САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра теории управления

Евтина Диана Сергеевна

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Анализ робастной устойчивости линейных систем с запаздыванием: неопределённости в запаздываниях и коэффициентах

Направление: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

ООП: Прикладная математика, фундаментальная информатика и программирование

Научный руководитель:
кандидат физ.-мат. наук, доцент
Александрова Ирина Васильевна

Рецензент:
кандидат физ.-мат. наук, доцент
Пономарев Антон Александрович

Санкт-Петербург

2021

Содержание

Введение

Исследование устойчивости систем дифференциальных уравнений с запаздыванием является частью многих прикладных задач. Одним из основных методов такого исследования является метод функционалов Ляпунова – Красовского. В частности, известны так называемые функционалы с заданной производной [1], для которых заранее задаётся производная в виде отрицательно-определённой квадратичной формы или квадратичного функционала, а затем строится сам функционал, имеющий данную производную вдоль решений исследуемой системы. Далее проверяется положительная определённость построенного функционала. Ключевым элементом функционалов с заданной производной является матрица Ляпунова.

Метод функционалов Ляпунова – Красовского используется для решения задачи о робастной устойчивости. В классической постановке задачи необходимо определить области допустимых значений возмущений, при которых возмущённая система сохраняет устойчивость, в предположении об экспоненциальной устойчивости номинальной системы.

Существует два способа применения функционалов с заданной производной для решения задач о робастной устойчивости. В первом из них используется функционал полного типа [2, 3, 4], а во втором — функционал, производная которого вдоль решений невозмущённой системы задана в виде отрицательно-определённой квадратичной формы [5, 6].

Практика показывает, что наличие возмущений в запаздываниях делает второй подход к решению задачи о робастной устойчивости более эффективным. Целью данной работы является распространение второго подхода на случай присутствия возмущений одновременно в запаздываниях и в коэффициентах возмущённой системы.

Постановка задачи

Предположим, что система

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{j=1}^{m} A_j x(t - h_j), \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$; $A_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $j = \overline{0,m}$ — постоянные матрицы; $h_j \geqslant 0$, $j = \overline{1,m}$ — запаздывания, экспоненциально устойчива.

Рассмотрим возмущённую систему

$$\dot{y}(t) = \sum_{j=0}^{m} (A_j + \Delta_j) y(t - h_j - \eta_j), \quad \eta_j \geqslant -h_j, \tag{2}$$

где η_j, $j = \overline{0,m}$ — возмущения в запаздываниях, а Δ_j, $j = \overline{0,m}$ — матричные возмущения. Задача заключается в нахождении ограничений на возмущения Δ_j и η_j, при которых система (2) остаётся экспоненциально устойчивой.

Для решения поставленной задачи в работе будет использован подход, основанный на матрице Ляпунова системы (1).

Обзор литературы

Поскольку работа основана на теории функционалов с заданной производной, обратимся к истории этих функционалов. Впервые квадратичные функционалы с заданной производной были предложены в статье [7]. В [8] сформулированы 3 основных свойства матрицы Ляпунова, определяющей функционалы и предложена идея применения таких функционалов для построения оценок решений линейных систем с запаздыванием. Также было отмечено, что функционалы с производной, заданной в виде квадратичной формы, не допускают нижних квадратичных оценок. Позднее в [9] продемонстрировано существование лишь локальных кубических оценок снизу. Кроме того, в данной работе сформулирована теорема, согласно которой если система с запаздыванием удовлетворяет условию Ляпунова, то для любой симметрической матрицы W существует ассоциированная с ней матрица Ляпунова. В работе [2] введены функционалы полного типа, производная которых определяется полным состоянием системы с запаздыванием и представляет собой отрицательно-определённый квадратичный функционал. Функционалы полного типа допускают квадратичную оценку снизу.

Как уже было сказано во введении, в терминах функционалов с заданной производной существует два подхода к анализу робастной устойчивости.

Первый способ реализован в статье [2] для решения задачи о робастной устойчивости линейных уравнений с неопределенностями в коэффициентах. В статье [3] – для решения задачи о робастной устойчивости линейных уравнений с неопределённостями в запаздывании. В [4] результат, полученный в предыдущей статье, распространён на случай систем с несколькими запаздываниями.

Для второго способа производная функционала вдоль решений возмущённой системы не является отрицательно-определённым функционалом. Поэтому в данном случае используется специальная интегральная оценка сверху. Второй способ применяется в статье [5] к решению задачи робастной устойчивости уравнений с неопределённостями в запаздываниях, а в [6] – уравнений с неопределённостями в коэффициентах. Показано [5], что итеративное применение второго способа в случае постоянных возмущений в запаздывании позволяет достичь точную границу устойчивости в пространстве параметров.

Стоит отметить, что функционалы полного типа используются не только в задаче о робастной устойчивости, но и в ряде других задач: построение экспоненциальных оценок решений [10], нахождение критических значений запаздываний (таких значений, при которых система теряет устойчивость) [11] и других.

Кроме того, отметим предложенный в статье [12] подход к анализу устойчивости линейных стационарных уравнений с запаздыванием на основе матрицы Ляпунова. Данный подход сводит исследование устойчивости к проверке положительной определённости блочной матрицы, блоки которой представляют собой значения матрицы Ляпунова в различных точках.

Глава 1. Предварительные сведения

В первой главе вводятся необходимые понятия и формулировки, используемые в дальнейшем.

Введём обозначения: $PC([-h,0],\mathbb{R}^n)$ — пространство кусочно-непрерывных функций $\phi : [-h,0] \to \mathbb{R}^n$, где $h = \max\limits_{j} h_j$, с равномерной нормой $\|\phi\|_h = \sup\limits_{-h\le\theta\le 0} \|\phi(\theta)\|$; $\|x\|$ — евклидова норма вектора $x \in \mathbb{R}^n$; $\|A\|$ — евклидова норма матрицы A, $\|A\| = \max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

Решение системы (1) определяется начальным моментом времени $t_0 = 0$ и начальной функцией ϕ из пространства $PC([-h,0],\mathbb{R}^n)$: $x(\theta) = \phi(\theta),\ \theta \in [-h,0]$. Обозначим состояние системы (1) в момент $t \ge 0$ через:

$$x_t : \theta \to x(t+\theta), \quad \theta \in [-h,0].$$

Определение 1 ([1]). *Система (1) называется экспоненциально устойчивой, если существуют $\sigma > 0$ и $\gamma \ge 1$ такие, что для любого решения $x(t,\phi)$ системы выполняется следующее неравенство:*

$$\|x(t,\phi)\| \le \gamma \|\phi\|_h e^{-\sigma t},\ t \ge 0,$$

где $\phi \in PC([-h,0],\mathbb{R}^n)$ — начальная функция.

Характеристическое уравнение системы (1) [13] имеет вид:

$$\det\left(sE - A_0 - \sum_{j=1}^{m} A_j e^{-sh_j}\right) = 0,$$

где E — единичная матрица. Корни этого уравнения называются собственными числами системы (1). Если s — собственное число системы (1), то, как известно, она имеет решение вида $e^{st}C$, где C — постоянный ненулевой n-мерный вектор, в общем случае комплексный.

Система (1) экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда [13] вещественные части всех её собственных чисел отрицательны.

Зададим положительно-определённую матрицу W. Обозначим минимальное собственное число этой матрицы через $\lambda_{min}(W)$.

Определение 2 ([1])**.** *Непрерывная матрица $U(\tau)$ называется матрицей Ляпунова системы (1), ассоциированной с симметрической матрицей W, если она удовлетворяет свойствам:*

1) $\dfrac{d}{d\tau}U(\tau) = \sum\limits_{j=0}^{m} U(\tau - h_j)A_j,\ \dfrac{d}{d\tau}U(0) = \lim\limits_{\tau\to+0}\dfrac{d}{d\tau}U(\tau),\ \tau \geqslant 0;$

2) $U(-\tau) = U^T(\tau);$

3) $\sum\limits_{j=0}^{m}\left[U(-h_j)A_j + A_j^T U(h_j)\right] = -W.$

Свойство 1) называется динамическим свойством, свойство 2) — свойством симметрии, 3) — алгебраическим свойством.

Введём функционал, заданный на пространстве $PC([-h,0],\mathbb{R}^n)$ [1]:

$$v_0(\phi) = \phi^T(0)U(0)\phi(0) + \sum_{j=1}^{m} 2\phi^T(0)\int\limits_{-h_j}^{0} U(-\theta - h_j)A_j\phi(\theta)d\theta +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{-h_k}^{0}\phi^T(\theta_1)A_k^T\Bigg(\int\limits_{-h_j}^{0}U(\theta_1 + h_k - \theta_2 - h_j)A_j\phi(\theta_2)d\theta_2\Bigg)d\theta_1.$$

Его производная вдоль решений системы (1) является отрицательно-определённой квадратичной формой:

$$\frac{d}{dt}v_0(x_t)\bigg|_{(1)} = -x^T(t)Wx(t), \quad t \geqslant 0.$$

Глава 2. Основной результат

В данной главе получены новые условия робастной устойчивости для системы (1) при наличии возмущений одновременно в запаздываниях и в матрицах системы.

2.1 Производная функционала v_0 вдоль решений возмущённой системы

В этом разделе вычисляется производная v_0 вдоль решений системы (2). Отметим, что эта производная не является отрицательно-определённым квадратичным функционалом. Поэтому далее к ней будет применена специальная интегральная оценка.

Перепишем систему (2) в виде

$$\dot{y}(t) = \sum_{j=0}^{m} A_j y(t - h_j) + f(y_t),$$

где функционал $f(y_t)$ имеет вид

$$f(y_t) = \sum_{j=0}^{m} (A_j(y(t - h_j - \eta_j) - y(t - h_j)) + \Delta_j y(t - h_j - \eta_j)). \tag{3}$$

Обозначим слагаемые функционала $v_0(\phi)$ через

$$I_1 = \phi^T(0)U(0)\phi(0),$$

$$I_2 = \sum_{j=1}^{m} 2\phi^T(0) \int_{-h_j}^{0} U(-\theta - h_j)A_j\phi(\theta)d\theta,$$

$$I_3 = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \int_{-h_k}^{0} \phi^T(\theta_1)A_k^T \left(\int_{-h_j}^{0} U(\theta_1 + h_k - \theta_2 - h_j)A_j\phi(\theta_2)d\theta_2 \right) d\theta_1.$$

Найдём производную функционала v_0 вдоль решений системы (2). Для этого вычислим производные слагаемых I_1, I_2, I_3 по отдельности:

$$\frac{d}{dt}I_1\bigg|_{(2)} = \dot{y}^T(t)U(0)y(t) + y^T(t)U(0)\dot{y}(t) = \left(\sum_{j=0}^{m} y^T(t - h_j)A_j^T + f^T(y_t) \right) \times$$

$$\times U(0)y(t) + y^T(t)U(0)\left(\sum_{j=0}^{m} A_j y(t-h_j) + f(y_t)\right).$$

Положим $\xi = t + \theta$ в слагаемом I_2. Тогда

$$I_2 = \sum_{j=1}^{m} 2y^T(t) \int\limits_{t-h_j}^{t} U(t-\xi-h_j)A_j y(\xi)d\xi.$$

Вычислим его производную:

$$\frac{d}{dt}I_2\bigg|_{(2)} = \sum_{j=1}^{m} 2\dot{y}^T(t) \int\limits_{t-h_j}^{t} U(t-\xi-h_j)A_j y(\xi)d\xi + \sum_{j=1}^{m} 2y^T(t)\times$$

$$\times\left(U(-h_j)A_j y(t) - U(0)A_j y(t-h_j) + \int\limits_{t-h_j}^{t} \frac{\partial}{\partial t}U(t-\xi-h_j)A_j y(\xi)d\xi\right).$$

В последнем слагаемом под интегралом нам нужно найти только производную $U(t-\xi-h_j), j=\overline{1,m}$, так как остальные множители под интегралом от t не зависят. Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t-\xi-h_j) = \frac{dU(t-\xi-h_j)}{d(t-\xi-h_j)} = -\frac{\partial}{\partial \xi}U(t-\xi-h_j), \quad j=\overline{1,m}.$$

Следовательно

$$\frac{d}{dt}I_2\bigg|_{(2)} = 2\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=0}^{m} A_k y(t-h_k) + f(y_t)\right)^T \int\limits_{t-h_j}^{t} U(t-\xi-h_j)A_j y(\xi)d\xi +$$

$$+2\sum_{j=1}^{m} y^T(t)\bigg(U(-h_j)A_j y(t) - U(0)A_j y(t-h_j) -$$

$$-\int\limits_{t-h_j}^{t} \frac{\partial}{\partial \xi}\big(U(t-\xi-h_j)\big)A_j y(\xi)d\xi\bigg).$$

Чтобы вычислить производную от $U(t-\xi-h_j), j=\overline{1,m}$, воспользуемся свойством симметрии и динамическим свойством матриц Ляпунова. Пусть $\zeta = h_j - t + \xi, j=\overline{1,m}$. Тогда $d\zeta = d\xi$ и по свойству симметрии

$$\frac{d}{d\xi}U(-\zeta) = \frac{d}{d\xi}U^T(\zeta) = \frac{d}{d\zeta}U^T(\zeta).$$

Поскольку $\zeta \geq 0$, то, применив динамическое свойство, получим:

$$\frac{d}{d\zeta}U^T(\zeta) = \left(\sum_{k=0}^{m} U(h_j - t + \xi - h_k)A_k\right)^T = \sum_{k=0}^{m} A_k^T U(h_k + t - \xi - h_j).$$

Окончательно производная I_2 вдоль решений (2) имеет вид:

$$\frac{d}{dt}I_2\bigg|_{(2)} = 2\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=0}^{m} A_k y(t-h_k) + f(y_t)\right)^T \int\limits_{t-h_j}^{t} U(t-\xi-h_j)A_j y(\xi)d\xi +$$

$$+2\sum_{j=1}^{m} y^T(t)\Bigg(U(-h_j)A_j y(t) - U(0)A_j y(t-h_j) -$$

$$-\int\limits_{t-h_j}^{t}\sum_{k=0}^{m} A_k^T U(h_k + t - \xi - h_j)A_j y(\xi)d\xi\Bigg).$$

Сделаем замену переменной под знаком интеграла по формулам $\xi_1 = t + \theta_1$ и $\xi_2 = t + \theta_2$ в слагаемом I_3. Тогда

$$I_3 = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t-h_k}^{t} y^T(\xi_1)A_k^T\left(\int\limits_{t-h_j}^{t} U(\xi_1 + h_k - \xi_2 - h_j)A_j y(\xi_2)d\xi_2\right)d\xi_1.$$

Найдём производную вдоль решений системы (2) последнего слагаемого, входящего в состав функционала v_0:

$$\frac{d}{dt}I_3\bigg|_{(2)} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} y^T(t)A_k^T\int\limits_{t-h_j}^{t} U(t + h_k - \xi_2 - h_j)A_j y(\xi_2)d\xi_2 -$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} y^T(t-h_k)A_k^T\int\limits_{t-h_j}^{t} U(t - \xi_2 - h_j)A_j y(\xi_2)d\xi_2 +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t-h_k}^{t}\frac{d}{dt}y^T(\xi_1)A_k^T\left(\int\limits_{t-h_j}^{t} U(\xi_1 + h_k - \xi_2 - h_j)A_j y(\xi_2)d\xi_2\right)d\xi_1 =$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} y^T(t)A_k^T\int\limits_{t-h_j}^{t} U(t + h_k - \xi_2 - h_j)A_j y(\xi_2)d\xi_2 -$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} y^T(t-h_k)A_k^T\int\limits_{t-h_j}^{t} U(t - \xi_2 - h_j)A_j y(\xi_2)d\xi_2 +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t-h_k}^{t} y^T(\xi_1)A_k^T\Big(U(\xi_1+h_k-t-h_j)A_jy(t)-$$

$$-U(\xi_1+h_k-t)A_jy(t-h_j)\Big)d\xi_1.$$

Теперь запишем производную функционала v_0 вдоль решений (2), приведя подобные слагаемые и сгруппировав их:

$$\frac{d}{dt}v_0(y_t)\Big|_{(2)}=2f^T(y_t)\Big(U(0)y(t)+\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t-h_j}^{t}U(t-\xi-h_j)A_jy(\xi)d\xi\Big)+$$

$$+2\sum_{j=0}^{m}y^T(t)U(-h_j)A_jy(t).$$

Преобразуем второе слагаемое, используя алгебраическое свойство матриц Ляпунова:

$$2\sum_{j=0}^{m}y^T(t)U(-h_j)A_jy(t)=-y^T(t)Wy(t),$$

где W — положительно-определённая матрица, с которой ассоциирована матрица Ляпунова.

Таким образом, производная функционала v_0 вдоль решений (2) окончательно примет вид:

$$\frac{d}{dt}v_0(y_t)\Big|_{(2)}=-y^T(t)Wy(t)+l(y_t), \tag{4}$$

где

$$l(y_t)=2f^T(y_t)\Big(U(0)y(t)+\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t-h_j}^{t}U(t-\xi-h_j)A_jy(\xi)d\xi\Big). \tag{5}$$

Подставим в (5) выражение функционала $f(y_t)$ из формулы (3) и представим $l(y_t)$ как сумму четырёх слагаемых:

$$l(y_t)=\underbrace{2\sum_{j=0}^{m}\Big(y(t-h_j-\eta_j)-y(t-h_j)\Big)^TA_j^TU(0)y(t)+}_{I}$$

$$
\underbrace{+2\sum_{j=0}^{m} y^T(t-h_j-\eta_j)\Delta_j^T U(0)y(t)+}_{II}
$$

$$
\underbrace{+2\sum_{j=0}^{m}\Big(y(t-h_j-\eta_j)-y(t-h_j)\Big)^T A_j^T \sum_{k=1}^{m}\int\limits_{t-h_k}^{t} U(t-\xi-h_k)A_k y(\xi)d\xi+}_{III}
$$

$$
\underbrace{+2\sum_{j=0}^{m} y^T(t-h_j-\eta_j)\Delta_j^T \sum_{k=1}^{m}\int\limits_{t-h_k}^{t} U(t-\xi-h_k)A_k y(\xi)d\xi\,.}_{IV}
$$

Теперь произведём оценку сверху производной функционала v_0 вдоль решений (2) двумя способами. Далее будем считать, что $t \geq H = \max\{h, h_\eta\}$, где $h = \max\limits_{j=\overline{0,m}} h_j,\ h_\eta = \max\limits_{k=\overline{0,m}}\{h_k+\eta_k\}$.

2.2 I способ

В данном разделе получено достаточное условие устойчивости возмущённой системы первым способом. Результат сформулирован в виде утверждения 1.

Воспользуемся формулой Ньютона – Лейбница [14] для преобразования слагаемых I и III:

$$
I = 2\sum_{j=0}^{m}\int\limits_{-h_j}^{-h_j-\eta_j} \dot{y}^T(t+\theta)d\theta A_j^T U(0)y(t) \overset{(2)}{=}
$$

$$
\overset{(2)}{=} 2\sum_{j=0}^{m}\int\limits_{-h_j}^{-h_j-\eta_j}\sum_{k=0}^{m} y^T(t+\theta-h_k-\eta_k)(A_k^T+\Delta_k^T)d\theta A_j^T U(0)y(t).
$$

Сделаем замену переменной под знаком интеграла по формуле $s = -h_k-\eta_k+$ $+\theta,\ k=\overline{0,m}$. Так как θ находится между значениями $-h_j$ и $-h_j-\eta_j,\ j=\overline{0,m}$, то s лежит между $-h_j - h_k - \eta_k$ и $-h_j - h_k - \eta_j - \eta_k$. Следовательно:

$$I = 2\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m} \int\limits_{-h_j-h_k-\eta_k}^{-h_j-h_k-\eta_j-\eta_k} y^T(t+s)(A_k^T + \Delta_k^T)ds A_j^T U(0) y(t).$$

Рассмотрим слагаемое III. Все преобразования и замена переменной будут аналогичны преобразованиям слагаемого I:

$$III = 2\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m} \int\limits_{-h_j-h_k-\eta_k}^{-h_j-h_k-\eta_j-\eta_k} y^T(t+s)(A_k^T + \Delta_k^T)ds A_j^T \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{t-h_i}^{t} U(t-\xi-h_i) A_i y(\xi) d\xi.$$

Введём обозначения:

$$\upsilon = \max_{\theta\in[0,h]} \|U(\theta)\|;\ a_j = \|A_j\|,\ \delta_j = \|\Delta_j\|,\ j = \overline{0,m};\ M = \sum_{j=0}^{m} \delta_j;$$

$$\rho_k = \|A_k + \Delta_k\|,\ k = \overline{0,m};\ \alpha = 1 + \sum_{j=1}^{m} a_j h_j;\ \beta = M + \sum_{j=0}^{m} a_j |\eta_j| \sum_{k=0}^{m} \rho_k;$$

$$\gamma = M + \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m} \rho_j |\eta_j| \rho_k. \tag{6}$$

Оценим нормы слагаемых, входящих в состав $l(y_t)$, сверху. При оценке будем пользоваться неравенством

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geq 0,$$

а значит,

$$2ab \leq a^2 + b^2.$$

Итак, перейдём к оценке слагаемых. Подробно рассмотрим оценку первого из них, оценки остальных будут проведены аналогично:

$$|I| \leq \upsilon \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m} \rho_k a_j \left| \int\limits_{-h_j-h_k-\eta_k}^{-h_j-h_k-\eta_j-\eta_k} 2\|y(t+s)\| \|y(t)\| ds \right| \leq$$

$$\leq \upsilon \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}\rho_k a_j\left|\int\limits_{-h_j-h_k-\eta_k}^{-h_j-h_k-\eta_j-\eta_k}\|y(t+s)\|^2 ds\right|+$$

$$+\upsilon \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}\rho_k a_j\left|\int\limits_{-h_j-h_k-\eta_k}^{-h_j-h_k-\eta_j-\eta_k}\|y(t)\|^2 ds\right|=$$

$$=\upsilon \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}\rho_k a_j\left|\int\limits_{-h_j-h_k-\eta_k}^{-h_j-h_k-\eta_j-\eta_k}\|y(t+s)\|^2 ds\right|+\upsilon \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m} a_j|\eta_j|\rho_k\|y(t)\|^2.$$

Оценки слагаемых $II - IV$ аналогичны:

$$|II| \leq \upsilon \sum_{j=0}^{m}\delta_j\|y(t-h_j-\eta_j)\|^2+\upsilon M\|y(t)\|^2.$$

$$|III| \leq \upsilon \sum_{j=0}^{m} a_j \sum_{k=0}^{m}\rho_k \sum_{i=1}^{m} a_i h_i\left|\int\limits_{-h_j-h_k-\eta_k}^{-h_j-h_k-\eta_j-\eta_k}\|y(t+s)\|^2 ds\right|+$$

$$+\upsilon \sum_{j=0}^{m} a_j|\eta_j|\sum_{k=0}^{m}\rho_k \sum_{i=1}^{m} a_i\int\limits_{t-h_i}^{t}\|y(\xi)\|^2 d\xi.$$

$$|IV| \leq \upsilon \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=1}^{m}\delta_j a_k h_k\|y(t-h_j-\eta_j)\|^2+\upsilon M\sum_{k=1}^{m} a_k\int\limits_{t-h_k}^{t}\|y(\xi)\|^2 d\xi.$$

Видим, что добавка $l(y_t)$ оценена сверху восемью слагаемыми, однако среди них есть подобные. После приведения подобных получим:

$$\begin{aligned} l(y_t) \leq \upsilon\beta\|y(t)\|^2+\upsilon\alpha \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}\rho_k a_j\left|\int\limits_{-h_j-h_k-\eta_k}^{-h_j-h_k-\eta_j-\eta_k}\|y(t+s)\|^2 ds\right|+ \\ +\upsilon\alpha\sum_{j=0}^{m}\delta_j\|y(t-h_j-\eta_j)\|^2+\upsilon\beta\sum_{j=1}^{m} a_j\int\limits_{t-h_j}^{t}\|y(\xi)\|^2 d\xi. \end{aligned} \tag{7}$$

Лемма 1. *При $t \geq H$ справедлива оценка:*

$$\int\limits_{H}^{t} l(y_s)ds \leq L\int\limits_{H}^{t}\|y(s)\|^2 ds+L_1\int\limits_{-H}^{H}\|y(s)\|^2 ds,$$

где

$$L = 2\upsilon\alpha\beta, \quad L_1 = \upsilon\beta(2\alpha - 1).$$

Доказательство. Проинтегрируем неравенство (7) на промежутке $[H, t]$:

$$\int\limits_H^t l(y_s)ds \le \upsilon\beta \int\limits_H^t \|y(s)\|^2 ds +$$

$$+\upsilon\alpha \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m \rho_k a_j \int\limits_H^t \left| \int\limits_{-h_j-h_k-\eta_k}^{-h_j-h_k-\eta_j-\eta_k} \|y(s+\sigma)\|^2 d\sigma \right| ds +$$

$$+\upsilon\alpha \sum_{j=0}^m \delta_j \int\limits_H^t \|y(s-h_j-\eta_j)\|^2 ds + \upsilon\beta \sum_{j=1}^m a_j \int\limits_H^t \int\limits_{s-h_j}^s \|y(\xi)\|^2 d\xi ds.$$

Для слагаемых, содержащих двойные интегралы, воспользуемся теоремой о среднем [14], согласно которой если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то существует такая точка $c \in (a, b)$, что выполняется равенство: $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

Рассмотрим группу слагаемых

$$\upsilon\alpha \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m \rho_k a_j \int\limits_H^t \left| \int\limits_{-h_j-h_k-\eta_k}^{-h_j-h_k-\eta_j-\eta_k} \|y(s+\sigma)\|^2 d\sigma \right| ds =$$

$$= \upsilon\alpha \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m \rho_k a_j |\eta_j| \int\limits_H^t \|y(s-c)\|^2 ds = \upsilon\alpha \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m \rho_k a_j |\eta_j| \int\limits_{H-c}^{t-c} \|y(s_1)\|^2 ds_1.$$

Значение c изменяется между значениями $h_j + h_k + \eta_k$ и $h_j + h_k + \eta_j + \eta_k$, $j = \overline{0, m},\ k = \overline{0, m}$. Определим, в каких пределах изменяется $s_1 = s - c$. Для этого оценим нижний предел интеграла снизу, а верхний предел интеграла сверху, учитывая, что $H = \max\{h, h_\eta\}$, где $h = \max\limits_{j=\overline{0,m}} h_j$, $h_\eta = \max\limits_{k=\overline{0,m}} \{h_k + \eta_k\}$.

Так как $c \ge 0$ и $c \le 2H$, то $H - c \ge -H$. Следовательно, приходим к тому, что $-H \le s_1 \le t$. Возвращаясь к оценке интеграла, получим:

$$\upsilon\alpha \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m \rho_k a_j |\eta_j| \int\limits_{H-c}^{t-c} \|y(s_1)\|^2 ds_1 \le \upsilon\alpha \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m \rho_k a_j |\eta_j| \int\limits_{-H}^{t} \|y(s_1)\|^2 ds_1 =$$

$$= \upsilon\alpha \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{m} \rho_k a_j |\eta_j| \int\limits_{-H}^{H} \|y(s_1)\|^2 ds_1 + \upsilon\alpha \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{m} \rho_k a_j |\eta_j| \int\limits_{H}^{t} \|y(s_1)\|^2 ds_1.$$

Для следующей группы слагаемых имеем:

$$\upsilon\alpha \sum_{j=0}^{m} \delta_j \int\limits_{H}^{t} \|y(s-h_j-\eta_j)\|^2 ds = \upsilon\alpha \sum_{j=0}^{m} \delta_j \int\limits_{H-h_j-\eta_j}^{t-h_j-\eta_j} \|y(s_1)\|^2 ds_1.$$

Каким бы ни был H, нижний предел интегрирования можно оценить нулём снизу. Следовательно, $0 \le s_1 \le t$. Имеем

$$\upsilon\alpha \sum_{j=0}^{m} \delta_j \int\limits_{H-h_j-\eta_j}^{t-h_j-\eta_j} \|y(s_1)\|^2 ds_1 \le \upsilon\alpha M \int\limits_{0}^{t} \|y(s_1)\|^2 ds_1 = \upsilon\alpha M \int\limits_{0}^{H} \|y(s_1)\|^2 ds_1 +$$

$$+ \upsilon\alpha M \int\limits_{H}^{t} \|y(s_1)\|^2 ds_1.$$

Для последней группы слагаемых справедливы следующие преобразования:

$$\upsilon\beta \sum_{j=1}^{m} a_j \int\limits_{H}^{t} \int\limits_{s-h_j}^{s} \|y(\xi)\|^2 d\xi ds = \upsilon\beta \sum_{j=1}^{m} a_j \int\limits_{H}^{t} \int\limits_{-h_j}^{0} \|y(s+\zeta)\|^2 d\zeta ds =$$

$$= \upsilon\beta \sum_{j=1}^{m} a_j \int\limits_{-h_j}^{0} \int\limits_{H+\zeta}^{t+\zeta} \|y(s_1)\|^2 ds_1 d\zeta.$$

Оценим пределы внутреннего интеграла. Для любого H выполняются неравенства $H + \zeta \ge 0$ и $t + \zeta \le t$. Следовательно:

$$\upsilon\beta \sum_{j=1}^{m} a_j \int\limits_{-h_j}^{0} \int\limits_{H+\zeta}^{t+\zeta} \|y(s_1)\|^2 ds_1 d\zeta \le \upsilon\beta \sum_{j=1}^{m} a_j \int\limits_{-h_j}^{0} \int\limits_{0}^{H} \|y(s_1)\|^2 ds_1 d\zeta +$$

$$+ \upsilon\beta \sum_{j=1}^{m} a_j \int\limits_{-h_j}^{0} \int\limits_{H}^{t} \|y(s_1)\|^2 ds_1 d\zeta = \upsilon\beta \sum_{j=1}^{m} a_j h_j \int\limits_{0}^{H} \|y(s_1)\|^2 ds_1 +$$

$$+ \upsilon\beta \sum_{j=1}^{m} a_j h_j \int\limits_{H}^{t} \|y(s_1)\|^2 ds_1.$$

Собрав воедино оценки сверху каждого из слагаемых, входящих в интеграл от оценки сверху $l(y_t)$, видим, что в этой оценке есть 3 типа интегралов:

$$\int\limits_0^H \|y(s_1)\|^2 ds_1, \quad \int\limits_H^t \|y(s_1)\|^2 ds_1, \quad \int\limits_{-H}^H \|y(s_1)\|^2 ds_1.$$

Поскольку $-H \leq 0$, то значение первого из этих интегралов не превосходит значение третьего. Тогда оценка функционала $l(y_t)$ примет вид:

$$\int\limits_H^t l(y_s)ds \leq L\int\limits_H^t \|y(s)\|^2 ds + L_1 \int\limits_{-H}^H \|y(s)\|^2 ds,$$

где

$$L = 2\upsilon\alpha\beta, \quad L_1 = \upsilon\beta(2\alpha - 1).$$

Лемма доказана. □

Теперь сформулируем утверждение.

Утверждение 1. *Пусть система (1) экспоненциально устойчива. Если*

$$L < \lambda_{min}(W),$$

где $L = 2\upsilon\alpha\beta$, а константы υ, α, β определяются равенствами (6), то система (2) остаётся экспоненциально устойчивой.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству, представленному в [15].

Рассмотрим равенство (4). Пусть $t \geq H$. Проинтегрируем уравнение (4) на промежутке $[H, t]$:

$$\int\limits_H^t \frac{d}{ds} v_0(y_s)ds = -\int\limits_H^t y^T(s)Wy(s)ds + \int\limits_H^t l(y_s)ds. \tag{8}$$

Применим к интегралу в левой части равенства формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int\limits_H^t \frac{d}{ds} v_0(y_s)ds = v_0(y_t) - v_0(y_H).$$

Далее рассмотрим квадратичную форму, стоящую под знаком интеграла в правой части формулы (8). Известно [16], что, так как матрица W положительно определена, имеет место следующая оценка:

$$\lambda_{min}(W)\|y(t)\|^2 \leq y^T(t)Wy(t).$$

А значит

$$-y^T(t)Wy(t) \leq -\lambda_{min}(W)\|y(t)\|^2. \tag{9}$$

Применим лемму 1:

$$\begin{gathered} v_0(y_t) - v_0(y_H) \leq -\lambda_{min}(W)\int\limits_H^t ||y(s)||^2 ds + L\int\limits_H^t \|y(s)\|^2 ds + \\ +L_1\int\limits_{-H}^H \|y(s)\|^2 ds \leq -(\lambda_{min}(W) - L)\int\limits_H^t \|y(s)\|^2 ds + \Psi, \end{gathered} \tag{10}$$

где

$$\Psi = L_1\int\limits_{-H}^H \|y(s)\|^2 ds \text{ -- некоторое число.}$$

Так как $L < \lambda_{min}(W)$, то $\lambda_{min}(W) - L > 0$ и первое слагаемое в правой части неравенства (10) отрицательно.

Проверим, может ли характеристическое уравнение системы (2) иметь чисто мнимые корни. В силу непрерывности чисто мнимые корни будут находиться на границе области неустойчивости. Если мы докажем, что среди собственных чисел системы (2) нет чисто мнимых, то докажем, что нет собственных чисел и с положительной вещественной частью.

Будем доказывать от противного. Пусть $s = \pm i\beta,\ \beta \geq 0$ — собственные числа системы (2).

Сначала рассмотрим случай $\beta = 0$. Тогда $y(t) \equiv C \neq \mathbb{O}$ является решением (2). Подставим его в (10):

$$0 \leq -(\lambda_{min}(W) - L)\|C\|^2(t - H) + \Psi.$$

В пределе при $t \to +\infty$ правая часть неравенства стремится к $-\infty$, следовательно, получаем противоречие. Значит, 0 не является собственным числом системы (2).

Теперь рассмотрим случай, когда $\beta > 0$. Тогда система (2) имеет решение:

$$y(t) = e^{i\beta t}(C_1 + iC_2) = \Big(cos(\beta t) + isin(\beta t)\Big)\Big(C_1 + iC_2\Big),$$

где $C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}^n$.

Так как вещественная часть комплексного решения линейной системы тоже является её решением, рассмотрим решение

$$y(t) = C_1 cos(\beta t) - C_2 sin(\beta t),$$

где хотя бы один из векторов C_1, C_2 ненулевой.

Обозначим через $T_k = \frac{2\pi k}{\beta}$, где $k \in N$, периоды решения $y(t)$:

$$y(t + T_k) = y(t).$$

Подставим $y(t)$ в неравенство (10):

$$0 \leq -(\lambda_{min}(W) - L) \int\limits_{H}^{H+T_k} \Big\| C_1 cos(\beta s) - C_2 sin(\beta s) \Big\|^2 ds + \Psi =$$

$$= -(\lambda_{min}(W) - L) \int\limits_{H}^{H+T_k} \Big(\|C_1\|^2 cos^2(\beta s) - sin(\beta s) cos(\beta s)(C_1^T C_2 + C_2^T C_1) +$$

$$+ \|C_2\|^2 sin^2(\beta s) \Big) ds + \Psi.$$

Вычислим интегралы, стоящие в правой части неравенства:

$$\int\limits_{H}^{H+T_k} cos^2(\beta s) ds, \quad \int\limits_{H}^{H+T_k} sin(\beta s) cos(\beta s) ds, \quad \int\limits_{H}^{H+T_k} sin^2(\beta s) ds.$$

Заметим, что

$$\int\limits_{H}^{H+T_k} sin(\beta s) cos(\beta s) ds = \int\limits_{H}^{H+T_k} \frac{sin(2\beta s)}{2} = 0.$$

Далее обозначим

$$\int\limits_{H}^{H+T_1} cos^2(\beta s)ds = S_1, \quad \int\limits_{H}^{H+T_1} sin^2(\beta s)ds = S_2.$$

Тогда в силу периодичности подынтегральных функций

$$\int\limits_{H}^{H+T_k} cos^2(\beta s)ds = k\int\limits_{H}^{H+T_1} cos^2(\beta s)ds = kS_1, \quad \int\limits_{H}^{H+T_k} sin^2(\beta s)ds = kS_2.$$

Выполнив предельный переход, получим, что значения $kS_1,\ kS_2 \to +\infty$ при $k \to +\infty$. Следовательно, правая часть неравенства (10) стремится к $-\infty$, а значит, снова возникает противоречие и числа вида $s = \pm i\beta,\ \beta > 0$, не являются нулями характеристического полинома, построенного по (2).

Мы доказали, что нули характеристического полинома системы (2) не могут оказаться на мнимой оси, пока $L < \lambda_{min}(W)$. Значит, их вещественные части отрицательны. Следовательно, система (2) экспоненциально устойчива.

Утверждение доказано. $\square$

2.3 II способ

В этом разделе получены условия устойчивости системы (2) вторым способом. Результат сформулирован в виде утверждения 2.

Произведём оценку сверху функционала $l(y_t)$ другим способом. В этот раз, помимо слагаемых I и III, преобразуем слагаемые II и IV. Чтобы и к ним можно было применить формулу Ньютона – Лейбница, прибавим к $l(y_t)$ и вычтем из него слагаемые вида

$$2\sum_{j=0}^{m} y^T(t-h_j)\Delta_j^T U(0)y(t),$$

$$2\sum_{j=0}^{m} y^T(t-h_j)\Delta_j^T \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{t-h_k}^{t} U(t-\xi-h_k)A_k y(\xi)d\xi.$$

Представим $l(y_t)$ как сумму четырёх новых слагаемых:

$$l(y_t) = 2\sum_{j=0}^{m}\Big(y(t-h_j-\eta_j)-y(t-h_j)\Big)^T(A_j+\Delta_j)^T U(0)y(t)+$$

$$+2\sum_{j=0}^{m}\Big(y(t-h_j-\eta_j)-y(t-h_j)\Big)^T(A_j+\Delta_j)^T\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{t-h_k}^{t}U(t-\xi-h_k)A_k y(\xi)d\xi+2\sum_{j=0}^{m}y^T(t-h_j)\Delta_j^T U(0)y(t)+$$

$$+2\sum_{j=0}^{m}y^T(t-h_j)\Delta_j^T\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{t-h_k}^{t}U(t-\xi-h_k)A_k y(\xi)d\xi=\widetilde{I}+\widetilde{II}+\widetilde{III}+\widetilde{IV}.$$

Применим формулу Ньютона – Лейбница к слагаемым $\widetilde{I}$ и $\widetilde{II}$, основываясь на аналогичных преобразованиях слагаемых I и III из п. 2.2:

$$\widetilde{I}=2\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}\int\limits_{-h_j-h_k-\eta_k}^{-h_j-h_k-\eta_j-\eta_k}y^T(t+s)(A_k^T+\Delta_k^T)ds(A_j+\Delta_j)^T U(0)y(t).$$

$$\widetilde{II}=2\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}\int\limits_{-h_j-h_k-\eta_k}^{-h_j-h_k-\eta_j-\eta_k}y^T(t+s)(A_k^T+\Delta_k^T)ds(A_j+\Delta_j)^T\times$$

$$\times\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{t-h_i}^{t}U(t-\xi-h_i)A_i y(\xi)d\xi.$$

Сохранив ранее введённые обозначения констант из формул (6), проведём оценки сверху норм слагаемых $\widetilde{I},\ \widetilde{II},\ \widetilde{III},\ \widetilde{IV}$ по аналогии с первым способом, учитывая, что $t\geq H$:

$$|\widetilde{I}|\leq\upsilon\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}\rho_k\rho_j\left|\int\limits_{-h_j-h_k-\eta_k}^{-h_j-h_k-\eta_j-\eta_k}\|y(t+s)\|^2ds\right|+\upsilon\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}|\eta_j|\rho_k\rho_j\|y(t)\|^2.$$

$$|\widetilde{II}|\leq\upsilon\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}\sum_{i=1}^{m}a_i h_i\rho_k\rho_j\left|\int\limits_{-h_j-h_k-\eta_k}^{-h_j-h_k-\eta_j-\eta_k}\|y(t+s)\|^2ds\right|+$$

$$+\upsilon\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}\sum_{i=1}^{m}a_i|\eta_j|\rho_k\rho_j\int\limits_{t-h_i}^{t}\|y(\xi)\|^2d\xi.$$

$$|\widetilde{III}| \le \upsilon \sum_{j=0}^{m} \delta_j \|y(t-h_j)\|^2 + \upsilon M \|y(t)\|^2.$$

$$|\widetilde{IV}| \le \upsilon \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=1}^{m} \delta_j a_i h_i \|y(t-h_j)\|^2 + \upsilon M \sum_{i=1}^{m} a_i \int\limits_{t-h_i}^{t} \|y(\xi)\|^2 d\xi.$$

Полученная оценка сверху функционала $l(y_t)$ имеет вид:

$$l(y_t) \le \upsilon \left(M + \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{m} \rho_j |\eta_j| \rho_k \right) \|y(t)\|^2 +$$
$$+ \upsilon \alpha \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{m} \rho_k \rho_j \left| \int\limits_{-h_j-h_k-\eta_k}^{-h_j-h_k-\eta_j-\eta_k} \|y(t+s)\|^2 ds \right| +$$
$$+ \upsilon \sum_{i=1}^{m} a_i \left(M + \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{m} \rho_j |\eta_j| \rho_k \right) \int\limits_{t-h_i}^{t} \|y(\xi)\|^2 d\xi + \upsilon \alpha \sum_{j=0}^{m} \delta_j \|y(t-h_j)\|^2. \tag{11}$$

Ещё раз запишем обозначения констант:

$$\upsilon = \max_{\theta \in [0,h]} \|U(\theta)\|;\ a_j = \|A_j\|,\ \delta_j = \|\Delta_j\|,\ j = \overline{0,m};\ M = \sum_{j=0}^{m} \delta_j;$$
$$\rho_k = \|A_k + \Delta_k\|,\ k = \overline{0,m};\ \alpha = 1 + \sum_{j=1}^{m} a_j h_j;\ \beta = M + \sum_{j=0}^{m} a_j |\eta_j| \sum_{k=0}^{m} \rho_k;$$
$$\gamma = M + \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{m} \rho_j |\eta_j| \rho_k. \tag{6}$$

Теперь, как и в предыдущем подразделе, перейдём к интегральной оценке $l(y_t)$ и сформулируем лемму.

Лемма 2. *При* $t \ge H$ *справедлива оценка:*

$$\int\limits_{H}^{t} l(y_s) ds \le \widetilde{L} \int\limits_{H}^{t} \|y(s)\|^2 ds + \widetilde{L_1} \int\limits_{-H}^{H} \|y(s)\|^2 ds,$$

где

$$\widetilde{L} = 2\upsilon\alpha\gamma, \quad \widetilde{L_1} = \upsilon\gamma(2\alpha - 1).$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству леммы 1. Проинтегрируем неравенство (11) на промежутке $[H, t]$. Заметим, что первые три типа слагаемых в этом подразделе по структуре остались теми же, что и в предыдущем, различия только в константах. Слагаемое четвёртого типа несколько отличается от того, что было в п. 2.2:

$$\upsilon\alpha \sum_{j=0}^{m} \delta_j \int\limits_{H}^{t} \|y(s-h_j)\|^2 ds = \upsilon\alpha \sum_{j=0}^{m} \delta_j \int\limits_{H-h_j}^{t-h_j} \|y(s_1)\|^2 ds_1.$$

Нижний предел полученного интеграла можно оценить $-H$, следовательно $-H \le s_1 \le t$.

Воспользовавшись уже полученными результатами и рассуждениями из предыдущего раздела, запишем:

$$\int\limits_{H}^{t} l(y_s) ds \le \upsilon\Big(M + \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m} \rho_j |\eta_j| \rho_k\Big) \int\limits_{H}^{t} \|y(s)\|^2 ds +$$
$$+\upsilon\alpha \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m} \rho_k \rho_j |\eta_j| \int\limits_{-H}^{H} \|y(s)\|^2 ds + \upsilon\alpha \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m} \rho_k \rho_j |\eta_j| \int\limits_{H}^{t} \|y(s)\|^2 ds +$$
$$+\upsilon \sum_{i=1}^{m} a_i h_i \Big(M + \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m} \rho_j |\eta_j| \rho_k\Big) \int\limits_{-H}^{H} \|y(s)\|^2 ds +$$
$$+\upsilon \sum_{i=1}^{m} a_i h_i \Big(M + \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m} \rho_j |\eta_j| \rho_k\Big) \int\limits_{H}^{t} \|y(s)\|^2 ds +$$
$$+\upsilon\alpha M \int\limits_{-H}^{H} \|y(s)\|^2 ds + \upsilon\alpha M \int\limits_{H}^{t} \|y(s)\|^2 ds.$$

После приведения подобных слагаемых интегральная оценка функционала $l(y_t)$ примет вид:

$$\int\limits_{H}^{t} l(y_s) ds \le \widetilde{L} \int\limits_{H}^{t} \|y(s)\|^2 ds + \widetilde{L_1} \int\limits_{-H}^{H} \|y(s)\|^2 ds,$$

где

$$\widetilde{L} = 2\upsilon\alpha\gamma, \quad \widetilde{L_1} = \upsilon\gamma(2\alpha - 1), \quad \gamma = M + \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}\rho_j|\eta_j|\rho_k.$$

Лемма доказана. □

Утверждение 2. *Пусть система (1) экспоненциально устойчива. Если*

$$\widetilde{L} < \lambda_{min}(W),$$

где $\widetilde{L} = 2\upsilon\alpha\gamma$, *а константы* υ, α, γ *определяются равенствами (6), то система (2) остаётся экспоненциально устойчивой.*

Доказательство. Доказательство данного утверждения аналогично доказательству утверждения 1 из п. 2.2. □

2.4 Обобщение результата. Теорема

Следующая теорема объединяет утверждения 1 и 2 и является основным результатом работы.

Теорема 1. *Пусть система (1) экспоненциально устойчива. Если*

$$2\upsilon\alpha R < \lambda_{min}(W), \tag{12}$$

где $R = \min\{\beta, \gamma\}$, *а константы* $\upsilon, \alpha, \beta, \gamma$ *определяются равенствами (6), то система (2) остаётся экспоненциально устойчивой.*

Доказательство. В теореме объединены утверждение 1 из п. 2.2 и утверждение 2 из п. 2.3. □

Глава 3. Примеры

В заключительной главе полученные условия устойчивости системы (2) проиллюстрированы на примерах. Во всех примерах матрица W бралась равной единичной, а для вычисления значения матрицы Ляпунова $U(0)$ использовался полуаналитический метод [1].

3.1 Пример 1

Сначала рассмотрим пример системы с одним запаздыванием:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x(t-1),$$

$$\dot{y}(t) = \begin{pmatrix} \epsilon & 1 \\ -1 & -2+\epsilon \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ -1 & 1+\epsilon \end{pmatrix} y(t-1-\eta_1), \quad \epsilon \in \mathbb{R}.$$

Поставим задачу получить оценку области устойчивости возмущённой системы в плоскости параметров возмущений ϵ и η_1.

Вычислим значения констант, входящих в неравенство (12), для данного случая: $\upsilon = 4.3028,\ \alpha = 2.4142,\ \lambda_{min}(W) = 1$. Тогда неравенство (12) примет вид:

$$2|\epsilon| + 1.4142|\eta_1|(3.8284 + 2|\epsilon|) < 0.048133.$$

Раскрываем модули в зависимости от знаков ϵ и η_1 и получаем 4 варианта оценки области устойчивости:

1. $\epsilon > 0,\ \eta_1 > 0, \quad 2\epsilon + 5.4141\eta_1 + 2.8284\eta_1\epsilon < 0.048133;$
2. $\epsilon > 0,\ \eta_1 < 0, \quad 2\epsilon - 5.4141\eta_1 - 2.8284\eta_1\epsilon < 0.048133;$
3. $\epsilon < 0,\ \eta_1 > 0, \quad -2\epsilon + 5.4141\eta_1 - 2.8284\eta_1\epsilon < 0.048133;$
4. $\epsilon < 0,\ \eta_1 < 0, \quad -2\epsilon - 5.4141\eta_1 + 2.8284\eta_1\epsilon < 0.048133.$

После объединения этих четырёх областей итоговая оценка области устойчивости возмущённой системы принимает вид (см. рис. 1):

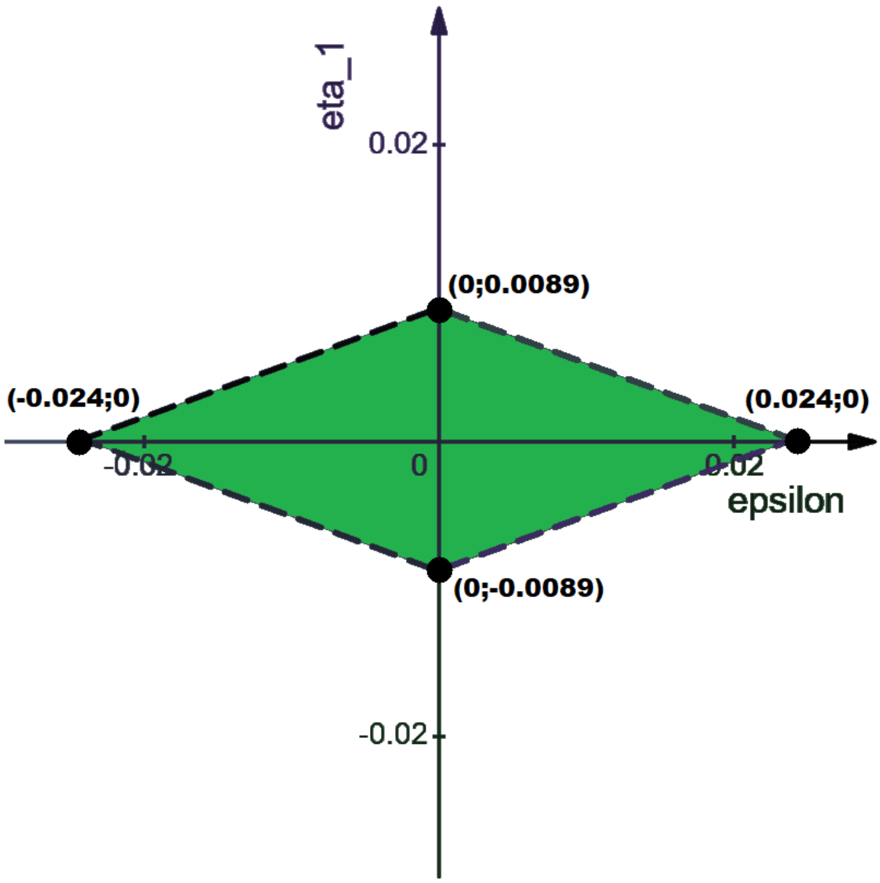

Рис. 1

3.2 Пример 2

Теперь рассмотрим систему, для которой возмущённая система является системой с двумя запаздываниями [17]:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.4 & 0 \end{pmatrix} x(t-4),$$
$$\dot{y}(t) = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ -2 & 10^{-4} \end{pmatrix} y(t-\eta_2) + \begin{pmatrix} 10^{-4} & 0 \\ -0.4 & 10^{-4} \end{pmatrix} y(t-4-\eta_1).$$

Для этого примера будем искать оценку области устойчивости возмущённой системы в плоскости параметров $|\eta_1|$ и $|\eta_2|$.

Вычислим значения констант, входящих в неравенство (12): $\upsilon = 77.5942$, $\alpha = 2.6$, $\lambda_{min}(W) = 1$. Теперь запишем само неравенство (12) для рассматриваемого примера:

$$0.4|\eta_1| + 2|\eta_2| < 0.00094924.$$

Полученная оценка области устойчивости возмущённого уравнения в плоскости параметров $|\eta_1|,\ |\eta_2|$ изображена на рис. 2:

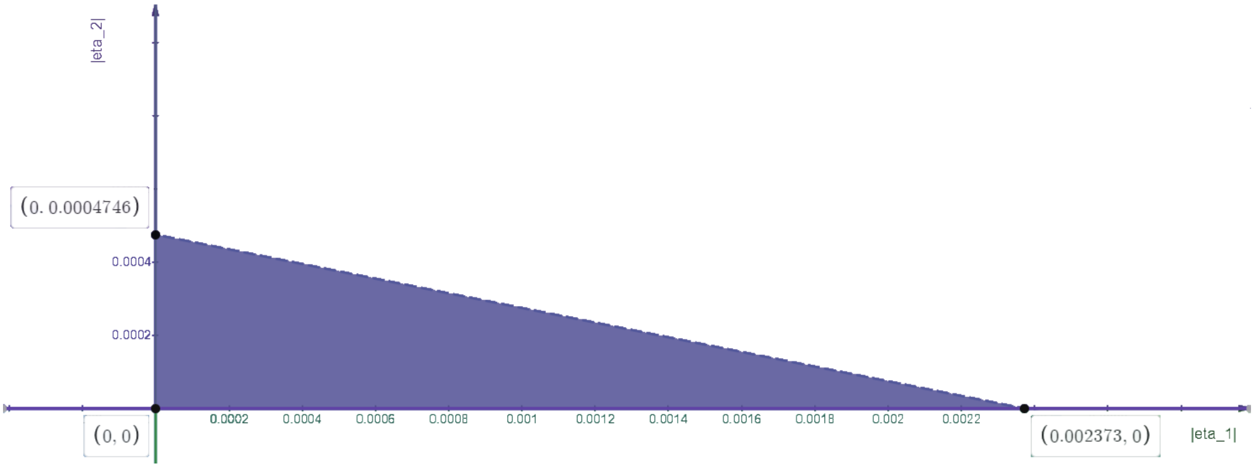

Рис. 2

3.3 Пример 3. Итерационный метод

Примеры 1,2 показывают, что теорема 1 может быть использована для оценки областей устойчивости системы (2) в пространстве возмущений. В этом разделе предлагается итерационный метод применения теоремы 1.

На примере скалярного уравнения с одним запаздыванием показано, что итерационное применение теоремы 1 позволяет достичь точных границ областей устойчивостей в пространстве возмущений.

Итак, рассмотрим скалярное уравнение (1) с одним запаздыванием, а в уравнении (2) все возмущения положим равными $\epsilon,\ \epsilon \in \mathbb{R}$:

$$\dot{x}(t) = a_0 x(t) + a_1 x(t-1), \tag{$1'$}$$

$$\dot{y}(t) = (a_0 + \epsilon)y(t) + (a_1 + \epsilon)y(t - 1 - \epsilon). \tag{$2'$}$$

Тогда неравенство (12) примет вид:

$$2|\epsilon| + min\Big\{|a_1|, |a_1 + \epsilon|\Big\}|\epsilon|\Big(|a_0 + \epsilon| + |a_1 + \epsilon|\Big) < \frac{W}{2\upsilon\alpha}. \tag{$12'$}$$

Сначала рассмотрим этапы итерационного метода для положительного параметра ϵ, полагая, что в начале алгоритма счётчик итераций $k = 1$:

1. Ищем $\epsilon_k, \; k = 1, 2, \ldots,$ такое, что при всех $\epsilon \in [0, \epsilon_k]$ выполняется неравенство $(11')$.

2. На шаге $k+1$ рассматриваем уравнение $(2')$ при $\epsilon = \epsilon_k$ в качестве номинального уравнения $(1')$ и ищем ϵ_{k+1} такое, что неравенство $(12')$ выполняется при $\epsilon \in [0, \epsilon_{k+1}]$. Возвращаемся к шагу 1.

Для $\epsilon < 0$ итерационный метод может быть применён аналогично.

Примеры показывают, что таким образом в пределе достигается точная граница области устойчивости в пространстве параметров (a_0, a_1), и мы получаем критическое значение $\bar{\epsilon}$, при котором нарушается экспоненциальная устойчивость уравнения $(2')$: $\sum\limits_{k=1}^{s} \epsilon_k \underset{s \to +\infty}{\longrightarrow} \bar{\epsilon}$, где s — количество итераций. Этот факт строго доказан в работе [5] при наличии возмущений только в запаздываниях.

Результаты реализации итерационного метода в среде MATLAB показаны на рис. 3, рис. 4, рис. 5.

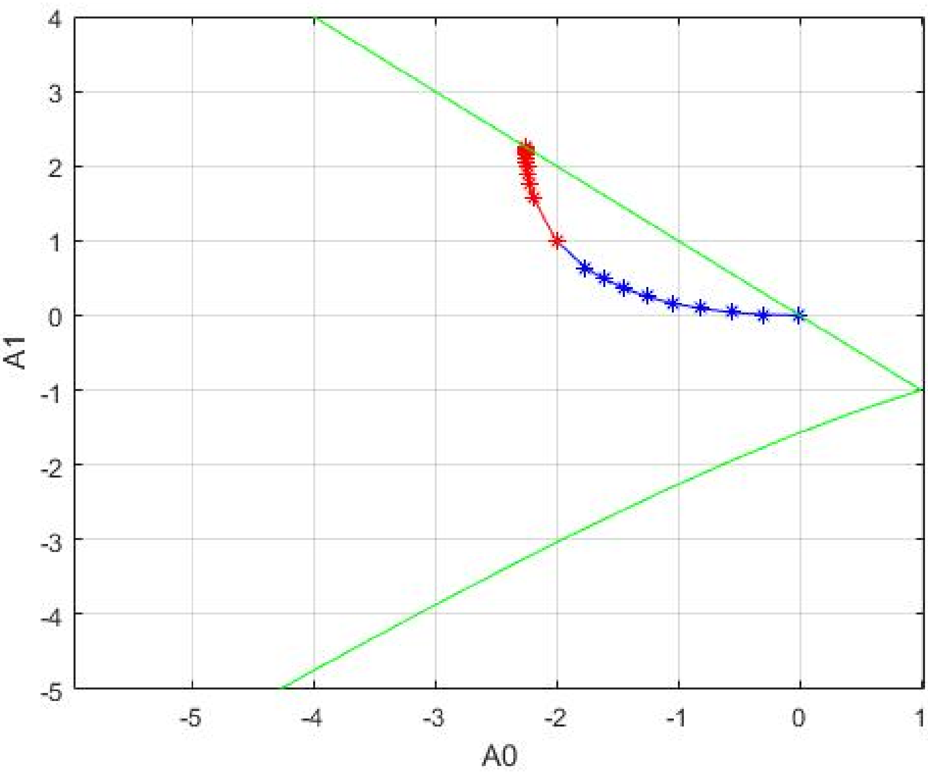

Рис. 3. Итерационный процесс из т. (-2,1)

Критические значения $\bar{\epsilon}$: $\bar{\epsilon}^{+} = 0.4999$, $\bar{\epsilon}^{-} = -0.9990$

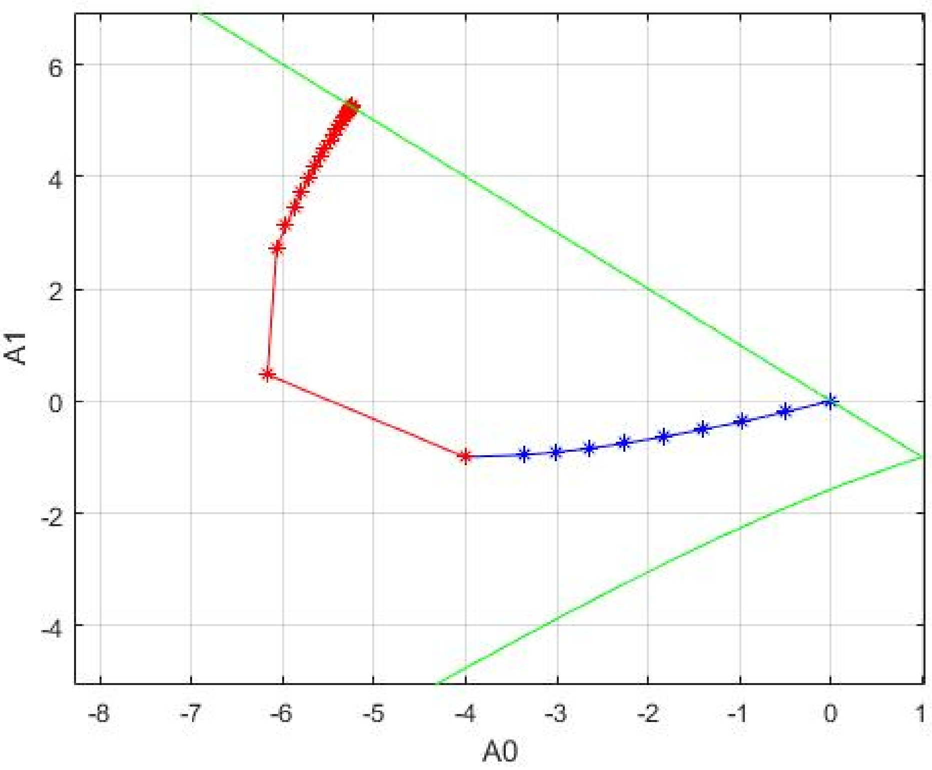

Рис. 4. Итерационный процесс из т. (-4,-1)

Критические значения $\bar{\epsilon}$: $\bar{\epsilon}^{+} = 2.4999$, $\bar{\epsilon}^{-} = -0.9990$

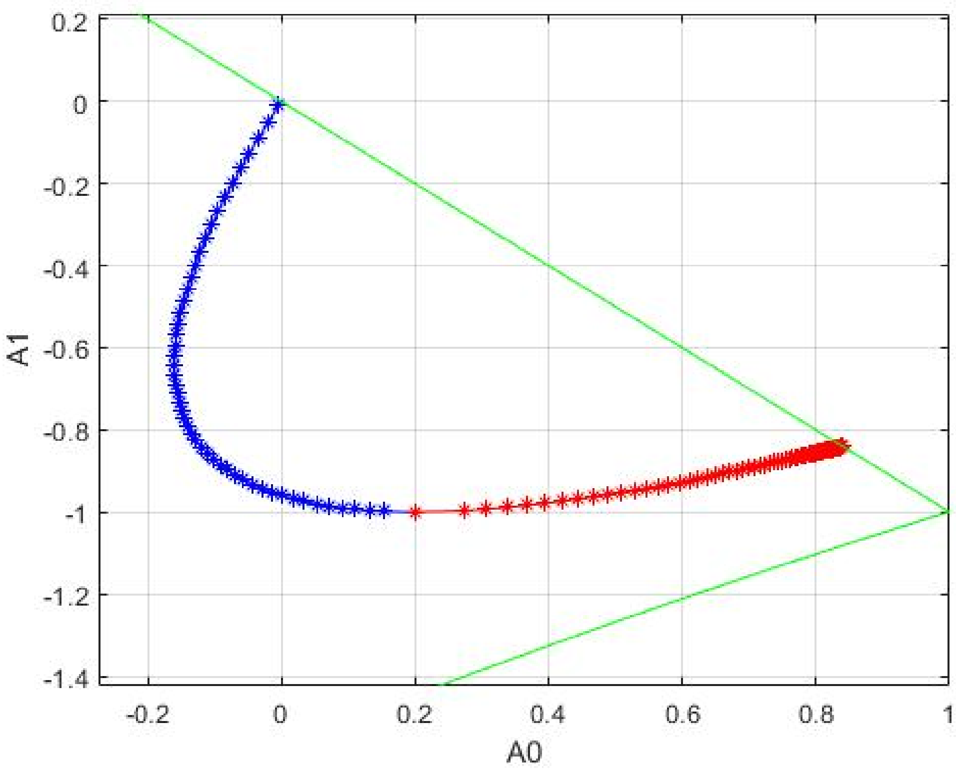

Рис. 5. Итерационный процесс из т. (0.2,-1)

Критические значения $\bar{\epsilon}$: $\bar{\epsilon}^{+} = 0.3999$, $\bar{\epsilon}^{-} = -0.9989$

На всех графиках зелёным цветом обозначены границы области устойчивости номинального уравнения $(1')$ при $h = 1$ [13]. Красные маркеры соответствуют точкам в плоскости параметров, полученным на k-м шаге итерационного метода для положительных ϵ, синие маркеры — шагам итерационного метода для отрицательных ϵ. При этом для случая $\epsilon > 0$ на k-м шаге на рисунках изображены точки $\Big((a_0 + \sum\limits_{i=1}^{k} \epsilon_i)(1 + \sum\limits_{i=1}^{k} \epsilon_i), (a_1 + \sum\limits_{i=1}^{k} \epsilon_i)(1 + + \sum\limits_{i=1}^{k} \epsilon_i)\Big)$. Для случая $\epsilon < 0$ — аналогичные точки.

На выходе программы получены критические значения $\bar{\epsilon}^+$ и $\bar{\epsilon}^-$ для положительных и отрицательных ϵ соответственно.

Выводы

В данной работе рассмотрены линейная стационарная система дифференциальных уравнений (1) с конечным числом запаздываний и система (2) с возмущениями одновременно в запаздываниях и коэффициентах. В предположении об экспоненциальной устойчивости системы (1) получены ограничения на возмущения системы (2), при которых она сохраняет экспоненциальную устойчивость.

Условия робастной устойчивости возмущённой системы получены на основе специальной интегральной оценки от производной функционала v_0 вдоль решений системы (2), где v_0 — функционал, производная которого вдоль решений системы (1) является отрицательно-определённой квадратичной формой. Рассмотрены два способа оценки производной функционала v_0 и сформулирована теорема 1, которая является основным результатом работы.

В практической части теорема 1 применена к нахождению оценки области устойчивости возмущённой системы в плоскости параметров возмущений для примеров системы с одним и с двумя запаздываниями. Также в среде MATLAB программно реализован итерационный метод применения теоремы (1) для случая скалярного уравнения с одним запаздыванием и равных по величине возмущений в запаздывании. В результате применения итерационного метода выявлено стремление к точным границам области устойчивости возмущённого уравнения в плоскости параметров — коэффициентов уравнения. На выходе программы получены критические значения устойчивости для параметра возмущений.

Итерационный метод может быть обобщён на случай произвольной системы вида (1). Полученные в работе условия робастной устойчивости могут применяться к анализу областей устойчивости систем вида (1) в пространстве параметров и к нахождению критических значений параметров.

Заключение

В работе получены новые условия робастной устойчивости для линейных стационарных систем, содержащих возмущения одновременно в запаздываниях и в матрицах. Применение этих условий к построению оценок областей устойчивости системы (2) в плоскости возмущений проиллюстрировано на примерах. На примере скалярного уравнения с одним запаздыванием реализован итерационный метод применения полученных условий. Кроме того, полученные условия устойчивости могут быть распространены на класс систем с распределённым запаздыванием и несколькими сосредоточенными запаздываниями, а также на случай нестационарных возмущений.

Список литературы

[1] Kharitonov V. L. Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices. Basel: Birkhäuser, 2013. 311 p.

[2] Kharitonov V. L., Zhabko A. P. Lyapunov–Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems // Automatica. 2003. No 39. P. 15–20.

[3] Kharitonov V. L., Niculescu S.-I. On the stability of linear systems with uncertain delay // IEEE Transactions on Automatic Control. 2003. Vol. 48. No 1. P. 127–132.

[4] Egorov A. V., Mondié S. The delay Lyapunov matrix in robust stability analysis of time-delay systems // IFAC-PapersOnLine. 2015. Vol. 48. No 12. P. 245–250.

[5] Alexandrova I. V., Zhabko A. P. A new LKF approach to stability analysis of linear systems with uncertain delays // Automatica. 2018. No 91. P. 173–178.

[6] Medvedeva I. V., Zhabko A. P. A novel approach to robust stability analysis of linear time-delay systems // IFAC-PapersOnLine. 2015. Vol. 48. No 12. P. 233–238.

[7] Репин Ю. М. Квадратичные функционалы Ляпунова для систем с запаздыванием // Прикладная математика и механика. 1965. Вып. 3. С. 564–566.

[8] Infante E. F., Castelan W. B. A Liapunov Functional For a Matrix Difference–Differential Equation // Journal of differential equations. 1978. No 29. P. 439–451.

[9] Huang W. Generalization of Liapunov's Theorem in a Linear Delay System // Journal of mathematical analysis and applications. 1989. No 142. P. 83–94.

[10] Kharitonov V. L., Hinrichsen D. Exponential estimates for time delay systems // Systems & Control Letters. 2004. No 53. P. 395–405.

[11] Ochoa G., Kharitonov V. L., Mondié S. Critical frequencies and parameters for linear delay systems: A Lyapunov matrix approach // Systems & Control Letters. 2013. No 62. P. 781–790.

[12] Gomez M. A., Egorov A. V., Mondié S. Lyapunov matrix based necessary and sufficient stability condition by finite number of mathematical operations for retarded type systems // Automatica. 2019. Vol. 108. No 108475.

[13] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.

[14] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1969. Т. II. 800 с.

[15] Alexandrova I. V. New robustness bounds for neutral type delay systems via functionals with prescribed derivative // Applied Mathematics Letters. 2018. No 76. P. 34–39.

[16] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.

[17] Fridman E., Niculescu S. On robust stability via complete Lyapunov Krasovskii functional // IFAC Proceedings Volumes. 2006. Vol. 39. No 10. P. 48–53.

[18] Mondié S. Assessing the exact stability region of the single-delay scalar equation via its Lyapunov function // IMA Journal of Mathematical Control and Information. 2012. P. 459–470.