  Санкт-Петербургский Государственный Университет

**Факультет Прикладной Математики – Процессов Управления**

**Кафедра теории систем управления электрофизической аппаратурой**

**Абрамян Эдуард Робертович**

**Выпускная квалификационная работа**

**(Магистерская диссертация)**

**Численное интегрирование уравнений динамики степенными рядами**

Направление 03.04.01 «Прикладные математика и физика»

Основная образовательная программа ВМ.5521.2019

«Математические и информационные технологии»

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук профессор, кафедра механики управляемого движения,

Бабаджанянц Л.К.

Рецензент:

“ООО Институт компьютерных технологий”,

менеджер проекта,

кандидат физ.-мат. наук,  
старший преподаватель,

Брэгман К.М.

Санкт-Петербург

2021

**Оглавление**

1. **Введение** 3
   1. Постановка задачи. Обзор работы и использованная литература 3
   2. Предисловие 7
   3. Проблема эквивалентности Пенлеве в Динамике 11
   4. Обозначения для трансцендентов Пенлеве 19
2. **Сведение дифференциальных уравнений к полиномиальной форме** 23
   1. Сведение дифференциальных уравнений к полиномиальной форме 23

введением дополнительных переменных 23

1.2 Примеры сведения 27

**2. Уравнения динамики** 32

2.1 Шесть уравнений Пенлеве 32

2.2 Сведение уравнений Пенлеве к полиномиальной форме 32

**3. Вычисление коэффициентов Тейлора для полиномиальных ОДУ** 36

3.1 Схемы для вычисления коэффициентов Тейлора 36

3.2 Применение к уравнениям динамики 37

**4. Априорная оценка погрешности, выбор шага и степени Тейлоровского 40**

**приближения 40**

4.1 Теорема об оценке 40

4.2 Алгоритм выбора шага и степени Тейлоровского приближения 41

4.3 Применение к уравнениям динамики 42

**5. Программа TSMR (Taylor Series Method Realcase)** 48

**6. Численные эксперименты** 52

6.1 Простейшая квадратичная задача 52

6.2 Численное интегрирование уравнений динамики 53

**Заключение** 54

**Литература** 55

**АННОТАЦИЯ**

*Выпускная квалификационная работа (магистерская диссертация) студента 2 курса магистратуры (кафедра теории систем управления электрофизической аппаратурой ф-та ПМ-ПУ СПбГУ) Абрамяна Эдуарда Робертовича «Численное интегрирование уравнений динамики степенными рядами».* Рассматривается интегрирование дифференциальных уравнений второго порядка в вещественной области. Обсуждаются некоторые проблемы уравнений Пенлеве. Рассматривается общая задача Коши для полиномиальных систем.

**Ключевые слова**: Уравнения Пенлеве, уравнения динамики, общая задача Коши, схемы, численные эксперименты.

**Постановка задачи. Обзор работы**

**и использованная литература**

**Постановка задачи**

Цель работы – провести численные эксперименты с уравнениями Пенлеве в полиномиальной форме в вещественной области и показать преимущество примененного метода решения полиномиальной задачи Коши в окрестности особых точек.

Для достижения выбранной цели нами решается ряд задач:

1. каждое из шести уравнений Пенлеве свести к полиномиальной системе обыкновенных дифференциальных уравнений;
2. построить оболочки и схемы для каждой из этих систем, позволяющие применить рекуррентные соотношения для коэффициентов Тейлора;
3. для каждой из этих систем при помощи теоремы об оценке получить априорные гарантированные оценки абсолютной и относительной погрешности решения задачи Коши;
4. при помощи программы TSMR на основе полученных схем и формул для коэффициентов Тейлора провести численные эксперименты решения задачи Коши для простейшего квадратичного уравнения и системы полиномиальных уравнений для третьего уравнения Пенлеве. Мы работаем в ВКР только с третьим уравнением, так как уровень его сложности такой же как у четвертого, пятого и шестого уравнений.

**Обзор работы и использованная литература**

Работа состоит из 6 глав, раздела «Введение и Заключение», а также списка литературы из 74 наименований и двух таблиц. Основные теоретические результаты настоящей работы содержатся во второй и шестой главах.

**Первая глава** содержит необходимый материал о сведении шести уравнений Пенлеве, вычисление коэффициентов Тейлора и их решения, априорную оценку погрешности и основанный на ней выбор шага, а также степени приближения метода Тейлора.

В первой главе использовалась литература: [61, 67-70].

**Вторая глава** включает в себя два параграфа и посвящена применению специального метода сведения уравнений Пенлеве к полиномиальной форме.

Во второй главе использовалась литература: [67-68].

**Третья глава**, состоящая из двух параграфов, посвящена вычислению коэффициентов Тейлора для полиномиальных обыкновенных дифференциальных уравнений. В ней рассматриваются основные формулы, способ построения схем и оболочек.

**В четвертой главе** три параграфа. При помощи программы метода рядов Тейлора (TSMR), на основе схем и формул для коэффициентов Тейлора проводятся численные эксперименты решения задачи Коши для полиномиальных систем в окрестности положения равновесия.

В третьей главе использовалась литература: [68, 69].

**В пятой главе** описана программа и ее структура, реализованная авторами статьи [70] на языке Fortran 95, которая численно интегрирует системы полиномиальных дифференциальных уравнений с вещественными коэффициентами. Программа авторов сравнивается с тремя известными программами, которые реализуют соответственно явные методы Дормана–Принса, Грегга–Булирша–Штёра. Полученные эксперименты показали преимущество примененного метода рядов Тейлора решения полиномиальной задачи Коши в окрестности особых точек (по сравнению с упомянутыми).

**В шестой главе** приводятся численные эксперименты для квадратичной задачи.

**Краткое описание основной использованной литературы**

[33] — это статья американского профессора математики Питера Кларксона. Мы использовали этот источник для написания, а также для ознакомления с методом численного решения уравнения Пенлеве;

[67] — это статья профессора факультета ПМ-ПУ Л.К. Бабаджанянца, посвященная методу дополнительных переменных, из этого источника в ВКР использовался метод сведения дифференциальных уравнений к полиномиальной форме введением дополнительных переменных;

[68] — это статья профессора факультета ПМ-ПУ Л.К. Бабаджанянца, посвященная методу рядов Тейлора, которая продолжает статью про метод дополнительных переменных, из этого источника в ВКР использовалась теорема об оценке погрешности для полиномиальной задачи Коши, понятие схемы, задача многих тел;

[69] — это статья профессора факультета ПМ-ПУ Л.К. Бабаджанянца с соавтором, посвященная программе для реализации метода рядов Тейлора для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. С помощью программы TSMR проводились численные эксперименты;

[70] — это статья профессора факультета ПМ-ПУ Л.К. Бабаджанянца и кандидата физико-математических наук К. М. Брэгмана, посвященная алгоритму метода дополнительных переменных;

[72] — это ссылка на ресурс Национального института стандартов и технологий.

**Введение**

*При написании настоящего раздела мы использовали вводную статью из раздела 32 источника NIST (National Institute) [72] и статью Питера Кларксона [33].*

*Актуальность темы исследования*. Согласно Ивасаки и др. [46], уравнения Пенлеве являются «важнейшими нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями», и, по мнению многих специалистов, «в течении XXI века функции Пенлеве станут новыми членами сообщества специальных функций», войдя в ядро современной теории специальных функций. Это предсказание подтвердилось на практике: уравнения Пенлеве стали разделом в цифровой библиотеке математических функций NIST [72]. Функции Пенлеве значительно расширили роль классических специальных функций, таких как Эйри, Бесселя, Эрмита, Лежандра и т.д., которые были введены в рассмотрение в 19 веке. Все чаще обнаруживалось, что решения многих важных научных проблем (теория рассеяния нейтронов, специальные решения уравнений в частных производных, нелинейные волновые уравнения, волоконная оптика, транспортные задачи, комбинаторика, случайные матрицы, квантовая гравитация и теория чисел), так или иначе, оказывались связанными с шестью уравнениями Пенлеве, представленными им в 1898 году [58].

В 2019 году автор статьи NIST [72] по уравнениям Пенлеве Питер Кларксон [33] отметил, что одной из важнейших проблем он считает разработку современных высокоточных численных методов решения и проведение соответствующих численных экспериментов – как в комплексной, так и в вещественной области и, особенно, в окрестности особых точек (полюсов). Одним из наиболее высокоточных методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений как в комплексной, так и в вещественной области, являются методы рядов Тейлора высоких порядков (в работе Л.К. Бабаджанянца и Большакова в программе TSMR и TSMC предусмотрено использование порядков до шестидесятого, а в реальных примерах оптимальными оказались 36-37 порядки, в том время как в большинстве работ по методам Тейлора использовались порядки ≈ 8-10).

Таким образом, поставленная выше проблема в нашей ВКР является актуальной и представляет значительный прикладной интерес.

*Объектом исследования* в данной работе являются уравнения Пенлеве.

*Предметом исследования* выступают численные эксперименты с уравнениями Пенлеве в полино­миальной форме в вещественной области, и в частности, в окрестности особых точек.

**Предисловие**

Уравнения Пенлеве, решения которых называются трансцендентами Пенлеве, имеют вид нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, заданные формулами

 Эти шесть уравнений привлекли много внимания у математиков и физиков более чем за последние 50 лет, хотя были открыты в конце 19 века Пенлеве, Гамбье и другими, в исследованиях которых обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка вида

 (1.7)

где рационально по и и локально аналитично по z, и обладает тем свойством, что их решения не имеют подвижных точек ветвления. Они показали, что существует пятьдесят канонических уравнений вида (1.7) с этим свойством, теперь известным как свойство Пенлеве, с точностью до преобразования Мебиуса (билинейное рациональное преобразование)

 (1.8)

где - локально аналитические функции. Далее Пенлеве, Гамбье и другие показали, что из этих пятидесяти уравнений, сорок четыре могут быть сведены к линейным уравнениям, решаемым в терминах эллиптических функций, или сводится к одному из шести новых нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которые определяют новые трансцендентные функции, см. Инс [45, глава 14]. Вслед за Сакаи [63] и Охьяма и др. [54] (см. Также [55]),  (1.3) можно разделить на четыре случая:



В дальнейшем мы будем называть уравнение (1.9), следуя Кларксону . Уравнение (1.10) также известно как вырожденная  см. [47, 48]. Эти разные типы были отмечены Пенлеве [58]. Аналогичным образом  (1.5) можно разделить на три случая:







где  произвольные постоянные

Ниже в настоящем Введении мы рассмотрим примеры 1.1-2.1-2.6.

**Пример 1.1** Гамильтониан связанный с (1.2), равен



Еслии исключая p в (1.20), то q удовлетворяет  (см. 1.2), а исключение q дает уравнение



которое известно как , поскольку эквивалентно уравнению 14 главы в [45]. Следовательно, если q удовлетворяет , тогда  удовлетворяет (1.21). И наоборот, если p удовлетворяет (1.21), тогда  удовлетворяет  (1.2). Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между решениями  (1.2) и  (1.21). Далее функция  определенная формулой (1.19), где q и p удовлетворяет системе (1.20) - тогда  удовлетворяет (1.14). И наоборот, если  решение, то



при , является решением (1.2) и (1.21). См. [45]

**Проблема эквивалентности Пенлеве в Динамике**

Для линейного обыкновенного дифференциального уравнения, если его можно решить через известные функции, то уравнение считают решенным. Символическое программное обеспечение, такое как MAPLE, может легко найти решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, как показано в следующем примере.

**Пример 2.1.** Рассмотрим линейные уравнения

****

которые соответственно имеют решения



с произвольными константами и , с функциями Бесселя Общее свойство линейных обыкновенных дифференциальных уравнений состоит в том, что все особенности их решения фиксированы. Например, решения уравнения второго порядка

****

могут иметь особенности только там, где есть коэффициенты, а именно в особенностях 

**Определение 1.** Неподвижной особой точкой решения обыкновенного дифференциального уравнения является особая точка, положение которой не меняется в зависимости от выбранного решения, но зависит только по уравнению. Однако это не так просто для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которые достаточно различны, поскольку в общем случае их решения могут иметь как подвижные, так и неподвижные особенности.

**Определение 2.** Подвижная особая точка решения обыкновенного дифференциального уравнения, такая особая точка решения, расположение которой зависит от константы интегрирования. В настоящее время нет доступного программного обеспечения для идентификации нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения, не говоря уже о поиске решения, за исключением нескольких очень простых примеров. Довольно легко определить, имеет ли данное (нелинейное) обыкновенное дифференциальное уравнение Свойство Пенлеве, например, с использованием теста Пенлеве [2, 3]; см. также [1, 36, 49, 50]. Пенлеве, Гамбье и др. классифицировали все обыкновенные дифференциальные уравнения вида (1.7) с свойством Пенлеве с точностью до преобразования Мебиуса (1.8). Следовательно, данное уравнение форма (1.7) со свойством Пенлеве, которого нет в списке из пятидесяти уравнений, приведенном Инсом [45, глава 14], тогда как определить преобразование Мебиуса? Если уравнение автономно, или имеет симметрию, то у него есть первый интеграл, и его можно решить в терминах эллиптические уравнения, линейные уравнения или квадратуры. Если уравнение неавтономное и не обладает симметрией, то, вероятно, будет разрешимо в терминах трансцендента Пенлеве. Тогда возникает вопрос, какое из уравнений Пенлеве (1.1) - (1.6) является разрешимым уравнением с точки зрения? Мы заметили, что решения некоторых уравнений из списка, приведенного Инсом [45, гл. 14] решаются в терминах трансцендентов Пенлеве. Например, уравнение XX в списке, а именно

 разрешима в терминах , поскольку  даёт (1.2) с 

**Пример 2.3.** Рассмотрим уравнение

 (2.1)

Можно показать, что это уравнение обладает свойством Пенлеве, но его нет в списке пятидесяти уравнения приведены в [45, гл. 14]. Уравнение (2.1) возникает из редукции симметрии



уравнение Цицейки

 и преобразование

 (2.2)

В уравнении (2.1) даёт

 (2.3)

Которая является частным случаем (1.11) c  Преобразование (2.2) предполагается формулой асимптотического разложения (2.1) и (2.3)



где  константы. Следовательно, можно вывести проблему изомонодромии для уравнения (2.1) из проблемы уравнения (2.3)

**Пример 2.4.** Рассмотрим комплексное уравнение синус-Гордона

 (2.4)

где которая также известна как модель Польмейера – Лунда – Редже [51, 52, 61]. Это имеет отдельное решение в полярных координатах, задаваемое формулой  удовлетворяет уравнению второго порядка

 (2.5)

которая возникает в расширенных квантовых системах [30, 31, 32], в теории относительности [42] и отражении коэффициентов для ортогональных многочленов на единичной окружности [67]. Уравнение (2.5) может показать, что оно обладает свойством Пенлеве, хотя его нет в списке из 50 уравнений, приведенных в [45]. Уравнение (2.5) может быть преобразовано в  (1.5) двумя разными способами (преобразования 1,2):

**Преобразование 1.**



где  (1.5) с 

**Преобразование 2.**



где 

Известно, что (1.12) эквивалентно (1.9), см. [44, раздел 34]. Используя это, можно показать, что, если  удовлетворяет



что является  (1.9) с тогда



удовлетворяет (2.5). Следовательно решение уравнения (2.5) может быть выражено через решение (1.3), как и (1.5). Функция  также удовлетворяет дифференциально-разностным уравнениям



Решая (2.6а) относительно  и подставляя в (2.6b), получаем уравнение (2.5), исключая производные в (2.6), после замены  в (2.6b), получаем дифференциальное уравнение

                               (2.7)

которое известно как второе дискретное уравнение Пенлеве. Если n=1, то у уравнения (2.6) есть решение



где  мнимые функции Бесселя, а  произвольные постоянные. Тогда можно использовать (2.7) для определения  , для n = 2,3…. Используя это, Барашенков и Пелиновский [17] выводят явные решения для комплексного уравнения синус-Гордон (2.4). Связь между решениями (2.5) и решениями (1.9) показана в следующей теореме.

**Теорема 1.** Если  удовлетворяет (2.5), тогда  удовлетворяет



где (1.3) с параметрами 

**Доказательство.** См. Хисакадо [см. 44] и Трейси И Видом [см. 65].

**Пример 2.6.** В своем исследовании дифференциальных уравнений третьего порядка, Муган (Mugan) и Джрад (Jrad) [53] показывают, что





где  ненулевые константы и обладают свойством Пенлеве. Уравнение (2.67) в [53] при  и без ограничения общности и ; уравнение (2.10) при  уравнение (4.14) при . Леви, Секера и Винтерниц показывают, что (2.8), (2.9) и (2.10) не имеют симметрии и заявляют, что эти уравнения являются «кандидатами на новые трансценденты Пенлеве»; см. уравнения (3.3), (3.4) и (3.4). Однако, как показано в статье Кларксона ниже, уравнение (2.8) может быть решено через (1.4) и уравнения (2.9) и (2.10) через (1.21). Действительно, пусть  в уравнении (2.8) даёт нам трёхлинейное уравнение



которое имеет первый интеграл, билинейное уравнение



при константе K. Поскольку  = , тогда получаем дифференциальное уравнение второго порядка



которое является первым интегралом (2.8) и не входит в число 50 уравнений Инса. Тем не менее, можно использовать преобразование



в результате которого получаем  (1.4) с параметрами



Далее, пусть  в уравнении (2.9) даёт нам “трёхлинейное” уравнение



которое имеет первый интеграл

 при  константе. Если , то



Умножая полученное равенство это на  и интегрируя, получим

 при постоянной , которое эквивалентно (1.21) путем замены переменных, если необходимо. Благодаря связи (1.21) и (1.2), решения уравнения (2.9) могут быть выражены через решения (1.2). В частности, если  является решением (1.2), тогда



где удовлетворяет (2.9). Пусть  в уравнении (2.10) и при интегрировании получим “трёхлинейное” уравнение.

 затем делаем преобразование



Получаем

 (2.12)

Умножая это на v и интегрируя, получим 

с постоянной С, эквивалентное (1.21).

**Обозначения для трансцендентов Пенлеве**

Уникальность функций, обсуждаемых в статье [58], заключается в том, что нет специальных обозначений для трансцендентов Пенлеве. Есть несколько функций, в обозначении, которых присутствует P или  многочлены Якоби, полиномы Лежандра  , эллиптические функции Вейерштрасса . Для линейных уравнений существуют конечное число независимых решений. Например,  для уравнения Эйри



Однако, для нелинейных уравнений, таких как уравнения Пенлеве, проблема обозначений не такая простая, поскольку существует множество совершенно разных решений. Хотя для уравнений второго порядка, не существует двух «репрезентативных решений». Необходимы согласованные обозначения для трансцендентов Пенлеве. Фактически, в отличие от линейного случая, когда множество всех решений является конечным в размерном векторном пространстве множество всех решений, уравнения Пенлеве образуют трансцендентную структуру (слои, проходящие через пучок волокон, каждый слой которого описывается аффинной диаграммой Дынкина) без каких-либо глобальных координат, которые могли бы использоваться как естественные универсальные маркеры решений. Такое обозначение поможет в классификации свойств уравнений Пенлеве.

Например, существуют несколько различных типов решений  (1.2).

1. Общее решение  является трансцендентной функцией для всех значений a и включает две произвольные постоянные.
2. Предположим, что  решение , при a = 0, то есть,

 с асимптотическим поведением



где K вещественный параметр и  - функция Эйри, которая определяет решение. Это семейство решений имеет разные аналитические свойства на вещественной оси и различое асимптотическое поведение при в зависимости от параметра k.

* если  решение Абловица – Сегура [37, 38] бесполюсное на вещественной оси при и имеет колебательное поведение с алгебраическим убыванием заданное на  
  

См. [21, 48, 63]

* если  решение Гастингса-Маклеода, которое является монотонным и бесполюсным на вещественной оси и имеет алгебраический рост при заданное на

 (3.3)

* если особое решение, которое имеет бесконечное много полюсов на отрицательной вещественной плоскости и имеет сингулярное колебательное поведении при заданное на

 (3.4)

(iii) Для  при  cуществуют аналоги решений Абловица – Сегура и Гастингса – МакЛеода, известные как квази-решения Абловица – Сегура и квази-решение Гастингса – МакЛеода [28, 37, 38]; см. также [35, 40, 41, 66]. Далее, в то время как решения Абловица – Сегура и Гастингса – МакЛеода имеют экспоненциального убывания при z → ∞ (3.1), при  решения имеют только алгебраический распад, задаваемые на



  ,

где Ai(z) функция Эйри и B(z;a) задана



с коэффициентами , которые однозначно определяются соотношением рекуррентности



(iv) Специальные функциональные решения  возникают тогда и только тогда, когда которые включают в себя произвольную константу. Они выражаются через детерминант Вронского n × n



при  функции Эйри и произвольная постоянная.

(v) Рациональные решения  существуют тогда и только тогда, когда , которые не содержат произвольных констант. Эти решения выражаются через многочлены  в степени  известное как полиномы Яблонского-Воробьева, которые определяются через рекуррентное соотношение (билинейное дифференциально-разностное уравнение второго порядка)



Кларксон и Мэнсфилд исследовали корни полинома Яблонского – Воробьева на комплексной плоскости и показали, что эти корни имеют очень “правильную”, примерно треугольную структуру, используется термин «приблизительный», поскольку шаблоны не являются точными треугольниками, так как корни лежат на дугах, а не на прямых линиях. Бертола и Ботнер [20], Бэкингем и Миллер [28] изучали полином Яблонского – Воробьева  в пределе n → ∞ и показали, что корни лежат в «треугольной области» с эллиптическими сторонами, которые пересекаются с внутренним углом  .

(vi) Существуют “усеченные” (франц. tronqu´ee) и tri-tronqu´ee (франц.) решения , бесполюсные в секторах комплексной плоскости [26, 27].

Известно, что уравнения Пенлеве обладают множеством свойств, таких как: Гамильтоново представление; точные решения (рациональные решения, алгебраические решения, классические специальные решения). Отметим, что в параграфе два главы второй мы используем обозначения для всех шести уравнений Пенлеве, связанные с тем, что эти уравнения сводятся к полиномиальной форме.

**1. Сведение дифференциальных уравнений**

**к полиномиальной форме**

**1.1 Метод приведения дифференциальных уравнений к полиномиальной форме введением дополнительных переменных**

В настоящем параграфе используется материал из статей [67 - 70].

Рассмотрим полную систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, разрешенную относительно производной. Такие системы дифференциальных уравнений можно записать в следующих формах:





где 



В случае обыкновенных дифференциальных уравнений (т.е. при ) эти формы можно свести к следующей:



Приведем определение *методу дополнительных переменных (МДП)*. Метод позволяет привести систему вида (1.1) к полиномиальной форме за счет такого набора дополнительных переменных функций  который удовлетворяет двум условиям:

1. правыe части уравнений (1.1) – полиномы 

2. все производные  дополнительных переменных  в силу уравнений (1.1) также полиномы по  .

В таком случае, переменные удовлетворяют некоторой полиномиальной системе.

Для автономных ОДУ вида (1.4) − (1.5) также используется *метод Пуанкаре*. Он заключается в поиске одной дополнительной переменной и полинома , которые удовлетворяют условиям:

1°. правые части уравнений (1.4) − (1.5) – полиномы по переменным ;

2°. равенство является тождеством.

Тогда, при введении нового «времени» по формуле , переменные удовлетворяют некоторой полиномиальной системе уравнений. При этом, метод Пуанкаре не является частным случаем МДП.

МДП и метод Пуанкаре можно обобщить. Идея *обобщенного метода приведения системы ОДУ к полиномиальной форме* заключается в поиске дополнительных переменных-функций

и полиномов , которые удовлетворяют условиям:

1\*. правые части уравнений (1.1) – полиномы по переменным ;

2\*. равенства являются тождествами, и

Тогда, при введении нового «времени» по формуле , переменные удовлетворяют некоторой полиномиальной системе[[1]](#footnote-1).

В таком случае, МДП и метод Пуанкаре являются частными случаями обобщенного метода. Для МДП , для метода Пуанкаре . МДП является более простым по сравнению с другими методами, в частности, поскольку не требует перехода к новому «времени».

Вместе с тем, если выполнены условия 1\* и 2\* для обобщенного метода, то введением дополнительной переменной можно добиться выполнения условий 1 и 2 относительно переменных для МДП. Таким образом, если к уравнениям (1.1) применим обобщенный метод дополнительных переменных, то применим и МДП[[2]](#footnote-2).

Для записи полученной полиномиальной системы уравнений можно использовать следующие три эквивалентных формы[[3]](#footnote-3).

*Первая форма* имеет вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.6) |

где ;

Первая форма удобна для получения явных априорных оценок погрешности в методе рядов Тейлора.

*Вторая форма* выглядит более лаконично и может быть использована для получения рекуррентных соотношений для расчета коэффициентов рядов при решении полиномиальной системы:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.7) |

где - все различные мономы в правых частях уравнений (1.6).

*Третья форма* является иерархической и может быть представлена в виде следующей системы уравнений:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.8) |
|  | (1.9) |

где

– различные нелинейные мономы по (например, при , это мономы по ).

В формулах (1.8) – (1.9) – это любое фиксированное натуральное число, которое называют *числом уровней третьей формы[[4]](#footnote-4)*. При третья форма (1.8) – (1.9) совпадает со второй (1.7). При третья форма является обобщением второй. Именно к третьей форме полиномиальной системы сводятся системы ОДУ при применении к ним метода дополнительных переменных в общем случае.

**1.2 Примеры приведения**

В первых трех из рассматриваемых здесь пяти примеров используются функции Гильберта  трех аргументов .

*Замечание.* Заметим, что эти функции были введены в [58] в связи с 13 проблемой Гильберта. К моменту формулировки Гильбертом этой проблемы было известно преобразование, сводящее уравнение n-ой степени, в котором свободный член также равный 1, коэффициент при старшей степени равен 1, коэффициент при старшей степени равен 1, а коэффициенты при степенях n - 1, n - 2, n - 3 равны нулю. Проблема Гильберта [61] заключается в следующем: можно ли решить общее уравнение седьмой степени с помощью функций, завися­щих только от двух переменных? Как указывалось, уравнение седьмой степени можно рассматривать как уравнение, решение которого зависит только от трёх ко­эффициентов.

Напомним [58], что первая из них является решением уравнения

,

при условии , а вторая определяется равенством

.

Они удовлетворяют задаче Коши [31]

 .

В четвертом и пятом примерах рассматриваются две задачи динамики: математиче­ский маятник и уравнение вращательного движения спутника около своего центра масс.

**Пример 1. Задача Коши для ОДУ.**

Рассмотрим уравнение



и начальные условия  (- вещественные параметры).

Введем дополнительные переменные:



и получим их полные производные по  в силу этого уравнения:









,

.

Можем переписать исходное уравнение и начальные условия в форме полиномиальной задачи Коши:



.

**Пример 2. Задача Коши для системы ОДУ.**

Рассмотрим систему уравнений



и начальные условия , ,

(- алгебраические полиномы).

Введем дополнительные переменные:



и получим их полные производные по  в силу уравнений:





,

.

Тогда можно записать исходную систему и начальные условия в форме полиноми­альной задачи Коши:



, ; .

**Пример 3. Задача Коши для полной системы.**

Рассмотрим систему



и начальные условия , , ,

(- полиномы).

Введем дополнительные переменные:



и получим их полные производные по  в силу этих уравнений:









,

.

Тогда можно записать исходную систему и начальные условия в форме полиноми­альной задачи Коши:





**Пример 4. Математический маятник.**

Полагая , уравнение математического маятника



запишем в виде системы ОДУ. Вводя

,, получаем полиномиальную (квадратичную) систему:

.

**Пример 5. Вращательное движение спутника.**

Рассмотрим движение спутника вокруг своего центра масс в предположении, что сам центр масс движется по круговой орбите с угловой скоростью . Обычно дви­жение спутника вокруг своего центра масс описывается шестью фазовыми переменными, пусть это будут . При учете основных возмущающих факторов оказывается, как правило, что уравнения относительно этих переменных имеют вид:

,

причем-полиномы по всем своим аргументам.

Полагая ,…,,…, а также , получаем полиномиальную систему

, ,

, , , .

**2. Уравнения динамики**

В данной работе обсуждаются некоторые открытые задачи для уравнений динамики. В частности, описываются следующие открытые задачи: сведение к полиномиаль­ной форме уравнений динамики и численное решение уравнений Пенлеве.

**2.1 Шесть уравнений Пенлеве**

Шесть уравнений Пенлеве  :

 (2.1)

 (2.2)

 (2.3)

 (2.4)

 (2.5)

 (2.6)



Начальные условия:  (2.7)

где  - произвольные постоянные. Решения уравнений  называют трансцендентами Пенлеве (*Painlevé transcendents*).

**2.2. Сведение уравнений динамики к полиномиальной форме**

В представленном разделе сводим уравнения динамики к полиномиальной форме, т.е. к дифференциальным уравнениям с полиномиальными правыми частями (по­линомы от переменных). Нам будет удобно несколько дополнить обозначения Пенлеве.

Рассмотрим следующие обозначения, которые будем использовать в дальнейшем:

 - -е уравнение динамики;

- начальные условия (Initial Conditions) для -ого уравнения динамики;

- -е уравнение динамики в полиномиальной форме;

- начальные условия для -ого уравнения динамики в полиномиальной форме;

1. , :

, .

Произведем замену переменных:, приходим к формулам:

,

.

1. , :

, .

Произведем замену переменных:, приходим к формулам:

,

.

1. , :

, 

Произведем замену переменных:, приходим к форму­лам:



.

1. , :

, .

Произведем замену переменных:, приходим к сле­дующим уравнениям



.

1. , :

,

.

Произведем замену переменных:

,

приходим к формулам





1. , :





Произведем замену переменных:





приходим к следующим уравнениям





**3. Вычисление коэффициентов Тейлора для полиномиальных ОДУ**

**3.1 Схемы для вычисления коэффициентов Тейлора**

Набор  считаем упорядоченным так, что



Если любой моном , в  равен  при  то вводят в рассмотрению схему  из  пар натуральных чисел  и , таких, что  для любого  Используя схемы, можно решить задачу последовательного вычисления всех мономов  набора  в предложении, что известны первые  его мономов  . Каждый подобный набор мономов можно дополнить новыми мономами так, чтобы он имел схему. Дополненный набор называют оболочкой для исходного набора.

Используя схему



для набора всех различных нелинейных мономов в правых частях уравнений 

где а все различные нелинейные мономы в правых частях уравнений (3.1)

где



Для быстрого вычисления коэффициентов Тейлора  из решения 

можно вывести следующие рекуррентные формулы:



**3.2 Применение к уравнениям динамики**

Рассмотрим следующие обозначения, которые будем использовать в этом разделе:

*j*-е уравнение динамики в полиномиальной форме;

 упорядоченный набор мономов, стоящих в правой части *j*-ого уравнения Пенлеве в полиномиальной форме;

оболочка для набора мономов ;

схема для *j*-ого уравнения динамики.

Рассмотрим последовательно все шесть уравнений динамики, используя эти обо­значения.

Первое уравнение Пенлеве

 , .

Второе уравнение Пенлеве

 , .

Третье уравнение Пенлеве



,

добавим два монома , получим оболочку:

,



Четвертое уравнение Пенлеве



,

добавим три монома , получим оболочку:

,



Пятое уравнение Пенлеве







добавим два монома , получим оболочку:









Шестое уравнение Пенлеве









добавим десять мономов

,

получим оболочку:















**4. Априорная оценка погрешности, выбор шага и степени приближения Тейлора**

**4.1 Теорема об оценке погрешности в методе рядов Тейлора [68]**

Рассмотрим задачу Коши,



где



Пусть будет решением задачи (4.1) и





Например, если  то:



**Теорема об оценке погрешности** (см. [68])

Если  то:

 Решение  проблемы (4.1) является голоморфной для    
где

 

Используя выбор  можно уменьшить . Это улучшит оценки, приведенные в тео­реме. В работе [4] было показано, что теорема является мощным инструментом для численного интегрирования ОДУ. Минимаксная задача, которая позволяет найти оптимальные значения  это:

**Дано:** 

и  for 

**Минимизировать:** 



**При условии** 

* 1. **Алгоритм выбора шага и степени Тейлоровского приближения**

Рассмотрим полиномиальную задачу Коши (см. [4.1]). Будем использовать обозна­чения:

    

где  и  - операторы, которые решению  сопоставляют полином Тейлора  и остаточный член  соответственно. Радиус схо­димости ряда Тейлора  обозначим .

*Метод рядов Тейлора решения задачи Коши заключается в построении таблицы приближенных значений  по формулам:*



*где  натуральные числа,  а  удовлетворяют неравенствам  Вычисление каждого значения  называют шагом метода, а число  - величина этого шага. В общем случае интегрирования вдоль кривой на комплексной плоскости  вещественны.*

Для вычисления  при некотором заданном  с высокой точностью по формулам (1), даже для t из круга сходимости



число шагов  может оказаться большим, что может стать причиной ускоренного накопления ошибок округления и увеличения времени счета.

Поэтому на каждом шаге целесообразно использовать, по возможности, больший шаг. Этого можно добиться, если иметь в своем распоряжении априорные гаранти­рованные оценки величин  и  при . (теорема об оценке погрешности см. [4.1])

* 1. **Применение к уравнениям динамики**

Для применения теоремы 4.1 к уравнениям динамики требуется вычислить величины  для каждого из этих уравнений. Ради удобства будем использовать следующие обозначения

-е уравнение динамики в полиномиальной форме,

 -е уравнение динамики в нормализованной полиномиальной форме,

 соответствующая задача минимакс

Первое уравнение Пенлеве





 





Второе уравнение Пенлеве





  





Третье уравнение Пенлеве



 

 



 





Четвертое уравнение Пенлеве





 











Пятое уравнение Пенлеве



 

 















Шестое уравнение Пенлеве



 























Прежде чем решать проблемы , естественно, нужно разобраться с их струк­турой и начать с самых сложных из них. Поскольку все  в задачеявляются полиномами с параметрами  с положительными коэффициен­тами, решение этой задачи достигается при  и, следовательно, сводится к задаче:









Точно так же упрощаются и задачи , and :















Как мы можем увидеть, оставшиеся две задачи  не упрощаются таким же образом.

**5. Программа TSMR**

В данной главе схематично описана программа, реализованная авторами статьи [69] на языке Fortran 95, которая численно интегрирует системы полиномиальных дифференциальных уравнений с вещественными коэффициентами.

Опишем структуру данной программы. Программа состоит из главной программы, подпрограммы чтения конфигурационного файла, подпрограммы интегрирования на промежутке, подпрограммы вычисления коэффициентов Тейлора, подпро­граммы вычисления полиномов Тейлора, функции вычисления шага по априор­ному алгоритму, функции вычисления шага стандартной коррекцией, функции вы­числения шага итеративной коррекцией, функции автоматического выбора шага, функции вычисления, подпрограммы чтения файлов с данными, функции вычисления степени правой части, функции вычисления  и , процедуры замера времени расчета коэффициентов, функции вычисления , процедуры вычисления оптимального порядка.

Главная программа:

1. считывает имя конфигурационного файла из командной строки;

2. считывает данные из конфигурационного файла;

3. запускает интегрирование на промежутке.

Подпрограмма чтения конфигурационного файла.

Аргументы: *cfg* - имя конф. файла *ipar*: 1 – размерность, 2 – число мономов, 3 – число ненулевых коэффициентов, 4 – число точек вывода; *rpar* – требуемая погрешность: 1 - относительная, 2 - абсолютная; *ln* – линейность; *fpar* - файлы: 1 –с начальными данными, 2 – со схемой, 3 – файл с коэффициентами, 4 - с таблицей, 5 – для записи результатов, 6 – с точками вывода. Возвращает: *ipar*, *rpar*, *ln*, *fpar*.

Подпрограмма интегрирования на промежутке.

Аргументы: *n* - размерность; *u* - число мономов; *na* - число ненулевых коэффици­ентов; *np* - число точек для выдачи решения; *ln* - линейность; *rtol* - требуемая относительная погрешность; *atol* - требуемая абсолютная погрешность; *fpar* - файлы: 1 – с начальными данными, 2 – со схемой, 3 – файл с коэффициентами, 4 - с таблицей, 5 – для записи результатов, 6 – с точками вывода.

Возвращает: массив *x*.

Подпрограмма вычисления коэффициентов Тейлора.

Аргументы: *x* - массив коэффициентов Тейлора; *tx* - массив значений решения в точке; *pl*, *pu* - нижний и верхний порядок. Возвращает: значение *x*. Глобальные переменные*: n, u, na, sch, a, ia, ja, pmax*.

Подпрограмма вычисления полиномов Тейлора.

Аргументы: *tx* - массив значений решения в точке; *x* - массив коэффициентов Тейлора; *h* - длина шага; *pl*, *pu* – нижний и верхний порядок. Возвращает: *tx*. Глобальные переменные: *n*, *u*, *pmax*.

Функция вычисления шага по априорному алгоритму.

Аргументы: *tx* - массив значений решения в точке; *alp* - ; *pwork* - порядок. Глобальные переменные: *n*.

Функция вычисления шага стандартной коррекцией.

Аргументы: *tx* - массив значений решения в точке; *x* - массив коэффициентов Тей­лора;  - приближение к шагу; *rx*, *tx* - вспомогательные массивы; *pwork* - порядок. Глобальные переменные: *n*, *pmax*, *atol*, *rtol*.

Функция вычисления шага итеративной коррекцией.

Аргументы: *tx* - массив значений решения в точке; x - массив коэффициентов Тейлора; - приближение к шагу; *rx, tx* - вспомогательные массивы; *pwork* - порядок. Глобальные переменные: *n, pmax, atol, rtol.*

Функция автоматического выбора шага.

Аргументы: *h* - приближение к шагу; *tx* - массив значений решения в точке;   
*x* - массив коэффициентов Тейлора; *rx, tx* - вспомогательные массивы; *alp* -   
; *pwork* - порядок; *dir* - направление. Глобальные переменные: *n, u.*

Функция вычисления  по 

Аргументы: *alp* - . Глобальные переменные: *n, u, na, ut, aa, ia, ja, rdeg*.

Подпрограмма чтения файлов с данными.

Аргументы: *tx* - значение решения в точке; *fpar* - файлы: 1 – с начальными дан­ными, 2 – со схемой, 3 – файл с коэффициентами, 4 - с таблицей, 5 – для записи результатов, 6 – с точками вывода. Возвращает: *tx, sch, a, ia, ja, rdeg, ox* Глобальные переменные: *n, u, na, sch, ox, np, a, ia, ja, rdeg.*

Функция вычисления степени правой части. Глобальные переменные: *n, u, sch*.

Функция вычисления  и .

Аргументы: *alp* - ; *tx* - массив значений решения в точке; *r* - оценка ради­уса сходимости; *pwork* - текущий порядок метода. Глобальные переменные: *n, atol, rtol, vtb, vtn, pmin, pmax.*

Процедура замера времени расчета коэффициентов Аргументы: *x* - массив коэффи­циентов Тейлора; *tx* - массив значений решения в точке. Возвращает: *time*. Глобальные переменные: *n, u, pmax, time*.

Функция вычисления . Аргументы: *alp* - ; *tx* - массив значений решения в точке; *rpar, ipar* - вспомогательные массивы. Глобальные переменные:*n*.

Процедура вычисления оптимального порядка.

Аргументы: *x* - массив коэффициентов Тейлора; *tx* - массив значений решения в точке. Возвращает: *pwork, h.* Глобальные переменные: *n, u, pmax, time*.

**6. Численные эксперименты**

Шесть уравнений динамки имеют особенности типа полюс, поэтому целесообразно рассмотреть пример с такой же особенностью, что и в уравнениях динамики. В раз­деле 6.1 представлена простейшая квадратичная задача с особенностью типа по­люс. В разделе 6.2 представлены расчёты для третьего уравнения динамики.

**6.1 Простейшая (квадратичная) задача.**

Результаты, представленные в данном разделе, взяты из статьи [69]. Эксперимент, описанный более подробно ниже, можно найти в самой статье.   
Это задача Коши  решением которой является . Подобные задачи дают представление об эффективности численного интегрирова­ния тем или иных методов в окрестности особых точек решения.

Таблица 1

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *ε* | Метод | SIMPLEST, | | SIMPLEST, | |
|  |  |  |  |
|  | DOP853 |  |  |  |  |
| ODEX |  |  |  |  |
| TIDES |  |  |  |  |
| TSMR |  |  |  |  |
| TSMR\_A |  |  |  |  |
|  | DOP853 |  |  |  |  |
| ODEX |  |  |  |  |
| TIDES |  |  |  |  |
| TSMR |  |  |  |  |
| TSMR\_A |  |  |  |  |
|  | DOP853 |  |  |  |  |
| ODEX |  |  |  |  |
| TIDES |  |  |  |  |
| TSMR |  |  |  |  |
| TSMR\_A |  |  |  |  |

**6.2 Численное интегрирование уравнений динамики.**

Проведем численные расчёты, используя программу TSMR и функцию NDSolve, реализованную в Wolfram Mathematica. Прочерк означает, что произошла ошибка: “singularity or stiff system suspected” в программе NDSolve.

Таблица 2

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Метод |  |  | |
| , |  |
| TSMR |  |  |  |
| NDSolve |  |  |
| TSMR |  |  |  |
| NDSolve |  |  |
| TSMR |  |  |  |
| NDSolve |  |  |

**Заключение**

В главе 1 был рассмотрен подход к построению полиномиальной системы [67, 68, 69] и 3 примера сведения системы к полиномиальной форме. В главе 2 были рас­смотрены шесть уравнений динамики и сведены к полиномиальной форме, резуль­таты представлены в пункте 2.1. В главе 3 был рассмотрен алгоритм метода рядов Тейлора [67]. Были составлены оболочки и схемы, необходимые для нахождения коэффициентов Тейлора для случая шести уравнений динамики. В главе 4 рассмот­рена теорема об оценке погрешности метода рядов Тейлора [68] и получены оценки для шести уравнений динамики. В главе 5 кратко описана реализация метода рядов Тейлора, предложенная в статье [69]. В главе 6 предложены численные эксперименты для третьего уравнения динамики. Таким образом, автором в настоящей работе получены следующие новые результаты:

1. Каждое из шести уравнений динамики сведено к полиномиальной системе обыкновенных дифференциальных уравнений (параграф 2.2, стр. 10 - 13).
2. Построены оболочки и схемы для каждой из этих систем, позволяющие применить рекуррентные соотношения для коэффициентов Тейлора ([32], параграф 3.1, стр. 13 - 14), см. параграф 3.2, стр. 15 – 17.
3. Для каждой из этих систем при помощи теоремы об оценке погрешности ([32], см. параграф 4.1 - 4.2, стр. 18 - 20) получены априорные гарантированные оценки абсолютной и относительной погрешности решения задачи Коши, см. параграф 4.3, стр. 20 – 24.
4. При помощи программы TSMR [69] и на основе полученных схем и формул для коэффициентов Тейлора проведены численные эксперименты решения задачи Коши для простейшего квадратичного уравнения (см. Таблица 1, стр. 29) и системы полиномиальных уравнений для третьего уравнения Пенлеве (см. Таблица 2, стр. 30). Полученные эксперименты показали преимущества примененного метода решения полиномиальной задачи Коши в окрестности особых точек.

**Список литературы**

1. Ablowitz M.J., Clarkson P.A., Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering, London Mathematical Society Lecture Note Series, Vol. 149, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
2. Ablowitz M.J., Ramani A., Segur H., A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. I, J. Math. Phys. 21 (1980), 715–721.
3. Ablowitz M.J., Ramani A., Segur H., Nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of Painlev´e type, Lett. Nuovo Cimento 23 (1978), 333–338.
4. Abramov A. A., Yukhno L. F. A method for calculating the Painlev´e transcendents // Computational mathematics and mathematical physics. 2015. №. 93. P. 262–269.
5. Abramov A. A., Yukhno L. F. A method for the numerical solution of the Painlev´e equations // Computational mathematics and mathematical physics. 2013. № 53. P. 540–563.
6. Abramov A. A., Yukhno L. F. Numerical solution of the Cauchy problem for Painlev´e III // Computational mathematics and mathematical physics. 2012. № 48. P. 909–918.
7. Abramov A. A., Yukhno L. F. Numerical solution of the Cauchy problem for the Painlev´e I and II equations. Computational mathematics and mathematical physics. 2012. № 52. P. 321–329.
8. Abramov A. A., Yukhno L. F. Numerical solution of the Painlev´e IV equation // Computational mathematics and mathematical physics. 2012. № 52. P. 1565–1573.
9. Abramov A. A., Yukhno L. F. Numerical solution of the Painlev´e V equation // Computational mathematics and mathematical physics. 2013. № 53. P. 44–56.
10. Abramov A. A., Yukhno L. F. Numerical solution of the Painlev´e VI equation // Computational mathematics and mathematical physics. 2013. № 53. P. 180–193.
11. Bagderina Yu.Yu., Equivalence of second-order ODEs to equations of first Painlev´e equation type, Ufa Math. J. 7 (2015), 19–30.
12. Bagderina Yu.Yu., Equivalence of second-order ordinary differential equations to Painlev´e equations, Theoret. and Math. Phys. 182 (2015), 211–230.
13. Bagderina Yu.Yu., Equivalence of third-order ordinary differential equations to Chazy equations I–XIII, Stud. Appl. Math. 120 (2008), 293–332.
14. Bagderina Yu.Yu., Invariants of a family of scalar second-order ordinary differential equations, J. Phys. A: Math. Theor. 46 (2013), 295201, 36 pages.
15. Bagderina Yu.Yu., Invariants of a family of scalar second-order ordinary differential equations for Lie symmetries and first integrals, J. Phys. A: Math. Theor. 49 (2016), 155202, 32 pages.
16. Bagderina Yu.Yu., Tarkhanov N.N., Solution of the equivalence problem for the third Painlev´e equation, J. Math. Phys. 56 (2015), 013507, 15 pages.
17. Barashenkov I.V., Pelinovsky D.E., Exact vortex solutions of the complex sine-Gordon theory on the plane, Phys. Lett. B 436 (1998), 117–124.
18. Bassom A.P., Clarkson P.A., Law C.K., McLeod J.B., Application of uniform asymptotics to the second Painlev´e transcendent, Arch. Rational Mech. Anal. 143 (1998), 241–271, arXiv:solv-int/9609005.
19. Berth M., Czichowski G., Using invariants to solve the equivalence problem for ordinary differential equations, Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput. 11 (2001), 359–376.
20. Bertola M., Bothner T., Zeros of large degree Vorob’ev–Yablonski polynomials via a Hankel determinant identity, Int. Math. Res. Not. 2015 (2015), 9330–9399, arXiv:1401.1408.
21. Bertola M., On the location of poles for the Ablowitz–Segur family of solutions to the second Painlev´e equation, Nonlinearity 25 (2012), 1179–1185, arXiv:1203.2988.
22. Bogatskiy A., Claeys T., Its A., Hankel determinant and orthogonal polynomials for a Gaussian weight with a discontinuity at the edge, Comm. Math. Phys. 347 (2016), 127–162, arXiv:1507.01710.
23. Bornemann F., On the numerical evaluation of distributions in random matrix theory: a review, Markov Process. Related Fields 16 (2010), 803–866, arXiv:0904.1581.
24. Bornemann F., On the numerical evaluation of Fredholm determinants, Math. Comp. 79 (2010), 871–915, arXiv:0804.2543. [28] Bothner T., Transition asymptotics for the Painlev´e II transcendent, Duke Math. J. 166 (2017), 205–324, arXiv:1502.03402.
25. Bothner T., Its A., The nonlinear steepest descent approach to the singular asymptotics of the second Painlev´e transcendent, Phys. D 241 (2012), 2204–2225.
26. Boutroux P., Recherches sur les transcendantes de M. Painlev´e et l’´etude asymptotique des ´equations diff´erentielles du second ordre, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) ´ 30 (1913), 265–375.
27. Boutroux P., Recherches sur les transcendantes de M. Painlev´e et l’´etude asymptotique des ´equations diff´erentielles du second ordre (suite), Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) ´ 31 (1914), 99–159. [32] Buckingham R.J., Miller P.D., Large-degree asymptotics of rational Painlev´e-II functions: noncritical behaviour, Nonlinearity 27 (2014), 2489–2578, arXiv:1310.2276.
28. Buckingham R.J., Miller P.D., Large-degree asymptotics of rational Painlev´e-II functions: critical behaviour, Nonlinearity 28 (2015), 1539–1596, arXiv:1406.0826.
29. Casini H., Fosco C.D., Huerta M., Entanglement and alpha entropies for a massive Dirac field in two dimensions, J. Stat. Mech. Theory Exp. 2005 (2005), P07007, 16 pages, arXiv:cond-mat/0505563.
30. Casini H., Huerta M., Analytic results on the geometric entropy for free fields, J. Stat. Mech. Theory Exp. 2008 (2008), P01012, 9 pages, arXiv:0707.1300.
31. Casini H., Huerta M., Entanglement and alpha entropies for a massive scalar field in two dimensions, J. Stat. Mech. Theory Exp. 2005 (2005), P12012, 17 pages, arXiv:cond-mat/0511014.
32. Claeys T., Kuijlaars A.B.J., Vanlessen M., Multi-critical unitary random matrix ensembles and the general Painlev´e II equation, Ann. of Math. 168 (2008), 601–641, arXiv:math-ph/0508062.
33. Clarkson P. Open problems for Painlev´e Equations // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. 2019. № 15. P. 1-20.
34. Clerc M.G., D´avila J.D., Kowalczyk M., Smyrnelis P., Vidal-Henriquez E., Theory of light-matter interaction in nematic liquid crystals and the second Painlev´e equation, Calc. Var. Partial Differential Equations 56 (2017), Art. 93, 22 pages, arXiv:1610.03044.
35. Conte R., Musette M., The Painlev´e handbook, Springer, Dordrecht, 2008
36. Dai D., Hu W., Connection formulas for the Ablowitz–Segur solutions of the inhomogeneous Painlev´e II equation, Nonlinearity 30 (2017), 2982–3009, arXiv:1611.05285.
37. Dai D., Hu W., On the quasi-Ablowitz–Segur and quasi-Hastings–McLeod solutions of the inhomogeneous Painlev´e II equation, Random Matrices Theory Appl. 7 (2018), 1840004, 13 pages, arXiv:1708.09357.
38. Fornberg B., Weideman J. A numerical methodology for the Painleve equations // Oxford Centre for Collaborative Applied Mathematics. Oxford Mathematical Institute. England, 2011. 23 p.
39. Fornberg B., Weideman J.A.C., A computational exploration of the second Painlev´e equation, Found. Comput. Math. 14 (2014), 985–1016.
40. Fornberg B., Weideman J.A.C., A computational overview of the solution space of the imaginary Painlev´e II equation, Phys. D 309 (2015), 108–118.
41. Gariel J., Marcilhacy G., Santos N.O., Parametrization of solutions of the Lewis metric by a Painlev´e transcendent III, J. Math. Phys. 47 (2006), 062502, 5 pages, arXiv:gr-qc/0012004.
42. Garnier R., Sur des ´equations diff´erentielles du troisi`eme ordre dont l’int´egrale g´en´erale est uniforme et sur une classe d’´equations nouvelles d’ordre sup´erieur dont l’int´egrale g´en´erale a ses points critiques fixes, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) ´ 29 (1912), 1–126.
43. Gromak V.I., Laine I., Shimomura S., Painlev´e differential equations in the complex plane, De Gruyter Studies in Mathematics, Vol. 28, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2002.
44. Hisakado M., Unitary matrix models and Painlev´e III, Modern Phys. Lett. A 11 (1996), 3001–3010, arXiv:hep-th/9609214.
45. Ince E.L., Ordinary differential equations, Dover Publications, New York, 1944.
46. Iwasaki K., Kimura H., Shimomura S., Yoshida M. From Gauss to Painleve.A modern theory of special functions. Braunschweig, 1991. 347 p.
47. Kitaev A.V., Vartanian A.H., Connection formulae for asymptotics of solutions of the degenerate third Painlev´e equation. I, Inverse Problems 20 (2004), 1165–1206, arXiv:math.CA/0312075.
48. Kitaev A.V., Vartanian A.H., Connection formulae for asymptotics of solutions of the degenerate third Painlev´e equation: II, Inverse Problems 26 (2010), 105010, 58 pages, arXiv:1005.2677.
49. Kruskal M.D., Clarkson P.A., The Painlev´e–Kowalevski and poly-Painlev´e tests for integrability, Stud. Appl. Math. 86 (1992), 87–165.
50. Kruskal M.D., Joshi N., Halburd R., Analytic and asymptotic methods for nonlinear singularity analysis: a review and extensions of tests for the Painlev´e property, in Integrability of Nonlinear Systems (Pondicherry, 1996), Editors Y. Kosmann-Schwarzbach, B. Grammaticos, K.M. Tamizhman, Lecture Notes in Phys., Vol. 495, Springer, Berlin, 1997, 171–205, arXiv:solv-int/9710023.
51. Lund F., Example of a relativistic, completely integrable, Hamiltonian system, Phys. Rev. Lett. 38 (1977), 1175–1178.
52. Lund F., Regge T., Unified approach to strings and vortices with soliton solutions, Phys. Rev. D 14 (1976), 1524–1535.
53. Mugan U., Jrad F., Non-polynomial third order equations which pass the Painlev´e test, Z. Naturforsch. A 59 (2004), 163–180.
54. Ohyama Y., Kawamuko H., Sakai H., Okamoto K., Studies on the Painlev´e equations. V. Third Painlev´e equations of special type PIII(D7) and PIII(D8), J. Math. Sci. Univ. Tokyo 13 (2006), 145–204.
55. Ohyama Y., Okumura S., A coalescent diagram of the Painlev´e equations from the viewpoint of isomonodromic deformations, J. Phys. A: Math. Gen. 39 (2006), 12129–12151, arXiv:math.CA/0601614.
56. Olver F. W. J., Lozier D. W., Boisvert R. F., Clark C. W. NIST handbook of mathematical functions. Cambridge, 2010. https://dlmf.nist.gov/ available at 07. 06. 2019.
57. Olver F.W.J., Lozier D.W., Boisvert R.F., Clark C.W. (Editors), NIST handbook of mathematical functions, Cambridge University Press, Cambridge, 2010, Release 1.0.21 of 2018-12-15 available at <http://dlmf.nist.gov>.
58. Painlev´e P. Sur les ´equations diff´erentielles du second ordre `a points critiques fix´es // Comptes rendus de l'Académie des Sciences. 1898. № 127, p. 945–948.
59. Painlev´e P., Sur les ´equations diff´erentielles du second ordre `a points critiques fix´es, C. R. Acad. Sci. Paris 127 (1898), 945–948.
60. Pohlmeyer K., Integrable Hamiltonian systems and interactions through quadratic constraints, Comm. Math. Phys. 46 (1976), 207–221.
61. ru.wikipedia.org/wiki/Проблемы\_Гильберта, доступ от 07. 06. 2019.
62. Sakai H. Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlev´e equations // Computational mathematics and mathematical physics. 2001. № 220. P. 165–229.
63. Sakai H., Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlev´e equations, Comm. Math. Phys. 220 (2001), 165–229.
64. Tracy C.A., Widom H., Random unitary matrices, permutations and Painlev´e, Comm. Math. Phys. 207 (1999), 665–685, arXiv:math.CO/9811154.
65. Troy W.C., The role of Painleve II in predicting new liquid crystal self-assembly mechanisms, Arch. Ration. Mech. Anal. 227 (2018), 367–385.
66. Van Assche W., Orthogonal polynomials and Painlev´e equations, Australian Mathematical Society Lecture Series, Vol. 27, Cambridge University Press, Cambridge, 2018.
67. Бабаджанянц Л. К. [Метод дополнительных переменных](http://www.apmath.spbu.ru/ru/staff/babadzhanyants/publ/publ24.pdf) // Вестник СПбГУ. Серия 10. 2010. № 1. С. 3-11.
68. Бабаджанянц Л. К. [Метод рядов Тейлора](http://www.apmath.spbu.ru/ru/staff/babadzhanyants/publ/publ28.pdf) // Вестник СПбГУ. Серия 10. 2010. № 3. С. 13 - 29.
69. Бабаджанянц Л. К., Большаков А. И. [Реализация метода рядов Тейлора для решения обыкновенных дифференциальных уравнений](http://www.apmath.spbu.ru/ru/staff/babadzhanyants/publ/publ33.pdf) // Вычислительные методы и программирование. Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М.В. Ломоносова. 2012. Т. 13. С. 497-510.
70. Бабаджанянц Л. К., Брэгман К. М. [Алгоритм метода дополнительных переменных](http://www.apmath.spbu.ru/ru/staff/babadzhanyants/publ/publ32.pdf) // Вестник СПбГУ. Серия 10. 2012. № 2. C. 3-12.
71. Кудряшов Н. А. Свойство Пенлеве в теории дифференциальных уравнений // Соросовский образовательный журнал. 1999. №9. С. 118-122.
72. Ссылка на NIST: https://dlmf.nist.gov/32.2 доступ от: 07. 06. 2019.
73. Цегельник В. В. Некоторые аналитические свойства решений уравнений Пенлеве-типа и некоторые их приложения // Доклады БГУИР. 2007. № 2. С. 17.
74. Цегельник В. В. О полиномиальных гамильтонианах, ассоциированных с первым уравнением Пенлеве // Доклады БГУИР. 2004. № 1. С. 64-72.

1. Бабаджанянц Л.К. Метод дополнительных переменных. – С.7 [↑](#footnote-ref-1)
2. Там же – С.7 [↑](#footnote-ref-2)
3. Бабаджанянц Л.К. Метод рядов Тейлора. – С.14 [↑](#footnote-ref-3)
4. Там же, С.14 [↑](#footnote-ref-4)