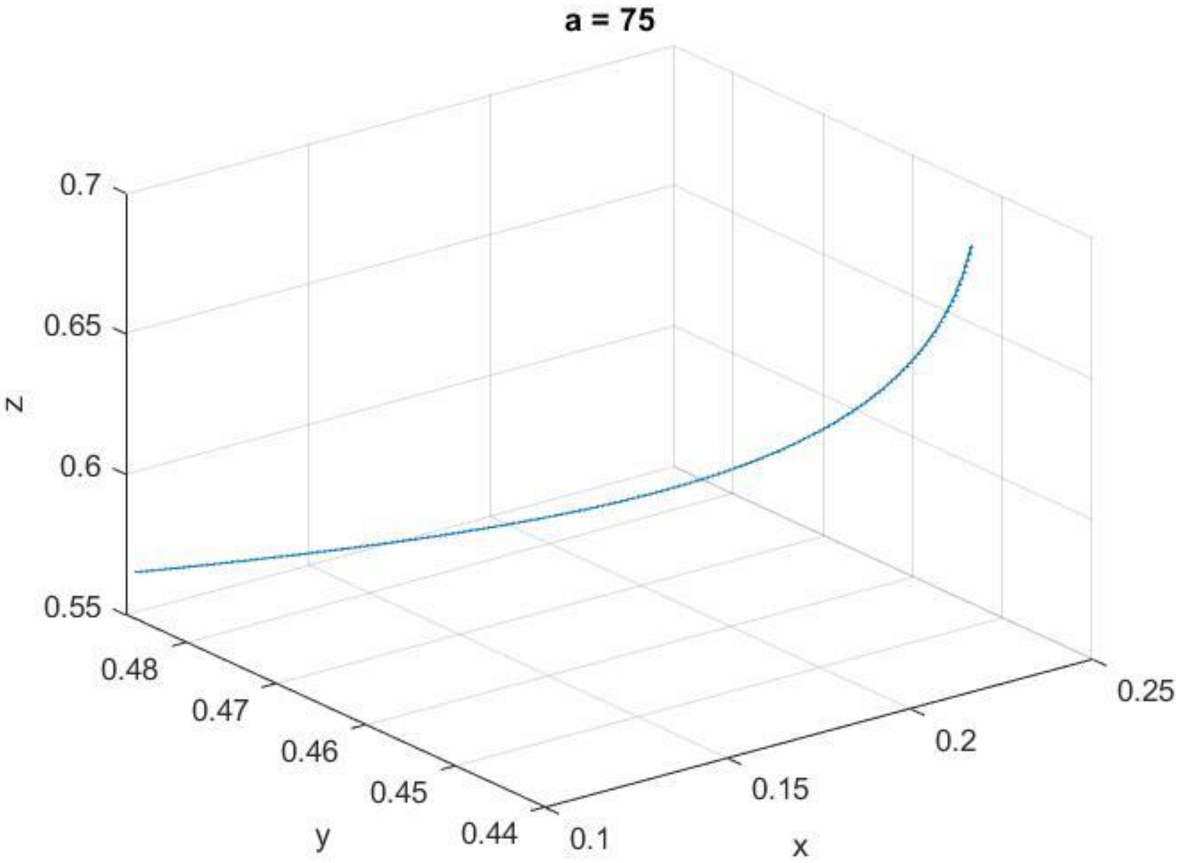
$\varphi_1^* = 1.5\pi,$
$\varphi_2^* = \sin\varphi_1^*,$
$\varphi_3^* = \cos\varphi_1^*,$
$\varphi_4^* = 1,$
$\varphi_5^* = a^{-0.5},$
$\varphi_6^* = \left(\frac{1}{a^2}\right)^{0.5},$
$\varphi_7^* = \left(\frac{1}{a^2}\right)^{-0.5},$
$\varphi_i^* = 0, i = [8:23].$

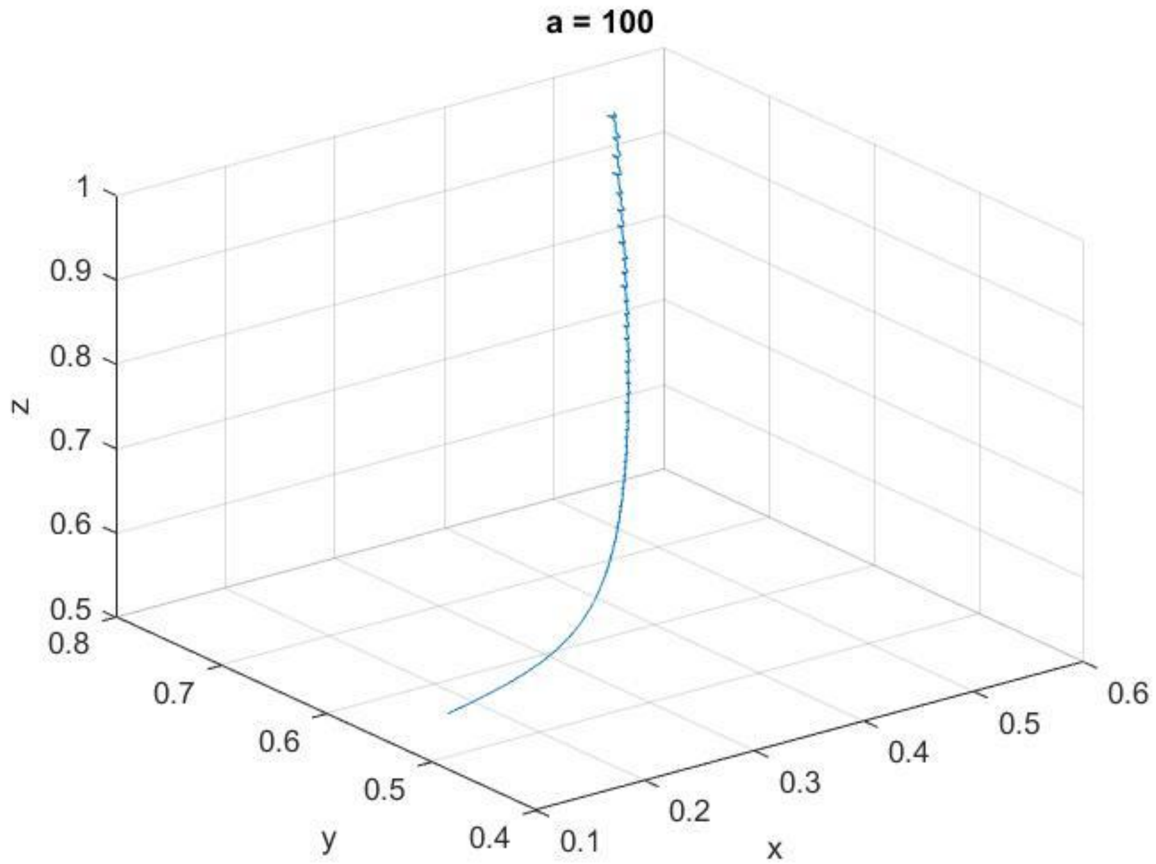
При изменении значений a были получены следующие результаты:

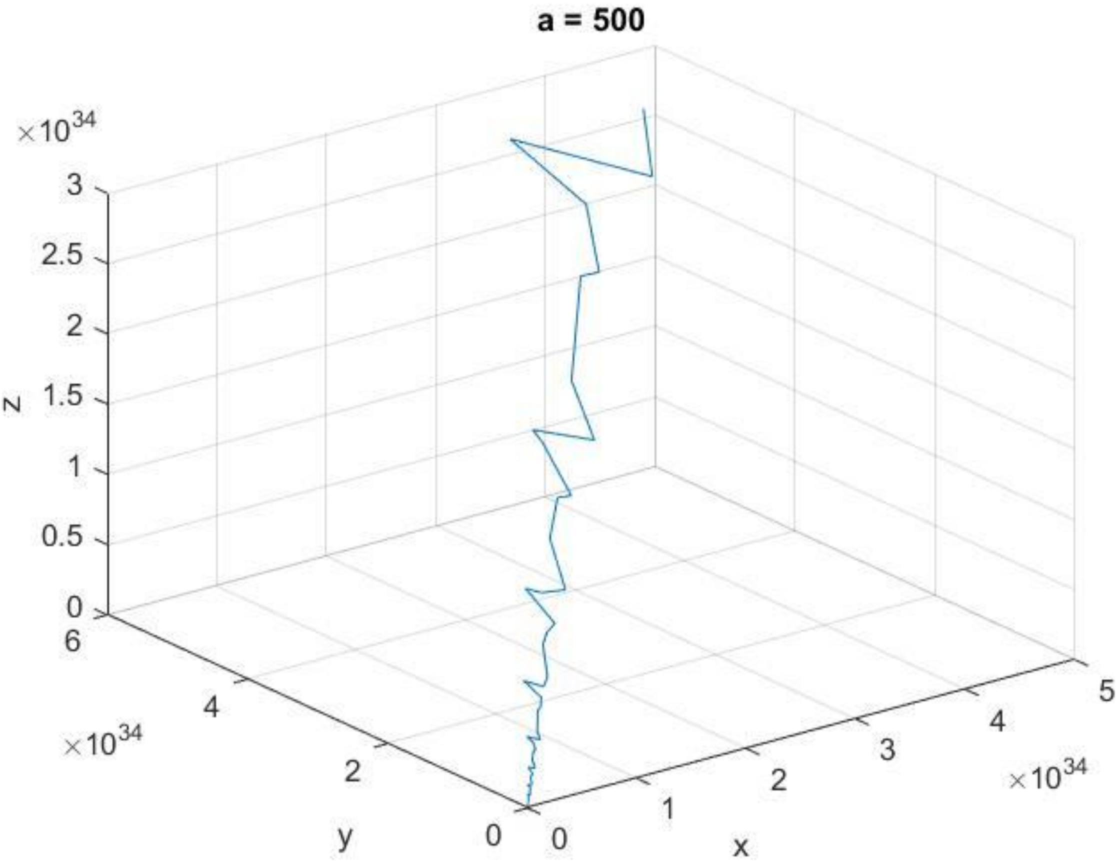



a = 10
0.576
0.574
0.572
z
0.57
0.568
0.566
0.486
0.484
0.482
0.48
y
0.104
0.106
0.108
0.11
0.112
x


a = 50
0.66
0.64
0.62
z
0.6
0.58
0.56
0.48
0.47
0.46
0.45
0.44
y
0.1
0.12
0.14
0.16
0.18
x


a = 75
z
0.7
0.65
0.6
0.55
0.48
0.47
0.46
0.45
0.44
y
0.1
0.15
0.2
0.25
x


a = 100
z
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
y
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
x



Так как полученная в работе система является искусственной, то и полученные результаты нужно рассматривать как модельные, полученные в ходе отладки системы.

Заключение

В результате исследования мной были получены следующие результаты:

1. В первой главе была изучена задача двух тел и записаны уравнения движения с их решениями в общем виде.
2. Во второй главе была описана система полиномиальных дифференциальных уравнений в частных производных для решения выбранной задачи, получена линеаризованная система.
3. В третьей главе был программно реализован метод рядов Тейлора для линеаризованной системы на внутреннем языке программирования среды MatLab.

Полученные результаты можно рассматривать как первый шаг к решению полных полиномиальных систем уравнений в частных производных. В дальнейшем планируется работа над решением уже полиномиальной задачи.

Литература

[1]Л.К. Бабаджанянц, И.Ю. Потоцкая, Ю.Ю. Пупышева Оценки в методе рядов Тейлора для линейных полных УрЧП // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. Вып. 2. С. 00–00.

[2]Бабаджанянц, Л. К., Брэгман, А. М., Брэгман, К. М., Касикова, П. В., & Петросян, Л. А. (2016). Полные системы уравнений для задачи двух тел. ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ - ОТ ТЕОРИИ К ПРАКТИКЕ, 8(56), 13-20.

[3] Холшевников К.В., Титов В.Б. Задача двух тел: Учеб. пособие. – СПб., 2007. – 180 с.

[4] Емельянов Н. В. Практическая небесная механика. – М.: Физический факультет МГУ, 2018. 270 с.

[5] Брэгман А.М. Движение тела, управляемого малой тягой в поле Ньютона: Магистерская диссертация. СПб., Санкт-Петербургский Государственный университет, 2014, 145 с.

Приложение 1

Функция R(t, t0, fi, mu)

```
function S = R(t, t0, fi, mu)
A1 = [];
A1(1) = abs(sqrt(mu)*fi(5)^3) + abs(sqrt(mu)* 3*fi(4)*fi(5)^2);
A1(2) = abs(-1.5*sqrt(mu)*(t(1) - t0)*fi(5)^5) +abs(-
1.5*sqrt(mu)*(t(1)  -t0)*5*fi(4)*fi(5)^4) ;
A1(3) = abs(fi(4)) + abs(fi(2));
A1(4) = 1;
%%%%%%% F2
A1(5) = abs(sqrt(mu)*fi(4)*fi(5)^3) + abs(sqrt(mu)*fi(3)*fi(5)^3) +
abs(sqrt(mu)*fi(3)*3*fi(5)^2*fi(4)) ;
A1(6) = abs(-1.5*sqrt(mu)*(t(1)  -t0)*fi(4)*fi(5)^5) + abs(-
1.5*sqrt(mu)*(t(1) - t0)*fi(3)*fi(5)^5) +abs(-1.5*sqrt(mu)*(t(1) -
t0)*fi(3)*5*fi(5)^4*fi(4));
A1(7) = abs(fi(3)*fi(4)) + abs(fi(2)*fi(4)) + abs(fi(2)*fi(3)) ;
A1(8) = abs(fi(4)) + abs(fi(3));
%%%%%%% F3
A1(9) = abs(-sqrt(mu)*fi(4)*fi(5)^3) + abs(-sqrt(mu)*fi(2)*fi(5)^3) +
abs(-sqrt(mu)*fi(2)*3*fi(5)^2*fi(4));
A1(10) = abs(1.5*sqrt(mu)*(t(1) - t0)*fi(4)*fi(5)^5) +
abs(1.5*sqrt(mu)*(t(1) - t0)*fi(2)*fi(5)^5) +
abs(1.5*sqrt(mu)*fi(2)*5*fi(5)^4*fi(4));
A1(11) = abs(fi(2)^2) + abs(2*fi(2)*fi(4)) ;
A1(12) = abs(fi(4)) + abs(fi(2)) ;
%%%%%%% F4
A1(13) = abs(-sqrt(mu)*t(3)*fi(4)^3*fi(5)^3) + abs(-
sqrt(mu)*t(3)*fi(2)*3*fi(4)^2*fi(5)^3) + abs(-
sqrt(mu)*t(3)*fi(2)*3*fi(5)^2*fi(4)^3);
A1(14) = abs(1.5*sqrt(mu)*t(3)*(t(1) - t0)*fi(4)^3*fi(5)^5) +
abs(1.5*sqrt(mu)*(t(1) - t0)*t(3)*fi(2)*3*fi(4)^2*fi(5)^5) +
abs(1.5*sqrt(mu)*(t(1) - t0)*t(3)*fi(2)*5*fi(5)^4*fi(4)^3);
A1(15) = abs(fi(4)^2) + abs(fi(3)*2*fi(4)  -t(3)*3*fi(4)^2*fi(2)^2) +
abs(t(3)*2*fi(2)*fi(4)^3);
A1(16) = abs(t(3)*fi(4)^3) + abs(t(3)*fi(2)*3*fi(4)^2);
%%%%%%% F5
A1(17) = 0;
A1(18) = abs(0.5*3*fi(5)^2);
A1(19) = 0;
A1(20) = 0;
%%%%%%% F6
A1(21) = 0;
A1(22) = 0;
A1(23) = abs(-t(3));
A1(24) = 0;
%%%%%%% F7
A1(25) = 0;
A1(26) = 0;
A1(27) = abs(3*t(3)*fi(7)^2);
A1(28) = 0;
%%%%%%% A-B
A(1) = -sin(t(7))*cos(t(6)) - cos(t(7))*sin(t(6))*cos(t(5));
A(2) = -sin(t(7))*sin(t(6)) + cos(t(7))*cos(t(6))*cos(t(5));
A(3) = cos(t(7))*sin(t(5));
B(1) = cos(t(7))*cos(t(6)) - sin(t(7))*sin(t(6))*cos(t(5));
```

```
B(2) = cos(t(7))*sin(t(6)) + sin(t(7))*cos(t(6))*cos(t(5));
B(3) = sin(t(7))*sin(t(5));
%%%%%%% F8-10
i = 0;
j = 25;
while i~=3
   i = i+1;
   j = j+4;
   A1(j) = abs(t(2)*sqrt(mu)*A(i)*fi(4)*fi(5)^3*fi(3)) +
abs(t(2)*sqrt(mu)*fi(4)*fi(5)^3*A(i)*fi(6)) +
abs(t(2)*sqrt(mu)*fi(5)^3*(A(i)*fi(3)*fi(6) - B(i)*fi(2))) +
abs(t(2)*sqrt(mu)*3*fi(5)^2*fi(4)*(A(i)*fi(3)*fi(6)  - B(i)*fi(2))) +
abs(t(2)*sqrt(mu)*B(i)*fi(5)^3*fi(5));
end
i = 0;
j = 26;
while i~=3
   i = i+1;
   j = j+4;
   A1(j) = abs(B(i) + A(i)*fi(6)-1.5*sqrt(mu)*(t(1) -
t0)*t(2)*fi(4)*fi(5)^5*A(i)*fi(6)) + abs(A(i)*fi(3) -
1.5*sqrt(mu)*t(2)*(t(1) - t0)*fi(4)*fi(5)^5*A(i)*fi(3)) +
abs(1.5*sqrt(mu)*t(2)*(t(1) - t0)*fi(4)*fi(5)^5*B(i))
+abs(1.5*sqrt(mu)*t(2)*(t(1) - t0)*fi(5)^5*(B(i)*fi(2) -
A(i)*fi(3)*fi(6)))+ abs(1.5*sqrt(mu)*(t(1) -
t0)*t(2)*5*fi(5)^4*fi(4)*(B(i)*fi(2) - A(i)*fi(3)*fi(6)));
 end
i = 0;
j = 27;
while i~=3
   i = i+1;
   j = j+4;
   A1(j) = abs(t(2)*A(i)*fi(3)*fi(4)*fi(6) - t(2)*A(i)*t(3)*fi(7) -
t(2)*B(i)*fi(4)*2*fi(2)) + abs(t(2)*A(i)*fi(2)*fi(4)*fi(6)) +
abs(t(2)*A(i)*fi(2)*fi(3)*fi(6) - t(2)*B(i)*fi(2)^2) +
abs(t(2)*A(i)*fi(2)*fi(3)*fi(4)) +  abs(-t(3)*A(i)*t(2)*fi(2));
end
i = 0;
j = 28;
while i~=3
   i = i+1;
   j = j+4;
   A1(j) = abs(t(2)*(A(i)*fi(6)*fi(3) + B(i)*fi(2))) +
abs(t(2)*fi(4)*A(i)*fi(3))  + abs(t(2)*fi(4)*A(i)*fi(6)) + abs(-
t(2)*fi(4)*B(i));
end
%%%%%%%%%% F11-13
i = 0;
j = 37;
while i~=3
   i = i+1;
   j = j+4;
   A1(j) = abs(-mu*t(3)*fi(2)*fi(5)^4*fi(4)^3*A(i)*fi(3) -
mu*(fi(4)^2*fi(5)^4*A(i)*fi(2))) + abs(-
mu*t(3)*fi(2)*fi(5)^4*fi(4)^3*A(i)*fi(6) - mu*(fi(4)^2*fi(5)^4*B(i)))
+ abs(-mu*t(3)*(-fi(2)*fi(5)^4*fi(4)^3*B(i) + (A(i)*fi(6)*fi(3) -
B(i)*fi(2))*fi(4)^3*fi(5)^4) - mu*(fi(4)^2*fi(5)^4*A(i)*fi(6))) +
abs(-mu*t(3)*(3*fi(4)^2*fi(2)*fi(5)^4*(A(i)*fi(3)*fi(6) - B(i)*fi(2)))
```

```
- mu*(2*fi(4)*fi(5)^4*(A(i)*fi(2)*fi(6) + B(i)*fi(3)))) + abs(-
mu*t(3)*(4*fi(4)^3*fi(2)*fi(5)^3*(A(i)*fi(3)*fi(6) - B(i)*fi(2))) -
mu*(4*fi(5)^3*fi(4)^2*(A(i)*fi(2)*fi(6) + B(i)*fi(3))));
end
i = 0;
j = 38;
while i~=3
   i = i+1;
   j = j+4;
   A1(j) = abs(0.5*sqrt(mu)*fi(5)^3*fi(4)*A(i)*fi(6) + 1.5*mu*(t(1) -
t0)*(fi(4)^2*fi(5)^6*(t(3)*fi(2)*fi(4)*A(i)*fi(6) +B(i)))) +
abs(0.5*sqrt(mu)*fi(5)^3*fi(4)*A(i)*fi(3) + 1.5*mu*(t(1) -
t0)*fi(4)^2*fi(5)^6*(t(3)*fi(2)*fi(4)*A(i)*fi(3) + A(i)*fi(2))) +
abs(-0.5*sqrt(mu)*fi(5)^3*fi(4)*B(i) +1.5*mu*(t(1) -
t0)*(fi(4)^2*fi(5)^6*(-t(3)*fi(2)*fi(4)*B(i) + A(i)*fi(6) +
t(3)*fi(4)*(A(i)*fi(3)*fi(6) - B(i)*fi(2))))) +
abs(0.5*sqrt(mu)*3*fi(5)^2*fi(4)*(A(i)*fi(3)*fi(6) - B(i)*fi(2)) +
1.5*mu*(t(1) -
t0)*(6*fi(5)^5*fi(4)*(t(3)*fi(4)*fi(2)*(A(i)*fi(3)*fi(6) - B(i)*fi(2))
+ B(i)*fi(3) + A(i)*fi(2)*fi(6)))) +
abs(0.5*sqrt(mu)*fi(5)^3*(A(i)*fi(3)*fi(6) - B(i)*fi(2)) +
1.5*mu*(t(1) - t0)*(fi(4)^2*fi(5)^6*t(3)*fi(2)*(A(i)*fi(3)*fi(6) -
B(i)*fi(2)) + 2*fi(4)*fi(5)^6*(t(3)*fi(4)*fi(2)*(A(i)*fi(3)*fi(6) -
B(i)*fi(2)) + B(i)*fi(3) + A(i)*fi(2)*fi(6))));
end
i = 0;
j = 39;
while i~=3
   i = i+1;
   j = j+4;
   A1(j) = abs(sqrt(mu)*(fi(4)^2*fi(5)*((fi(3) -
t(3)*fi(2)^2*fi(4))*A(i)*fi(6) + (A(i)*fi(3)*fi(6) - B(i)*fi(2)))) -
sqrt(mu)*(fi(4)*fi(5)*(B(i)*fi(2)*fi(4) + t(3)*A(i)*fi(7)))) +
abs(sqrt(mu)*fi(4)^2*fi(5)*(fi(3) - t(3)*fi(2)^2*fi(4))*A(i)*fi(3) -
sqrt(mu)*fi(4)*fi(5)*A(i)*fi(2)^2*fi(4)) +
abs(sqrt(mu)*(fi(4)^2*fi(5)*(-(fi(3) - t(3)*fi(2)^2*fi(4))*B(i) -
2*t(3)*fi(2)*fi(4)*(A(i)*fi(3)*fi(6) - B(i)*fi(2)))) -
sqrt(mu)*(fi(4)*fi(5)*(B(i)*fi(3)*fi(4) + A(i)*2*fi(2)*fi(4)*fi(6))))
+ abs(sqrt(mu)*(-fi(4)^2*fi(5)*t(3)*fi(2)^2*(A(i)*fi(3)*fi(6) -
B(i)*fi(2)) + 2*fi(4)*fi(5)*(fi(3) -
t(3)*fi(2)^2*fi(4))*(A(i)*fi(3)*fi(6) - B(i)*fi(2))) -
sqrt(mu)*(fi(4)*fi(5)*(B(i)*fi(2)*fi(3) + A(i)*fi(2)^2*fi(6)) +
fi(5)*(B(i)*fi(2)*fi(3)*fi(4) + A(i)*fi(2)^2*fi(4)*fi(6) +
A(i)*t(3)*fi(3)*fi(7)))) + abs(sqrt(mu)*fi(4)^2*(fi(3) -
t(3)*fi(2)^2*fi(4))*(A(i)*fi(3)*fi(6) - B(i)*fi(2))  -
sqrt(mu)*fi(4)*(B(i)*fi(2)*fi(3)*fi(4) + A(i)*fi(2)^2*fi(4)*fi(6) +
A(i)*t(3)*fi(3)*fi(7))) + abs(-sqrt(mu)*fi(4)*fi(5)*A(i)*t(3)*fi(3));
end
i = 0;
j = 40;
while i~=3
   i = i+1;
   j = j+4;
   A1(j) = abs(sqrt(mu)*(fi(4)^2*fi(5)*(t(3)*fi(4)*fi(2)*A(i)*fi(6) -
B(i)))) + abs(sqrt(mu)*fi(4)^2*fi(5)*(t(3)*fi(4)*fi(2)*A(i)*fi(3) -
A(i)*fi(2))) + abs(sqrt(mu)*(fi(4)^2*fi(5)*(-t(3)*fi(4)*fi(2)*B(i) +
t(3)*fi(4)*(A(i)*fi(3)*fi(6) - B(i)*fi(2)) - A(i)*fi(6)))) +
abs(sqrt(mu)*(fi(4)^2*fi(5)*t(3)*fi(2)*(A(i)*fi(3)*fi(6) - B(i)*fi(2))
```

```
+ 2*fi(4)*fi(5)*(t(3)*fi(2)*fi(4)*(A(i)*fi(3)*fi(6) - B(i)*fi(2)) -
(B(i)*fi(3) + A(i)*fi(2)*fi(6))))) +
abs(sqrt(mu)*fi(4)^2*(t(3)*fi(2)*fi(4)*(A(i)*fi(3)*fi(6) - B(i)*fi(2))
- (B(i)*fi(3) +  A(i)*fi(2)*fi(6))));
end
%%%%%%% F14

A1(53) = abs(fi(22)) + abs(fi(16));
A1(54) = 1;
A1(55) = 1;
%%%%%%% F15
A1(56) = abs(fi(23)) +abs(fi(16));
A1(57) = 1;
A1(58) = 1;
%%%%%%% F16
A1(59) = 1;
A1(60) = 0;
A1(61) = 1;
%%%%%%% F17
A1(62) =  abs(fi(22)) + abs(fi(19));
A1(63) = 1;
A1(64) = 1;
%%%%%% F18
A1(65) =  abs(fi(23)) + abs(fi(19));
A1(66) = 1;
A1(67) = 1;
%%%%%% F19
A1(68) = 1;
A1(69) = 0;
A1(70) = 1;
%%%%%% F20
A1(71) = 1;
A1(72) = 0;
A1(73) = 1;
%%%%%% F21
A1(74) = 1;
A1(75) = 0;
A1(76) = 1;
%%%%%% F22
A1(77) = 0;
A1(78) = 1;
A1(79) = 0;
%%%%% F23
A1(80) = 0;
A1(81) = 1;
A1(82) = 0;
S = [];
c = 0;
for i = 0:3
    j = 1;
    while j<=49
    c = max(c, A1(j+i));
    j = j+4;
    end
    S(1+i) = 1/c;
    c = 0;
end
c = 0;
```

```
for i = 0:2
    j = 53;
    while j<=80
    c = max(c, A1(j+i));
    j = j+3;
    end
    S(5+i) = 1/c;
    c =0;
end
```

Приложение 2

Функция syst (t, F, t0, fi, mu, S)

```
function F1 = syst (t, F, t0, fi, mu, S)
%%%%% F1
dF(1) = sqrt(mu)*(F(4)*fi(5)^3 + 3*fi(4)*fi(5)^2*F(5)+fi(4)*fi(5)^3);
dF(2) = -1.5*sqrt(mu)*(t(1) - t0)*(F(4)*fi(5)^5 + 5*fi(4)*fi(5)^4*F(5)
+ fi(4)*fi(5)^5);
dF(3) = F(2)*fi(4) + fi(2)*(F(4) + fi(4));
dF(4) = F(4)+ fi(4);
%%%%%%% F2
dF(5) = sqrt(mu)*(F(3)*fi(4)*fi(5)^3 + fi(3)*(F(4)*fi(5)^3 +
3*F(5)*fi(5)^2*fi(4) + fi(4)*fi(5)^3));
dF(6) = -1.5*sqrt(mu)*(t(1) - t0)*(F(3)*fi(4)*fi(5)^5 +
fi(3)*(F(4)*fi(5)^5 +5*F(5)*fi(5)^4*fi(4) + fi(4)*fi(5)^5));
dF(7) = F(2)*fi(3)*fi(4) + fi(2)*(F(3)*fi(4) + F(4)*fi(3) +
fi(3)*fi(4));
dF(8) = F(3)*fi(4) + F(4)*fi(3) + fi(3)*fi(4);
%%%%%%% F3
dF(9) = -sqrt(mu)*(F(2)*fi(4)*fi(5)^3 + fi(2)*(F(4)*fi(5)^3 +
3*F(5)*fi(5)^2*fi(4) + fi(4)*fi(5)^3));
dF(10) = 1.5*sqrt(mu)*(t(1) - t0)*(F(2)*fi(4)*fi(5)^5 +
fi(2)*(F(4)*fi(5)^5 + 5*F(5)*fi(5)^4*fi(4) + fi(4)*fi(5)^5));
dF(11) = -(F(4)*fi(2)^2 + 2*F(2)*fi(2)*fi(4) + fi(4)*fi(2)^2);
dF(12) = -(F(2)*fi(4) + F(4)*fi(2) + fi(2)*fi(4));
%%%%%%% F4
dF(13) = -sqrt(mu)*t(3)*(F(2)*fi(4)^3*fi(5)^3 +
fi(2)*(3*F(4)*fi(4)^2*fi(5)^3 + 3*F(5)*fi(5)^2*fi(4)^3 +
fi(4)^3*fi(5)^3));
dF(14) = 1.5*sqrt(mu)*(t(1) - t0)*t(3)*(F(2)*fi(4)^3*fi(5)^5 +
fi(2)*(3*F(4)*fi(4)^2*fi(5)^5 + 5*F(5)*fi(5)^4*fi(4)^3 +
fi(4)^3*fi(5)^5));
dF(15) = F(3)*fi(4)^2 + fi(3)*(2*fi(4)*F(4) + fi(4)^2) -
t(3)*(fi(2)^2*fi(4)^3 + 2*F(2)*fi(2)*fi(4)^3 +
3*F(4)*fi(4)^2*fi(2)^2);
dF(16) = -t(3)*(F(2)*fi(4)^3 + fi(2)*(3*F(4)*fi(4)^2 + fi(4)^3));
%%%%%%% F5
dF(17) = 0;
dF(18) = 0.5*(3*F(5)*fi(5)^2 + fi(5)^3);
dF(19) = 0;
dF(20) = 0;
%%%%%%% F6
dF(21) = 0;
dF(22) = 0;
dF(23) = -t(3)*(F(7) + fi(7));
dF(24) = 0;
%%%%%%% F7
dF(25) = 0;
dF(26) = 0;
dF(27) = t(3)*(3*F(7)*fi(7)^2 + fi(7)^3);
dF(28) = 0;
%%%%%%% A-B
A(1) = -sin(t(7))*cos(t(6)) - cos(t(7))*sin(t(6))*cos(t(5));
A(2) = -sin(t(7))*sin(t(6)) + cos(t(7))*cos(t(6))*cos(t(5));
A(3) = cos(t(7))*sin(t(5));
B(1) = cos(t(7))*cos(t(6)) - sin(t(7))*sin(t(6))*cos(t(5));
```

```
B(2) = cos(t(7))*sin(t(6)) + sin(t(7))*cos(t(6))*cos(t(5));
B(3) = sin(t(7))*sin(t(5));
%%%%%%% F8-10
i = 0;
j = 25;
while i~=3
   i = i+1;
   j = j+4;
   dF(j) = t(2)*sqrt(mu)*(fi(4)*fi(5)^3*(A(i)*(fi(3)*fi(6) +
F(6)*fi(3) + F(3)*fi(6)) - B(i)*(F(2) + fi(2))) +
F(4)*fi(5)^3*(A(i)*fi(3)*fi(6) - B(i)*fi(2)) +
3*F(5)*fi(4)*fi(5)^2*(A(i)*fi(3)*fi(6) - B(i)*fi(2)));
end
i = 0;
j = 26;
while i~=3
   i = i+1;
   j = j+4;
   dF(j) = (F(3) + fi(3)  - t(3))*B(i) + A(i)*(F(3)*fi(6) + F(6)*fi(3)
+ fi(3)*fi(6)) + 1.5*sqrt(mu)*(t(1) -
t0)*t(2)*(fi(4)*fi(5)^5*(B(i)*(F(2) + fi(2)) - A(i)*(F(3)*fi(6) +
F(6)*fi(3) + fi(3)*fi(6))) + F(4)*fi(5)^5*(B(i)*fi(2) -
A(i)*fi(3)*fi(6)) + 5*F(5)*fi(5)^4*fi(4)*(B(i)*fi(2) -
A(i)*fi(3)*fi(6)));
end
i = 0;
j = 27;
while i~=3
   i = i+1;
   j = j+4;
   dF(j) = t(2)*(A(i)*(fi(2)*fi(3)*fi(4)*fi(6) +
F(2)*fi(3)*fi(4)*fi(6) + F(3)*fi(2)*fi(4)*fi(6) +
F(4)*fi(2)*fi(3)*fi(6) + F(6)*fi(2)*fi(3)*fi(4))  -
A(i)*t(3)*(F(2)*fi(7) + F(7)*fi(2) + fi(2)*fi(7)) - B(i)*(1 +
F(4)*fi(2)^2 + fi(4)*fi(2)^2 + 2*F(2)*fi(2)*fi(4)));
end
i = 0;
j = 28;
while i~=3
   i = i+1;
   j = j+4;
   dF(j) = t(2)*(F(4)*(A(i)*fi(6)*fi(3) + B(i)*fi(2)) +
fi(4)*(A(i)*(F(6)*fi(3) + F(3)*fi(6) + fi(3)*fi(6)) - B(i)*(F(2) +
fi(2))));
end
%%%%%%%%%% F11-13
i = 0;
j = 37;
while i~=3
   i = i+1;
   j = j+4;
   dF(j) = -mu*t(3)*(fi(2)*fi(5)^4*fi(4)^3*(A(i)*(fi(6)*fi(3) +
F(6)*fi(3) + F(3)*fi(6)) - B(i)*(F(2) + fi(2))) +
(F(2)*fi(4)^3*fi(5)^4 + 3*F(4)*fi(2)*fi(4)^2*fi(5)^4 +
4*F(5)*fi(2)*fi(4)^3*fi(5)^3)*(A(i)*fi(6)*fi(3) - B(i)*fi(2))) -
mu*(fi(4)^2*fi(5)^4*(B(i)*(F(3) + fi(3)) + A(i)*(fi(2)*fi(6) +
F(2)*fi(6) + F(6)*fi(2))) + (2*F(4)*fi(4)*fi(5)^4 +
4*F(5)*fi(4)^2*fi(5)^3)*(B(i)*fi(3) + A(i)*fi(2)*fi(6)));
```

```
end
i = 0;
j = 38;
while i~=3
   i = i+1;
   j = j+4;%%%%%%%вроде все верно
   dF(j) = 0.5*sqrt(mu)*(fi(4)*fi(5)^3*(A(i)*(F(6)*fi(3) + F(3)*fi(6)
+ fi(3)*fi(6)) - B(i)*(F(2) + fi(2))) + (F(4)*fi(5)^3 +
3*F(5)*fi(5)^2*fi(4))*(A(i)*fi(3)*fi(6) - B(i)*fi(2))) + 1.5*mu*(t(1)
- t0)*(fi(4)^2*fi(5)^6*(t(3)*fi(2)*fi(4)*(A(i)*(fi(3)*fi(6) +
F(3)*fi(6) + F(6)*fi(3)) - B(i)*(F(2) + fi(2))) + t(3)*(F(2)*fi(4) +
F(4)*fi(2))*(A(i)*fi(3)*fi(6) - B(i)*fi(2)) + B(i)*(F(3) + fi(3))+
A(i)*(fi(2)*fi(6) + F(2)*fi(6) + F(6)*fi(2))) + (2*F(4)*fi(4)*fi(5)^6
+ 6*F(5)*fi(5)^5*fi(4)^2)*(t(3)*fi(2)*fi(4)*(A(i)*fi(6)*fi(3) -
B(i)*fi(2)) + B(i)*fi(3) + A(i)*fi(2)*fi(6)));
end
i = 0;
j = 39;
while i~=3
   i = i+1;
   j = j+4;
   dF(j) = sqrt(mu)*(fi(4)^2*fi(5)*((fi(3) -
t(3)*fi(2)^2*fi(4))*(A(i)*(fi(6)*fi(3) + F(6)*fi(3) + F(3)*fi(6)) -
B(i)*(F(2) + fi(2))) + (F(3) - t(3)*(2*F(2)*fi(2)*fi(4) +
F(4)*fi(2)^2))*(A(i)*fi(3)*fi(6) - B(i)*fi(2))) + (2*F(4)*fi(4)*fi(5)
+ F(5)*fi(4)^2)*(fi(3) - t(3)*fi(2)^2*fi(4))*(A(i)*fi(6)*fi(3) -
B(i)*fi(2)))- sqrt(mu)*(fi(4)*fi(5)*(B(i)*(fi(2)*fi(3)*fi(4) +
F(2)*fi(3)*fi(4) + F(3)*fi(2)*fi(4) + F(4)*fi(2)*fi(3)) +
A(i)*(fi(2)^2*fi(4)*fi(6) + 2*F(2)*fi(2)*fi(4)*fi(6) +
F(4)*fi(2)^2*fi(6) + F(6)*fi(2)^2*fi(4)) + t(3)*A(i)*(fi(3)*fi(7) +
F(3)*fi(7)+ F(7)*fi(3))) + (F(4)*fi(5) +
F(5)*fi(4))*(fi(2)*fi(3)*fi(4)*B(i) + fi(2)^2*fi(4)*fi(6)*A(i) +
t(3)*fi(3)*fi(7)*A(i)));
end

i = 0;
j = 40;
while i~=3
   i = i+1;
   j = j+4;
   dF(j) =
sqrt(mu)*(fi(4)^2*fi(5)*(t(3)*fi(2)*fi(4)*(A(i)*(fi(3)*fi(6) +
F(3)*fi(6) + F(6)*fi(3)) - B(i)*(F(2) + fi(2))) + t(3)*(F(2)*fi(4) +
F(4)*fi(2))*(A(i)*fi(3)*fi(6) - B(i)*fi(2)) - (B(i)*(F(3) + fi(3)) +
A(i)*(fi(2)*fi(6) + F(2)*fi(6) + F(6)*fi(2)))) + (2*F(4)*fi(4)*fi(5) +
F(5)*fi(4)^2)*(t(3)*fi(2)*fi(4)*(A(i)*fi(3)*fi(6) - B(i)*fi(2)) -
(B(i)*fi(3) + A(i)*fi(2)*fi(6))));
end
%%%%%%% F14

dF(53) = fi(16)*fi(22) + F(16)*fi(22) + F(22)*fi(16);
dF(54) = -fi(15) - F(15);
dF(55) = -fi(17) - F(17);
%%%%%%% F15
dF(56) = -(fi(16)*fi(23) + F(16)*fi(23) + F(23)*fi(16));
dF(57) = -fi(14) - F(14);
dF(58) = -fi(18) - F(18);
%%%%%%% F16
```

```
dF(59) = F(21) + fi(21);
dF(60) = 0;
dF(61) = -fi(19) - F(19);
%%%%%%% F17
dF(62) = fi(19)*fi(22) + F(19)*fi(22) + F(22)*fi(19);
dF(63) = -F(18) - fi(18);
dF(64) = fi(14) + F(14);
%%%%%% F18
dF(65) = -(fi(19)*fi(23) + F(19)*fi(23) + F(23)*fi(19));
dF(66) = fi(17) + F(17);
dF(67) = fi(15) + F(15);
%%%%%% F19
dF(68) = fi(20) + F(20);
dF(69) = 0;
dF(70) = fi(16) + F(16);
%%%%%% F20
dF(71) = -(fi(19) +F(19));
dF(72) = 0;
dF(73) = fi(21) + F(21);
%%%%%% F21
dF(74) = -(fi(16) + F(16));
dF(75) = 0;
dF(76) = -(fi(20) + F(20));
%%%%%% F22
dF(77) = 0;
dF(78) = fi(23) +F(23);
dF(79) = 0;
%%%%% F23
dF(80) = 0;
dF(81) = -(fi(22) + F(22));
dF(82) = 0;
j = 1;
for i = 1:13
F1(i) = dF(j)*S(1) + dF(j+1)*S(2) + dF(j+2)*S(3) + dF(j+3)*S(4);
j = j+4;
end
for i=14:23
F1(i) = dF(j)*S(5) + dF(j+1)*S(6) + dF(j+2)*S(7);
j = j+3;
end
```