

Санкт–Петербургский государственный университет

РЫБАЛКИН Алексей Александрович

Выпускная квалификационная работа
*Управление балансирующим роботом на
сферическом колесе*

Уровень образования: бакалавриат

Направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Основная образовательная программа СВ.5005.2015 «Прикладная математика, фундаментальная информатика и программирование»

Научный руководитель:

доцентр, кафедра компьютерных технологий
и систем, к.ф. - м.н. Коровкин Максим Васильевич

Рецензент:

Горицков Петр Никитич

Санкт-Петербург

2021 г.

Содержание

Введение	3
Постановка задачи	3
Обзор литературы	4
Глава 1. Математическая модель	5
1.1. Постановка задачи	5
1.2. Кинематика	5
1.3. Динамика	11
1.4. Итоговые уравнения	27
Глава 2. Компьютерное моделирование	30
2.1. Постановка задачи	30
2.2. Создание Simulink-модели	31
2.3. Построение регуляторов для стабилизации системы	33
2.3.1 ПИД-регулятор	34
2.3.2 LQR-регулятор	35
2.4. Результаты экспериментов	37
Выводы	42
Заключение	43
Список литературы	44

Введение

В сфере робототехники существует огромное множество разных типов роботов: робот-манипулятор, SCARA-робот, дельта-робот, колесные роботы, квадрокоптеры и т.д. Все они имеют свою кинематику, динамику, а также у каждого свои преимущества и недостатки по сравнению с другими версиями. Большой интерес представляют балансирующие роботы, которые имеют неустойчивое состояние и вынуждены постоянно стабилизироваться в определенном положении. Балансирующий робот на сферическом колесе является одним из таких роботов. За счет того, что он имеет единственную точку контакта с поверхностью, он способен легко перемещаться во всех направлениях. Поэтому он, по сравнению с обычным колесным роботом имеет высокую подвижность и маневренность. Следующее преимущество – работа можно сделать высоким, при этом, чем он выше, тем более устойчив. И еще одно преимущество данной версии колесного робота – он может двигаться по наклонным и подвижным поверхностям. Заметим, в литературе нет подробного описания математических моделей данной версии робота, а в открытых источниках можно найти краткую информацию лишь о трехколесной версии. Таким образом, необходимо рассмотреть вывод математической модели, построить стабилизирующее управление и представить результаты для дальнейших исследований в данном направлении. В данной работе рассматривается случай балансирующего робота с четырьмя электроприводами с омниколесами, приводится пример его математической модели, а также ее симуляция и вычисление стабилизирующего управления. Четырехколесная версия представляет особый интерес, поскольку обладает большей маневренностью за счет большего количества управляющих степеней свободы.

Постановка задачи

Рассмотрим балансирующий робот, тело которого представляет собой сплошной цилиндр. К нему под углом 90° в плоскости основания подсоединены четыре электропривода, которые опущены на некоторый фиксированный угол относительно плоскости основания. На оси каждого из

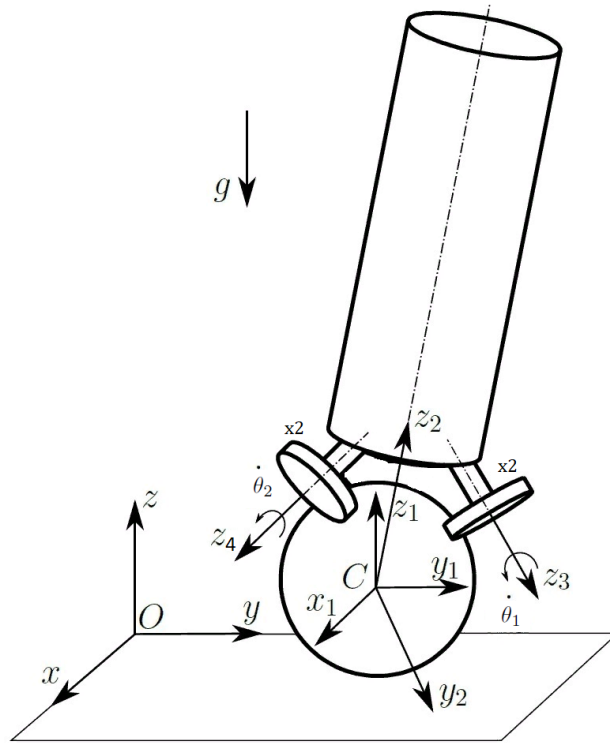


Рис. 1: Объект управления[1]

электроприводов закреплены омниколеса. Балансирующий робот, в свою очередь, находится на поверхности полого шара. Предполагается, что шар свободно перемещается по гладкой, ровной поверхности. Схематичный рисунок представлен на рис. 1.

Для данной версии робота требуется:

- построить математическую модель (кинематика и динамика);
- получить систему явных дифференциальных уравнений, описывающих поведение объекта;
- реализовать компьютерную модель объекта;
- синтезировать стабилизирующее управление.

Обзор литературы

В открытых источниках можно найти достаточно много информации о трехколесной версии робота. В частности, можно найти статьи, посвященные кратким выводам математической модели, такие как – [1], [2]. Также

имеются статьи, такие как – [3], [4], [5], посвященные физической реализации трехколесной версии, без подробного рассмотрения математической модели. Кроме того, можно найти статьи, например [6], [7], [8], посвященные симуляции трехколесных балансирующих роботов.

При реализации математической модели четырехколесного балансирующего робота, в частности – вывод матриц перехода, уравнений связи и дифференциальных уравнений, использовались учебники по теоретической механике, такие как – [9] и [10]. Для построения управления использовался учебник по теории управления – [11].

Глава 1. Математическая модель

1.1 Постановка задачи

Для представленной в общей постановке задачи робота требуется вычислить кинематические (матрицы перехода, обобщенные координаты), а также динамические (уравнения связи, система дифференциальных уравнений движения) параметры. Результатом является система явных нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка.

1.2 Кинематика

Для расчета кинематики системы были введены системы координат, показанные на рис. 1. Инерциальная система координат обозначена $Oxyz$, система координат центра шара – $Cx_1y_1z_1$. Переход от системы координат $Oxyz$ к системе координат $Cx_1y_1z_1$ представляет собой параллельный перенос

$$T_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & r_{ball} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где x, y – координаты центра шара; r_{ball} – радиус шара.

Для описания вращения шара были использованы углы поворота во-

круг осей (или другое их название – фиксированные углы XYZ). Таким образом, система координат $O_1x'_1y'_1z'_1$ (точки C и O_1 совпадают), связанная с шаром, получается из системы координат $Cx_1y_1z_1$ путем поворота осей Cx_1, Cy_1, Cz_1 на углы $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$. Отсюда матрица перехода от системы координат $Cx_1y_1z_1$ к системе координат $O_1x'_1y'_1z'_1$:

$$T'_1 = R_x(\varphi_x)R_y(\varphi_y)R_z(\varphi_z),$$

где

$$R_x(\varphi_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_x) & -\sin(\varphi_x) & 0 \\ 0 & \sin(\varphi_x) & \cos(\varphi_x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_y(\varphi_y) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_y) & 0 & \sin(\varphi_y) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\varphi_y) & 0 & \cos(\varphi_y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_z(\varphi_z) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_z) & -\sin(\varphi_z) & 0 & 0 \\ \sin(\varphi_z) & \cos(\varphi_z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично можно описать вращение тела балансирующего робота в пространстве. Система координат $O_2x_2y_2z_2$ (точки C и O_2 совпадают), связанная с телом балансирующего робота (сплошной цилиндр), получается из $Cx_1y_1z_1$ путем поворота осей Cx_1, Cy_1, Cz_1 на углы ψ_x, ψ_y, ψ_z . Отсюда матрица перехода от системы координат $Cx_1y_1z_1$ к системе координат $O_2x_2y_2z_2$:

$$T'_2 = R_x(\psi_x)R_y(\psi_y)R_z(\psi_z),$$

где

$$R_x(\psi_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi_x) & -\sin(\psi_x) & 0 \\ 0 & \sin(\psi_x) & \cos(\psi_x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_y(\psi_y) = \begin{pmatrix} \cos(\psi_y) & 0 & \sin(\psi_y) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\psi_y) & 0 & \cos(\psi_y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_z(\psi_z) = \begin{pmatrix} \cos(\psi_z) & -\sin(\psi_z) & 0 & 0 \\ \sin(\psi_z) & \cos(\psi_z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Системы координат $O_3x_3y_3z_3$, $O_4x_4y_4z_4$, $O_5x_5y_5z_5$, $O_6x_6y_6z_6$ связаны с омниколесами. Для перехода от системы координат $O_2x_2y_2z_2$, связанной с телом балансирующего робота(r), к системе координат, связанной с омниколесом, требуется выполнить несколько элементарных преобразований. Это параллельный перенос до задней части электропривода (ed), поворот вокруг оси O_2x_2 или O_2y_2 , затем снова параллельный перенос до середины омниколеса(sw) и поворот на угол ротора электропривода.

Рассмотрим вычисление матрицы перехода для всех омниколес:

- для первого омниколеса –

$$T'_3 = T_{red1}R_x(-\alpha_1)T_{edcw1}R_z(\theta_1),$$

где

$$T_{red1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_{toengine1} \\ 0 & 0 & 1 & d_{torobot} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_x(-\alpha_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_1) & \sin(\alpha_1) & 0 \\ 0 & -\sin(\alpha_1) & \cos(\alpha_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_{edcw1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_{engine1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_z(\theta_1) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$d_{torobot}$ – расстояние от центра шара до центра тела вдоль оси O_2z_2 ,
 $d_{toengine1}$ – расстояние от центра тела до задней части электропривода,
да,

α_1 – угол наклона электропривода относительно плоскости основания тела,

$d_{engine1}$ – расстояние от задней части электропривода до центра омниколеса;

- для второго омниколеса –

$$T'_4 = T_{red2}R_y(\alpha_2)T_{edcw2}R_z(\theta_2),$$

где

$$T_{red2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & d_{toengine2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_{torobot} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_y(\alpha_2) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_2) & 0 & \sin(\alpha_2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha_2) & 0 & \cos(\alpha_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_{edcw2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_{engine2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_z(\theta_2) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$d_{toengine2}$ – расстояние от центра тела до задней части электропривода,

α_2 – угол наклона электропривода относительно плоскости основания тела,

$d_{engine2}$ – расстояние от задней части электропривода до центра омниколеса;

- для третьего омниколеса –

$$T'_5 = T_{red3}R_x(\alpha_3)T_{edcw3}R_z(\theta_3),$$

где

$$T_{red3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -d_{toengine3} \\ 0 & 0 & 1 & d_{torobot} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_x(\alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_3) & -\sin(\alpha_3) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_3) & \cos(\alpha_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_{edcw3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_{engine3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_z(\theta_3) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$d_{toengine3}$ – расстояние от центра тела до задней части электропривода,

α_3 – угол наклона электропривода относительно плоскости основания тела,

$d_{engine3}$ – расстояние от задней части электропривода до центра омниколеса;

- для четвертого омниколеса –

$$T'_6 = T_{red4} R_y(-\alpha_4) T_{edcw4} R_z(\theta_4),$$

где

$$T_{red4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -d_{toengine4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_{torobot} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_y(-\alpha_4) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_4) & 0 & -\sin(\alpha_4) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\alpha_4) & 0 & \cos(\alpha_4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_{edcw4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_{engine4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_z(\theta_4) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_4) & -\sin(\theta_4) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_4) & \cos(\theta_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$d_{toengine4}$ – расстояние от центра тела до задней части электропривода,

α_4 – угол наклона электропривода относительно плоскости основания тела,

$d_{engine4}$ – расстояние от задней части электропривода до центра омниколеса;

Для вычисления матриц перехода от инерциальной системы координат к остальным подвижным системам координат необходимо перемножить полученные матрицы перехода:

$$T_1 = T_0 T'_1, \quad T_2 = T_0 T'_2, \quad T_3 = T_2 T'_3,$$

$$T_4 = T_2 T'_4, \quad T_5 = T_2 T'_5, \quad T_6 = T_2 T'_6.$$

Таким образом, если учесть, что омниколеса жестко закреплены к телу робота, для описания положения системы имеем следующий вектор обобщенных координат, изменяющихся во времени:

$$\mathbf{q} = (x, y, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z, \psi_x, \psi_y, \psi_z, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)^T,$$

где

x, y – координаты центра шара;

$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ – углы, описывающие вращение шара;

ψ_x, ψ_y, ψ_z – углы, описывающие вращение тела;

$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ – углы поворота омниколеса вокруг вала электропривода.

1.3 Динамика

На систему наложено семь неголономных связей:

1. Четыре связи качения омниколес по шару;

2. Две связи для скорости центра шара;
3. Одна связь отсутствия верчения шара.

Были вычислены каждые из них.

1. Для вычисления связи качения первого омниколеса по шару рассмотрим следующую схему (смотри рис. 2).

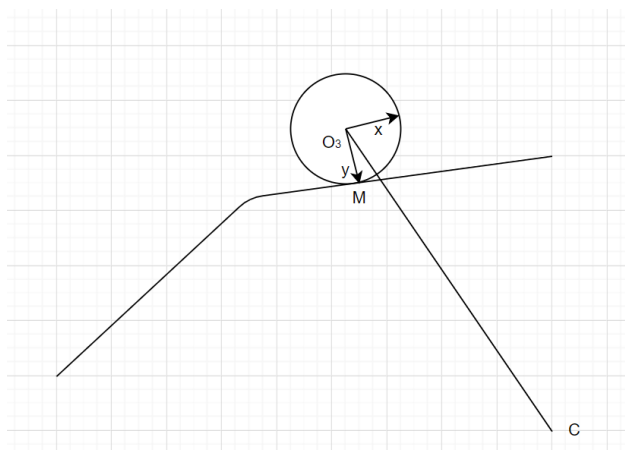


Рис. 2: Первое омниколесо

Вычислим скорость центра омниколеса O_3 в системе координат омниколеса $O_3x_3y_3z_3$ относительно полюса вращения в точке касания M . Получаем следующую формулу:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_{O_3} + \vec{\omega}_\theta \times O_3\vec{M},$$

где

$\vec{v}_M = \vec{0}$ – в точке касания движения нет,

$\vec{\omega}_\theta = [0, 0, \dot{\theta}_1]$ – вектор угловой скорости равен производной угла поворота ротора электропривода на оси O_3z_3 ,

$O_3\vec{M} = (0, r_{wheel1}, 0)$ – радиус-вектор омниколеса лежит на оси O_3y_3 и равен радиусу омниколеса.

Отсюда получаем

$$\vec{v}_{O_3} = -\vec{\omega}_\theta \times O_3\vec{M}.$$

Применив векторное произведение, имеем

$$\vec{v}'_{O_3} = [\dot{\theta}_1 r_{wheel1}, 0, 0].$$

Переведем этот вектор из системы координат омниколеса $O_3x_3y_3z_3$ в систему координат тела $O_2x_2y_2z_2$, применив матрицу перехода \overline{T}_3 (матрица перехода аналогичная T'_3 без последнего поворота на ось ротора электропривода):

$$\vec{v}_{O_3} = \overline{T}_3 \vec{v}'_{O_3} = [\dot{\theta}_1 r_{wheel1},$$

$$\sin(\alpha_1)d_{engine1} + d_{toengine1}, \cos(\alpha_1)d_{engine1} + d_{torobot}].$$

Аналогично вычислим скорость центра омниколеса O_3 в системе координат тела $O_2x_2y_2z_2$ относительно полюса вращения в точке центра шара C . Получаем следующую формулу:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{O_3} + \vec{\omega}_\psi \times O_3\vec{C},$$

где

$\vec{v}_C = \vec{0}$ – центр шара является мгновенным центром скоростей,

$\vec{\psi}_\theta = [\dot{\psi}_x, \dot{\psi}_y, \dot{\psi}_z]$ – разложение угловой скорости по компонентам,

$O_3\vec{C}$ – радиус вектор центра омниколеса. Он совпадает с противоположными координатами точки O_3 , которая, в свою очередь, является центром системы координат омниколеса. Значит ее можно получить через матрицу перехода T'_3 , умножив на нулевой вектор, то есть совпадает с последним столбцом матрицы перехода:

$$O_3\vec{C} = [0, -\sin(\alpha_1)d_{engine1} - d_{toengine1}, -\cos(\alpha_1)d_{engine1} - d_{torobot}].$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} \vec{v}'_{O_3} &= -\vec{\omega}_\psi \times O_3\vec{C} = \\ &= [\dot{\psi}_y(\cos(\alpha_1)d_{engine1} + d_{torobot}) - \dot{\psi}_z(\sin(\alpha_1)d_{engine1} + d_{toengine1}), \\ &\quad -\dot{\psi}_x(\cos(\alpha_1)d_{engine1} + d_{torobot}), \dot{\psi}_x(\sin(\alpha_1)d_{engine1} + d_{toengine1})]. \end{aligned}$$

Далее, приравняв проекции скорости на ось O_2x_2 , получим уравнение

СВЯЗИ:

$$\dot{\theta}_1 r_{wheel1} = \dot{\psi}_y (\cos(\alpha_1) d_{engine1} + d_{torobot}) - \dot{\psi}_z (\sin(\alpha_1) d_{engine1} + d_{toengine1})$$

или

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\dot{\psi}_y (\cos(\alpha_1) d_{engine1} + d_{torobot}) - \dot{\psi}_z (\sin(\alpha_1) d_{engine1} + d_{toengine1})}{r_{wheel1}}.$$

2. Для вычисления связи качения второго омниколеса по шару рассмотрим следующую схему (смотри рис. 3).

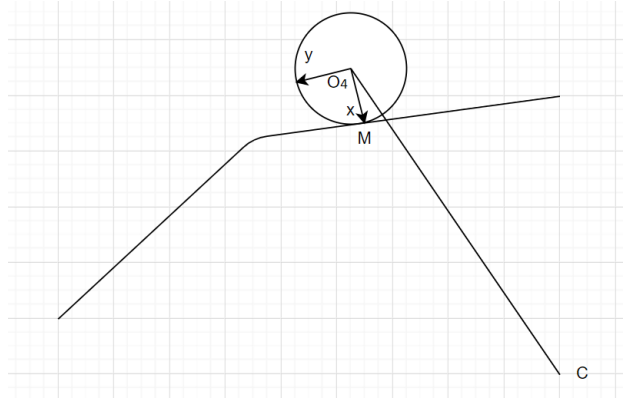


Рис. 3: Второе омниколесо

Вычислим скорость центра омниколеса O_4 в системе координат омниколеса $O_4x_4y_4z_4$ относительно полюса вращения в точке касания M . Получаем следующую формулу:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_{O_4} + \vec{\omega}_\theta \times O_4\vec{M},$$

где

$\vec{v}_M = \vec{0}$ – в точке касания движения нет,

$\vec{\omega}_\theta = [0, 0, \dot{\theta}_2]$ – вектор угловой скорости равен производной угла поворота ротора электропривода на оси O_4z_4 ,

$O_4\vec{M} = (r_{wheel2}, 0, 0)$ – радиус-вектор омниколеса лежит на оси O_4x_4 и равен радиусу омниколеса.

Отсюда получаем

$$\vec{v}_{O_4} = -\vec{\omega}_\theta \times O_4\vec{M}.$$

Применив векторное произведение, имеем

$$\vec{v}'_{O_4} = [0, -\dot{\theta}_2 r_{wheel2}, 0].$$

Переведем этот вектор из системы координат омниколеса $O_4x_4y_4z_4$ в систему координат тела $O_2x_2y_2z_2$, применив матрицу перехода \overline{T}_4 (матрица перехода аналогичная T'_4 без последнего поворота на ось ротора электропривода):

$$\begin{aligned} \vec{v}_{O_4} = \overline{T}_4 \vec{v}'_{O_4} = & [\sin(\alpha_2) d_{engine2} + d_{toengine2}, \\ & -\dot{\theta}_2 r_{wheel2}, \cos(\alpha_2) d_{engine2} + d_{torobot}]. \end{aligned}$$

Аналогично вычислим скорость центра омниколеса O_4 в системе координат тела $O_2x_2y_2z_2$ относительно полюса вращения в точке центра шара C . Получаем следующую формулу:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{O_4} + \vec{\omega}_\psi \times O_4\vec{C},$$

где

$\vec{v}_C = \vec{0}$ – центр шара является мгновенным центром скоростей,

$\vec{\psi}_\theta = [\dot{\psi}_x, \dot{\psi}_y, \dot{\psi}_z]$ – разложение угловой скорости по компонентам,

$O_4\vec{C}$ – радиус вектор центра омниколеса. Он совпадает с противоположными координатами точки O_4 , которая в свою очередь является центром системы координат омниколеса. Значит ее можно получить через матрицу перехода T'_4 , умножив на нулевой вектор, то есть совпадает с последним столбцом матрицы перехода:

$$O_4\vec{C} = [-\sin(\alpha_2) d_{engine2} - d_{toengine2}, 0, -\cos(\alpha_2) d_{engine2} - d_{torobot}].$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} \vec{v}'_{O_4} = -\vec{\omega}_\psi \times O_4\vec{C} = \\ = [\dot{\psi}_y (\cos(\alpha_2) d_{engine2} + d_{torobot}), -\dot{\psi}_x (\cos(\alpha_2) d_{engine2} + d_{torobot}) + \\ + \dot{\psi}_z (\sin(\alpha_2) d_{engine2} + d_{toengine2}), -\dot{\psi}_y (\sin(\alpha_2) d_{engine2} + d_{toengine2})]. \end{aligned}$$

Далее, приравняв проекции скорости на ось O_2y_2 , получим уравнение связи:

$$-\dot{\theta}_2 r_{wheel2} = -\dot{\psi}_x (\cos(\alpha_2) d_{engine2} + d_{torobot}) + \dot{\psi}_z (\sin(\alpha_2) d_{engine2} + d_{toengine2})$$

или

$$\dot{\theta}_2 = \frac{\dot{\psi}_x (\cos(\alpha_2) d_{engine2} + d_{torobot}) - \dot{\psi}_z (\sin(\alpha_2) d_{engine2} + d_{toengine2})}{r_{wheel2}}.$$

3. Для вычисления связи качения третьего омниколеса по шару рассмотрим следующую схему (смотри рис. 4).

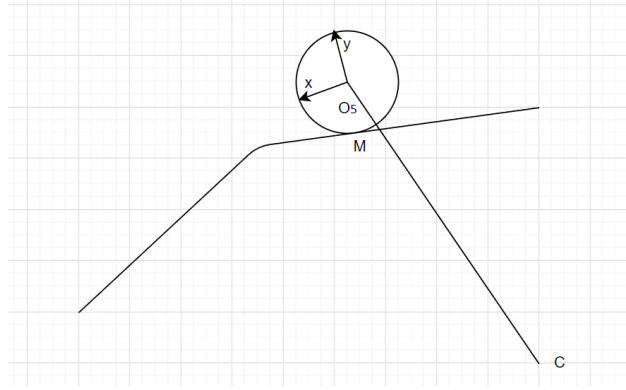


Рис. 4: Третье омниколесо

Вычислим скорость центра омниколеса O_5 в системе координат омниколеса $O_5x_5y_5z_5$ относительно полюса вращения в точке касания M . Получаем следующую формулу:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_{O_5} + \vec{\omega}_\theta \times O_5\vec{M},$$

где

$\vec{v}_M = \vec{0}$ – в точке касания движения нет,

$\vec{\omega}_\theta = [0, 0, \dot{\theta}_3]$ – вектор угловой скорости равен производной угла поворота ротора электропривода на оси O_5z_5 ,

$O_5\vec{M} = (0, -r_{wheel3}, 0)$ – радиус-вектор омниколеса лежит на оси O_5y_5 и равен отрицательному радиусу омниколеса.

Отсюда получаем

$$\vec{v}_{O_5} = -\vec{\omega}_\theta \times O_5\vec{M}.$$

Применив векторное произведение, имеем

$$\vec{v}'_{O_5} = [-\dot{\theta}_3 r_{wheel3}, 0, 0].$$

Переведем этот вектор из системы координат омниколеса $O_5x_5y_5z_5$ в систему координат тела $O_2x_2y_2z_2$, применив матрицу перехода \overline{T}_5 (матрица перехода аналогичная T'_5 без последнего поворота на ось ротора электропривода):

$$\begin{aligned} \vec{v}_{O_5} = \overline{T}_5\vec{v}'_{O_5} = & [-\dot{\theta}_3 r_{wheel3}, \\ & -\sin(\alpha_3)d_{engine3} - d_{toengine3}, \cos(\alpha_3)d_{engine3} + d_{torobot}]. \end{aligned}$$

Аналогично вычислим скорость центра омниколеса O_5 в системе координат тела $O_2x_2y_2z_2$ относительно полюса вращения в точке центра шара C . Получаем следующую формулу:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{O_5} + \vec{\omega}_\psi \times O_5\vec{C},$$

где

$\vec{v}_C = \vec{0}$ – центр шара является мгновенным центром скоростей,

$\vec{\psi}_\theta = [\dot{\psi}_x, \dot{\psi}_y, \dot{\psi}_z]$ – разложение угловой скорости по компонентам,

$O_5\vec{C}$ – радиус вектор центра омниколеса. Он совпадает с противоположными координатами точки O_5 , которая, в свою очередь, является центром системы координат омниколеса. Значит ее можно получить через матрицу перехода T'_5 , умножив на нулевой вектор, то есть совпадает с последним столбцом матрицы перехода:

$$O_5\vec{C} = [0, \sin(\alpha_3)d_{engine3} + d_{toengine3}, -\cos(\alpha_3)d_{engine3} - d_{torobot}].$$

Отсюда получаем:

$$\vec{v}'_{O_5} = -\vec{\omega}_\psi \times O_5\vec{C} =$$

$$= [\dot{\psi}_y(\cos(\alpha_3)d_{engine3} + d_{torobot}) + \dot{\psi}_z(\sin(\alpha_3)d_{engine3} + d_{toengine3}), \\ -\dot{\psi}_x(\cos(\alpha_3)d_{engine3} + d_{torobot}), -\dot{\psi}_x(\sin(\alpha_3)d_{engine3} + d_{toengine3})].$$

Далее, приравняв проекции скорости на ось Cx_2 , получим уравнение связи:

$$-\dot{\theta}_3 r_{wheel3} = \dot{\psi}_y(\cos(\alpha_3)d_{engine3} + d_{torobot}) + \dot{\psi}_z(\sin(\alpha_3)d_{engine3} + d_{toengine3})$$

или

$$\dot{\theta}_3 = \frac{-\dot{\psi}_y(\cos(\alpha_3)d_{engine3} + d_{torobot}) - \dot{\psi}_z(\sin(\alpha_3)d_{engine3} + d_{toengine3})}{r_{wheel3}}.$$

4. Для вычисления связи качения четвертого омниколеса по шару рассмотрим следующую схему (смотри рис. 5).

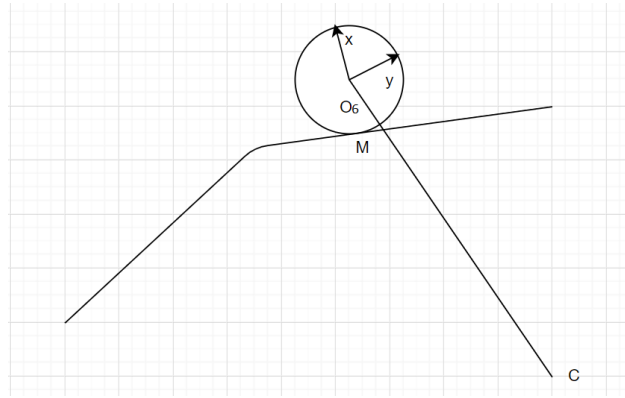


Рис. 5: Четвертое омниколесо

Вычислим скорость центра омниколеса O_6 в системе координат омниколеса $O_6x_6y_6z_6$ относительно полюса вращения в точке касания M . Получаем следующую формулу:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_{O_6} + \vec{\omega}_\theta \times O_6\vec{M},$$

где

$\vec{v}_M = \vec{0}$ – в точке касания движения нет,

$\vec{\omega}_\theta = [0, 0, \dot{\theta}_4]$ – вектор угловой скорости равен производной угла поворота ротора электропривода на оси O_6z_6 ,

$O_6\vec{M} = (-r_{wheel4}, 0, 0)$ – радиус-вектор омниколеса лежит на оси O_4x_4 и равен отрицательному значению радиуса омниколеса.

Отсюда получаем

$$\vec{v}_{O_6} = -\vec{\omega}_\theta \times O_6\vec{M}.$$

Применив векторное произведение, имеем

$$\vec{v}'_{O_6} = [0, \dot{\theta}_4 r_{wheel4}, 0].$$

Переведем этот вектор из системы координат омниколеса $O_6x_6y_6z_6$ в систему координат тела $O_2x_2y_2z_2$, применив матрицу перехода \overline{T}_6 (матрица перехода аналогичная T'_6 без последнего поворота на ось ротора электропривода):

$$\begin{aligned} \vec{v}_{O_6} = \overline{T}_6 \vec{v}'_{O_6} = & [-\sin(\alpha_4)d_{engine4} - d_{toengine4}, \\ & \dot{\theta}_4 r_{wheel4}, \cos(\alpha_4)d_{engine4} + d_{torobot}]. \end{aligned}$$

Аналогично вычислим скорость центра омниколеса O_6 в системе координат тела $O_2x_2y_2z_2$ относительно полюса вращения в точке центра шара C . Получаем следующую формулу:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{O_6} + \vec{\omega}_\psi \times O_6\vec{C},$$

где

$\vec{v}_C = \vec{0}$ – центр шара является мгновенным центром скоростей,

$\vec{\psi}_\theta = [\dot{\psi}_x, \dot{\psi}_y, \dot{\psi}_z]$ – разложение угловой скорости по компонентам,

$O_6\vec{C}$ – радиус вектор центра омниколеса. Он совпадает с противоположными координатами точки O_6 , которая, в свою очередь, является центром системы координат омниколеса. Значит ее можно получить через матрицу перехода T'_6 , умножив на нулевой вектор, то есть совпадает с последним столбцом матрицы перехода:

$$O_6\vec{C} = [\sin(\alpha_4)d_{engine4} + d_{toengine4}, 0, -\cos(\alpha_4)d_{engine4} - d_{torobot}].$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned}\vec{v}'_{O_6} &= -\vec{\omega}_\psi \times O_6\vec{C} = \\ &= [\dot{\psi}_y(\cos(\alpha_4)d_{engine4} + d_{torobot}), -\dot{\psi}_x(\cos(\alpha_4)d_{engine4} + d_{torobot}) - \\ &\quad -\dot{\psi}_z(\sin(\alpha_4)d_{engine4} + d_{toengine4}), \dot{\psi}_y(\sin(\alpha_4)d_{engine4} + d_{toengine4})].\end{aligned}$$

Далее, приравняв проекции скорости на ось Cy_2 , получим уравнение связи:

$$\dot{\theta}_4 r_{wheel4} = -\dot{\psi}_x(\cos(\alpha_4)d_{engine4} + d_{torobot}) - \dot{\psi}_z(\sin(\alpha_4)d_{engine4} + d_{toengine4})$$

или

$$\dot{\theta}_4 = \frac{-\dot{\psi}_x(\cos(\alpha_4)d_{engine4} + d_{torobot}) - \dot{\psi}_z(\sin(\alpha_4)d_{engine4} + d_{toengine4})}{r_{wheel4}}.$$

5. Для вычисления связи скорости центра шара в проекции на ось Cx_1 требуется применить уравнение Эйлера для вращения вокруг оси, которая связывает линейную и угловую скорости:

$$\dot{\varphi}_x = \frac{\dot{x}}{r_{ball}}.$$

6. Для вычисления связи скорости центра шара в проекции на ось Cy_1 требуется применить уравнение Эйлера для вращения вокруг оси, которая связывает линейную и угловую скорости:

$$\dot{\varphi}_y = \frac{\dot{y}}{r_{ball}}.$$

7. Для вычисления связи отсутствия верчения центра шара в проекции на ось Cz_1 требуется применить уравнение Эйлера для вращения вокруг оси, которая связывает линейную и угловую скорости, а также учесть, что шар движется в плоскости, то есть его аппликата z не изменяется:

$$\dot{\varphi}_z = 0.$$

Таким образом для данной системы получаем:

- число обобщенных координат $m = 12$;
- число связей $s = 7$;
- число степеней свободы $n = 5$.

Так как система имеет неголономные связи, то уравнение Лагранжа второго рода в данной системе применить нельзя. Поэтому была рассмотрена альтернатива – уравнения Аппеля. В них используются псевдокоординаты – координаты, получаемые из уравнений неголономных связей так, чтобы они были независимы. В данном случае вектор псевдоскоростей (производная псевдокоординат) был взят

$$\dot{\pi} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{\psi}_x, \dot{\psi}_y, \dot{\psi}_z).$$

Далее была вычислена энергия ускорений, используя вычисленные в кинематике матрицы перехода и матрицы инерции:

$$U = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \cdot tr(\ddot{T}_i H_i \ddot{T}_i^T),$$

где

$N = 6$ – количество звеньев,

T_i – матрица перехода от инерциальной системы координат до системы координат i -го звена,

H_i – матрица инерции i -го звена,

tr – след матрицы.

В общем случае

$$U = U(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, \ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_m, t),$$

но с помощью уравнений связи ее можно свести к функции:

$$U = U(q_1, \dots, q_m, \dot{\pi}_1, \dots, \dot{\pi}_n, \ddot{\pi}_1, \dots, \ddot{\pi}_n, t).$$

Были вычислены матрицы инерции для каждого звена:

1. Первым звеном $Cx_1y_1z_1$ является полый шар, то есть симметричное тело по всем осям. Кроме того, центр масс шара совпадает с центром звена. Тогда матрица инерции равна

$$H_1 = \begin{pmatrix} I_{1,xx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{1,yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{1,zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{ball} \end{pmatrix},$$

где

$I_{1,xx} = \frac{2}{3}m_{ball} \cdot r_{ball}^2$ – момент инерции относительно оси Cx_1 ,

$I_{1,yy} = \frac{2}{3}m_{ball} \cdot r_{ball}^2$ – момент инерции относительно оси Cy_1 ,

$I_{1,zz} = \frac{2}{3}m_{ball} \cdot r_{ball}^2$ – момент инерции относительно оси Cz_1 ,

m_{ball} – масса шара.

2. Вторым звеном $O_2x_2y_2z_2$ является сплошной цилиндр, то есть симметричное тело по всем осям. Кроме того, расстояние от центра масс сплошного цилиндра до центра звена равно d_{cm} . Тогда матрица инерции равна

$$H_2 = \begin{pmatrix} I_{2,xx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{2,yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{2,zz} & m_{robot} \cdot d_{cm} \\ 0 & 0 & m_{robot} \cdot d_{cm} & m_{robot} \end{pmatrix},$$

где $I_{2,xx} = \frac{1}{4}m_{robot} \cdot r_{robot}^2 + \frac{1}{12}m_{robot} \cdot l_{robot}^2$ – момент инерции относительно оси O_2x_2 ,

$I_{2,yy} = \frac{1}{4}m_{robot} \cdot r_{robot}^2 + \frac{1}{12}m_{robot} \cdot l_{robot}^2$ – момент инерции относительно оси O_2y_2 ,

$I_{2,zz} = \frac{1}{2}m_{robot} \cdot r_{robot}^2$ – момент инерции относительно оси O_2z_2 ,

m_{robot} – масса тела робота,

d_{cm} – расстояние от центра шара до центра масс тела вдоль оси O_2z_2 ,

l_{robot} – длина тела робота,

r_{robot} – радиус тела робота.

На практике, используя робототехническое оборудование, можно сделать уточнение осевых моментов инерции и центра массы.

3. Третьим звеном $O_3x_3y_3z_3$ является сплошной цилиндр, то есть симметричное тело по всем осям. Кроме того, центр масс омниколеса совпадает с центром звена. При этом сплошной цилиндр связан с ротором электропривода, имеющий собственный момент инерции. Тогда матрица инерции равна

$$H_3 = \begin{pmatrix} I_{w1,xx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{w1,yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{w1,zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{wheel1} \end{pmatrix},$$

где

$I_{w1,xx} = \frac{1}{4}m_{wheel1} \cdot r_{wheel1}^2 + \frac{1}{12}m_{wheel1} \cdot l_{wheel1}^2$ – момент инерции относительно оси O_3x_3 ,

$I_{w1,yy} = \frac{1}{4}m_{wheel1} \cdot r_{wheel1}^2 + \frac{1}{12}m_{wheel1} \cdot l_{wheel1}^2$ – момент инерции относительно оси O_3y_3 ,

$I_{w1,zz} = \frac{1}{2}m_{wheel1} \cdot r_{wheel1}^2 + i_1^2 \cdot I_{rot1}$ – момент инерции относительно оси O_3z_3 ,

m_{wheel1} – масса омниколеса,

r_{wheel1} – радиус омниколеса,

l_{wheel1} – длина омниколеса,

i_1 – передаточное число редуктора,

I_{rot1} – момент инерции ротора электропривода.

4. Четвертым звеном $O_4x_4y_4z_4$ является сплошной цилиндр, то есть симметричное тело по всем осям. Кроме того, центр масс омниколеса совпадает с центром звена. При этом сплошной цилиндр связан с ротором электропривода, имеющий собственный момент инерции. Тогда

матрица инерции равна

$$H_4 = \begin{pmatrix} I_{w2,xx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{w2,yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{w2,zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{wheel2} \end{pmatrix},$$

где

$I_{w2,xx} = \frac{1}{4}m_{wheel2} \cdot r_{wheel2}^2 + \frac{1}{12}m_{wheel2} \cdot l_{wheel2}^2$ – момент инерции относительно оси O_4x_4 ,

$I_{w2,yy} = \frac{1}{4}m_{wheel2} \cdot r_{wheel2}^2 + \frac{1}{12}m_{wheel2} \cdot l_{wheel2}^2$ – момент инерции относительно оси O_4y_4 ,

$I_{w2,zz} = \frac{1}{2}m_{wheel2} \cdot r_{wheel2}^2 + i_2^2 \cdot I_{rot2}$ – момент инерции относительно оси O_4z_4 ,

m_{wheel2} – масса омниколеса,

r_{wheel2} – радиус омниколеса,

l_{wheel2} – длина омниколеса,

i_2 – передаточное число редуктора,

I_{rot2} – момент инерции ротора электропривода.

5. Пятым звеном $O_5x_5y_5z_5$ является сплошной цилиндр, то есть симметричное тело по всем осям. Кроме того, центр масс омниколеса совпадает с центром звена. При этом сплошной цилиндр связан с ротором электропривода, имеющий собственный момент инерции. Тогда матрица инерции равна

$$H_5 = \begin{pmatrix} I_{w3,xx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{w3,yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{w3,zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{wheel3} \end{pmatrix},$$

где

$I_{w3,xx} = \frac{1}{4}m_{wheel3} \cdot r_{wheel3}^2 + \frac{1}{12}m_{wheel3} \cdot l_{wheel3}^2$ – момент инерции относительно оси O_5x_5 ,

$I_{w3,yy} = \frac{1}{4}m_{wheel3} \cdot r_{wheel3}^2 + \frac{1}{12}m_{wheel3} \cdot l_{wheel3}^2$ – момент инерции относительно оси O_5y_5 ,

$I_{w3,zz} = \frac{1}{2}m_{wheel3} \cdot r_{wheel3}^2 + i_3^2 \cdot I_{rot3}$ – момент инерции относительно оси O_5z_5 ,

m_{wheel3} – масса омниколеса,

r_{wheel3} – радиус омниколеса,

l_{wheel3} – длина омниколеса,

i_3 – передаточное число редуктора,

I_{rot3} – момент инерции ротора электропривода.

6. Шестым звеном $O_6x_6y_6z_6$ является сплошной цилиндр, то есть симметричное тело по всем осям. Кроме того, центр масс омниколеса совпадает с центром звена. При этом сплошной цилиндр связан с ротором электропривода, имеющий собственный момент инерции. Тогда матрица инерции равна

$$H_6 = \begin{pmatrix} I_{w4,xx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{w4,yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{w4,zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{wheel4} \end{pmatrix},$$

где

$I_{w4,xx} = \frac{1}{4}m_{wheel4} \cdot r_{wheel4}^2 + \frac{1}{12}m_{wheel4} \cdot l_{wheel4}^2$ – момент инерции относительно оси O_6x_6 ,

$I_{w4,yy} = \frac{1}{4}m_{wheel4} \cdot r_{wheel4}^2 + \frac{1}{12}m_{wheel4} \cdot l_{wheel4}^2$ – момент инерции относительно оси O_6y_6 ,

$I_{w4,zz} = \frac{1}{2}m_{wheel4} \cdot r_{wheel4}^2 + i_4^2 \cdot I_{rot4}$ – момент инерции относительно оси Oz_3 ,

m_{wheel4} – масса омниколеса,

r_{wheel4} – радиус омниколеса,

l_{wheel4} – длина омниколеса,

i_4 – передаточное число редуктора,

I_{rot4} – момент инерции ротора электропривода.

Теперь рассмотрим дифференциальные уравнения Лагранжа в псевдо-координатах:

$$\frac{\partial U}{\partial \ddot{\pi}} = \mathbf{Q}, \quad (1)$$

где \mathbf{Q} – обобщенные силы, соответствующие псевдокоординатам, которые можно разделить на две составляющие силы: моменты приводов \mathbf{Q}_1 и сила тяжести \mathbf{Q}_2 . Вычислим силы \mathbf{Q}_1 и \mathbf{Q}_2 . Разложим элементарную работу dA по вариациям обобщенных координат:

$$\begin{aligned} dA = & Q_x dx + Q_y dy + Q_{\varphi_x} d\varphi_x + Q_{\varphi_y} d\varphi_y + Q_{\varphi_z} d\varphi_z + \\ & + Q_{\psi_x} d\psi_x + Q_{\psi_y} d\psi_y + Q_{\psi_z} d\psi_z + Q_{\theta_1} d\theta_1 + Q_{\theta_2} d\theta_2 \\ & + Q_{\theta_3} d\theta_3 + Q_{\theta_4} d\theta_4, \end{aligned}$$

где

$Q_x = Q_y = Q_{\varphi_x} = Q_{\varphi_y} = Q_{\varphi_z} = Q_{\psi_z} = 0$ – отсутствуют силы влияющие на данные обобщенные координаты,

$Q_{\psi_x} = m_{robot} \cdot g \cdot l_{torobot} (1 - \cos \psi_x)$ – влияние силы тяжести на тело робота,

$Q_{\psi_y} = m_{robot} \cdot g \cdot l_{torobot} (1 - \cos \psi_y)$ – влияние силы тяжести на тело робота,

$Q_{\theta_1} = m_1$ – влияние момента m_1 первого электропривода,

$Q_{\theta_2} = m_2$ – влияние момента m_2 второго электропривода,

$Q_{\theta_3} = m_3$ – влияние момента m_3 третьего электропривода,

$Q_{\theta_4} = m_4$ – влияние момента m_4 четвертого электропривода.

С учетом уравнений связи получаем

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{m_2(\cos(\alpha_2)d_{engine2}+d_{torobot})}{\frac{r_{wheel2}}{m_1(\cos(\alpha_1)d_{engine1}+d_{torobot})}} - \frac{m_4(\cos(\alpha_4)d_{engine4}+d_{torobot})}{\frac{r_{wheel4}}{m_3(\cos(\alpha_3)d_{engine3}+d_{torobot})}} \\ - \frac{m_1(\sin(\alpha_1)d_{engine1}+d_{toengine1})}{\frac{r_{wheel1}}{m_3(\sin(\alpha_3)d_{engine3}+d_{toengine3})}} - \frac{m_2(\sin(\alpha_2)d_{engine2}+d_{toengine2})}{\frac{r_{wheel3}}{m_4(\sin(\alpha_4)d_{engine4}+d_{toengine4})}} \\ - \frac{m_3(\sin(\alpha_3)d_{engine3}+d_{toengine3})}{r_{wheel3}} - \frac{m_4(\sin(\alpha_4)d_{engine4}+d_{toengine4})}{r_{wheel4}} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_{robot} \cdot g \cdot d_{torobot}(1 - \cos \psi_x) \\ m_{robot} \cdot g \cdot d_{torobot}(1 - \cos \psi_y) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вернемся к уравнению (1). Подставив вычисленную энергию ускорений U и обобщенные силы \mathbf{Q}_1 и \mathbf{Q}_2 , получаем систему неявных нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Преобразуем уравнение (1). Для этого введем векторную функцию

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\pi}, \ddot{\pi}, t) = \frac{\partial U}{\partial \ddot{\pi}} - \mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2 = 0.$$

Тогда

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\pi}, \ddot{\pi}, t) = A(\mathbf{q})\ddot{\pi} + \mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\pi}) + \mathbf{c}(\mathbf{q}) - \mathbf{Q}_1 = 0,$$

где

$$A(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \ddot{\pi}},$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\pi}) = \mathbf{f} - A(\mathbf{q})\ddot{\pi} - \mathbf{c}(\mathbf{q}) + \mathbf{Q}_1,$$

$$\mathbf{c}(\mathbf{q}) = -\mathbf{Q}_2.$$

Отсюда

$$\ddot{\pi} = \mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\pi}) = A^{-1}(\mathbf{q})(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\pi}) - \mathbf{c}(\mathbf{q})).$$

Получаем 5 явных нелинейных уравнений второго порядка, которые описывают поведение системы.

1.4 Итоговые уравнения

Для дальнейшего исследования требовалось задать фиксированные параметры системы. Для примера они были определены следующим образом (расстояние в метрах, масса в килограммах, углы в градусах):

$$r_{ball} = 0.25,$$

$$d_{torobot} = 0.35,$$

$$d_{toengine1} = d_{toengine2} = d_{toengine3} = d_{toengine4} = r_{robot} = 0.15,$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 128.8721,$$

$$d_{engine1} = d_{engine2} = d_{engine3} = d_{engine4} = 0.08,$$

$$r_{wheel1} = r_{wheel2} = r_{wheel3} = r_{wheel4} = 0.035,$$

$$m_{ball} = 1.5,$$

$$m_{robot} = 10,$$

$$l_{robot} = 0.5,$$

$$d_{cm} = 0.75,$$

$$m_{wheel1} = m_{wheel2} = m_{wheel3} = m_{wheel4} = 0.06,$$

$$l_{wheel1} = l_{wheel2} = l_{wheel3} = l_{wheel4} = 0.03,$$

$$i_1 = i_2 = i_3 = i_4 = 2.7,$$

$$I_{rot1} = I_{rot2} = I_{rot3} = I_{rot4} = 2.38.$$

Используя формулы предыдущего пункта, на основе данных параметров была вычислена математическая модель. Вычисления проводились аналитически в виде символьных вычислений в программном продукте «Maple 2020». В результате уравнения содержали огромное число слагаемых, максимальное значение которых не превышает порядка 10^{-10} , поэтому такие слагаемые были опущены с использованием написанного скрипта на языке программирования «C#», оставив только слагаемые, коэффициенты которых превышают 10^{-6} . Получилась следующая система неявных

нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned}
 &13.74 \frac{d^2}{dt^2} x(t) + 7.572 \left(\frac{d^2}{dt^2} \psi_y(t) \right) \cos(\psi_y(t)) - 7.572 \left(\frac{d}{dt} \psi_y(t) \right)^2 \sin(\psi_y(t)) = 0, \\
 &13.74 \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 7.572 \left(\frac{d}{dt} \psi_y(t) \right)^2 \sin(\psi_x(t)) \cos(\psi_y(t)) - \\
 &-7.572 \left(\frac{d^2}{dt^2} \psi_x(t) \right) \cos(\psi_x(t)) \cos(\psi_y(t)) + 7.572 \left(\frac{d}{dt} \psi_x(t) \right)^2 \sin(\psi_x(t)) \times \\
 &\times \cos(\psi_y(t)) + 7.572 \left(\frac{d^2}{dt^2} \psi_y(t) \right) \sin(\psi_x(t)) \sin(\psi_y(t)) + \\
 &+ 15.1439 \left(\frac{d}{dt} \psi_x(t) \right) \left(\frac{d}{dt} \psi_y(t) \right) \cos(\psi_x(t)) \sin(\psi_y(t)) = 0, \\
 &\left(\frac{d^2}{dt^2} \psi_x(t) \right) (6.1608 \cos(\psi_y(t))^2 + 0.0012 \cos(\psi_z(t)) \cos(\psi_y(t)) + \\
 &\quad + 42.6163) + \\
 &+ 0.0006 \left(\frac{d^2}{dt^2} \psi_y(t) \right) \sin(\psi_z(t)) (1 - \cos(\psi_y(t))) + \\
 &\quad + 42.6103 \left(\frac{d^2}{dt^2} \psi_z(t) \right) \sin(\psi_y(t)) - \\
 &\quad - 7.572 \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) \cos(\psi_x(t)) \cos(\psi_y(t)) + \\
 &\quad + 0.0006 \left(\frac{d}{dt} \psi_y(t) \right)^2 \sin(\psi_y(t)) \sin(\psi_z(t)) + \\
 &+ \left(\frac{d}{dt} \psi_x(t) \right) \left(\frac{d}{dt} \psi_y(t) \right) (-12.3217 \sin(\psi_y(t)) \cos(\psi_y(t)) - \\
 &\quad - 0.0012 \sin(\psi_y(t)) \cos(\psi_z(t))) - \\
 &\quad - 0.0012 \left(\frac{d}{dt} \psi_x(t) \right) \left(\frac{d}{dt} \psi_z(t) \right) \sin(\psi_z(t)) \cos(\psi_y(t)) - \\
 &\quad - \left(\frac{d}{dt} \psi_y(t) \right) \left(\frac{d}{dt} \psi_z(t) \right) (-0.0006 \cos(\psi_z(t)) \cos(\psi_y(t)) + \\
 &\quad + 42.6103 \cos(\psi_y(t)) + 0.0006 \cos(\psi_z(t))) - \\
 &- 8.6556_2 + 8.5656m_4 - 34.321 + 34.321 \cos(\psi_x(t)) = 0,
 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned}
& \left(\frac{d^2}{dt^2} \psi_x(t) \right) (-0.0006 \cos(\psi_y(t)) \sin(\psi_z(t)) + 0.0006 \sin(\psi_z(t))) + \\
& + \left(\frac{d^2}{dt^2} \psi_y(t) \right) (0.0012 \cos(\psi_z(t)) + 48.7771) + \\
& + 7.572 \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) \cos(\psi_y(t)) + \\
& + 7.572 \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) \sin(\psi_x(t)) \sin(\psi_y(t)) + \\
& + \left(\frac{d}{dt} \psi_x(t) \right)^2 (0.0006 \sin(\psi_y(t)) \cos(\psi_z(t)) + \\
& + 6.1608 \cos(\psi_y(t)) \sin(\psi_y(t))) + \\
& + \left(\frac{d}{dt} \psi_x(t) \right) \left(\frac{d}{dt} \psi_z(t) \right) (0.0006(1 - \cos(\psi_y(t)) \cos(\psi_z(t))) - \\
& - 42.6103 \cos(\psi_y(t))) - \\
& - 0.0012 \left(\frac{d}{dt} \psi_y(t) \right) \left(\frac{d}{dt} \psi_z(t) \right) \sin(\psi_z(t)) - \\
& + 34.321 \cos(\psi_y(t)) - 34.321 - 8.5656m_1 + 8.5656m_3 = 0, \\
& \\
& 42.6103 \left(\frac{d^2}{dt^2} \psi_x(t) \right) \sin(\psi_y(t)) + \\
& + 42.6177 \left(\frac{d^2}{dt^2} \psi_z(t) \right) + \\
& + 0.0006 \left(\frac{d}{dt} \psi_x(t) \right)^2 \cos(\psi_y(t)) \sin(\psi_z(t)) + \\
& + 0.0006 \left(\frac{d}{dt} \psi_y(t) \right)^2 \sin(\psi_z(t)) + \\
& + \left(\frac{d}{dt} \psi_x(t) \right) \left(\frac{d}{dt} \psi_y(t) \right) (42.6103 \cos(\psi_y(t)) + \\
& + 0.0006(\cos(\psi_y(t)) - 1) \cos(\psi_z(t))) + \\
& + 11.7796(m_1 + m_2 + m_3 + m_4) = 0.
\end{aligned} \right.$$

Далее эта система была преобразована, используя способ приведенный в предыдущем пункте, чтобы получить систему явных уравнений второго порядка.

Эти уравнения были использованы для симуляции системы.

Глава 2. Компьютерное моделирование

2.1 Постановка задачи

Для полученной в предыдущей главе математической модели балансирующего робота с четырьмя омниколесами, выраженной через систему явных дифференциальных уравнений второго порядка, требуется постро-

ить симуляцию для проверки соответствия полученной модели поведению реального балансирующего робота на сферическом колесе. Также требуется построить стабилизирующее управление, которое стабилизирует балансирующего робота в положение равновесия.

2.2 Создание Simulink-модели

Для создания симуляции математической модели был использован программный продукт «Matlab Simulink R2021A». В нем была создана функция, на вход которой подаются псевдокоординаты, псевдоскорости и моменты электроприводов, а на выход – псевдоускорения, получаемые из входных параметров на основе математической модели. Далее они дважды интегрируются, для получения псевдоскоростей и псевдокоординат, которые замыкаются входом функции. Строим вход и выход симуляции следующим образом: входом симуляции являются 4 момента электропривода, а выходом симуляции – вектор, состоящий из псевдокоординат и псевдоскоростей.

Получаем схему, представленную на рис. 6.

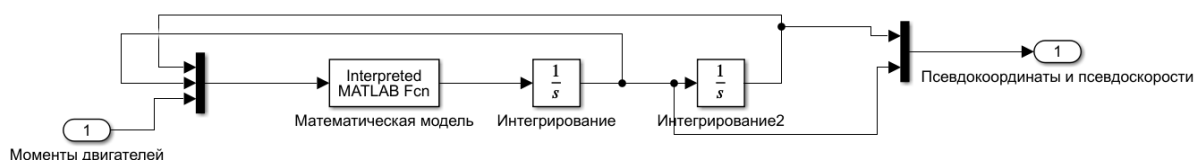


Рис. 6: Схема симуляции с входом и выходом

На основе полученной симуляции было проверено, соответствует ли математическая модель реальному балансирующему роботу. В положении равновесия подадим следующий вектор моментов:

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \\ -0.1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Все координаты, кроме x и ψ_y , не изменяются. Графики изменения x и ψ_y представлены на рис. 7 (здесь и далее углы в радианах).

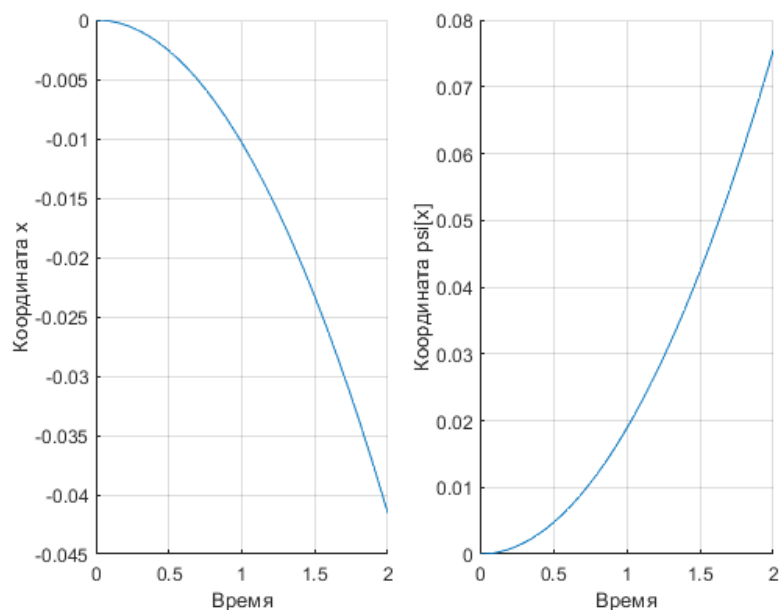


Рис. 7: Изменение координат ψ_y и x при противоположном движении 1 и 3 омниколес

Если же мы выбираем одинаковое направление первого и третьего омниколеса, то будет изменяться только угол ψ_z . Смотри рис. 8.

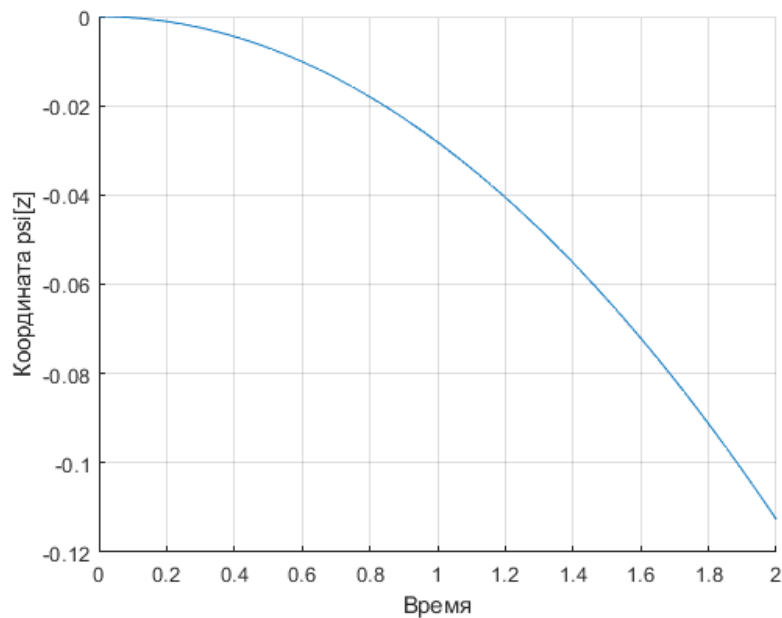


Рис. 8: Изменение координаты ψ_z при сонаправленном движении 1 и 3 омниколес

Теперь выбираем следующим вектор моментов электроприводов:

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

В данном случае все координаты будут изменяться:

- координата x будет уменьшаться,
- координата y будет увеличиваться,
- координата ψ_x будет увеличиваться,
- координата ψ_y будет увеличиваться,
- координата ψ_z будет уменьшаться.

Аналогичные результаты мы будем получать при другой комбинации моментов омниколес. Все результаты полностью соответствуют поведению реального балансирующего робота на сферическом колесе.

2.3 Построение регуляторов для стабилизации системы

Далее было рассмотрено построение стабилизирующего управления в положение равновесия, при котором:

$$\psi_x = 0, \quad \psi_y = 0, \quad \psi_z = 0$$

При этом координаты x и y могут быть не равны нулю в положении равновесия, то есть шар перемещается при стабилизации.

Были рассмотрены два регулятора, которые дают стабилизирующее управление – ПИД-регулятор и LQR-регулятор.

2.3.1 ПИД-регулятор

ПИД-регулятор расшифровывается как пропорционально-интегрально-дифференцирующий регулятор. Данный регулятор является наиболее простым, так как фактически не требует математической модели системы. На вход его подаются псевдокоординаты π и псевдоскорости $\dot{\pi}$. А на выход получается следующая функция:

$$u(t) = K_p \pi(t) + K_i \int_0^t \pi(\tau) d\tau + K_d \dot{\pi},$$

где K_p - пропорциональный коэффициент, K_i - интегральный коэффициент, K_d - дифференциальный коэффициент. Коэффициенты подбираются вручную, и оптимальность регулятора зависит от удачно подобранных коэффициентов.

Поведение ПИД-регулятора было сделано следующим образом. Так как при положительном движении омниколес имеется следующая динамика:

- При движении первого омниколеса - ψ_y увеличивается, а ψ_z уменьшается;
- При движении второго омниколеса - ψ_x увеличивается, а ψ_z уменьшается;
- При движении третьего омниколеса - ψ_y уменьшается, а ψ_z уменьшается;
- При движении четвертого омниколеса - ψ_x уменьшается, а ψ_z уменьшается,

то получаем схему поведения ПИД-регулятора, приведенную на рис. 9.

При этом схема стабилизации симуляции при использовании ПИД-регулятора приведена на рис. 10.

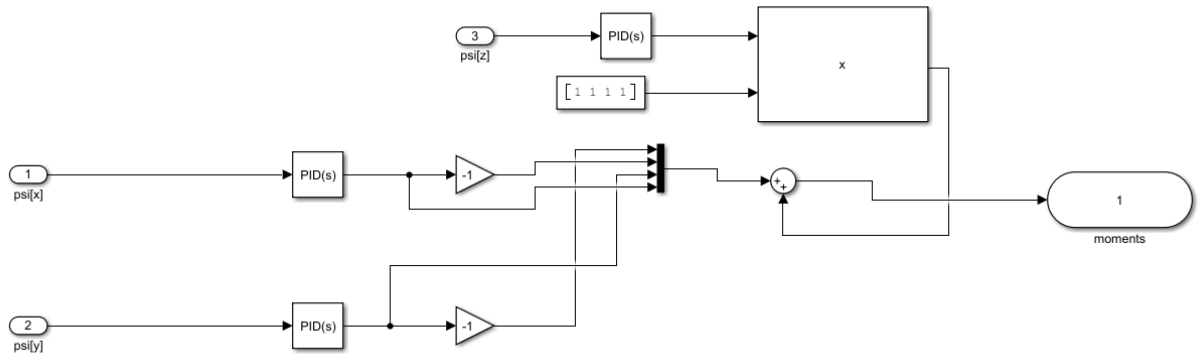


Рис. 9: Схема ПИД-регулятора для стабилизации системы в положении равновесия

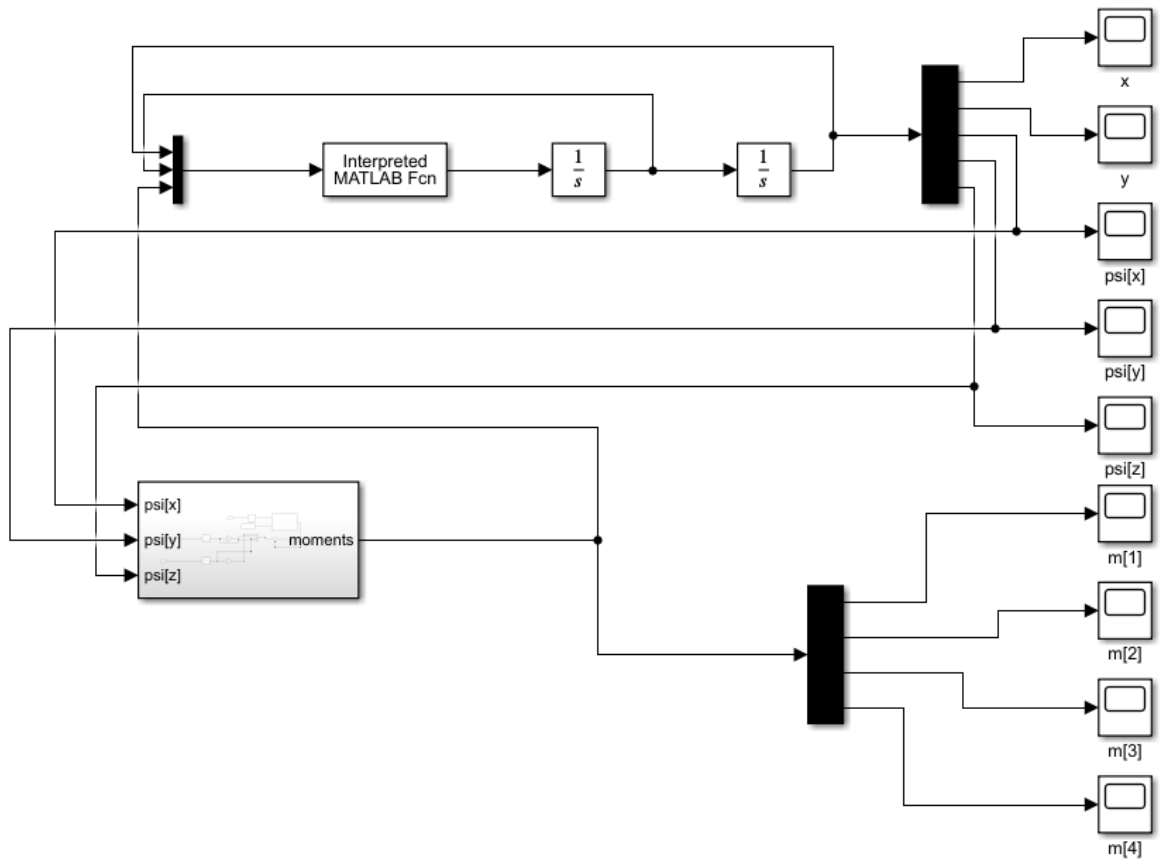


Рис. 10: Схема симуляции вместе с ПИД-регулятором

2.3.2 LQR-регулятор

LQR-регулятор расшифровывается как Linear quadratic regulator, то есть линейно-квадратичный регулятор. Его применить можно только для линейных стационарных систем вида:

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

который минимизирует функционал вида:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt.$$

В данном случае управление имеет вид:

$$u = -R^{-1} B^T P x,$$

где P находится из решения уравнения Риккати:

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = -\dot{P}.$$

Для применения данного регулятора была линеаризована математическая модель в положении равновесия, где $\pi = 0$, $\dot{\pi} = 0$. Так как для стабилизации важны только координаты ψ_x , ψ_y , ψ_z , то для линеаризации были рассмотрены только уравнения, связанные с данными координатами. Получаем следующие матрицы линейной системы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2561 & 0 & -0.2561 \\ 0.192 & 0 & -0.192 & 0 \\ -0.2764 & -0.2764 & -0.2764 & -0.2764 \end{pmatrix}.$$

При этом в линейной системе рассмотрены следующие векторы:

$$x = \begin{pmatrix} \psi_x \\ \psi_y \\ \psi_z \\ \dot{\psi}_x \\ \dot{\psi}_y \\ \dot{\psi}_z \end{pmatrix},$$

$$u = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{pmatrix}.$$

Для построения LQR-регулятора симуляции в программном продукте «Matlab R2021a» была использована функция $K = lqr(A, B, Q, R)$, которая вычисляет матрицу для управления $u = -Kx$ согласно изложенному выше способу.

Таким образом, схема стабилизации симуляции при использовании LQR-регулятора приведена на рис. 11.

2.4 Результаты экспериментов

Было рассмотрено следующее начальное состояние системы

$$\pi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.25 \\ -0.25 \\ 0.25 \end{pmatrix}.$$

Для него были применены ПИД-регулятор и LQR-регулятор для стабилизации системы в положение равновесия.

В начале был рассмотрен ПИД-регулятор. Были выбраны следующие

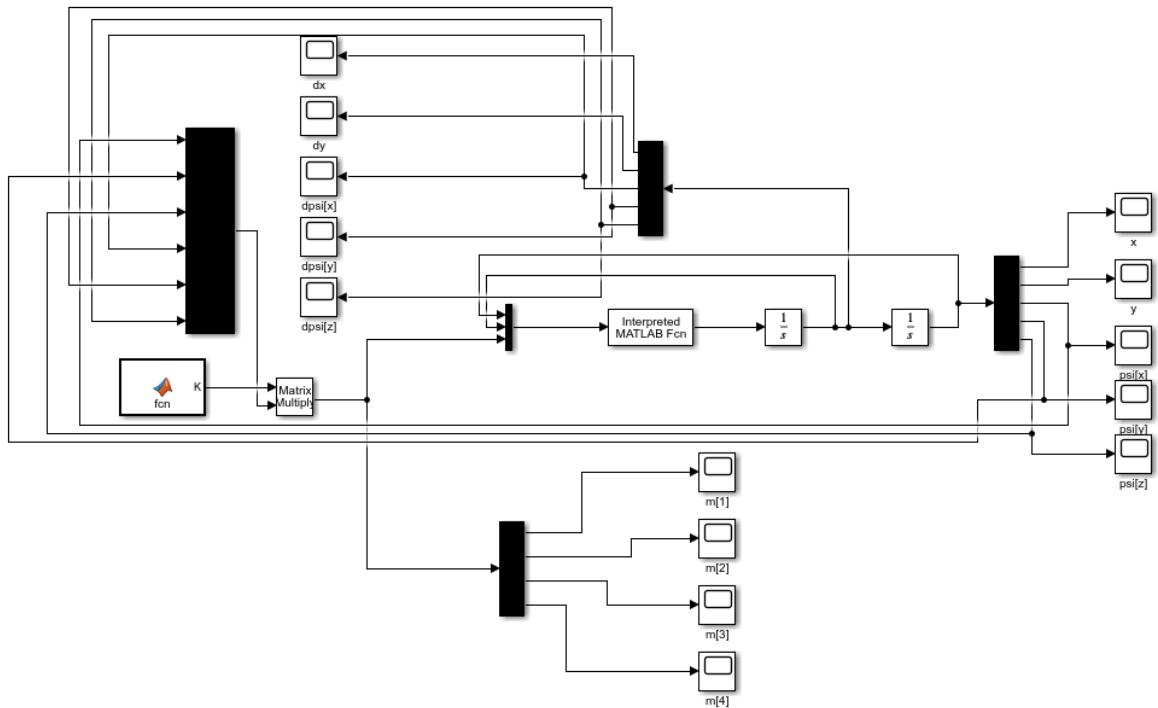


Рис. 11: Схема симуляции вместе с LQR-регулятором

значения коэффициентов:

$$K_p = K_i = K_d = 5.$$

При данных коэффициентах система стабилизируется за 30 секунд, при этом отсутствуют колебания во время стабилизации, которые получаются, если рассматривать коэффициенты с меньшим значением.

Псевдокоординаты при стабилизации с использованием ПИД-регулятора представлены на рис. 12.

Как видно на рисунке при стабилизации шар смещается на некоторое расстояние от начального состояния.

Далее был рассмотрен LQR-регулятор. Были приняты следующие матрицы регулятора:

$$Q = E_6, R = E_4.$$

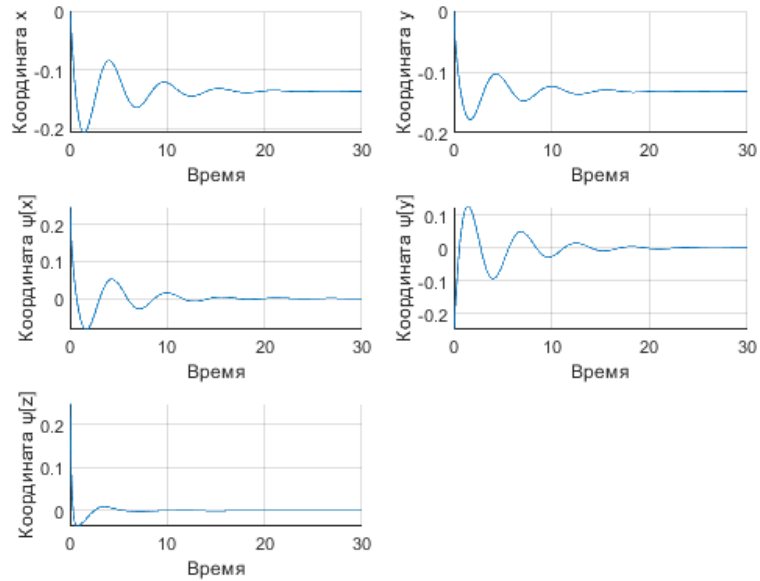


Рис. 12: Псевдокоординаты при стабилизации с использованием ПИД-регулятора

Тогда была получена следующая матрица управления:

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0.7071 & -0.5 & 0 & 2.0451 & -1.0745 \\ 0.7071 & 0 & -0.5 & 1.8059 & 0 & -1.0745 \\ 0 & -0.7071 & -0.5 & 0 & -2.0451 & -1.0745 \\ -0.7071 & 0 & -0.5 & -1.8059 & 0 & -1.0745 \end{pmatrix}$$

В симуляции на схеме, представленной на рис. 11, была использована матрица с противоположным знаком. Псевдокоординаты при стабилизации с использованием LQR-регулятора представлены на рис. 13.

Как видно из рисунков, оба регулятора не имеют перерегулирование. При этом LQR-регулятор стабилизирует за меньшее время, чем ПИД-регулятор, и имеет меньшую колебательность возле положения равновесия. Кроме того, для LQR-регулятора не нужно подбирать коэффициенты, а достаточно знать линеаризованную модель и матрицы оптимизации Q, R , с помощью которых можно легко изменить управление для достижения требуемых параметров стабилизации. Так, например, изменим матрицу Q , чтобы система стабилизировалась быстрее, приняв $Q = 10E_{10}$. В этом случае псевдокоординаты при стабилизации представлены на рис. 14.

Также важным параметром стабилизации кроме времени и отклоне-

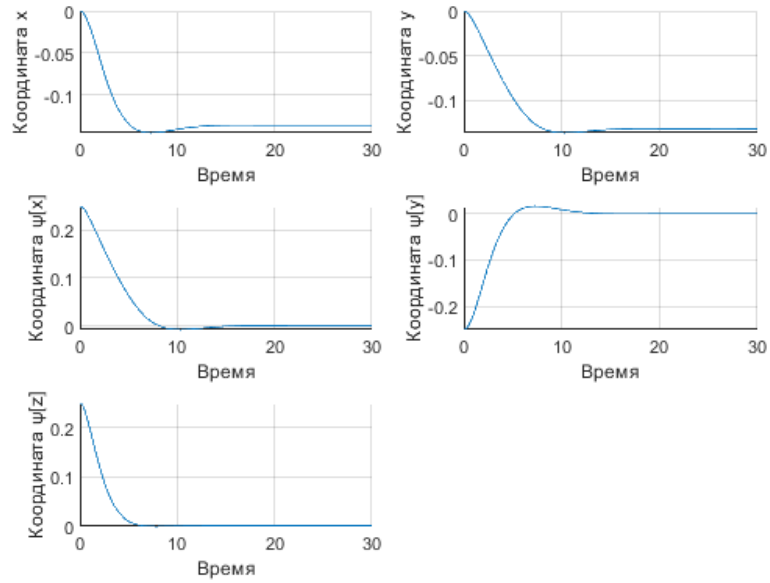


Рис. 13: Псевдокоординаты при стабилизации с использованием LQR-регулятора

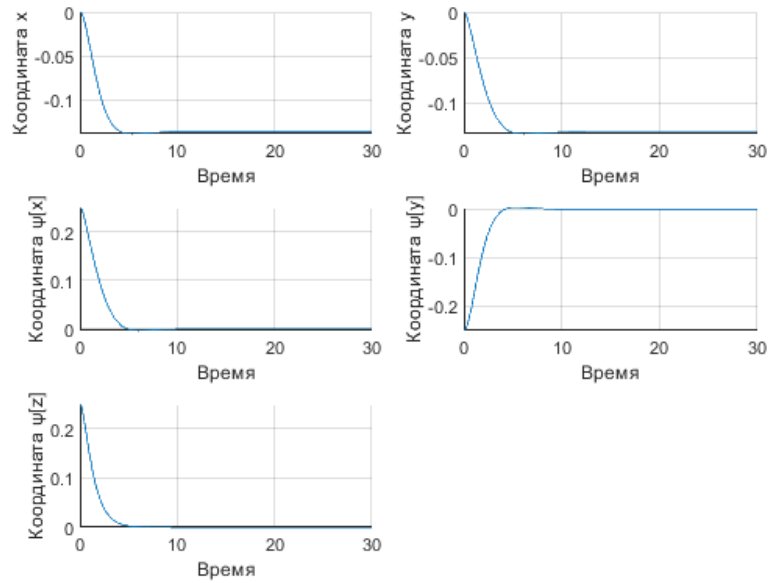


Рис. 14: Псевдокоординаты при стабилизации с использованием LQR-регулятора и матрицей $Q = 10E_{10}$

ний являются моменты, подаваемые на электроприводы, так как иногда предлагаемые законы управления невозможно реализовать на практике. Моменты электроприводов для предыдущих трех экспериментов представлены на рис. 15, 16 и 17.

Как видно из рисунков, ПИД-регулятор на выход дает моменты элек-

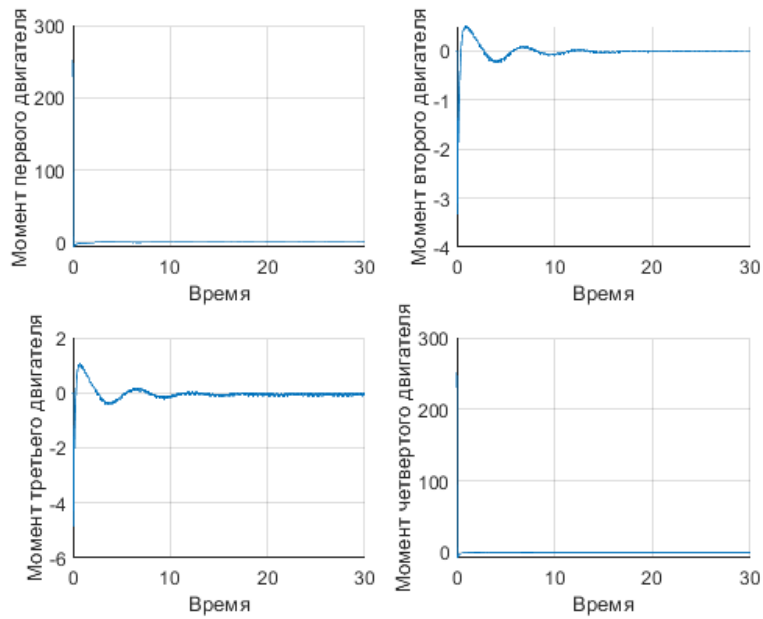


Рис. 15: Моменты электроприводов при стабилизации с использованием ПИД-регулятора

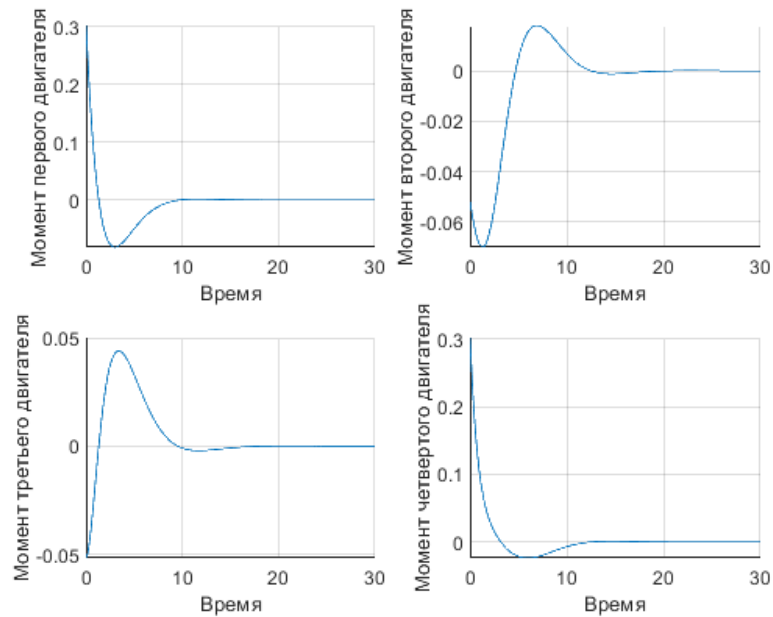


Рис. 16: Моменты электроприводов при стабилизации с использованием LQR-регулятора

троприводов, которые в большинстве случаев на практике не реализуемы, а LQR-регулятор дает вполне реализуемые моменты электроприводов. Если же требуется ситуация, когда стабилизация не требует высоких требований к времени и колебаниям, а важным являются моменты, подаваемые на

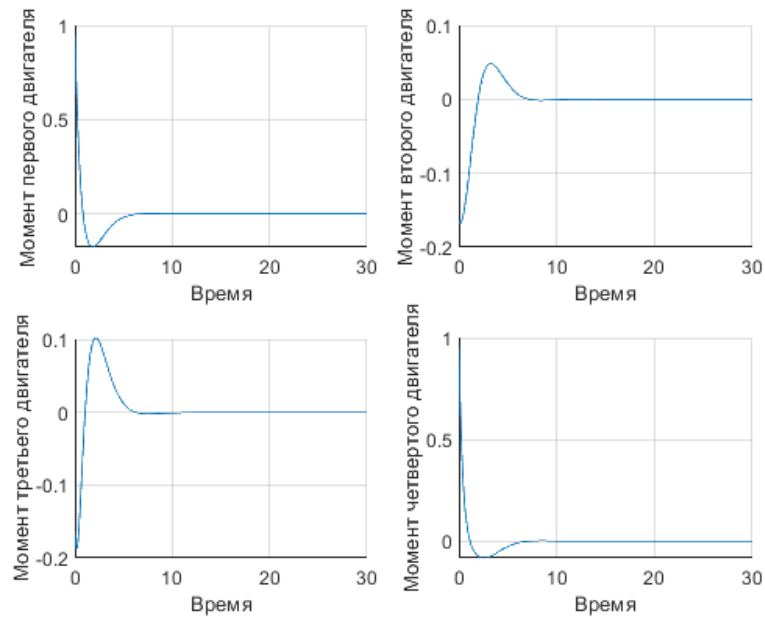


Рис. 17: Моменты электроприводов при стабилизации с использованием LQR-регулятора и матрицей $Q = 10E_{10}$

электроприводы, то в данном случае требуется наложить требования на матрицу R . Так, например, для случая, когда $Q = E_{10}$ и $R = 5E_5$ сходимость будет происходить дольше, но моменты на электроприводы будут меньше. Псевдокоординаты и моменты на электроприводы при стабилизации в данном случае представлены на рис. 18 и 19 .

Выводы

На основе параметров системы, используя формализм уравнений Аппеля, была получена система нелинейных дифференциальных уравнений, которая описывает поведение рассматриваемого балансирующего робота. Была построена компьютерная модель, а также выведены законы управления для стабилизации данной системы. Анализ полученных результатов экспериментов позволяет сделать вывод о том, что в данном случае использование LQR-регулятора более предпочтительно. Программа для пакета Maple для вывода уравнений связи и математической модели, а также Simulink-модель со стабилизирующими управлениями приведены в открытом GitLab-репозитории

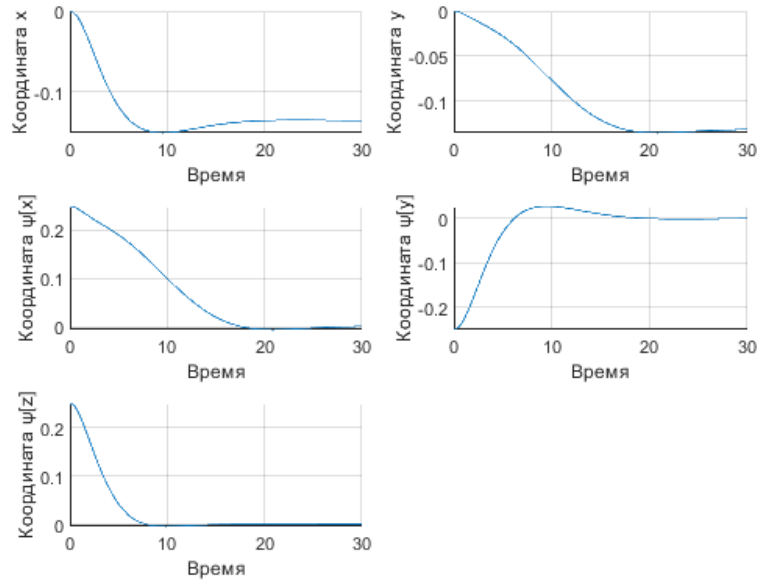


Рис. 18: Псевдокоординаты при стабилизации с использованием LQR-регулятора с матрицами $Q = E_{10}$ и $R = 5E_5$

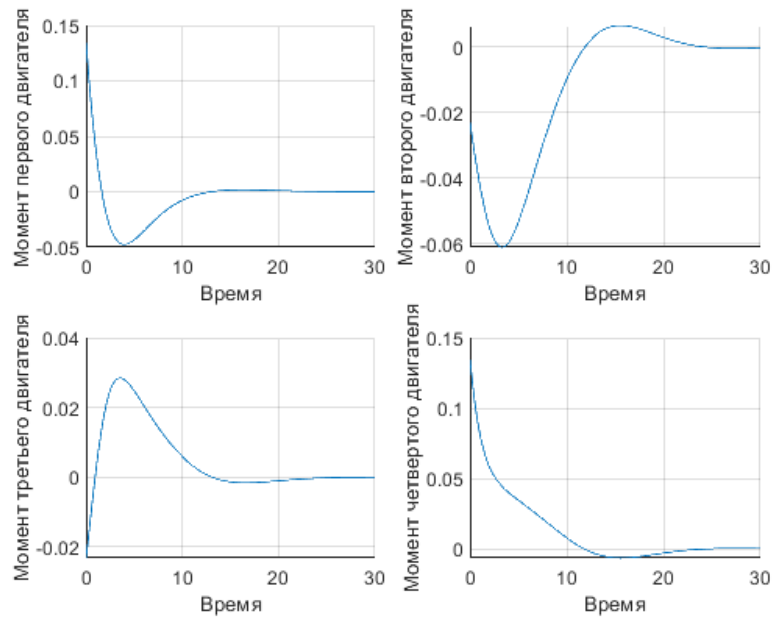


Рис. 19: Моменты при стабилизации с использованием LQR-регулятора с матрицами $Q = E_{10}$ и $R = 5E_5$

<https://gitlab.com/AlexeyRyb/balancingrobotonballwithfouromniwheel>.

Заключение

В результате проведенной работы получены следующие результаты:

- выведены кинематическая и динамическая модели рассмотренного балансирующего робота на сферическом колесе;
- реализована компьютерная модель для проведения численных экспериментов;
- проведена линеаризация системы в положении равновесия;
- синтезированы ПИД-регулятор и LQR-регулятор, проведено сравнения динамики при стабилизации системы.

. В дальнейшем планируется изучить динамику балансирующего робота при изменении физических параметров системы, проверить более сложные законы управления, а также сделать физическую реализацию балансирующего робота на сферическом колесе на основе использованных в модели параметров.

Список литературы

- [1] История одного диплома или как сделать шаробота [Электронный ресурс]: URL:<https://habr.com/ru/post/306456/> (дата обращения: 21.05.2021).
- [2] Modeling and Control of a Ball-Balancing Robot [Электронный ресурс]: URL:https://essay.utwente.nl/65559/1/vanderBlonk_MSc_EEMCS.pdf (дата обращения: 21.05.2021).
- [3] Development of a ball balancing robot with omni wheels [Электронный ресурс]: URL:<https://lup.lub.lu.se/luur/download?func=downloadFile&recordId=2856116&fileId=2856133> (дата обращения: 21.05.2021).
- [4] How to Make a Ball Balancing Robot [Электронный ресурс]: URL:<https://www.instructables.com/How-to-make-a-Ball-Balancing-Robot/> (дата обращения: 21.05.2021).

- [5] Hardware and control design of a ball balancing robot [Электронный ресурс]: URL:<https://busoniu.net/files/papers/ddecs19.pdf> (дата обращения: 21.05.2021).
- [6] Kugle - Modelling and Control of a Ball-balancing Robot [Электронный ресурс]: URL:https://www.researchgate.net/publication/333614409_Kugle_-_Modelling_and_Control_of_a_Ball-balancing-Robot#fullTextFileContent (дата обращения: 21.05.2021).
- [7] The Ballbot: An Omnidirectional Balancing Mobile Robot [Электронный ресурс]: URL:http://www.msl.ricmu.edu/publications/pdfs/ballbotIJRR_final.pdf (дата обращения: 21.05.2021).
- [8] Design and Simulation of a Robot Balancing on a Sphere with Reduced Height [Электронный ресурс]: URL:https://www.researchgate.net/publication/321232243_Design_and_Simulation_of_a_Robot_Balancing_on_a_Sphere_with_Reduced_Height (дата обращения: 21.05.2021).
- [9] Бабаджанянц Л. К., Пупышев Ю. А., Пупышева Ю. Ю. Классическая механика. Учебное пособие. Изд. 3-е, исправленное. СПб.: СПбГУ, 2013. 259 с.
- [10] Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966. 300 с.
- [11] Зубов В. И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 495 с.