

Санкт-Петербургский государственный университет  
Факультет прикладной математики – процессов управления

Садков Илья Вячеславович

Выпускная квалификационная работа

Неньютоновские модели одномерной гемодинамики

Уровень образования: магистратура

Направление 03.04.01 «Прикладные математика и физика»

Основная образовательная программа ВМ.5519.2019 «Прикладная информатика»

Научный руководитель,  
кандидат физ.-мат. наук,  
доцент

Кривовичев Г.В.

Санкт-Петербург

2021

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>1 Обзор литературы</b>	<b>3</b>
1.1 Состав крови и физические свойства . . . . .	3
1.2 Общая математическая модель . . . . .	3
1.3 Одномерная модель течения жидкости . . . . .	6
1.4 Выводы . . . . .	7
<b>2 Математические модели</b>	<b>8</b>
2.1 Неньютоновские одномерные модели . . . . .	8
2.2 Разностные схемы . . . . .	9
2.3 Начальные и граничные условия . . . . .	11
2.3.1 Начальные условия . . . . .	11
2.3.2 Условия на входе в систему . . . . .	11
2.3.3 Условия на выходе из системы . . . . .	11
2.3.4 Условия в узлах сочленения и бифуркации . . . . .	12
2.4 Результаты . . . . .	12
<b>3 Вычислительный эксперимент</b>	<b>13</b>
3.1 Программа для расчётов . . . . .	13
3.2 Выбор разностной схемы . . . . .	14
3.3 Задача о течении в одиночном сосуде . . . . .	17
3.3.1 Результаты . . . . .	17
3.4 Задача о течении в сосуде с бифуркацией . . . . .	19
3.4.1 Результаты . . . . .	19
3.5 Задача о течении в системе из 37 сосудов . . . . .	26
3.5.1 Влияние порядка разностных производных на точность решения . . . . .	27
3.5.2 Результаты . . . . .	29
3.6 Результаты и выводы . . . . .	40
<b>4 Заключение</b>	<b>41</b>

# Введение

Математическое моделирование в медицине является в настоящее время актуальным, поскольку модели позволяют делать прогнозы без вмешательства в организм. Так, исследование поведения пульсовых волн в сердечно-сосудистой системе, а также исследование влияния болезней на это поведение может предоставить ценную информацию для диагностики и лечения (например см. [1]). Анализ результатов моделирования при различных осложнениях может помочь не только в выявлении изменений в системе (а значит и причины наблюдаемого недуга), но и в выявлении взаимосвязей между различными параметрами сердечно-сосудистой системы, которые могут помочь в установке оптимальных методов лечения.

При моделировании течения в сосудистых системах, как правило, используются одномерные модели, которые получаются посредством осреднения трёхмерных уравнений гидродинамики [14]. В таких моделях актуальным является учёт такого важного свойства крови, как неньютоновость. Кровь является неньютоновской жидкостью из-за наличия внутренней структуры, что ведёт к зависимости вязкости от скорости сдвига. В данной работе исследуется влияние учета неньютоновости крови на получаемое решение в рамках одномерных моделей.

Таким образом цель данной работы состоит в построении и апробации одномерных математических моделей, учитывающих неньютоновские свойства крови. Для её достижения необходимо решить следующие задачи:

- Построение одномерных математических моделей течения крови как неньютоновской жидкости.
- Программная реализация алгоритмов численных методов.
- Анализ полученных результатов и сравнение моделей между собой.

В Главе 1 произведён обзор литературы: описана кровь и её свойства, рассмотрены трёхмерная и одномерная математические модели для описания движения кровотока, а также установлено влияние неньютоновости. В Главе 2 приведен математический аппарат, который необходим для получения решения на основе полученной математической модели: указываются используемые граничные и начальные условия, рассматриваются различные разностные схемы. В Главе 3 продемонстрированы результаты вычислительного эксперимента. В заключении представлены основные результаты и выводы по работе.

# 1 Обзор литературы

## 1.1 Состав крови и физические свойства

Кровь представляет собой концентрированную, сложную суспензию, которая состоит из различных клеточных элементов: красных кровяных клеток (эритроцитов), белых кровяных клеток (лейкоцитов) и тромбоцитов, которые растворены в водном полимерно-ионном растворе, называемом плазмой. Она составляет около  $\approx 55\%$  от общего объёма крови и на  $\approx 92\%$  процента состоит из воды. Оставшиеся  $\approx 8\%$  составляют электролиты, органические молекулы, различные протеины (такие как альбумины, глобулины и фибриноген) и продукты обмена веществ [2].

Эритроциты имеют форму двояковогнутых дисков диаметром 6-8 мкм и толщиной 1,9 мкм. Они составляют примерно  $\approx 45\%$  от общего объёма крови и более 99% от всех кровяных клеток. Лейкоциты имеют больший размер (их диаметр варьируется от 6 до 17 мкм), но их содержание в крови значительно меньше. Тромбоциты — маленькие бесцветные клетки объёмом всего 2-3 мкм<sup>3</sup> [2].

Таким образом, при моделировании нужно рассматривать кровь как суспензию частиц. Хотя плазма крови, состоящая в основном из воды, может рассматриваться как вязкая ньютоновская жидкость, однако кровь в целом имеет сложные механические свойства. Кровь может быть рассмотрена как однородная неньютоновская жидкость в зависимости от размеров сосуда и при допущении, что макроскопические масштабы длины и времени достаточно велики по сравнению с масштабами длины и времени на уровне отдельного эритроцита. В противном случае, наличие в крови клеточных элементов и их взаимодействия приводят к значительным изменениям в реологических свойствах.

Жидкость, скорость которой мала в сравнении со скоростью звука, можно считать несжимаемой. В связи с тем, что скорость кровотока в крупных артериях не превосходит 0.3 - 0.5 м/с [3], которая значительно меньше скорости звука в крови, которая имеет значение около 1500 м/с. Таким образом мы можем рассматривать кровь как несжимаемую жидкость.

## 1.2 Общая математическая модель

Для моделирования течений в крупных сосудистых системах использование трёхмерных моделей является достаточно ресурсозатратным [12]. Для моделирования таких процессов принято использовать одномерные модели, полученные путём упрощения и осреднения трёхмерных моделей. Для записи трёхмерной модели динамики жидкости используется уравнение сохранения массы [9]:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = 0,$$

где  $\mathbf{V}$  – скорость жидкости, а  $\rho$  – плотность. В данном уравнение нужно учесть, что кровь будет рассматриваться как несжимаемая жидкость, что означает сохранение плотности в частице при движении. Таким образом получается условие несжимаемости:

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = 0. \quad (1)$$

Также используется уравнение движения [9]:

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \mathbf{f} + \operatorname{div}\mathbf{S}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{f}$  – вектор массовых сил, а  $\mathbf{S}$  – тензор напряжений, который представим с помощью следующего выражения:

$$\mathbf{S} = -p\mathbf{I} + \mathbf{T}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{I}$  – единичный тензор,  $p$  – давление,  $\mathbf{T}$  – тензор вязких напряжений, который зависит от тензора скоростей деформации, который имеет следующий вид::

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla\mathbf{V} + (\nabla\mathbf{V})^T). \quad (4)$$

Уравнение для ньютоновской несжимаемой жидкости, которое связывает тензор вязких напряжений  $\mathbf{T}$  и тензор скоростей деформации  $\mathbf{D}$  имеет вид:

$$\mathbf{T} = 2\mu\mathbf{D}, \quad (5)$$

где  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости, который в данном случае равен константе. Однако для специального класса неньютоновских жидкостей, которые называются чистовязкими или обобщенными ньютоновскими жидкостями, выражение (5) имеет вид:

$$\mathbf{T} = 2\mu(I_2)\mathbf{D}, \quad (6)$$

которое является обобщением предыдущего уравнения. Здесь коэффициент динамической вязкости отличен от константы и зависит от второго главного инварианта тензора скоростей деформации.

Зависимость  $\mu(I_2)$  может быть представлена различными моделями. Наиболее часто используемой в литературе является степенная модель:

$$\mu(I_2) = kI_2^{\frac{n-1}{2}}. \quad (7)$$

В ней значение параметров для крови может быть различным:

$$n = 0.6, k = 0.035 \frac{\text{дин}}{\text{см}^2} \text{с}^n [17, 24]; n = 0.9, k = 0.035 \frac{\text{дин}}{\text{см}^2} \text{с}^n [18]; n = 0.82, k = 0.09267 \frac{\text{дин}}{\text{см}^2} \text{с}^n, [19].$$

Однако данная модель при предельных случаях  $\mu_0$  и  $\mu_\infty$  (при предельно малых и больших скоростях сдвига соответственно) показывает результаты, отличные от опытных данных [15]. Этот недостаток учтён, к примеру, в модели Карро-Иосиды:

$$\mu(I_2) = \mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{(1 + (\lambda I_2^{1/2})^a)^{\frac{n-1}{a}}}. \quad (8)$$

Параметры для крови имеют следующие значения:

$$\mu_0 = 0.56 \frac{\text{ДИН}}{\text{СМ}^2} \text{с}, \mu_\infty = 0.0345 \frac{\text{ДИН}}{\text{СМ}^2} \text{с}, \lambda = 3.313 \text{ с}, n = 0.22, a = 1.25, [23, 24].$$

При коэффициенте  $a = 2$  данная модель превращается в свой частный случай — модель Карро:

$$\mu_0 = 0.56 \frac{\text{ДИН}}{\text{СМ}^2} \text{с}, \mu_\infty = 0.0345 \frac{\text{ДИН}}{\text{СМ}^2} \text{с}, \lambda = 1.902 \text{ с}, n = 0.3568, a = 1.25, [23, 24].$$

В данной работе также рассматривается модель Кросса, которая, как и модель Карро-Иосиды, учитывает предельные значения  $\mu_0$  и  $\mu_\infty$ :

$$\mu(I_2) = \mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{(1 + (\lambda I_2)^m)^a}. \quad (9)$$

В случае крови данная модель имеет следующие значения параметров:

$$\mu_0 = 0.56 \frac{\text{ДИН}}{\text{СМ}^2} \text{с}, \mu_\infty = 0.0345 \frac{\text{ДИН}}{\text{СМ}^2} \text{с}, \lambda = 3.736 \text{ с}, m = 2.406, a = 0.254, [23].$$

Приведённая формула соответствует модифицированной модели Кросса (Modified Cross). Обычная модель Кросса может быть получена из (9) если принять  $a = 1$ . Значения параметров, в случае крови, следующие:

$$\mu_0 = 0.56 \frac{\text{ДИН}}{\text{СМ}^2} \text{с}, \mu_\infty = 0.0345 \frac{\text{ДИН}}{\text{СМ}^2} \text{с}, \lambda = 1.007 \text{ с}, m = 2.406, a = 1, [23].$$

Если взять  $a = 1$  и  $m = 1$ , то полученные выражения будут соответствовать так называемой упрощённой модели Кросса (Simplified Cross). Для данной модели:

$$\mu_0 = 1.3 \frac{\text{ДИН}}{\text{СМ}^2} \text{с}, \mu_\infty = 0.05 \frac{\text{ДИН}}{\text{СМ}^2} \text{с}, \lambda = 8 \text{ с}, m = 1, a = 1, [23].$$

Помимо этого, в работе использованы модифицированная и обычная модели Пауэлла – Эйринга (Powell–Eyring). Выражение для обычной модели Пауэлла – Эйринга:

$$\mu(I_2) = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \frac{\text{asinh}(\lambda I_2^{1/2})}{(\lambda I_2^{1/2})}. \quad (10)$$

Используемые в ней значения параметров в случае крови:

$$\mu_0 = 0.56 \frac{\text{ДИН}}{\text{СМ}^2} \text{с}, \mu_\infty = 0.0345 \frac{\text{ДИН}}{\text{СМ}^2} \text{с}, \lambda = 5.383 \text{ с}, [23, 24].$$

Выражение для модифицированной модели Пауэлла – Эйринга:

$$\mu(I_2) = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \frac{\ln(1 + \lambda I_2^{1/2})}{(\lambda I_2^{1/2})}. \quad (11)$$

Значения параметров для крови:

$$\mu_0 = 0.56 \frac{\text{ДИН}}{\text{СМ}^2} \text{с}, \mu_\infty = 0.0345 \frac{\text{ДИН}}{\text{СМ}^2} \text{с}, \lambda = 2.415 \text{ с}, m = 1.089, [23, 24].$$

Ещё одна модель рассмотренная в данной работе – это модель Yeleswarapu:

$$\mu(l_2) = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \frac{1 + \ln(1 + \lambda I_2^{1/2})}{(1 + \lambda I_2^{1/2})}. \quad (12)$$

В случае крови она имеет следующие значения параметров:

$$\mu_0 = 0.736 \frac{\text{дин}}{\text{см}^2} \text{с}, \quad \mu_\infty = 0.05 \frac{\text{дин}}{\text{см}^2} \text{с}, \quad \lambda = 14.81 \text{ с}, [24].$$

### 1.3 Одномерная модель течения жидкости

Для получения одномерной модели из трёхмерной модели вводится ряд упрощений [10]:

1. В сосуде предполагается осевая симметрия и он рассматривается в виде прямого цилиндра, ось которого ориентирована по  $z$ .
2. Смещение данной оси во времени отсутствует и имеются только радиальные деформации.
3. Давление вдоль поперечного сечения является постоянным:  $p = p(z, t)$ .
4. Предполагается, что осевая скорость  $u_z$  преобладает над радиальной компонентой.
5. Предполагается, что осевая компонента скорости имеет вид:

$$u_z(t, r, z) = U(t, z) s \left( \frac{r}{R(t, z)} \right), \quad (13)$$

где  $U(t, z)$  – средняя скорость в точке на  $z$ ,  $R$  – радиус сечения в текущий момент времени,  $s$  – безразмерный профиль скорости, который удовлетворяет следующим условиям:

$$\int_0^1 y s(y) dy = \frac{1}{2}. \quad (14)$$

Данное условие получается из определения средней скорости:

$$U(t, z) = \frac{\iint_{\Pi} u_z d\gamma}{A(t, z)} = \frac{\iint_{\Pi} u_z d\gamma}{\pi R^2(t, z)}, \quad (15)$$

где  $\Pi$  – поперечное сечение сосуда, по которому производится интегрирование. В выражении (15) для получения (14) учитывается следующее:

$$\iint_{\Pi} u_z d\gamma = 2\pi R^2 U \int_0^1 y s(y) dy \quad (16)$$

В результате, одномерная модель имеет представленный вид, полученный осреднением трёхмерных уравнений:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = f(A, Q), \quad (18)$$

где  $Q$  — объёмный расход,  $A$  — площадь сечения,  $\rho$  — плотность,  $z$  — пространственная координата по длине сосуда,  $t$  — время,  $\alpha$  — коэффициент Буссинеска, который выражает отношение количества движения жидкости, протекающего в единицу времени через поперечное сечение, к количеству движения, вычисленному по средней скорости. Он имеет следующий вид:

$$\alpha = \frac{\int u_z^2 d\gamma}{AU^2} = \frac{\int s^2 \gamma}{A}. \quad (19)$$

Для замыкания системы (17) — (18), в которой имеется три неизвестных переменных, необходимо добавить третье уравнение, описывающее зависимость давления от площади поперечного сечения:

$$p = p(A) = \frac{\sqrt{\pi} H E \sqrt{A - A_{min}}}{1 - \nu^2 A_{min}} + P_{min}, \quad (20)$$

где  $A_{min}$  и  $P_{min}$  минимальные площадь и давление соответственно,  $H$  — толщина стенки,  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Необходимо отметить, что в рамках одномерных моделей неньютоновские свойства учитываются в малом числе работ. Только в [8, 11] рассмотрено поведение крови как неньютоновской жидкости в крупных артериальных системах с использованием одномерных моделей. В наиболее значительной, посвящённой этой теме работе [12] представлена одномерная модель, учитывающая свойства крови, зависящие от времени. В этой работе реологическая модель основана на вязкоупругом уравнении Максвелла для напряжения сдвига со структурно-зависимыми коэффициентами. По итогу, в данной статье было показано, что численные результаты, полученные с помощью одномерной модели, из данной статьи сопоставимы с экспериментальными данными из литературы (например из [13]).

## 1.4 Выводы

В качестве физической модели крови можно рассматривать однородную несжимаемую неньютоновскую жидкость. При этом в литературе предложено много моделей крови как неньютоновской жидкости. В то же время, учёт неньютоновости в одномерных моделях производился в малом числе работ, в связи с чем такая задача в настоящее время является актуальной.

Таким образом цель данной работы: построение и апробация одномерных математических моделей, учитывающих неньютоновские свойства крови. Для её достижения необходимо решить следующие задачи:

1. Построение одномерных математических моделей течения крови как неньютоновской жидкости.
2. Программная реализация алгоритмов численных методов решения задач.
3. Анализ полученных результатов и сравнение моделей между собой.

## 2 Математические модели

### 2.1 Неньютоновские одномерные модели

В зависимости от уравнения (6), системы вида (17) — (18) будут отличаться видом члена  $f(A, Q)$ . При этом выражение для коэффициента зависит от безразмерного профиля скорости, характерного для используемой модели неньютоновской среды. Далее приведём данные выражения.

Рассмотрим степенную модель (7). Для неё правая часть  $f(A, Q)$ , полученная в результате осреднения трёхмерной модели, имеет вид:

$$f(A, Q) = K \frac{Q |Q|^{n-1}}{A^{\frac{3n-1}{2}}}, \quad (21)$$

$$K = \frac{2k s'(1) |s'(1)|^{n-1} \pi^{\frac{n+1}{2}}}{\rho},$$

Профиль скорости для неньютоновской жидкости, вообще говоря, отличаются от ньютоновской [15]. Само выражение для этого профиля получается при решении задачи о стационарном течении в цилиндрической трубе постоянного сечения [16]. Аналитическое решение такой задачи в случае степенной модели имеет вид [15]:

$$s(y) = \frac{3n+1}{n+1} \left(1 - y^{1+\frac{1}{n}}\right), \quad (22)$$

и при  $n = 1$  оно превращается в выражение для ньютоновской. Коэффициент Буссинеска в данном случае вычисляется по формуле:

$$\alpha = \frac{3n+1}{2n+1}.$$

Однако для моделей учитывающих предельные случаи  $\mu_0$  и  $\mu_\infty$  аналитического решения аналогичного (22) получить нельзя. Поэтому для использования в данных моделях предлагается брать  $s(y)$  в виде степенной функции:

$$s(y) = \left(1 + \frac{2}{d}\right) (1 - y^d). \quad (23)$$

Таким образом задача о влиянии профиля сводится к задаче о варьировании параметра  $d$ . В связи с этим коэффициент Буссинеска также будет рассчитываться в зависимости от  $d$ :

$$\alpha = \frac{d+2}{d+1}. \quad (24)$$

Приведём правые части  $f(A, Q)$  для данных моделей. Для модели Карро – Иосиды  $f(A, Q)$  имеет вид:

$$f(A, Q) = K_1 \frac{Q}{A} + K_2 \left(1 + K_3 \frac{|Q|^a}{A^{3a/2}}\right)^{\frac{n-1}{a}} \frac{Q}{A}, \quad (25)$$

$$K_1 = \frac{2\pi s'(1)\mu_\infty}{\rho}, \quad K_2 = \frac{2\pi s'(1)(\mu_0 - \mu_\infty)}{\rho}, \quad K_3 = \lambda^a \pi^{\frac{a}{2}} |s'(1)|^a,$$

Для моделей Кросса (9)  $f(A, Q)$  имеет вид:

$$f(A, Q) = K_1 \frac{Q}{A} + K_2 \frac{1}{\left(1 + K_3 \frac{|Q|^m}{A^{3m/2}}\right)^a} \frac{Q}{A}, \quad (26)$$

$$K_1 = \frac{2\pi s'(1)\mu_\infty}{\rho}, \quad K_2 = \frac{2\pi s'(1)(\mu_0 - \mu_\infty)}{\rho}, \quad K_3 = \lambda^m \pi^{\frac{m}{2}} |s'(1)|^m.$$

Выражения для обычной модели Пауэлла-Эйринга (10):

$$f(A, Q) = K_1 \frac{Q}{A} + K_2 \operatorname{asinh} \left( K_3 \frac{|Q|}{A^{3/2}} \right) \operatorname{sign}(Q) \sqrt{A}, \quad (27)$$

$$K_1 = \frac{2\pi s'(1)\mu_\infty}{\rho}, \quad K_2 = \frac{2\pi s'(1)(\mu_0 - \mu_\infty)}{\rho \lambda^m \pi^{\frac{m}{2}} |s'(1)|^m}, \quad K_3 = \lambda \sqrt{\pi} |s'(1)|.$$

Выражения для модифицированной модели Пауэлла-Эйринга (11):

$$f(A, Q) = K_1 \frac{Q}{A} + K_2 \ln \left( 1 + K_3 \frac{|Q|}{A^{3/2}} \right) \frac{A^{(3m-2)/2}}{|Q|^{m-1}} \operatorname{sign}(Q), \quad (28)$$

$$K_1 = \frac{2\pi s'(1)\mu_\infty}{\rho}, \quad K_2 = \frac{2\pi s'(1)(\mu_0 - \mu_\infty)}{\rho \lambda^m \pi^{\frac{m}{2}} |s'(1)|^m}, \quad K_3 = \lambda \sqrt{\pi} |s'(1)|.$$

Выражения для модели Елесварапу (12):

$$f(A, Q) = K_1 \frac{Q}{A} + K_2 \frac{1 + \ln \left( 1 + K_3 \frac{|Q|}{A^{3/2}} \right)}{1 + K_3 \frac{|Q|}{A^{3/2}}} \frac{Q}{A}, \quad (29)$$

$$K_1 = \frac{2\pi s'(1)\mu_\infty}{\rho}, \quad K_2 = \frac{2\pi s'(1)(\mu_0 - \mu_\infty)}{\rho}, \quad K_3 = \lambda \sqrt{\pi} |s'(1)|.$$

## 2.2 Разностные схемы

В связи с тем, что система (17) — (18) является нелинейной, в общем случае аналитическое решение её невозможно и она решается только численно. Для численного решения необходимо ввести сетку на области определения вектора  $\mathbf{U} = (A, Q)^T$ , с шагами  $\Delta z$  — по  $z$  и  $\Delta t$  по  $t$ . С данной сеткой связаны значения  $N, T$  — количество шагов по пространству и по времени соответственно. Узлы сетки будем обозначать индексами:  $i = \overline{1, \dots, N+1}$  и  $j = \overline{1, \dots, T+1}$ .

Систему уравнений (17) — (18) можно представить в дивергентной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial z} = \mathbf{f}(\mathbf{U}),$$

где

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \left( \begin{array}{c} Q \\ \alpha \frac{Q^2}{A} + \int_{A_{\min}}^A \frac{\tau}{\rho} \frac{dP}{dA}(\tau) d\tau \end{array} \right), \quad \mathbf{f}(\mathbf{U}) = \left( \begin{array}{c} 0 \\ f(A, Q) \end{array} \right).$$

Здесь  $f(A, Q)$  являются вязким членом, примеры для которого описаны в пункте 2.1, а  $\mathbf{F}(\mathbf{U})$  есть вектор потоков. Заменяв в выражении (30) частные производные на разностные производные первого порядка, получим:

$$\frac{\mathbf{U}_i^{j+1} - \mathbf{U}_i^j}{\Delta t} + \frac{\mathbf{F}_{i+1} - \mathbf{F}_i}{\Delta z} = \mathbf{f}(\mathbf{U}_i^j). \quad (30)$$

Дальнейший вид разностной схемы зависит от выбранного приближения для потока  $\mathbf{F}$ . Одним из таких приближений является поток Русанова [4]:

$$\mathbf{F}_i^{Rus} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_{i-1} + \mathbf{F}_i) - \frac{1}{2}S^+(\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_{i-1}), \quad (31)$$

где  $S^+$  некоторая характерная скорость. Она может быть выбрана таким образом:

$$S^+ = \max\{|u_i + c_i|, |u_i - c_i|, |u_{i-1} + c_{i-1}|, |u_{i-1} - c_{i-1}|\},$$

где  $u = Q/A$  – скорость жидкости, а  $c$  – скорость пульсовой волны. Подставив выражение (31) в (30) и выразив  $\mathbf{U}_i^{j+1}$ , получим разностную схему:

$$\mathbf{U}_i^{j+1} = \mathbf{U}_i^j + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta z} (S^+ (\mathbf{U}_{i+1}^j + \mathbf{U}_{i-1}^j - 2\mathbf{U}_i^j) - (\mathbf{F}_{i+1}^j - \mathbf{F}_{i-1}^j)) + \Delta t \mathbf{f}(\mathbf{U}_i^j).$$

В случае если выбрать  $S^+ = \frac{\Delta z}{\Delta t}$  то выражение (31) превратится в поток Лакса-Фридрикса:

$$\mathbf{F}_i^{LF} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_{i-1} + \mathbf{F}_i) - \frac{1}{2} \frac{\Delta z}{\Delta t} (\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_{i-1}).$$

Тогда разностная схема полученная путём подстановки (32) в (30) примет более простой вид, чем в случае с потоком Русанова:

$$\mathbf{U}_i^{j+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}_{i+1}^j + \mathbf{U}_{i-1}^j) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta z} (\mathbf{F}_{i+1}^j - \mathbf{F}_{i-1}^j) + \Delta t \mathbf{f}(\mathbf{U}_i^j).$$

Обе полученные схемы являются одношаговыми схемами первого порядка. Рассмотрим двушаговую схему второго порядка. В данной работе в качестве такой схемы выбрана схема МакКормака [5]. Первый шаг называется предиктором:

$$\mathbf{U}_i^* = \mathbf{U}_i^j - \frac{\Delta t}{\Delta z} (\mathbf{F}_{i+1}^j - \mathbf{F}_i^j) + \Delta t \mathbf{f}(\mathbf{U}_i^j).$$

Второй шаг называемый корректором:

$$\mathbf{U}_i^{j+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}_i^j + \mathbf{U}_i^*) - \frac{\Delta t}{2\Delta z} (\mathbf{F}_i^* - \mathbf{F}_{i-1}^*) + \Delta t \mathbf{f}(\mathbf{U}_i^*),$$

где  $\mathbf{F}^*$  вычисляется на основе решения  $\mathbf{U}^*$ , полученного предиктором.

Так как данная схема является схемой второго порядка, предполагается, что она будет давать более точные решения на более грубой сетке. Это поможет сократить время, затрачиваемое на вычисления при решении задач.

## 2.3 Начальные и граничные условия

### 2.3.1 Начальные условия

Для каждой задачи принимается, что в начальный момент времени жидкость в сосудах покоится, а значит в связи с отсутствием движения жидкости поток в каждой точке  $z$  равен нулю. Начальные значения  $A$  задаётся в зависимости от  $z$ . Таким образом:

$$A(0, z) = A(z), \quad Q(0, z) = 0. \quad (32)$$

### 2.3.2 Условия на входе в систему

В условиях на входе в систему задаётся расход в виде функции зависящей от времени:

$$Q(t, 0) = Q_i(t).$$

Также на входе ставится условие совместности, которое описывает поведение решения вдоль характеристики выходящей из вычислительной области в этой точке, и используется для определения значения  $A$  [6]:

$$\mathbf{I}_1 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \lambda_1 \mathbf{I}_1 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} = \mathbf{I}_1 \mathbf{f},$$

где  $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_1(\mathbf{U})$  левый собственный вектор матрицы системы (17) — (18), отвечающий собственному значению  $\lambda_1 = \lambda_1(\mathbf{U})$ .

### 2.3.3 Условия на выходе из системы

На выходе задаётся условие совместности:

$$\mathbf{I}_2 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \lambda_2 \mathbf{I}_2 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} = \mathbf{I}_2 \mathbf{f},$$

где  $\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_2(\mathbf{U})$  левый собственный вектор матрицы системы (17) — (18), отвечающий  $\lambda_2 = \lambda_2(\mathbf{U})$ , а также неотражающее условие, гарантирующее свободный выход возмущения за границу области [7]:

$$\mathbf{I}_1 \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \mathbf{f} \right) = 0.$$

Также граничное условие может ставиться в виде:

$$Q = \frac{p - p_{out}}{R_p}, \quad (33)$$

где  $p_{out}$  — постоянное гидростатическое давление за пределами рассматриваемой системы, которое учитывает остальную часть сердечно-сосудистой системы, а  $R_p$  — периферическое сопротивление сосудов на выходе из системы. Данное условие имитирует реальные условия на выходах из модели.

### 2.3.4 Условия в узлах сочленения и бифуркации

В узлах сочленения сосудов ставятся условия сохранения расхода и непрерывности давления, а также условия совместности:

$$Q_1 = Q_2, P_2 = P_1, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_2(\mathbf{U}_1) \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial t} + \lambda_2(\mathbf{U}_1) \mathbf{I}_2(\mathbf{U}_1) \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial z} &= \mathbf{I}_2(\mathbf{U}_1) \mathbf{f}(\mathbf{U}_1), \\ \mathbf{I}_1(\mathbf{U}_2) \frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial t} + \lambda_1(\mathbf{U}_2) \mathbf{I}_1(\mathbf{U}_2) \frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial z} &= \mathbf{I}_1(\mathbf{U}_2) \mathbf{f}(\mathbf{U}_2), \end{aligned} \quad (35)$$

где  $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_1(\mathbf{U})$  левый собственный вектор матрицы системы (17) — (18), отвечающий собственному значению  $\lambda_1 = \lambda_1(\mathbf{U})$ . Аналогично ставятся условия в точках бифуркации:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3, P_2 = P_1, P_3 = P_1, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_2(\mathbf{U}_1) \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial t} + \lambda_2(\mathbf{U}_1) \mathbf{I}_2(\mathbf{U}_1) \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial z} &= \mathbf{I}_2(\mathbf{U}_1) \mathbf{f}(\mathbf{U}_1), \\ \mathbf{I}_1(\mathbf{U}_2) \frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial t} + \lambda_1(\mathbf{U}_2) \mathbf{I}_1(\mathbf{U}_2) \frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial z} &= \mathbf{I}_1(\mathbf{U}_2) \mathbf{f}(\mathbf{U}_2), \\ \mathbf{I}_1(\mathbf{U}_3) \frac{\partial \mathbf{U}_3}{\partial t} + \lambda_1(\mathbf{U}_3) \mathbf{I}_1(\mathbf{U}_3) \frac{\partial \mathbf{U}_3}{\partial z} &= \mathbf{I}_1(\mathbf{U}_3) \mathbf{f}(\mathbf{U}_3). \end{aligned} \quad (37)$$

В выражениях (35) и (36) производные по пространству и времени заменяются разностными производными. В результате получается система нелинейных уравнений из которых с помощью метода Ньютона находятся значения векторов  $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3$ .

## 2.4 Результаты

В рамках Главы 2 получены следующие результаты:

1. Приведены выражения для вязкого члена  $f$ , соответствующие известным реологическим моделям крови как неньютоновской жидкости.
2. Рассмотрены разностные схемы, которые могут быть применены к решению задач для системы (17) — (18).
3. Представлены начальные и граничные условия для задач, описывающих течение крови в сосудистых системах.

## 3 Вычислительный эксперимент

### 3.1 Программа для расчётов

Программа используемая для решения поставленной задачи, была написана на языке C++. Для хранения информации об отдельном сосуде в системе использовался класс `vessel`, который содержал в себе: `h` — длину шага по  $z$ , `size` — количество узлов в сетке, `L` — длину сосуда, `Amin` — минимальная площадь сечения сосуда, `Rmax` — радиус сечения на входе в сосуд, `Rmin` — радиус сечения на выходе из сосуда, `Rp` — периферическое давление, `beta` — параметр, отражающий свойства стенок сосуда, `R1_c` и `R2_c` — параметры отвечающие за хранение информации о том, является ли сосуд первым в системе и является ли он последним в системе соответственно. В зависимости от задачи и положения сосуда в системе, некоторые из перечисленных параметров могли быть не использованы и назначались равными нулю. Помимо этого класс `vessel` содержал пространственную сетку `grid` в виде контейнера, содержащего множество из `size` элементов класса `VesselGridValues`, который содержит набор элементов, отвечающих одному конкретному узлу сетки: `A`, `P`, `Q`, `z`.

Программа хранила исследуемую систему сосудов в виде массива объектов `vessel`, который имел два экземпляра: отражающие состояние сосуда на текущем шаге по времени `vesselsOut` и на предыдущем `vesselsIn`. Данные массивы инициализировались поэлементно, в цикле, на основе заранее сформированных массивов с параметрами.

Основной цикл программы состоял из общего цикла, отражающего шаг по времени, последовательно производились следующие операции:

1. В цикле по элементам массива `vesselsIn` вызывалась функция, рассчитывающие значения массива `vesselsOut` на основе используемой разностной схемы. В данной функции также применялись условия на входе в систему и условия на выходе из системы для сосудов помеченных параметрами `R1_c` и `R2_c` соответственно.
2. В цикле по элементам массива `splice`, содержащим информацию о сочленённых сосудах, проводился расчёт граничных значений на основе условия в узлах сочленения.
3. Аналогично предыдущему случаю, в цикле по элементам массива `bifur` применялось условие в точках бифуркации.
4. Проводились записи численных значений в исследуемых узлах системы в выходной файл. Сохранялись максимальные значения, используемые для некоторых количественных расчетах в задаче.
5. В рамках подготовки к следующей итерации цикла элементы массива `vesselsOut` становились элементами массива `vesselsIn`.
6. Периодически, для удобства пользования программой, производился расчёт оставшегося времени работы программы, на основе уже затраченного времени.

Для того чтобы имелась возможность запуска программы с различными моделями вязкости, параметрами и разностными схемами, некоторые фрагменты программы включались в неё на этапе компиляции при помощи команд препроцессора и зависели от параметров компиляции.

### 3.2 Выбор разностной схемы

Сравнение разностных схем проведём на модели системы, состоящей из 15 сосудов и содержащей 7 точек бифуркаций. Схема системы представлена на рис. 1. В таблице 1 приведены соответствующие сосудам длины. Все прочие параметры сосудов были взяты одинаковыми:  $A_{min} = 0.7854 \text{ см}^2$ ,  $\beta = 25523.1438 \text{ дин/см}$ .

В качестве условия на входе в систему брался расход  $Q_i(t)$ , который задаёт одиночную волну распространяющуюся по сосудам. Эту волну, имеющую характерный пик, будем называть основной. В ходе распространения по сосудам волна будет частично отражаться от бифуркаций. Полученные в результате этого волны будем называть вторичными. Соответствующий график расхода в зависимости от времени представлен на рис. 2.

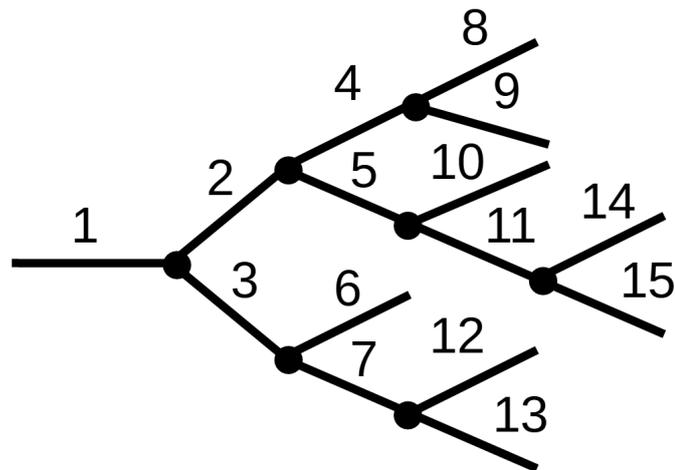


Рис. 1: Пример модели системы сосудов

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
L, cm	4.5	1	2.5	5	3	6	2.1	4	4.5	2	5	2	8	3	4

Таблица 1: Длины сосудов

Сравним разностные схемы на основе графика поведения  $Q$  от  $t$  в 11-ом сосуде. На рис.3 а) – с) показаны зависимости результатов расчётов по трём рассмотренным

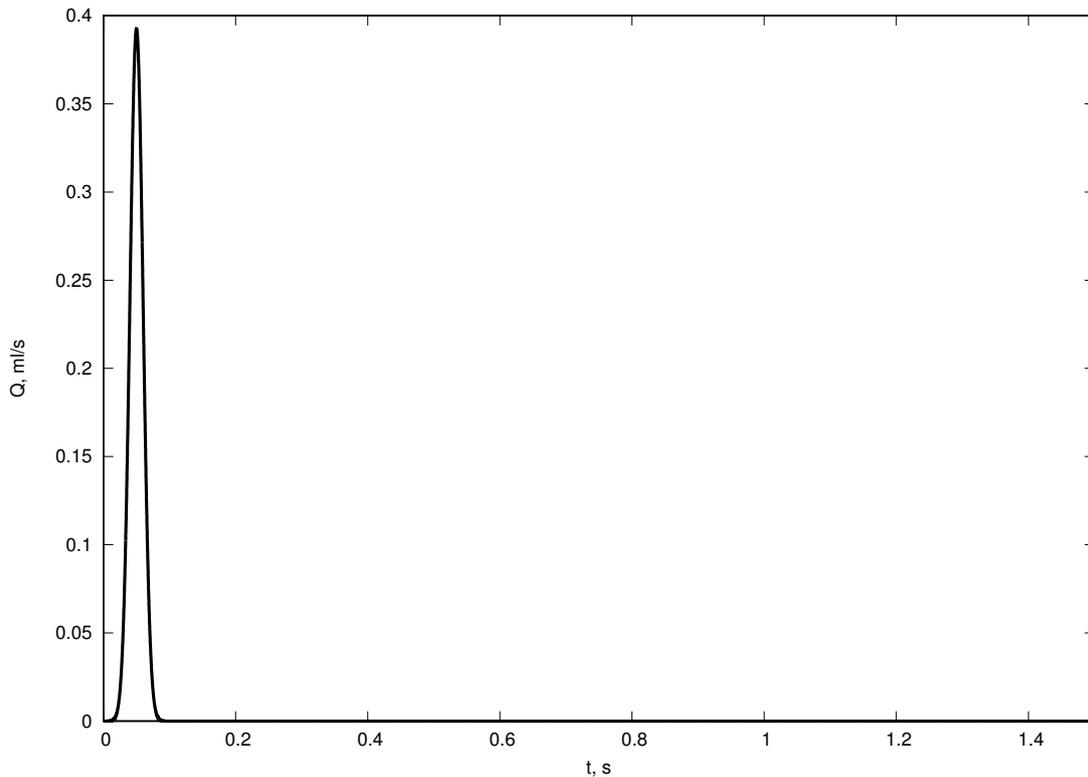


Рис. 2: Расход жидкости на входе в систему для модельных задач

схемам от выбранного значения  $N$  – числа промежутков в сетке по оси  $z$ . Можно заметить, что результат для схемы Лакса-Фридрихса (рис.3 а)) наиболее чувствителен к разбиению сетки. Амплитуда волны в полученном решении при  $N = 50$  в два раза меньше амплитуды волны при  $N = 250$  (амплитуда пика основной волны для  $N = 50$  на 49.4101% меньше чем амплитуда пика основной волны для  $N = 250$ ). Также при увеличении разбиения становятся более заметны эффекты, связанные с отражённой волной, которые значительно более выражены проявляются на на рис.3 б) и с). По всей видимости, это может быть связано с тем, что использованное в данном случае приближение для  $S^+$  является очень грубым, что приводит к наличию у схемы численной диссипации.

Численное решение полученное по схеме МакКормака (рис.3 с)) наименее чувствительно к размерности сетки. В полученных для неё результатах значения амплитуды для основного пика волны практически не различаются при значениях  $N = 50$  и  $N = 250$  (разница амплитуды основной волны, которая пришла со входа в систему, всего 0.07%). Основное различие при более крупном разбиении можно наблюдать в более сглаженных эффектах проявляющихся в результате отражения волн. Так амплитуда вторичной волны, которая возникла в результате отражения в узлах бифуркации, пик которой проходит в момент времени  $t = 0.1925$  при  $N = 50$  на 4.8814% больше чем амплитуда этой волны при  $N = 250$ . В связи с этим данную схему можно использовать с небольшими значениями  $N$  без значительных потерь в точности конечного решения.

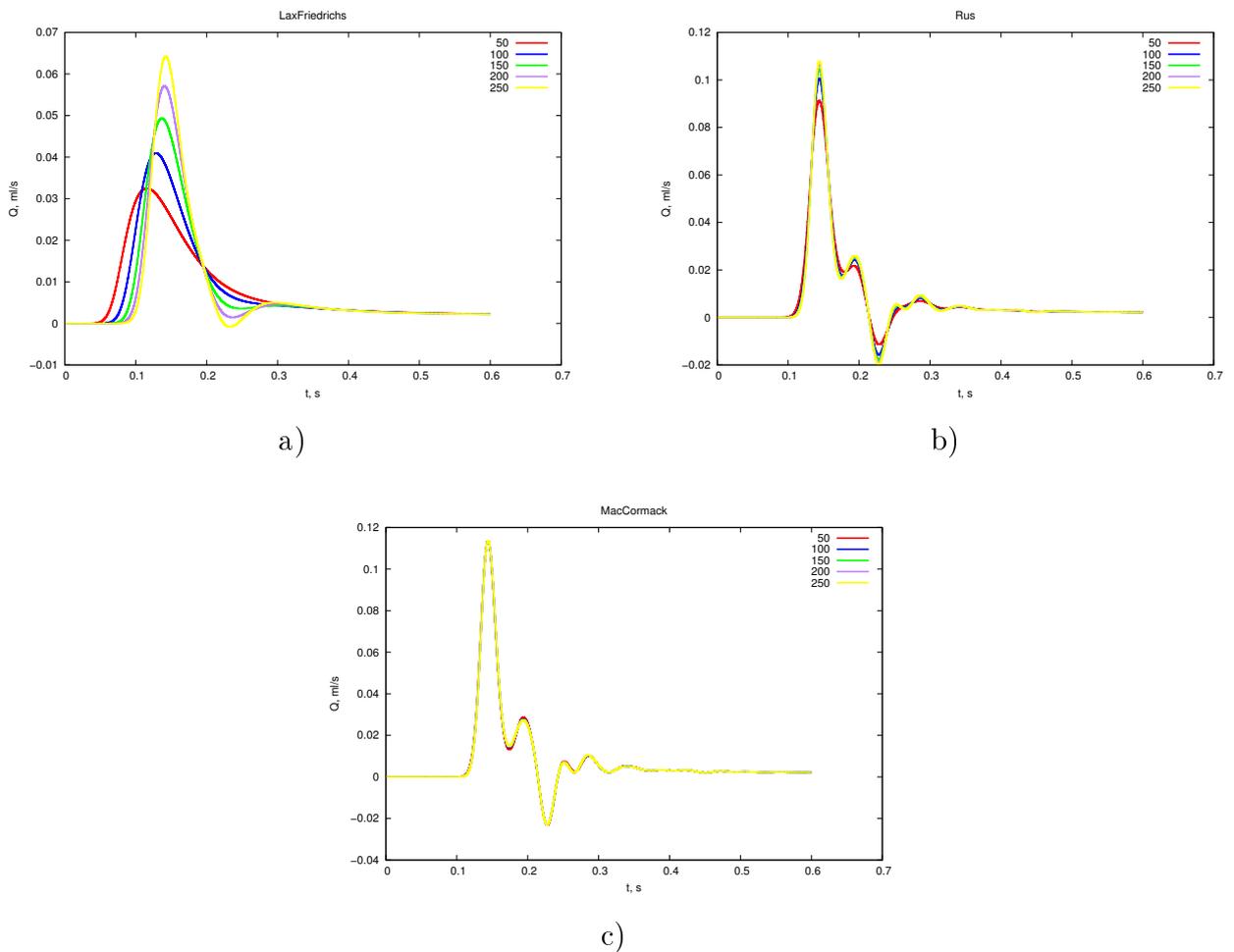


Рис. 3: Численные решения для различных схем: а) схема Лакса-Фридрихса, б) схема для потока Русанова, в) схема МакКормака

Такая высокая точность связана с тем, что схема МакКормака, в отличие двух других рассмотренных схем, является схемой второго порядка.

В свою очередь результаты полученные для схемы, использующей поток Русанова, (рис.3 б)) в отличие от схемы Лакса-Фридрихса отражают особенности вторичных волн, появившихся в результате отражений основной волны. Но она значительно уступает схеме МакКормака, что связано с зависимостью точности решения от размерности сетки. Эта зависимость не так велика как в случае схемы Лакса-Фридрихса и амплитуда основной волны для  $N = 50$  всего на 15.4995% меньше чем для  $N = 250$ .

На рис.4 а) и рис.4 б) можно сравнить результаты для представленных схем между собой. Можно видеть что схема Лакса-Фридрихса, как и было упомянуто ранее, не отражает особенностей решений полученных при использовании других схем. В свою очередь, результаты, полученные на основе схемы с потоком Русанова при сгущении сетки оказываются близки к результатам расчета по схеме МакКормака. Однако значительное увеличение  $N$  негативным образом сказывается на длительности работы программы в связи с чем использование схемы Русанова не рационально и при решении подобных задач лучше использовать схему МакКормака с небольшим значением  $N$ .

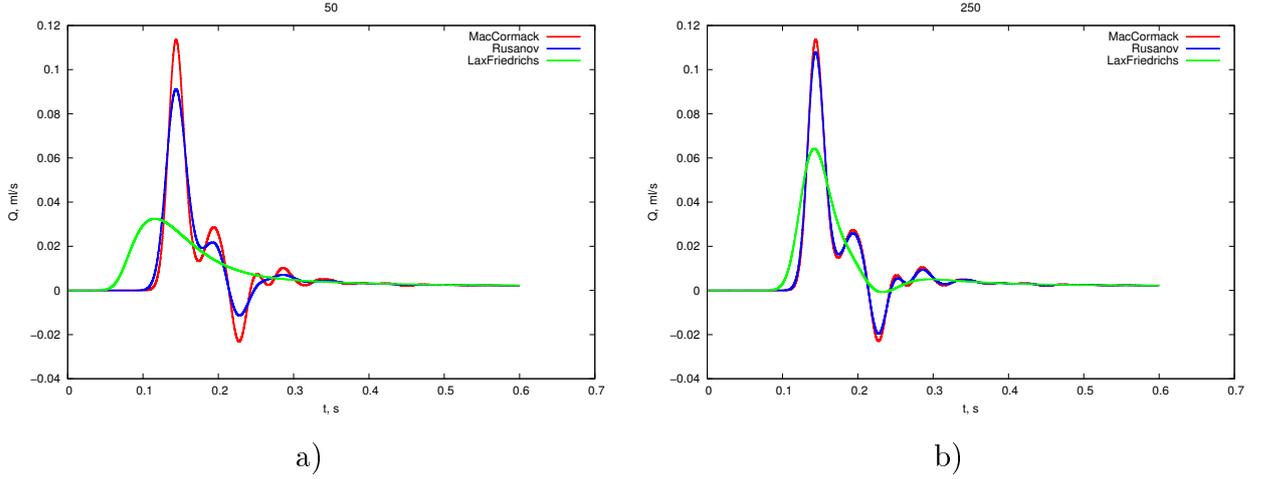


Рис. 4: Численные решения, полученные по рассмотренным схемам для  $N = 50, 250$

### 3.3 Задача о течении в одиночном сосуде

Рассмотрим одиночный сосуд длины  $L = 1000$  см с  $\beta = 1418000$  дин/см. Рассматриваемый промежуток по времени  $[0, 1.5]$ с. В качестве начального условия берётся  $A(0, z) = \pi$  см<sup>2</sup>.

#### 3.3.1 Результаты

В ходе решения сосуд разбивался на  $N = 40000$  промежутков по оси  $z$  и  $T = 150000$  промежутков по времени.

На рисунке 5 представлены графики решения для различных моделей в фиксированные моменты времени. Результаты для случаев неньютоновских моделей приведены для случая  $d = 2$ . Как можно видеть, неньютоновость существенно влияет на поведение решения, что приводит к более сильному затуханию амплитуд. В свою очередь на рисунке 6 представлены графики решения для степенной модели взятые при различных значениях  $n$ :  $n = 0.6$  [17],  $n = 0.9$  [18],  $n = 0.82$  [19]. Сравнивая приведённые на обоих рисунках графики, можно заметить, что для степенной модели при всех значениях  $n$  решение убывает слабее, чем для других моделей

Для сравнения решений, получаемых для разных моделей, предлагается использовать неньютоновский фактор – процентное отклонение от решения, полученного в случае ньютоновской модели:

$$I = \frac{\|Q_N - Q_{nn}\|}{\|Q_N\|} 100\% \quad (38)$$

где  $Q_N$  – численное решение при фиксированном значении  $z$  для ньютоновской модели, а  $Q_{nn}$  – численное решение при фиксированном значении  $z$  для неньютоновской модели. В рассматриваемой задаче условие на входе не является периодическим и волна имеет один выраженный пик, что позволяет свести выражение (38) к следующему:

$$I = \frac{\max(Q_N) - \max(Q_{nn})}{\max(Q_N)} 100\% \quad (39)$$

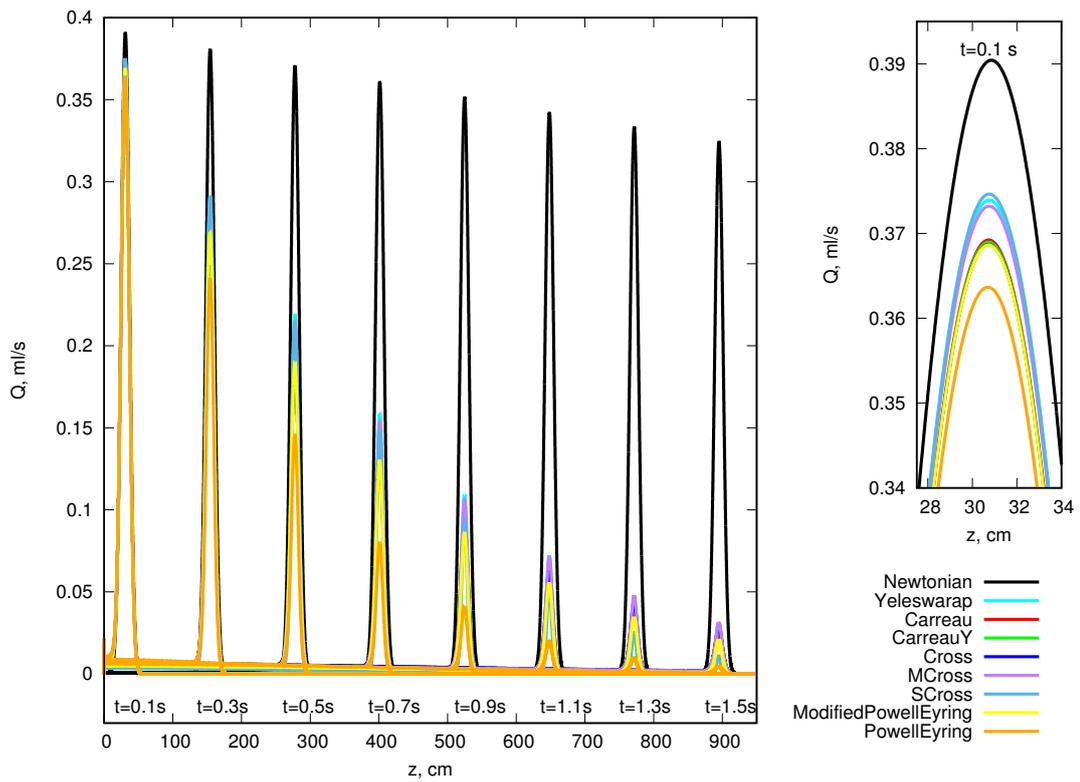


Рис. 5: Графики расхода в различные моменты времени для моделей крови

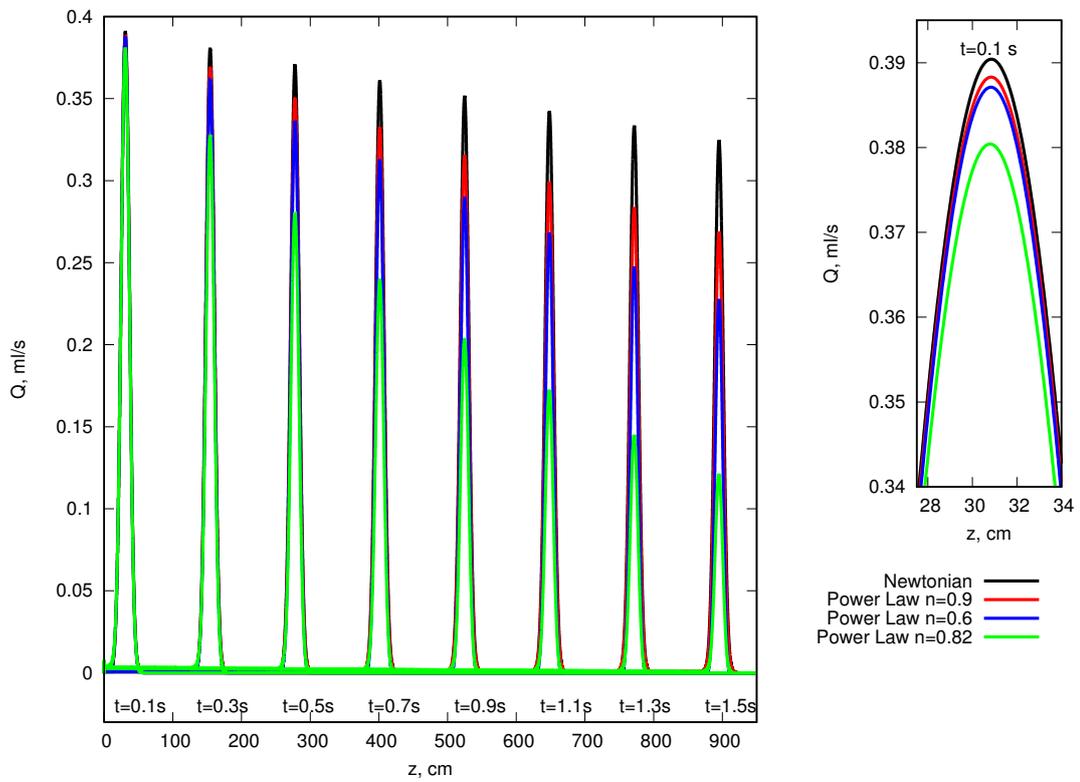


Рис. 6: Графики расхода в различные моменты времени для степенной модели крови

Полученная зависимость неьютоновского фактора в точке  $0.2L$  от значения параметра  $d$  представлена на рисунке 7. Можно видеть что для каждой модели отклонение увеличивается с ростом  $d$ . Наибольшее отклонение демонстрирует модель Пауэлла–Эйринга, наименьшее – упрощённая модель Кросса, за исключением случая, когда  $d = 2$ . Также был вычислен неьютоновский фактор для степенной модели: 6.56% для  $n = 0.6$ , 3.94% для  $n = 0.9$ , 17.83% для  $n = 0.82$ .

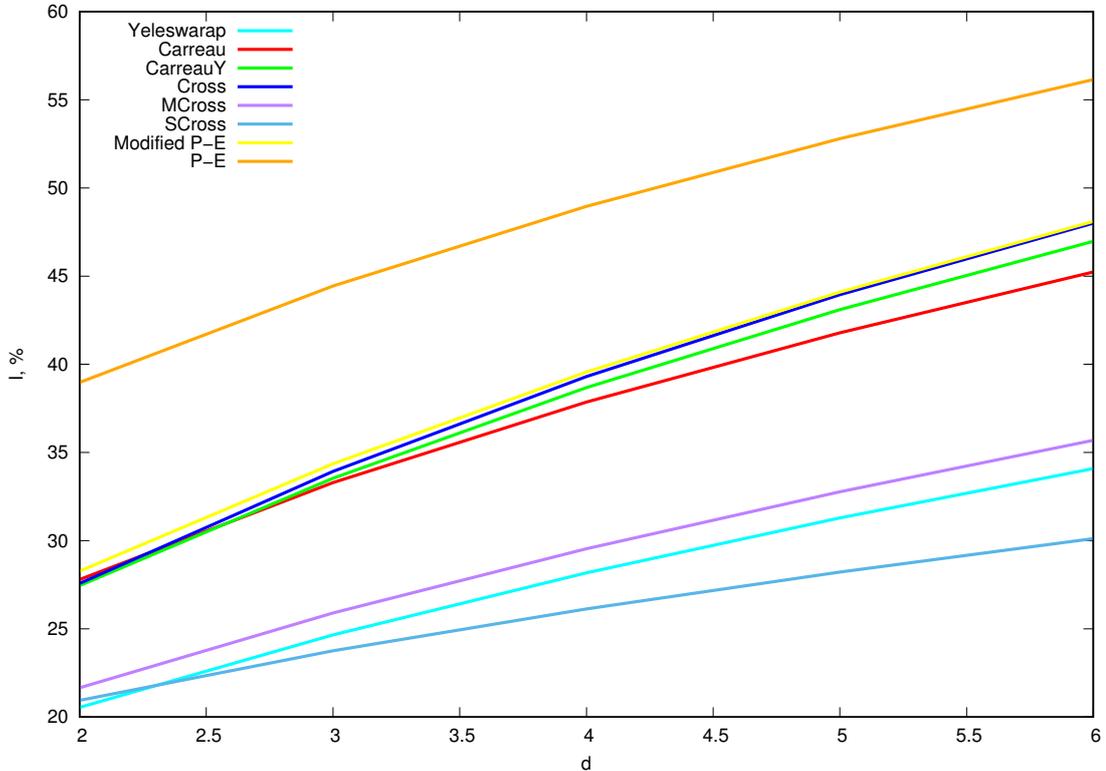


Рис. 7: Графики  $I$  в зависимости от  $d$

### 3.4 Задача о течении в сосуде с бифуркацией

Рассматривается сосуд длины 20 см с  $\beta = 25523.0841$  дин/см, который разветвляется на два дочерних сосуда длиной  $L = 20$  см с  $\beta = 10419.8774$  дин/см. Рассматриваемый промежуток по времени  $[0, 0.5]$  с. В качестве начальных условий берётся  $A(0, z) = \pi/4$  см<sup>2</sup> для входного сосуда, и  $A(0, z) = \pi/24$  см<sup>2</sup> для дочерних сосудов.

#### 3.4.1 Результаты

В ходе решения каждый сосуд разбивался на  $N = 2000$  промежутков по  $z$  и рассматривалось  $T = 10000$  промежутков по времени.

Результаты представлены на графиках в виде поведения  $Q$  в зависимости от времени в 5 точках: В – точка в середине родительского сосуда, С – точка в самом

конце родительского сосуда, D – точка в середине одного из дочерних сосудов, E – точка в самом конце дочернего сосуда.

На рисунке 8 и на рисунке 9 видно, решения ведут себя иначе, чем в случае задачи об одиночном сосуде – так, решение для модели Пауэлла – Эйринга не является наименьшим по величине амплитуды, а находится между решениями модели Карро и модифицированной модели Кросса. Это, по всей видимости, связано с тем, что в данной задаче использовался отличный от предыдущей задачи параметр  $\beta = \sqrt{\pi}HE/(1 - \nu^2)$ , который отражает эластичные свойства сосуда. Поэтому можно утверждать, что поведение решений для различных моделей может зависеть, в том числе, и от свойств сосуда. Помимо этого, на рисунке 10 и рисунке 11 можно заметить, что после перехода в дочерний сосуд соотношения между значениями амплитуд решений изменились в отличие от показанных на рисунке 8 и рисунке 9. Это связано с тем, что отражённая вторичная волна, появившаяся после прохождения основной волной точки бифуркации, имеет амплитуду, значит и часть объема жидкости, которая зависела не только от амплитуды изначальной волны, но и от использованной модели. Помимо этого, сравнивая рисунок 10 и рисунок 11 можно заметить, что на этот раз значение амплитуды у решения, полученного в случае модели Пауэлла – Эйринга, больше, чем для решения, отвечающего модели Yeleswarapu, чего не проявлялось в родительском сосуде (см. рис. 8-9). Это скорее всего, связано с тем, что для дочернего сосуда было взято другое (меньшее) значение  $\beta$  и меньший радиус.

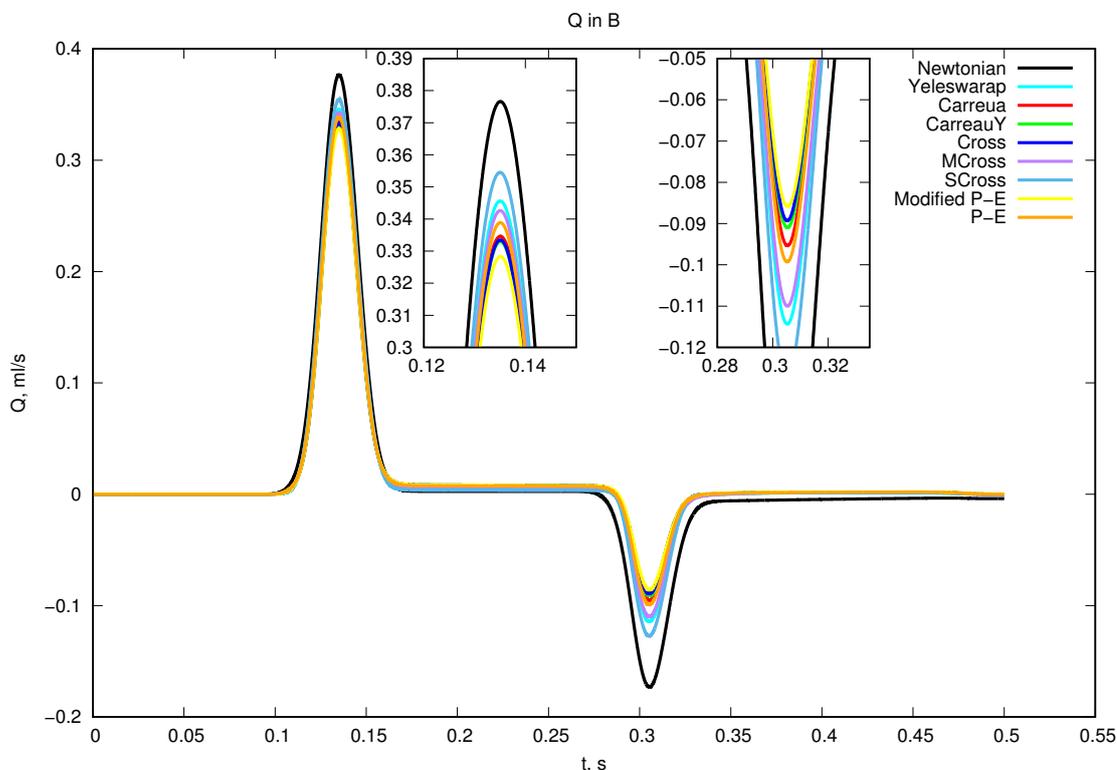


Рис. 8: Поведение  $Q$  в зависимости от времени в точке B для  $d = 2$

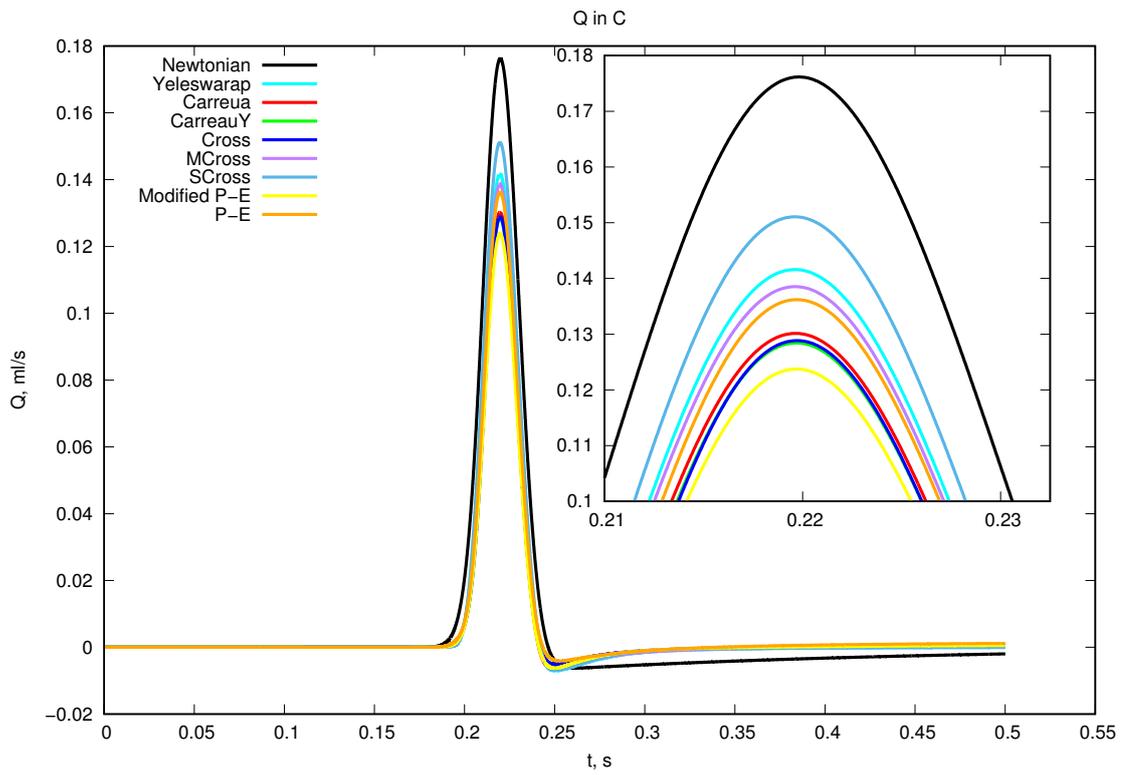


Рис. 9: Поведение  $Q$  в зависимости от времени в точке C для  $d = 2$

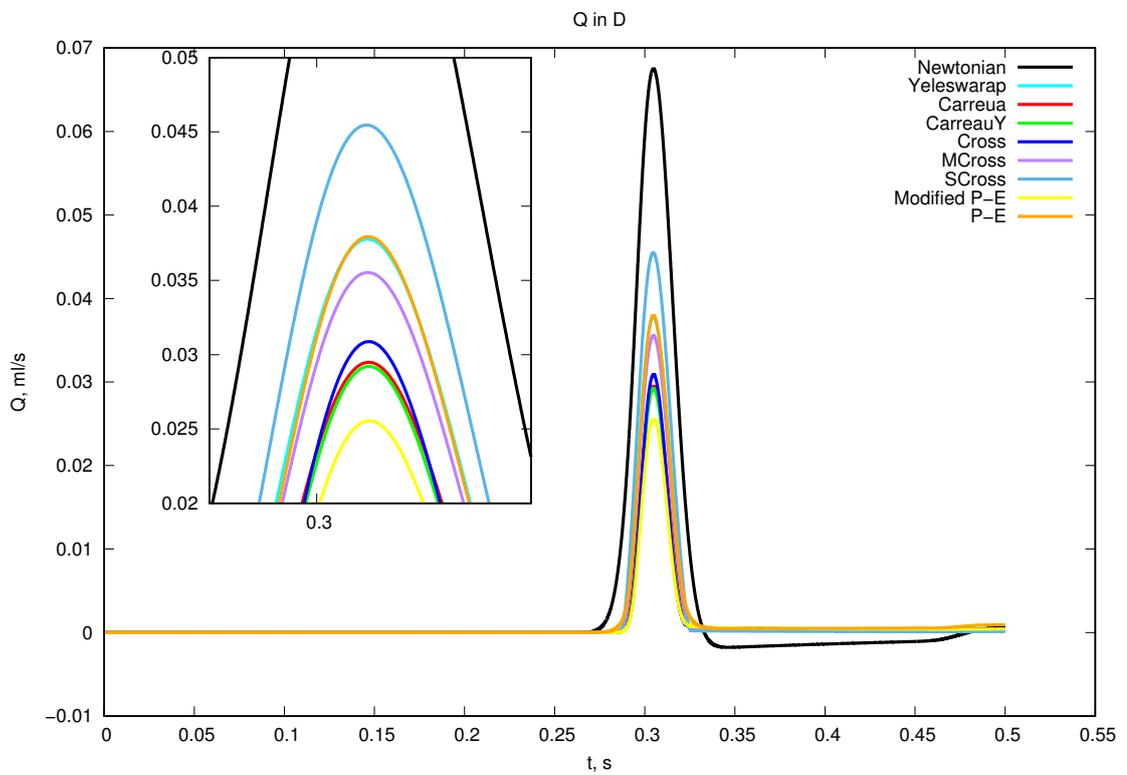


Рис. 10: Поведение  $Q$  в зависимости от времени в точке D для  $d = 2$

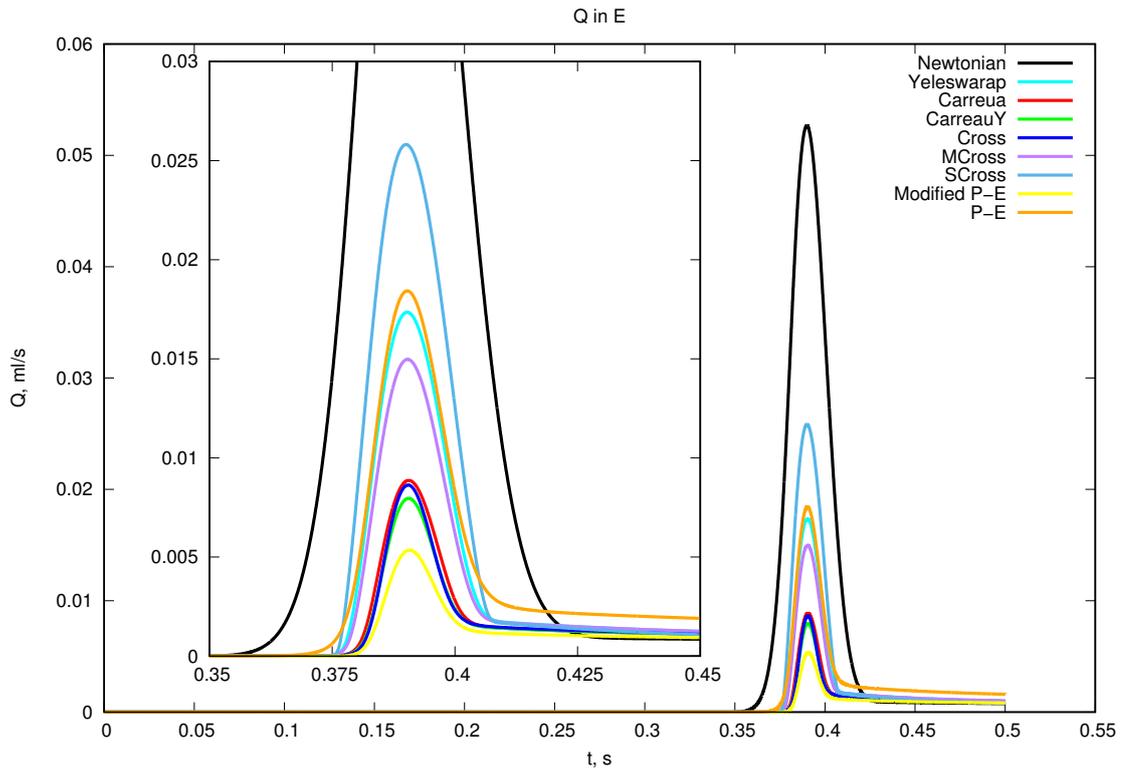


Рис. 11: Поведение  $Q$  в зависимости от времени в точке  $E$  для  $d = 2$

На рисунке 12 приведены значения неньютоновского фактора, который вычислен по аналогии с предыдущим случаем посредством формулы (39). Фиксированное значение  $z$  было взято в точке  $C$ . Здесь, как и в предыдущей задаче, можно видеть, что наименьшее отклонение демонстрирует решение, полученное для упрощённой модели Кросса, однако, наибольшее отклонение теперь показывает не решение для модели Пауэлла – Эйринга, а решение для модифицированной модели Пауэлла – Эйринга. Также можно заметить, что разбиение значений отклонений по условным "группам" здесь является менее явным, что может быть связано с происходящим отражением, так и с разными механическими свойствами родительского и дочерних сосудов.

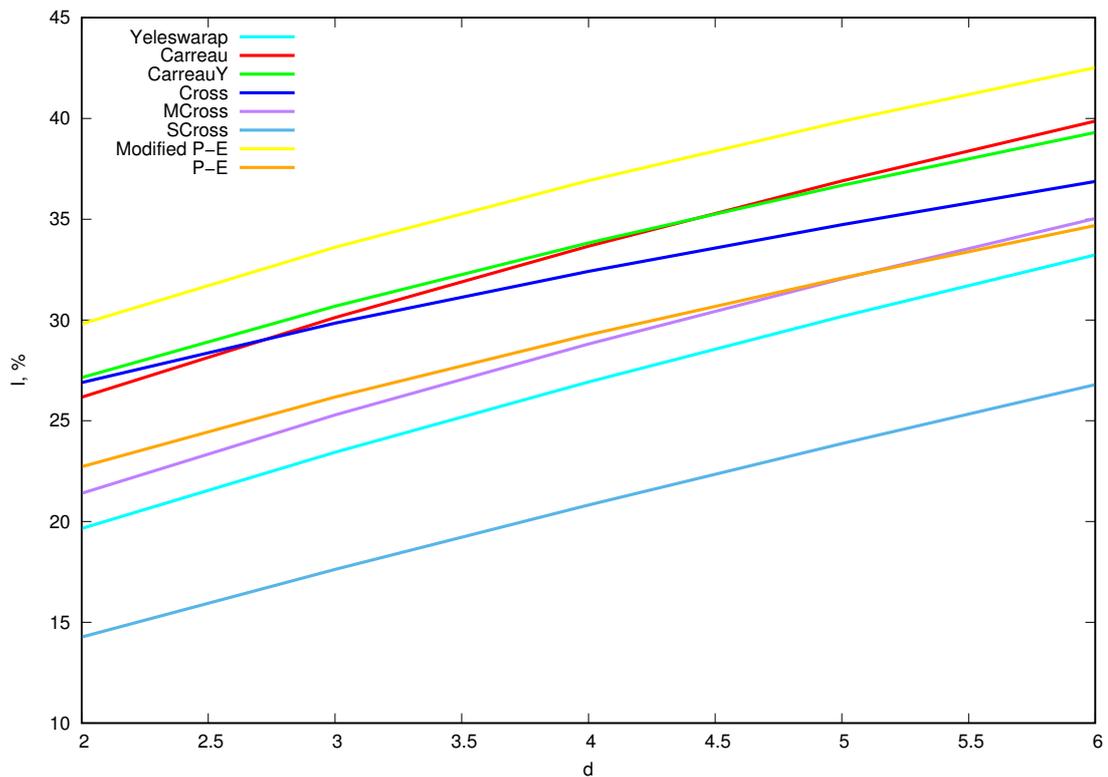


Рис. 12: Графики  $I$  в зависимости от  $d$

На рисунках 13 — 16 представлены графики решений для степенной модели. Также был вычислен неньютоновский фактор для решений полученных для степенных моделей в той же точке, что и для других моделей: 6.2313% для  $n = 0.6$ , 3.8217% для  $n = 0.9$ , 6.4891% для  $n = 0.82$ . На рисунках можно отчётливо проследить влияние свойств сосуда на изменение решения. Так в дочернем сосуде решения для ньютоновской модели затухает сильнее степенных моделей, чего не наблюдалось в родительском сосуде. Более того, из-за новых параметров сосуда расположение значений для степенных моделей относительно друг друга в первом сосуде отличаются от их расположения в предыдущей задаче. Так амплитуды для решений степенной модели при  $n = 0.9$  и  $n = 0.6$  уже в первом сосуде больше, чем амплитуда решения для ньютоновской жидкости, что не наблюдалось в первой задаче. Помимо этого можно увидеть, что порядок, в котором расположены значения решений для степенной модели также изменился.

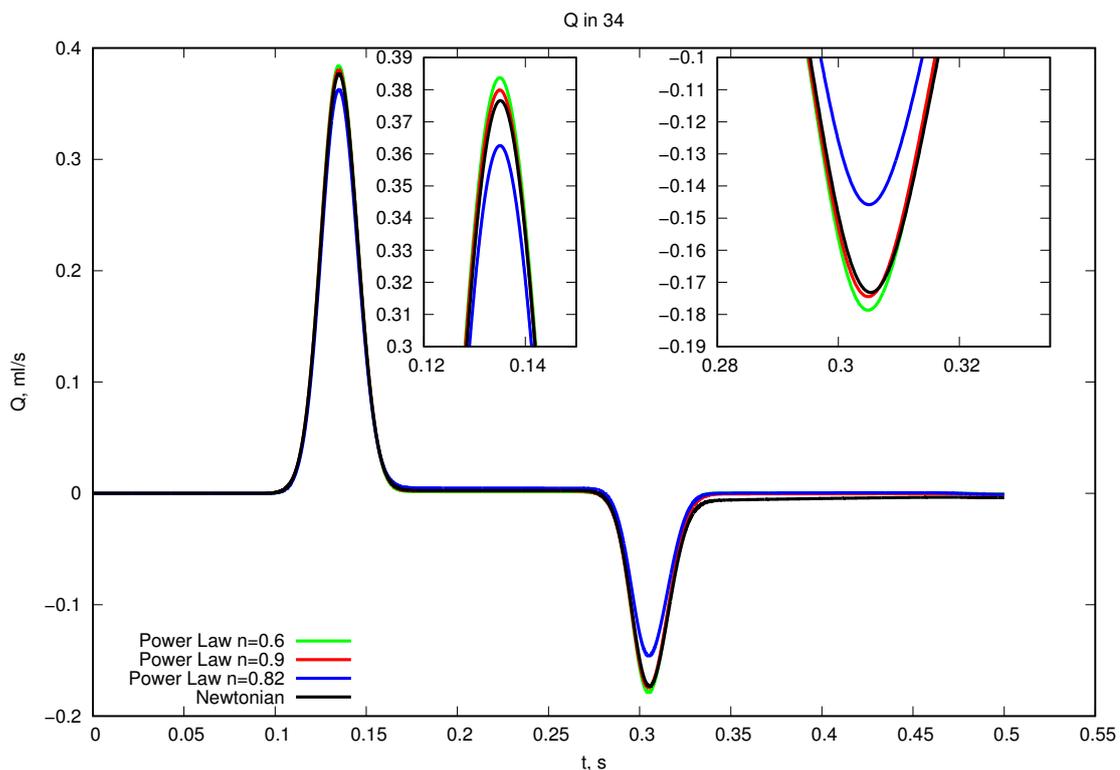


Рис. 13: Поведение  $Q$  в зависимости от времени в точке В для степенной модели

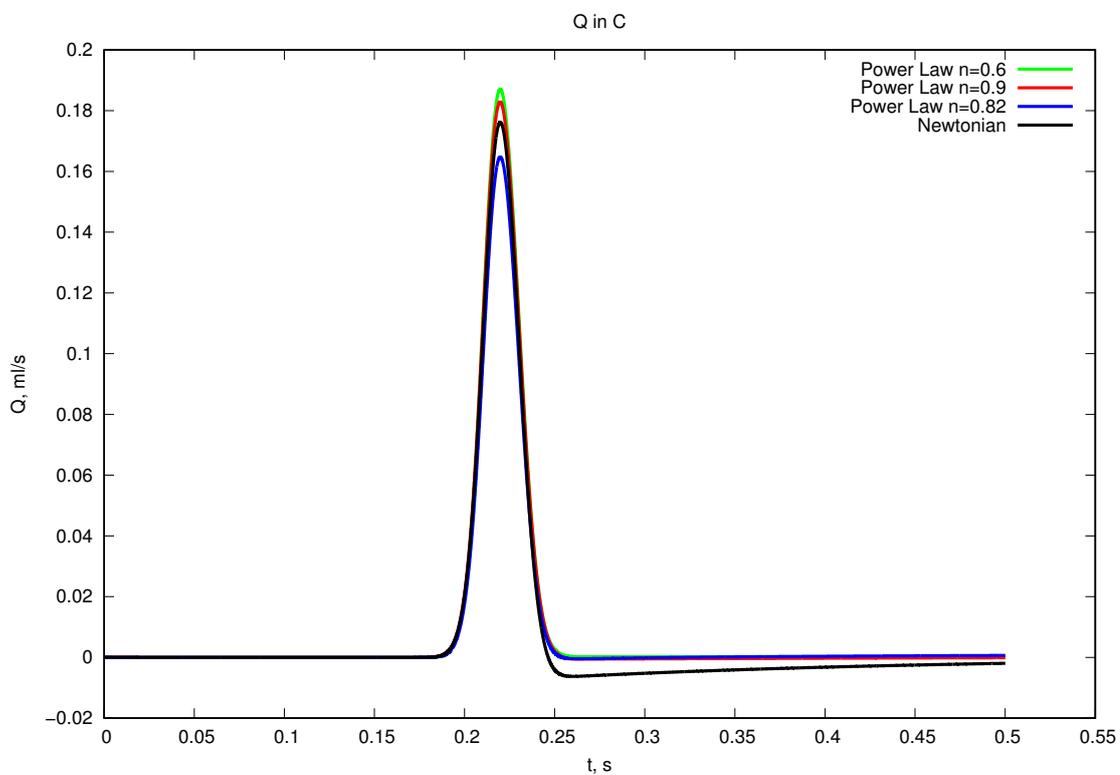


Рис. 14: Поведение  $Q$  в зависимости от времени в точке С для степенной модели

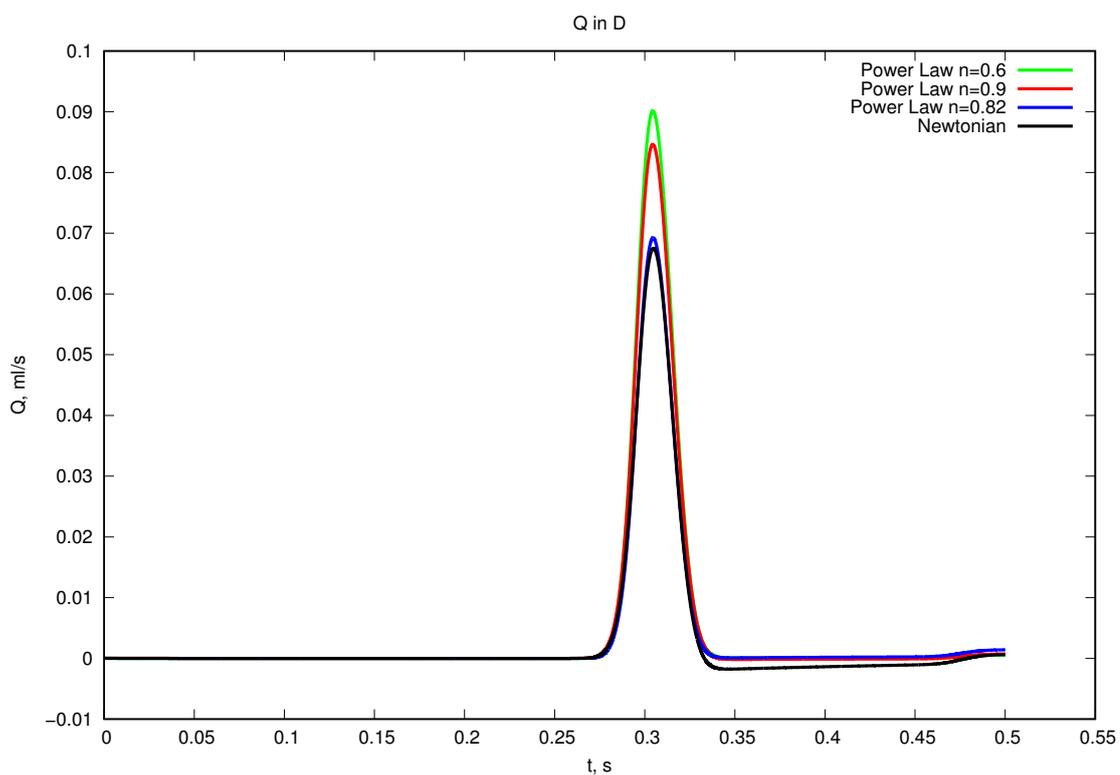


Рис. 15: Поведение  $Q$  в зависимости от времени в точке D для степенной модели

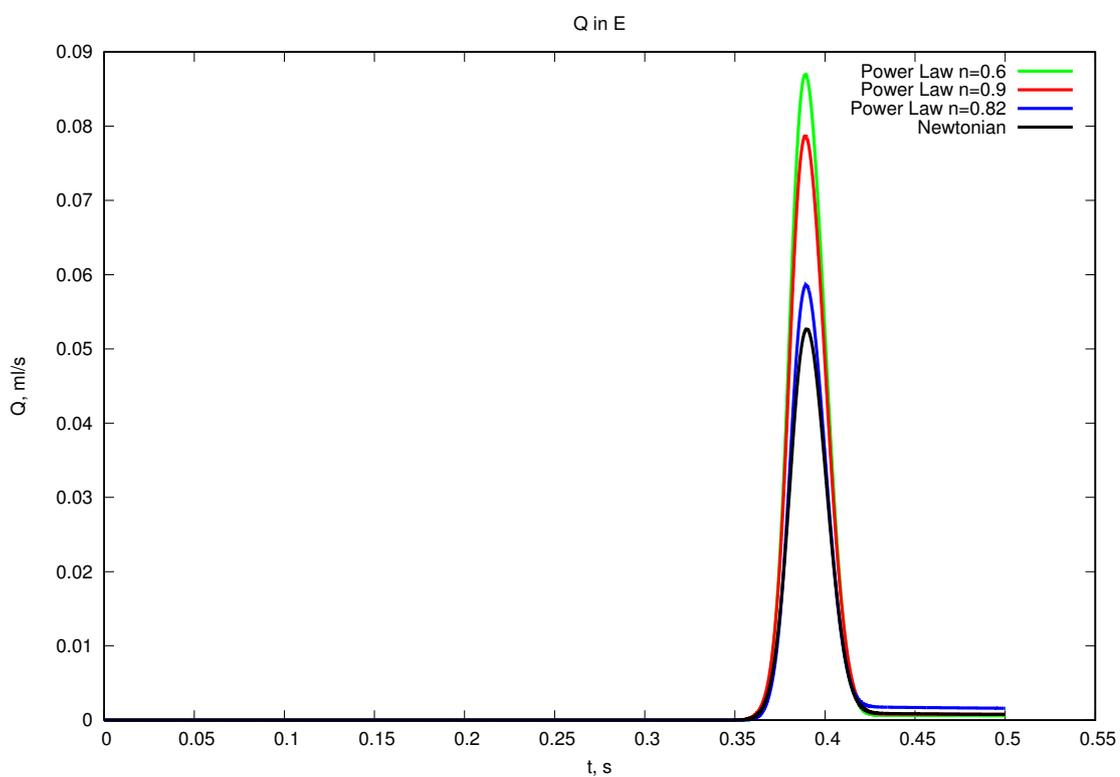


Рис. 16: Поведение  $Q$  в зависимости от времени в точке E для степенной модели

### 3.5 Задача о течении в системе из 37 сосудов

Рассматривается более сложная модель из 37 сосудов, которая имитирует артериальную часть сердечно-сосудистой системы [21]. Данная система имеет 6 узлов с сочленениями и 15 с бифуркациями. Граничные условия на выходе ставятся в виде (33). В отличие от предыдущих случаев, данная система содержит сосуды, имеющие разную длину и разные механические свойства. Значения параметров приведены в таблице 2, где  $L$  – длина сосудов,  $r_{in}$  и  $r_{out}$  – радиус сосуда на входе и выходе в начальном состоянии соответственно,  $h$  – толщина стенки сосуда,  $R_p$  – периферическое сопротивление сосудов. В связи с тем, что сосуды имеют переменный радиус поперечного сечения и известны только значения на входе и выходе, все прочие значения получаются путём линейной интерполяции данных значений. Таким образом начальные условия и  $A_{min}$  вычисляются по формуле:

$$A(0, z) = A_{min} = \pi \left( r_{out} + \frac{L - z}{L} (r_{in} - r_{out}) \right)^2 \quad (40)$$

В данной задаче условие на входе в систему  $Q_i(t)$  задаётся в виде периодической функции, которая имитирует условия реальной артериальной системы [21] и имеет период повторения  $T = 0.827$  с. Поведение функции на одном периоде представлено на рисунке 17.

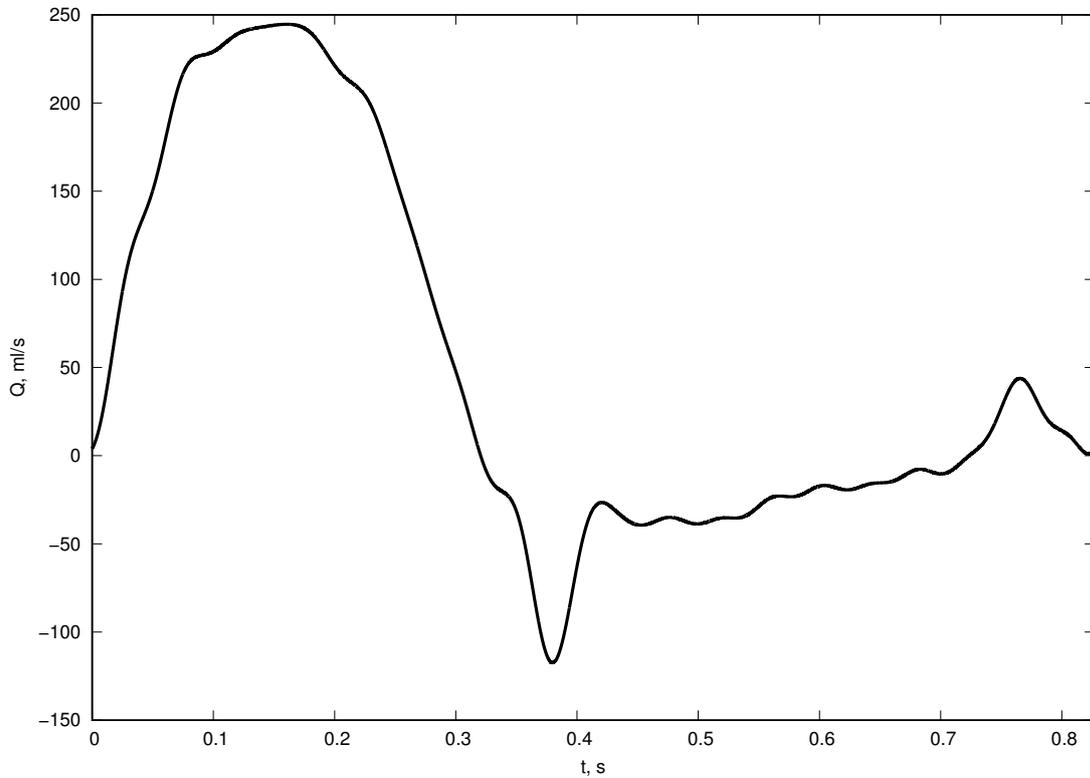


Рис. 17: Расход жидкости на входе в систему для задачи о 37 сосудах

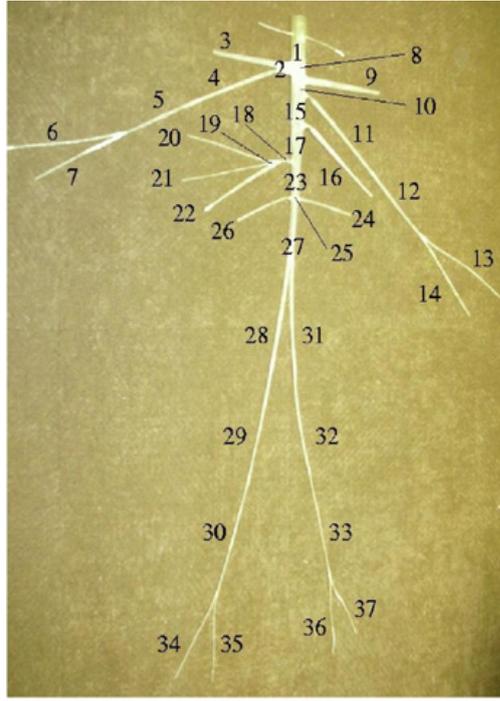


Рис. 18: Схема системы, моделирующей артериальную часть сердечно-сосудистой системы [21]

### 3.5.1 Влияние порядка разностных производных на точность решения

В выражениях (35) и (37) присутствуют пространственные производные, которые в ходе численного решения на пространственной сетке приближаются конечно-разностными производными. Используемый при этом порядок производных значительно влияет на точность решения. В ходе решения данный факт исследовался на примере ньютоновской жидкости. Использовались следующие разностные производные:

1 порядок:

$$y'_0 \approx (-y_0 + y_1) \frac{1}{h};$$

$$y'_1 \approx (-y_0 + y_1) \frac{1}{h};$$

2 порядок:

$$y'_0 \approx (-3y_0 + 4y_1 - y_2) \frac{1}{2h};$$

$$y'_2 \approx (3y_2 - 4y_1 + y_0) \frac{1}{2h};$$

3 порядок:

$$y'_0 \approx (-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3) \frac{1}{6h};$$

$$y'_3 \approx (11y_3 - 18y_2 + 9y_1 - 2y_0) \frac{1}{6h};$$

4 порядок:

$$y'_0 \approx (-25y_0 + 48y_1 - 36y_2 + 16y_3 - 3y_4) \frac{1}{12h};$$

$$y'_4 \approx (25y_4 - 48y_3 + 36y_2 - 16y_1 + 3y_0) \frac{1}{12h};$$

5 порядок:

$$y'_0 \approx (-137y_0 + 300y_1 - 300y_2 + 200y_3 - 75y_4 + 12y_5) \frac{1}{60h};$$

$$y'_5 \approx (137y_5 - 300y_4 + 300y_3 - 200y_2 + 75y_1 - 12y_0) \frac{1}{60h};$$

6 порядок:

$$y'_0 \approx (-147y_0 + 360y_1 - 450y_2 + 400y_3 - 225y_4 + 72y_5 - 10y_6) \frac{1}{60h};$$

$$y'_6 \approx (147y_6 - 360y_5 + 450y_4 - 400y_3 + 225y_2 - 72y_1 + 10y_0) \frac{1}{60h}.$$

В данных выражениях  $y_i$  – значение функции, для которой вычисляется производная, в узле  $i$ , а  $h$  – шаг расчётной сетки.

На рисунке 19 представлено поведение решений, с используемыми различными порядками разностных производных, при  $N = 100$  и  $N = 150$ . Помимо этого на графике продемонстрировано расчётное значение решения для ньютоновской жидкости [20], которое в данном сравнении будет принято за эталонное, с которым мы будем сравнивать полученные решения. Также на рисунке 20 приведены результаты, при различных  $N$ , но одинаковых порядках разностных производных. Можно заметить, что поведение решения при увеличении разбиения аналогично поведению при увеличении порядка производной, что характеризуется приближением решения к эталонному варианту. Таблица 3 содержит процентное отклонение полученного решения с которым производились сравнения по дискретной норме  $L^2$ :

$$\varepsilon = \frac{\|p - \bar{p}\|_{L^2}}{\|\bar{p}\|_{L^2}} \cdot 100\% = \frac{\sqrt{\sum_i (p_i - \bar{p}_i)^2 h}}{\sqrt{\sum_i (\bar{p}_i)^2 h}} \cdot 100\%,$$

где  $p$  – полученное решение,  $\bar{p}_i$  – решение с которым проводилось сравнение,  $p_i, \bar{p}_i$  – значения решений в узлах сетки.

	$N = 100$	$N = 150$
1 порядок	2.7258	0.9144
2 порядок	1.3997	0.4144
3 порядок	0.8582	0.2513
4 порядок	0.5902	0.1949
5 порядок	0.4503	0.1740
6 порядок	0.3797	0.1650

Таблица 3: Процентное отклонение от эталонного решения по норме  $L^2$

Таким образом с использованием разностных производных высокого порядка при значительно меньшем разбиении была достигнута более высокая точность решения.

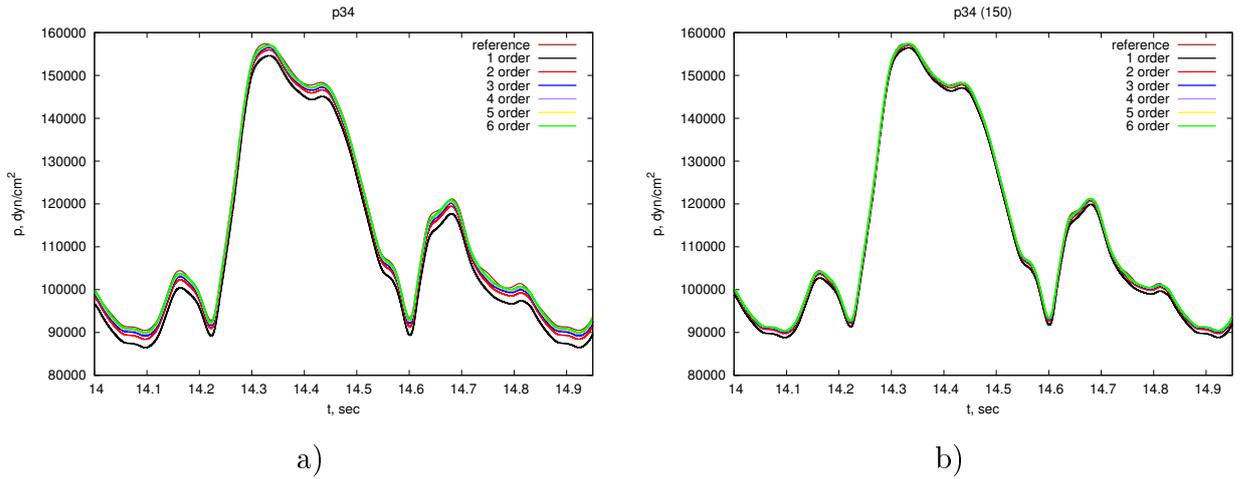


Рис. 19: График поведения решения в 34 сосуде для различных порядков производных при а)  $N = 100$ , б)  $N = 150$

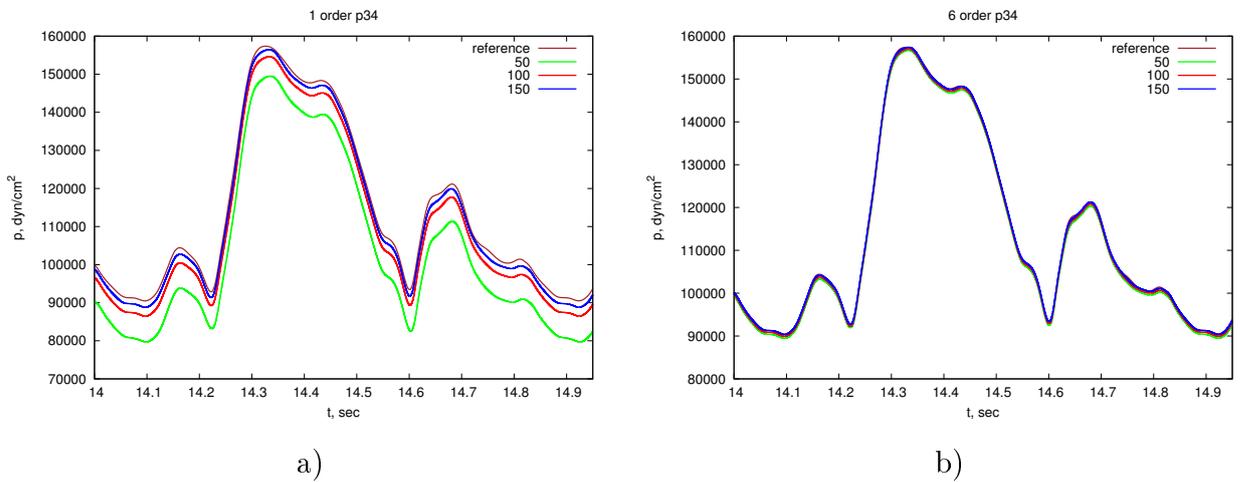


Рис. 20: График поведения решения в 34 сосуде для различных  $n$  с а) производными 1 порядка, б) производными 6 порядка

При этом порядок разностных производных в данной задаче незначительно влияет на время счёта, в то время, как увеличение разбиения оказывает на него ощутимое влияние.

### 3.5.2 Результаты

В ходе решения каждый сосуд разбивался по  $z$  на  $N = 150$  промежутков, а весь временной отрезок разбивался на  $T = 3 \cdot 10^6$  промежутков.

В данной задаче все результаты наиболее выгодно представлять с помощью графиков давления  $p$ , которые имеют более выраженный волновой пик в отличие от графиков потока  $Q$ . На рис. 21 – рис. 28 приведены графики давления как функции времени в случае фиксированного значения  $z$  (бралась средняя точка сосуда) после установления колебаний. Представлены два случая: когда  $d = 2$  (а) и когда  $d = 6$  (б). Помимо этого, на рисунке показаны данные, полученные в результате эксперимента [21].

Можно заметить, что для  $d = 2$  наибольшее отличие от ньютоновской жидкости показывают решения, полученные для модели Yeleswarapu и упрощённой модели Кросса, которые демонстрируют наибольшие отклонения от ньютоновского и прочих решений в точках экстремумов. Вообще, как можно видеть, в некоторых из этих точек другие решения также отклоняются от ньютоновского, но в большинстве являются достаточно близкими по значениями. Можно заметить, что для сосудов более удалённых от входа в систему наблюдается большее затухание решения и отклонение от ньютоновской жидкости.

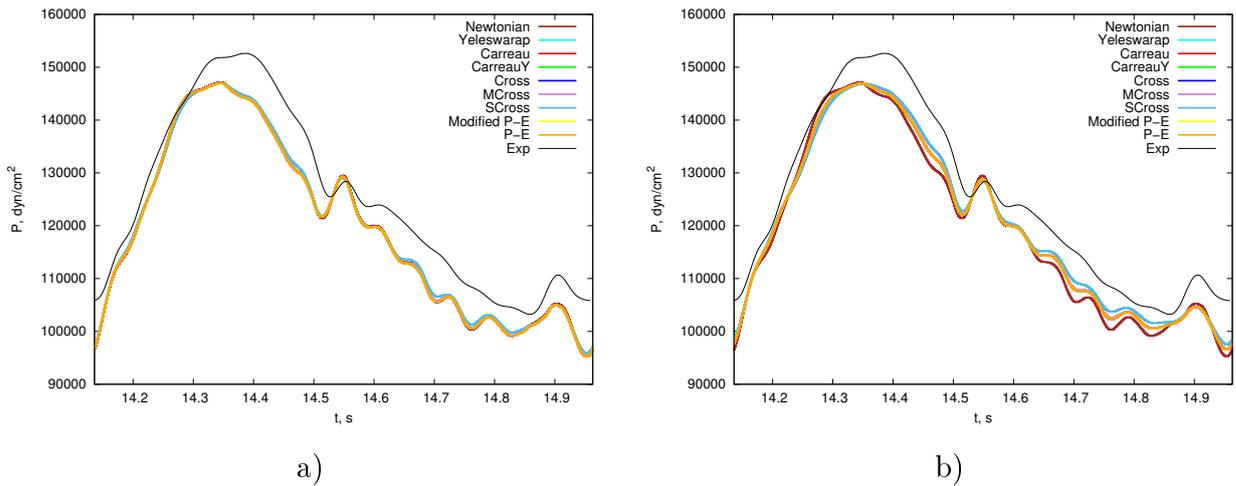


Рис. 21: Поведение  $P$  в 7 сосуде для: а)  $d = 2$ , б)  $d = 6$

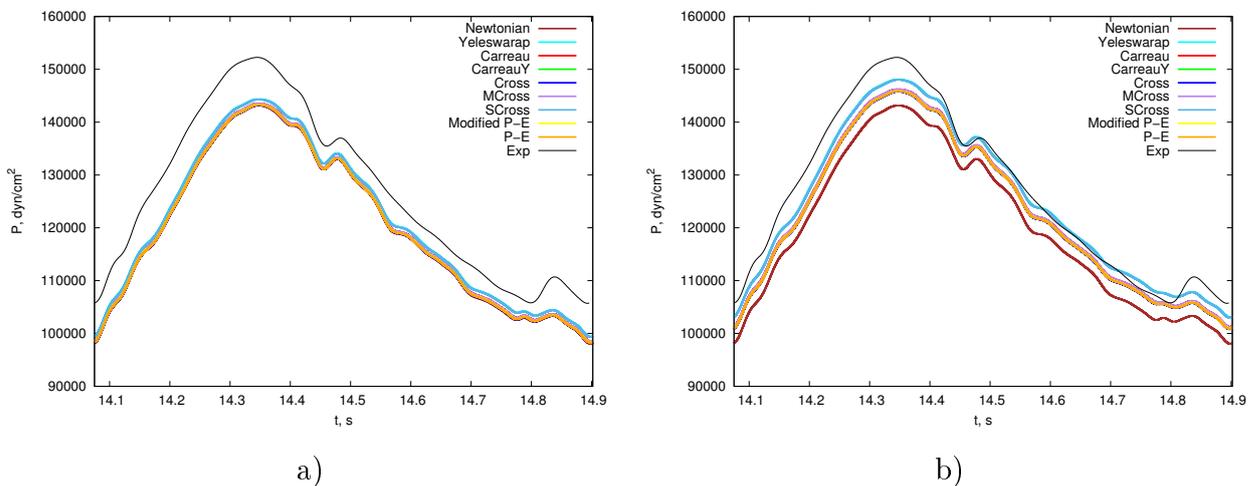
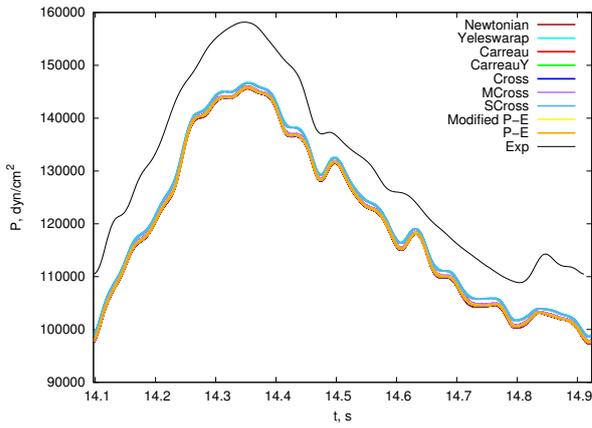


Рис. 22: Поведение  $P$  в 10 сосуде для: а)  $d = 2$ , б)  $d = 6$

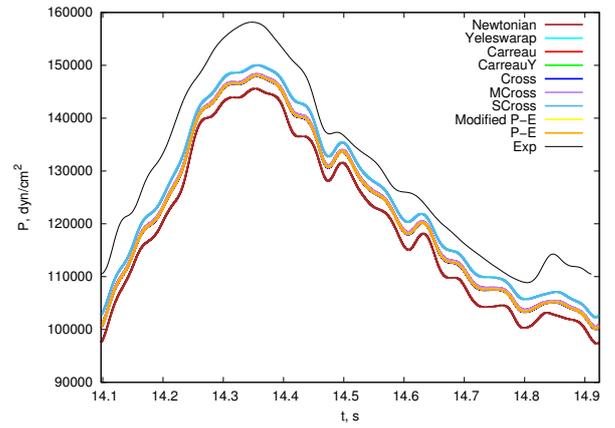
Вычислим неньютоновский фактор для этих сосудов. В связи с тем, что полученное решение имеет множество локальных экстремумов, будем использовать выражение (38). Для  $P$  будем использовать аналогичное выражение:

$$I = \frac{\|P_N - P_{nn}\|}{\|P_N\|} 100\%.$$

Точка, в которой будет вычисляться неньютоновский фактор, будет лежать в середине

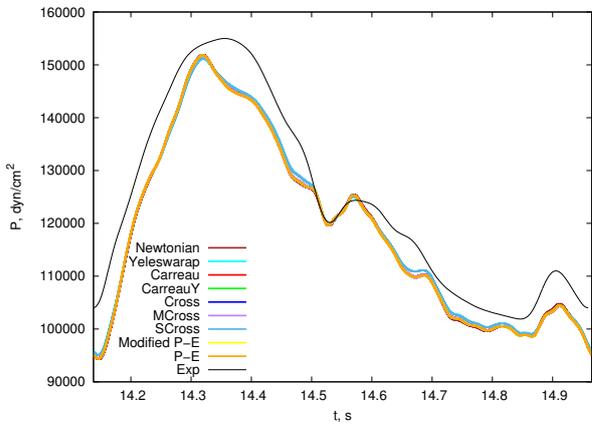


a)

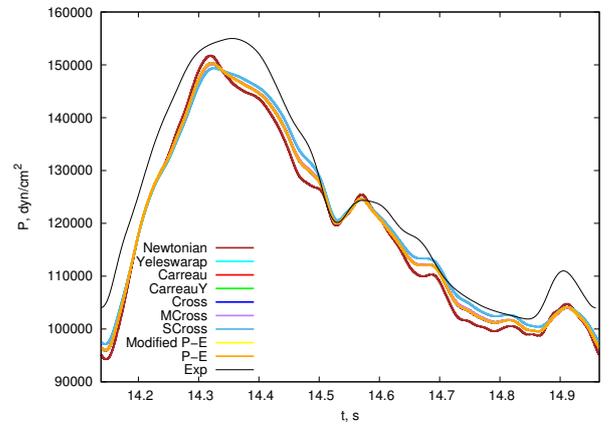


b)

Рис. 23: Поведение  $P$  в 11 сосуде для: а)  $d = 2$ , б)  $d = 6$

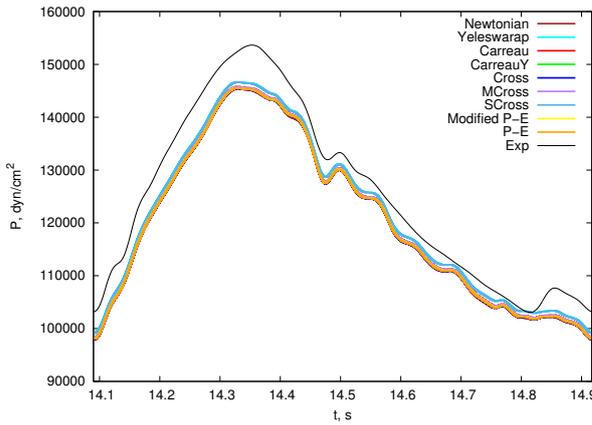


a)

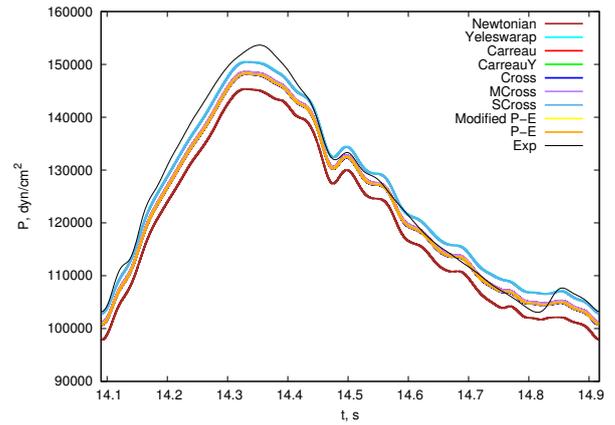


b)

Рис. 24: Поведение  $P$  в 14 сосуде для: а)  $d = 2$ , б)  $d = 6$



a)

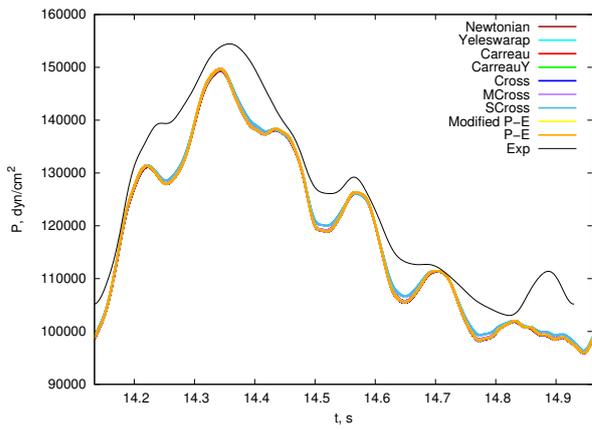


b)

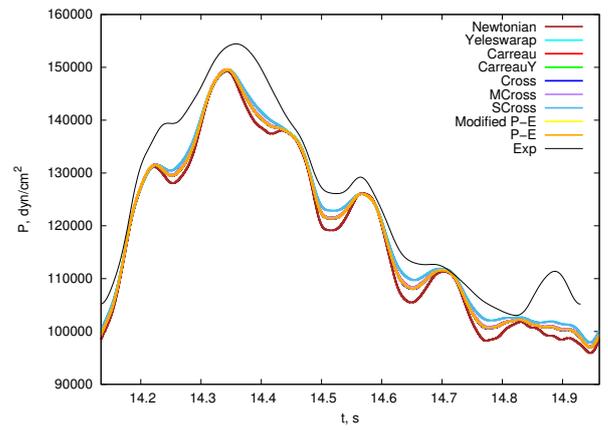
Рис. 25: Поведение  $P$  в 17 сосуде для: а)  $d = 2$ , б)  $d = 6$

каждого из рассматриваемых сосудов, что совпадает с точкой, в которой строились приведённые выше графики.

На рисунке 29 приведены результаты расчётов. Как можно видеть, для всех сосудов при увеличении  $d$ , значение  $I$  увеличивается, что говорит об увеличении отклонения

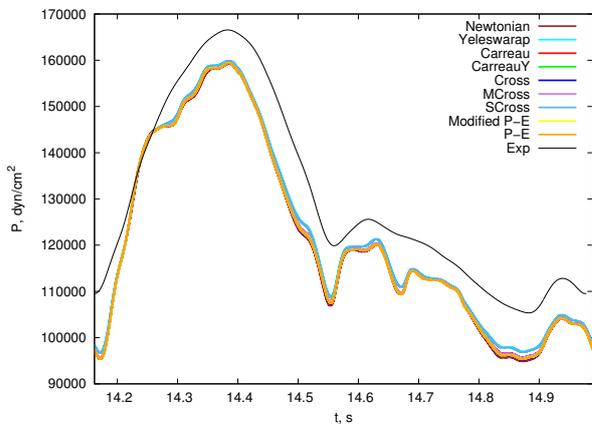


a)

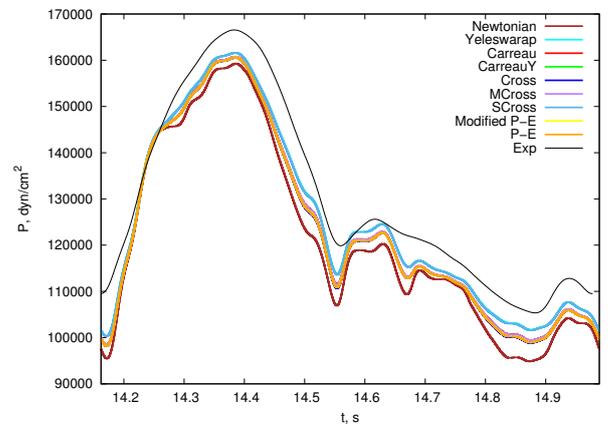


b)

Рис. 26: Поведение  $P$  в 20 сосуде для: а)  $d = 2$ , б)  $d = 6$

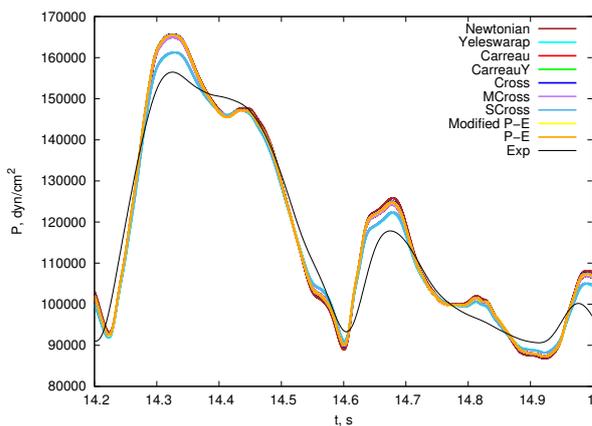


a)

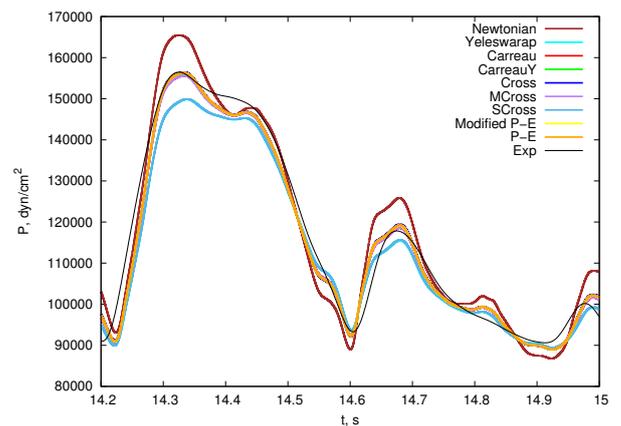


b)

Рис. 27: Поведение  $P$  в 29 сосуде для: а)  $d = 2$ , б)  $d = 6$



a)



b)

Рис. 28: Поведение  $P$  в 34 сосуде для: а)  $d = 2$ , б)  $d = 6$

от случая ньютоновской модели. Можно видеть, что неньютоновский фактор больше для сосудов, которые находятся дальше от входа в систему. На данных графиках ясно видно, что наиболее сильно отличаются от ньютоновского случая решения, полученные для случаев модели Yeleswarapu и упрощённой модели Кросса.

В связи с наличием для данной задачи экспериментальных данных, имеет смысл оценить отклонение от них. Будем для этого использовать выражение, аналогичное неньютоновскому фактору:

$$R = \frac{\|P_{exp} - P_{nn}\|}{\|P_{exp}\|} 100\%,$$

где  $P_{exp}$  – экспериментальные значения давления.

Результаты расчётов можно наблюдать на рисунке 30. Можно видеть, что для всех сосудов, кроме 34, наблюдается уменьшение значений  $R$  при увеличении  $d$ . В данной задаче в связи с тем, что значения функции  $P$  являются близкими (см. рис. 21 – рис. 28) (отсутствуют характерные "всплески"), было принято решение провести расчет  $R$ , используя дискретную  $L_2$  норму. Полученные для данной нормы результаты можно наблюдать на рисунке 31. Можно видеть, что результаты, для всех сосудов кроме 34, качественно не изменились. Как можно видеть для 34 сосуда, только модели Yeleswarapu и упрощённая модель Кросса демонстрируют увеличивающееся отклонение, но они всё равно меньше 3.2%, так что отклонения можно считать несущественными.

На рисунках 32 – 35 приведены графики решений, полученных для степенной модели. Можно видеть, что они показывают значительное отклонение от решения только в точках экстремума, полученного для ньютоновской модели. Значения неньютоновского фактора для них приведены в таблице 4. Как можно видеть, в некоторых случаях отклонение превышает аналогичное значение для всех прочих моделей при  $d = 6$ . На графиках решения для степенной модели и решения для моделей, зависящих от  $d$  в точках локального экстремума имеют различный характер отклонения от ньютоновского решения. В некоторых точках экстремумов значения решений, зависящих от  $d$  меньше значений решений для ньютоновской жидкости, когда в случае степенной модели они наоборот больше (см. момент  $t = 14.35$  на 28, b) и 32, b)). Поэтому можно сделать вывод, что отличие степенной модели от моделей, зависящих от  $d$ , в данной задаче является значительным.

$n$	$I, \% (14,P)$	$I, \% (14,Q)$	$I, \% (34,P)$	$I, \% (34,Q)$
0.6	3.2475	15.0005	10.0551	23.2314
0.9	2.3302	10.7527	7.8544	17.4015
0.82	1.5786	7.2296	6.0553	12.9921

Таблица 4: Неньютоновский фактор для степенных моделей

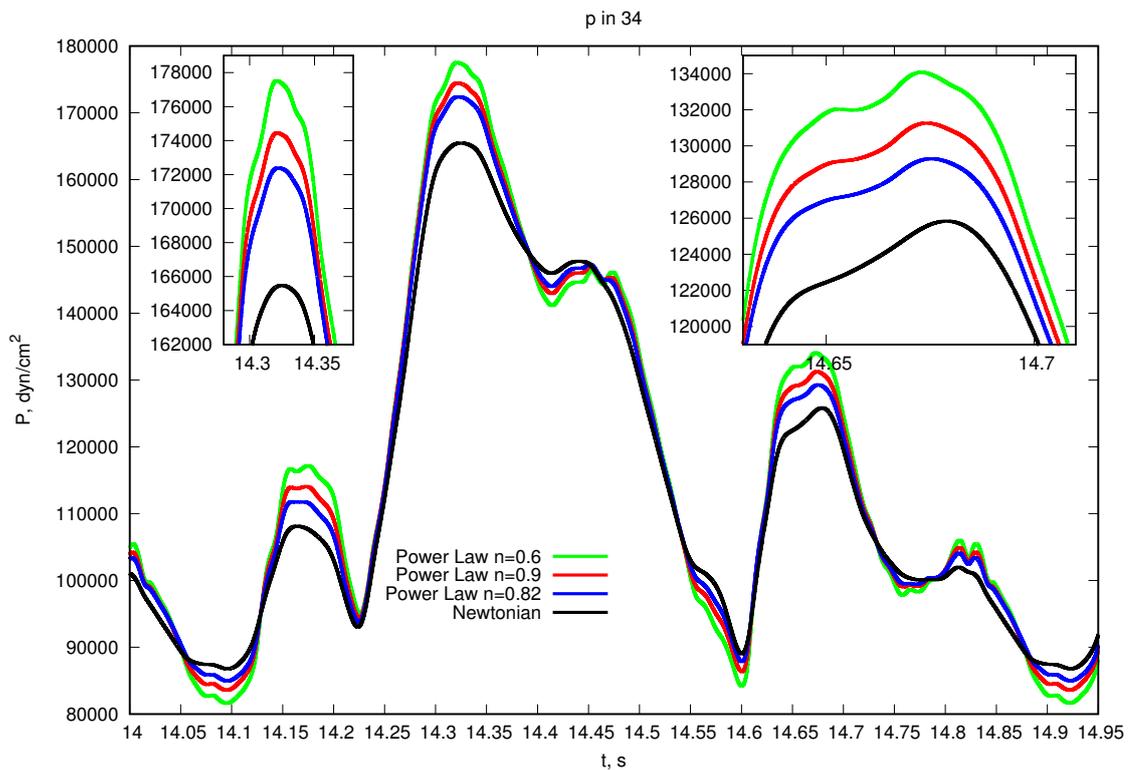


Рис. 32: Поведение  $P$  в 34 сосуде для степенной модели

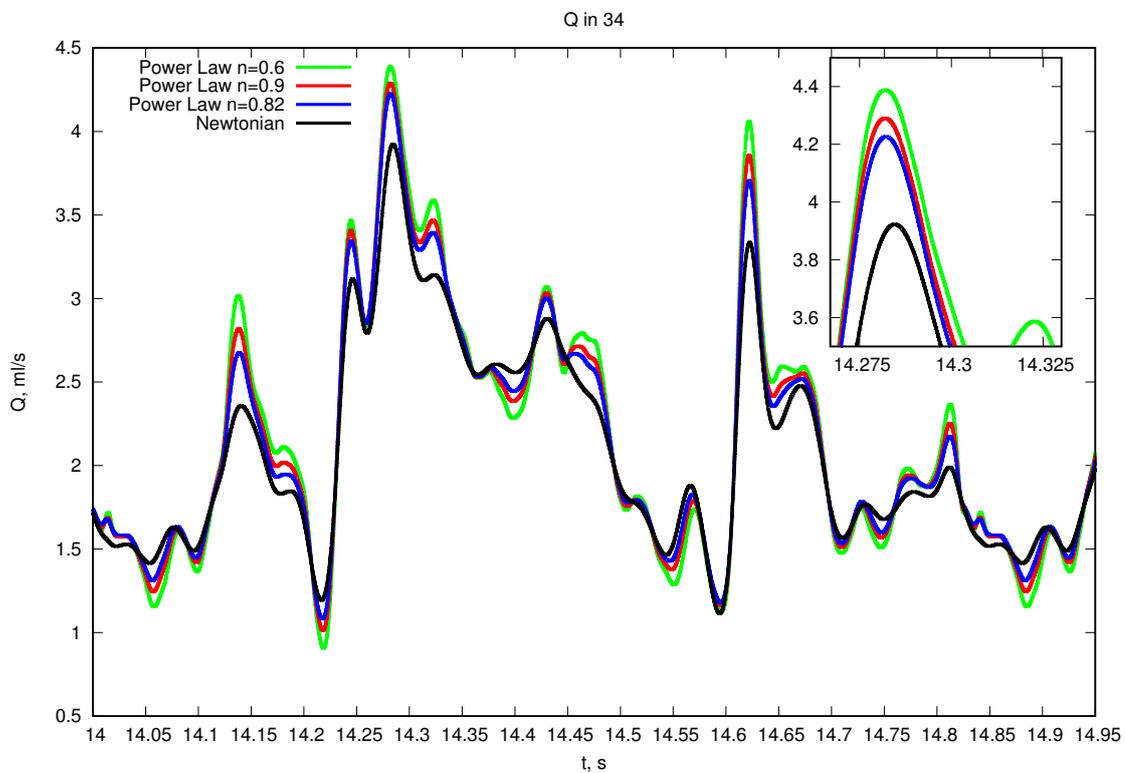


Рис. 33: Поведение  $Q$  в 34 сосуде для степенной модели

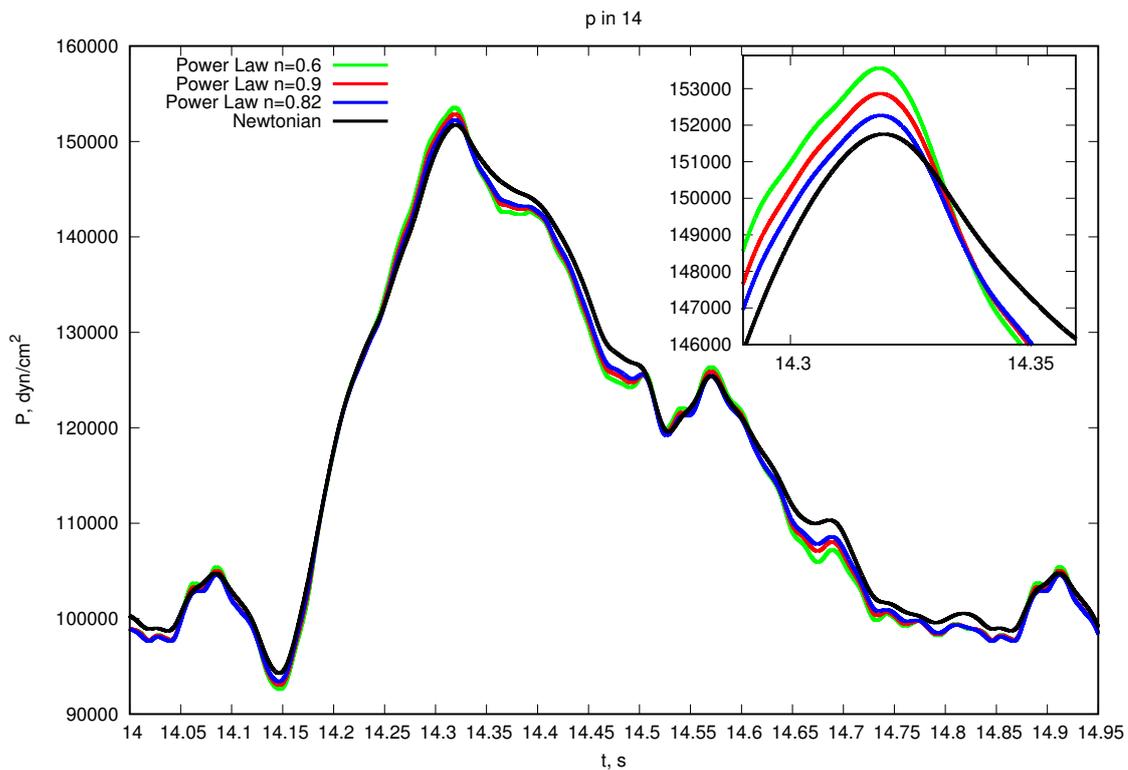


Рис. 34: Поведение  $P$  в 14 сосуде для степенной модели

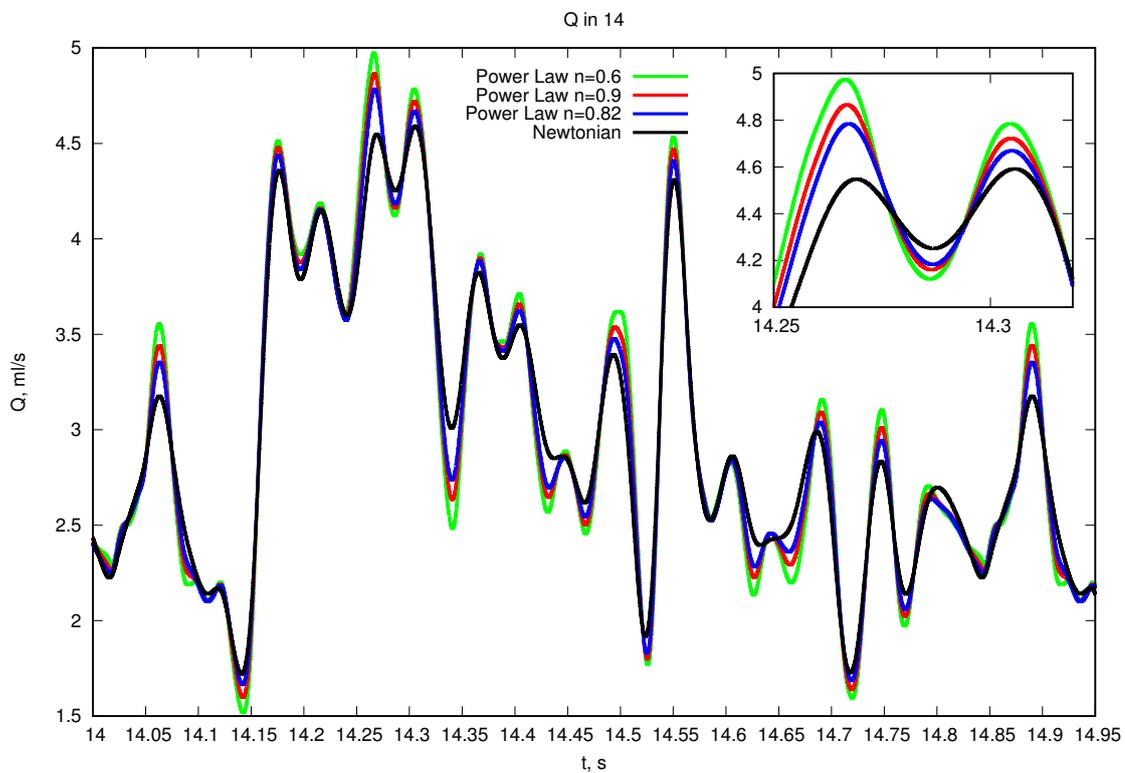
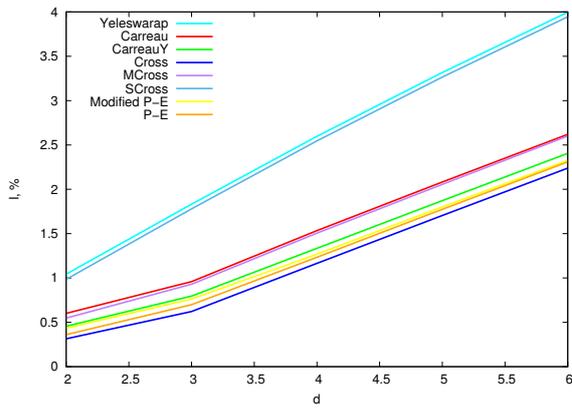


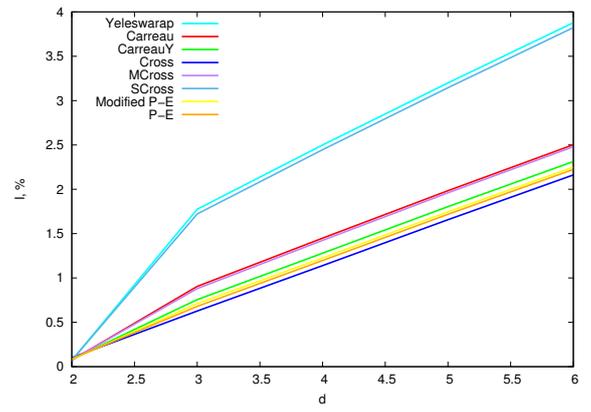
Рис. 35: Поведение  $Q$  в 14 сосуде для степенной модели

Сосуд	$L$ , мм	$r_{in}$ , мм	$r_{out}$ , мм	$h$ , мм	$R_p$ $10^9 \text{Па} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-3}$
1. Ascending aorta	36	14.40	13.00	0.51	–
2. Innominate	28	11.00	7.29	0.35	–
3. R. carotid	145	5.37	3.86	0.28	2.67
4. R. subclavian I	218	4.36	3.34	0.27	–
5. R. subclavian II	165	3.34	2.78	0.16	–
6. R. radial	235	2.07	–	0.15	3.92
7. R. ulnar	177	2.10	–	0.21	3.24
8. Aortic arch I	21	13.00	12.50	0.50	–
9. L. carotid	178	5.58	3.73	0.31	3.11
10. Aortic arch II	291	2.50	11.80	0.41	–
11. L. subclavian I	227	4.42	3.39	0.22	–
12. L. subclavian II	175	3.39	2.84	0.17	–
13. L. radial	245	2.07	–	0.21	3.74
14. L. ulnar	191	2.07	–	0.16	3.77
15. Thoracic aorta I	56	11.80	11.00	0.43	–
16. Intercostals	195	4.12	3.22	0.27	2.59
17. Thoracic aorta II	72	11.00	9.26	0.34	–
18. Celiac I	38	3.97	–	0.20	–
19. Celiac II	13	4.31	–	1.25	–
20. Splenic	191	1.83	–	0.13	3.54
21. Gastric	198	1.92	–	0.11	4.24
22. Hepatic	186	3.31	2.89	0.21	3.75
23. Abdominal aorta I	62	9.26	8.01	0.33	–
24. L. renal	120	2.59	–	0.19	3.46
25. Abdominal aorta II	7	7.90	–	0.35	–
26. R. renal	118	2.55	–	0.16	3.45
27. Abdominal aorta III	104	7.80	5.88	0.30	–
28. R. iliac-femoral I	205	3.9	3.38	0.21	–
29. R. iliac-femoral II	216	3.38	2.31	0.15	–
30. R. iliac-femoral III	206	2.31	2.10	0.20	–
31. L. iliac-femoral I	201	4.02	3.34	0.20	–
32. L. iliac-femoral II	195	3.34	2.26	0.16	–
33. L. iliac-femoral III	207	2.26	2.12	0.13	–
34. R. anterior tibial	163	1.55	–	0.15	5.16
35. R. posterior tibial	151	1.53	–	0.12	5.65
36. L. posterior tibial	149	1.58	–	0.11	4.59
37. L. anterior tibial	126	1.55	–	0.10	3.16

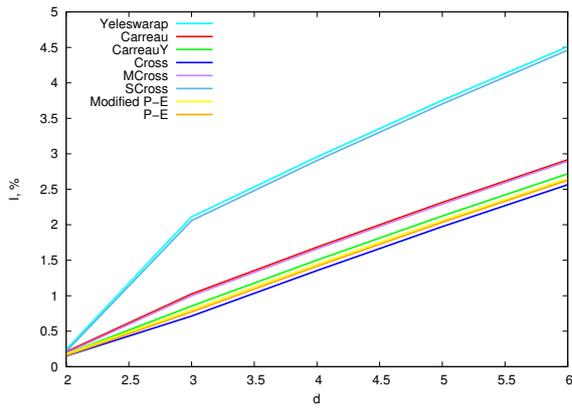
Таблица 2: Параметры сосудов [22]



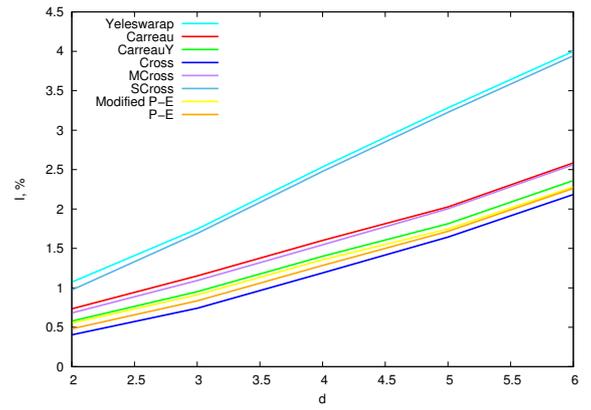
a)



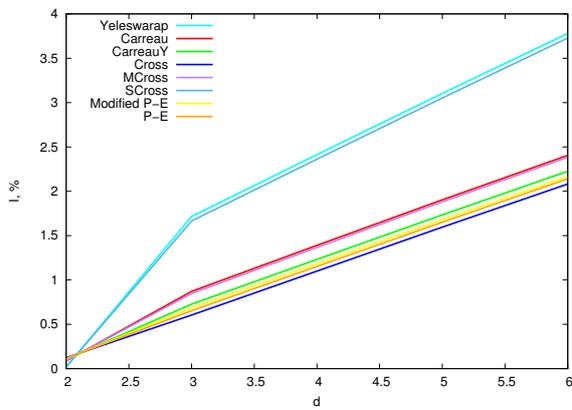
b)



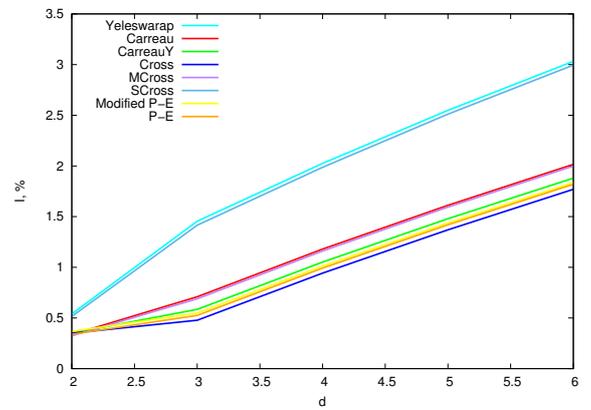
c)



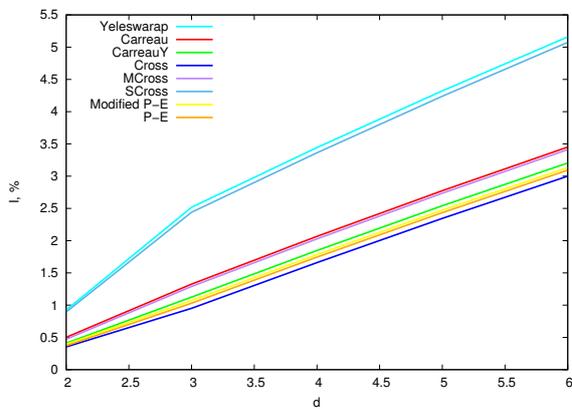
d)



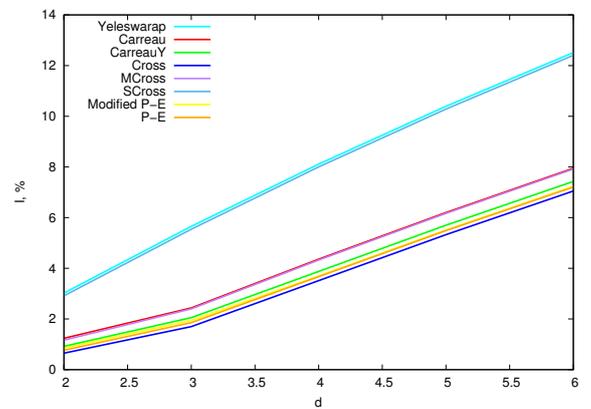
e)



f)



g)



h)

Рис. 29: Ньютоновский фактор для различных сосудов:

a) 7, b) 10, c) 11, d) 14, e) 17, f) 20, g) 29, h) 34

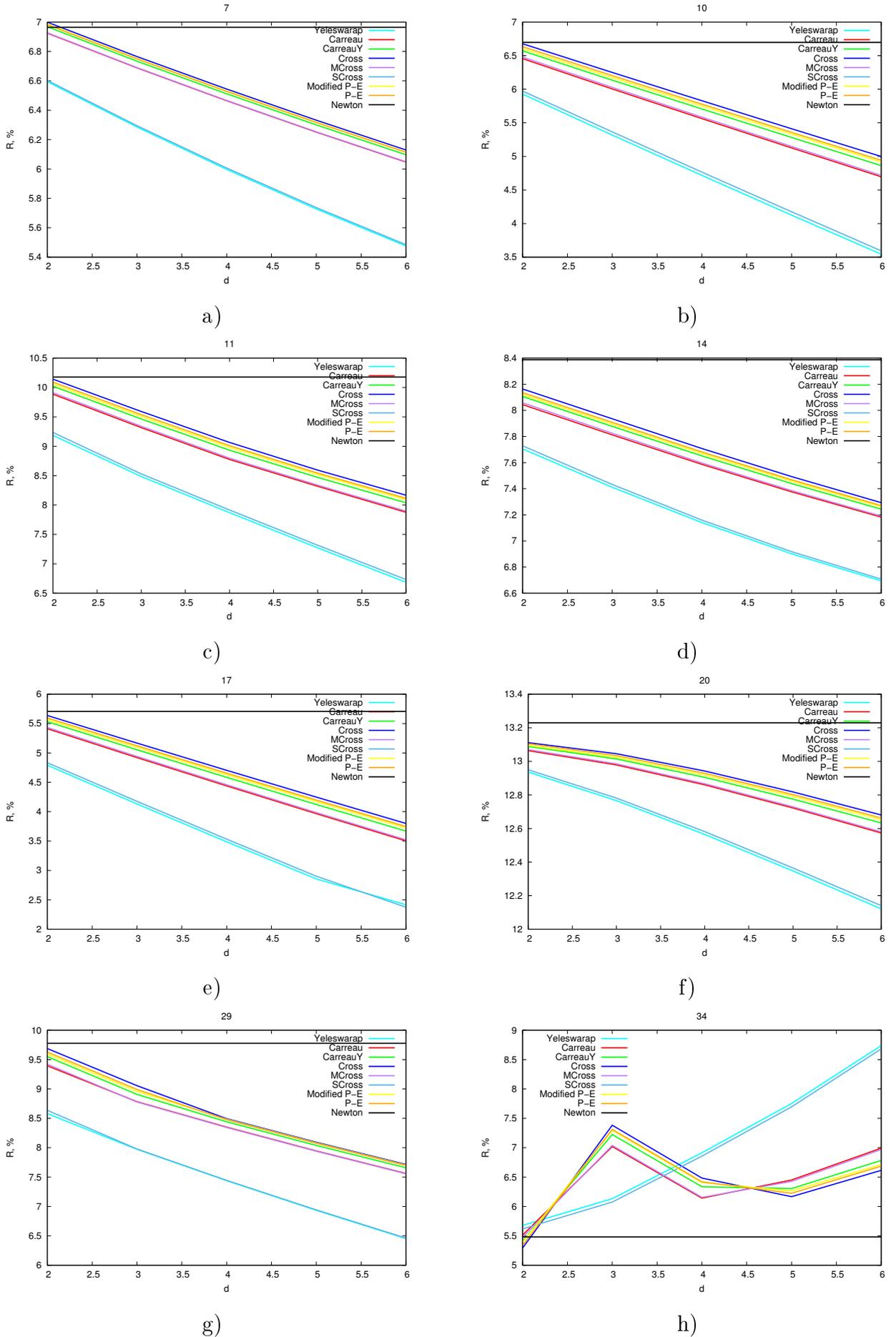


Рис. 30: Отклонение от экспериментальных данных для нормы максимума в сосудах: a) 7, b) 10, c) 11, d) 14, e) 17, f) 20, g) 29, h) 34

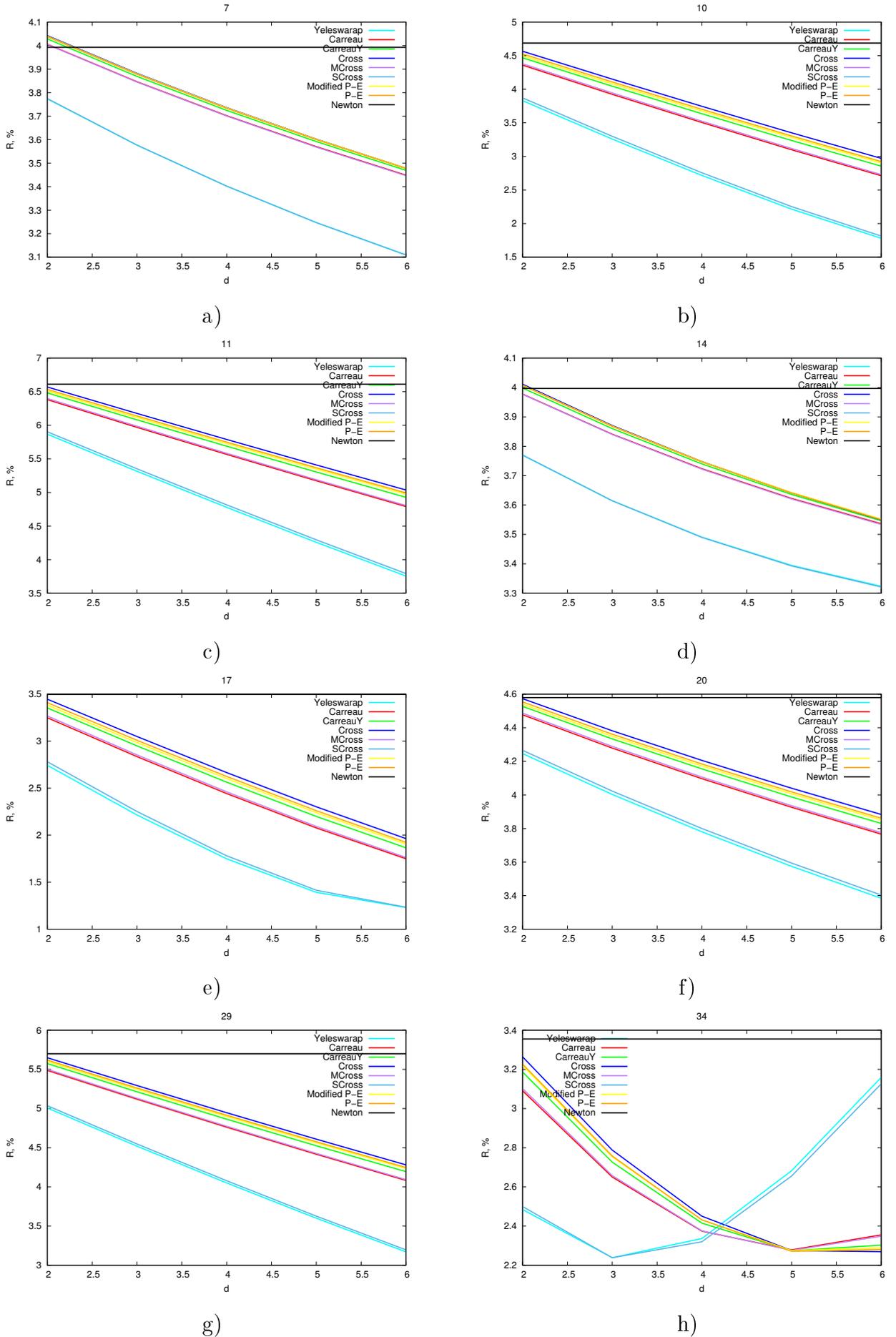


Рис. 31: Отклонение от экспериментальных данных для нормы  $L_2$  в сосудах:

a) 7, b) 10, c) 11, d) 14, e) 17, f) 20, g) 29, h) 34

## 3.6 Результаты и выводы

В рамках Главы 3 получены следующие результаты:

1. Разработан комплекс программ, позволяющий проводить численное моделирование течения крови в сосудистых системах.
2. При решении модельной задачи был проведён анализ разностных схем.
3. Проведено численное моделирование течений крови в различных сосудистых системах.
4. Проведено сравнение решений, получаемых для различных моделей.

По данным результатам можно сделать следующие выводы:

1. Наиболее подходящей для использования в расчётах разностной схемой оказалась схема МакКормака.
2. Отклонения решений от случая ньютоновской модели увеличиваются при удалении от входа в систему. Для степенной модели это отклонение менее значительно.
3. Отклонение решений от случая ньютоновской модели увеличиваются при увеличении  $d$  — т.е. при уплощении профиля скорости.
4. Решения для неньютоновских моделей соответствуют экспериментальным данным лучше, чем решение для ньютоновской модели.

## 4 Заключение

Таким образом в ходе работы были получены следующие основные результаты:

1. Представлены одномерные математические модели течения крови, учитывающие неньютоновские свойства.
2. Разработан комплекс программ , позволяющий проводить численное моделирование течения крови в сосудистых системах.
3. Проведено численное моделирование течений крови в различных сосудистых системах.
4. Проведено сравнение решений, получаемых для различных моделей.

По полученным результатам можно сделать следующие выводы:

1. Решения, соответствующие неньютоновским моделям, имеют следующие особенности:
  - (a) их отклонения от случая ньютоновской модели увеличиваются при удалении от входа в систему;
  - (b) эти отклонения увеличиваются при уплощении профиля скорости.
2. Решения для неньютоновских моделей соответствуют экспериментальным данным лучше, чем решение для ньютоновской модели.

## Список литературы

- [1] Cruickshank K., Riste L., Anderson S.G., Wright J.S., Dunn G., Gosling R.G. Aortic pulse-wave velocity and its relationship to mortality in diabetes and glucose intolerance: an integrated index of vascular function? // *Circulation*. 2002 Oct; P. 2085–90.
- [2] Fasano A., Sequeira A.: *Hemomath. The Mathematics of Blood*. MS&A - Modeling, Simulation and Applications Series, vol. 18. Springer, Cham 2017 357 p.
- [3] Ремизов, А. Н. *Медицинская и биологическая физика: учебник- 4-е изд., испр. и перераб.* - Москва : ГЭОТАР-Медиа, 2016. - 656 с.
- [4] Токарева, С. А. *Прикладная газовая динамика. Численные методы решения гиперболических систем уравнений : учебное пособие Санкт-Петербург : Лань, 2019. — 244 с.*
- [5] Wang X., Fullana J.M., Lagrée P.Y. Verification and comparison of four numerical schemes for a 1D viscoelastic blood flow model.// *Comput Methods Biomech Biomed Engin*. 2015; P. 1704–25.
- [6] Магомедов К.М., Холодов А.С. - *Сеточно-характеристические численные методы.* - М.: Юрайт, 2018 г. 313 с.
- [7] Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. *Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений.* — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 608 с.
- [8] Perdikaris P., Grinberg L., Karniadakis G.E. An effective fractal-tree closure model for simulating blood flow in large arterial networks.// *Annals of biomedical engineering* 2015 Jun; P. 1432–42.
- [9] Валландер С. В. *Лекции по гидроаэромеханике.* Л.: Изд. ЛГУ, 1978. — 296 с.
- [10] Formaggia L., Lamponi D., Quarteroni A. One-dimensional models for blood flow in arteries.// *Journal of Engineering Mathematics* 2003 Dec 47; P. 251-276
- [11] Sochi T., The flow of power law fluids in elastic networks and porous media, *Comput.* // *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*. 2015 Apr; P. 324–329.
- [12] Ghigo A., Lagrée P.Y., Fullana J.M. A time-dependent non-Newtonian extension of a 1D blood flow model. // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2013 Jan vol. 253; P. 36-49.
- [13] Bureau M., Healy J. C., Bourgoin D., Joly M. Rheological hysteresis of blood at low shear rate. // *Biorheology*. 1980 vol. 17; P.191-203.

- [14] Буничева А. Я., Мухин С. И., Соснин Н. В., Хруленко А. Б. Математическое моделирование квазиодномерной гемодинамики // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Том 55. № 8. С. 1417–1428.
- [15] Артюшков Л. С. Динамика неньютоновских жидкостей. СПб.: Изд. Центр СПбГМТУ. 1997. 459 с.
- [16] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая Гидромеханика, Часть 2 М.: Физматгиз, 1963, 728 с.
- [17] Soulis J. V., Giannoglou G. D., Chatzizisis Y. S., Seralidou K. V., Parcharidis G. E., Louridas G. E. Non-Newtonian models for molecular viscosity and wall shear stress in a 3D reconstructed human left coronary artery. // Medical engineering & physics, 2008 Jan vol. 30; P. 9–19.
- [18] Razavi M.S., Shirani E. Development of a general method for designing microvascular networks using distribution of wall shear stress. // Journal of biomechanics, 2013 vol. 46; P. 2303–2309.
- [19] Iasiello M., Vafai K., Andreozzi A., Bianco N. Analysis of non-Newtonian effects within an aorta-iliac bifurcation region. // Journal of biomechanics, 2017 vol. 64; P. 153–163.
- [20] Boileau E., Nithiarasu P., Blanco P.J., Müller L.O., Fossan F.E., Hellevik L.R., Donders W.P., Huberts W., Willemet M., Alastruey J. A benchmark study of numerical schemes for one-dimensional arterial blood flow modelling. // International journal for numerical methods in biomedical engineering, 2015 vol. 31;
- [21] Matthys K.S., Alastruey J., Peiró J., Khir A.W., Segers P., Verdonck P.R., Parker K.H., Sherwin S.J. Pulse wave propagation in a model human arterial network: assessment of 1-D numerical simulations against in vitro measurements. // Journal of biomechanics, 2007 vol. 40; P. 3476–3486.
- [22] Xiu D., Sherwin S. Parametric uncertainty analysis of pulse wave propagation in a model of a human arterial network. // Journal of Computational Physics, 2007 vol. 226; P. 1385-1407.
- [23] Cho Y. I., Kensey K. R. Effects of the non-Newtonian viscosity of blood on flows in a diseased arterial vessel. Part 1: Steady flows. // Biorheology, 1991 vol. 28; P. 241–262.
- [24] Abbasian M., Shams M., Valizadeh Z., Moshfegh A., Javadzadegan A., Cheng S. Effects of different non-Newtonian models on unsteady blood flow hemodynamics in patient-specific arterial models with in-vivo validation. // Computer methods and programs in biomedicine, 2020 vol. 186;