

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ И КОМПЬЮТЕРНЫХ
СИСТЕМ

Прохоров Илья Дмитриевич

Выпускная квалификационная работа

**Аналитические решения задач для уравнений
одномерной гемодинамики**

Направление 03.04.01
«Прикладные математика и физика»

Научный руководитель,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент
Кривовичев Г.В.

Санкт-Петербург
2021

Содержание

Введение	2
1 Обзор литературы	3
1.1 Объект исследования	3
1.2 Моделирование течения крови	3
1.3 Математическая модель	3
1.4 Выводы	6
2 Модель без учёта вязкости	7
2.1 Решение задачи Коши	7
2.2 Разностные схемы	8
2.3 Практическая оценка порядка сходимости	9
2.4 Результаты и вывод	10
3 Модели с учётом вязкости	11
3.1 Одномерные неньютоновские модели	11
3.2 Случай бесконечного промежутка	14
3.3 Случай конечного промежутка	20
3.4 Результаты и выводы	24
Заключение	25
Литература	26

Введение

На текущий момент сердечно-сосудистые заболевания остаются наиболее распространённой причиной смертности и инвалидности [1]. Только на ишемические болезни сердца приходится 16% от общего числа неинфекционных смертей в мире.

Математическое моделирование важно для исследования движения крови. С его помощью реализуются компьютерные программы, позволяющие прогнозировать и отслеживать изменения в организме человека. Например, таким образом рассчитывается движение крови в сосудах с патологиями.

В рамках работы рассмотрена одномерная математическая модель течения крови, рассмотрены различные модели, учитывающие вязкость крови, а также получены аналитические решения задачи Коши и начально-краевой задачи с периодическими условиями.

Стоит отметить, что зачастую авторы пренебрегают неньютоновскими свойствами крови при рассмотрении одномерной модели [2]. В ходе работы были получены решения с учётом этих свойств и проведено сравнение с решениями, полученными при рассмотрении крови как ньютоновской жидкости.

Перспективной областью применения аналитических решений является тестирование численных методов, которые позволяют решать уже более сложные и комплексные задачи.

Таким образом, целью работы является получение аналитических решений задач для уравнений одномерной гемодинамики. Для достижения цели, ставится ряд задач:

1. Получение аналитического решения задачи Коши для случая модели крови как идеальной жидкости;
2. Получение аналитического решения задачи Коши для случая модели крови как вязкой жидкости с учётом неньютоновости;
3. Получение аналитического решения начально-краевой задачи для случая модели крови как вязкой жидкости с учётом неньютоновости.

В Главе 1 рассматриваются общие свойства крови, общая математическая модель кровотока, а также рассмотрены различные подходы к моделированию неньютоновских свойств крови. Глава 2 посвящена рассмотрению модели крови без учёта вязкости. В Главе 3 рассматриваются аналитические решения в бесконечном и конечном сосудах для моделей крови, учитывающих вязкость.

1 Обзор литературы

1.1 Объект исследования

Кровь — подвижная, жидкая соединительная ткань внутренней среды организма. Представляет собой плазму со взвешенными в ней частицами: эритроцитами, лейкоцитами и тромбоцитами. Отношение суммарного объёма клеток крови к общему объёму плазмы называется гематокритом. Для взрослого человека без патологий гематокрит находится в промежутке от 0.4 до 0.5 [3].

Так как в состав крови входят различные клетки, то её вязкость является неоднородной и кровь представляет собой неньютоновскую жидкость [4]. Особенно это важно, если размер частиц сопоставим с расстоянием между ними. Также отметим, что рассмотрение крови как жидкости справедливо только для крупных сосудов (вены и артерии), так как в капиллярах эритроцит значительно деформирует сосуд [5].

1.2 Моделирование течения крови

Максимальная скорость кровотока в сердечно-сосудистой системе не превосходит 1% от скорости звука в крови [6]. В таком случае, кровь можно считать несжимаемой жидкостью.

Плазма есть раствор крупных молекул, но при скоростях сдвига и масштабах движения в сосудах, её можно считать однородной, ньютоновской жидкостью. Однако кровь является неньютоновской жидкостью так как её вязкость непостоянна. Связано это с тем, что эритроциты — наиболее многочисленные клеточные компоненты крови — при малых скоростях склоны к агрегации и образуют крупные структуры — «монетные столбики». Это увеличивает общую вязкость крови. В то же время, при увеличении скорости движения крови, «монетные столбики» распадаются, а вязкость крови уменьшается [4].

Ещё одним свойством, проявляющимся при движении крови по крупным сосудам, является «уплощение» профиля скорости. Дело в том, что «монетные столбики» движутся, преимущественно, в приосевой области сосуда [6]. И вдоль стенок сосуда кровь имеет меньшую вязкость.

Таким образом становится ясно, что кровь является достаточно сложным по своей структуре объектом. При этом построение одномерных моделей с учётом её неньютоновских свойств проводится не часто [2].

1.3 Математическая модель

В гемодинамике кровь представляет собой вязкую, несжимаемую неньютоновскую жидкость. Такая жидкость описывается следующими уравнениями

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbf{S}, \quad (2)$$

$$\mathbf{S} = -p\mathbf{I} + \mathbf{T}, \quad \mathbf{T} = f_\tau(\mathbf{D}), \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^*), \quad (3)$$

где \mathbf{u} — вектор скорости, t — время, \mathbf{f} — вектор плотности массовых сил (в рамках работы считаем $\mathbf{f} = \mathbf{0}$), \mathbf{S} — тензор напряжений, \mathbf{I} — единичный тензор, \mathbf{T} — тензор касательных напряжений, а \mathbf{D} — тензор скоростей деформации, p — давление. Здесь уравнение (1) — условие несжимаемости, (2) — уравнение движения, а (3) — реологические соотношения.

Для вязкой неньютоновской жидкости верно следующее соотношение [7]

$$\mathbf{T} = 2\mu(I_2)\mathbf{D},$$

где $\mu(I_2)$ — коэффициент динамической вязкости, I_2 — второй главный инвариант тензора \mathbf{D} .

Для описания зависимости коэффициента вязкости μ от I_2 существует множество моделей. Приведём часть из них.

Модель Power Law (PL):

$$\mu(I_2) = kI_2^{\frac{n-1}{2}}.$$

Значения параметров для этой модели могут быть различны:

$n = 0.6$, $k = 0.035 \frac{\text{динн}}{\text{см}^2} \text{с}^n$ [8, 9]; $n = 0.9$, $k = 0.035 \frac{\text{динн}}{\text{см}^2} \text{с}^n$ [10]; $n = 0.82$, $k = 0.09267 \frac{\text{динн}}{\text{см}^2} \text{с}^n$ [11].

В случае $n = 1$, позволяет описать поведение ньютоновской жидкости. В [12] было предложено считать для ньютоновской жидкости $k = 0.035 \frac{\text{динн}}{\text{см}^2} \text{с}$.

Модель Carreau(C):

$$\mu(I_2) = \mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{\left(1 + \left(\lambda I_2^{1/2}\right)^2\right)^{\frac{1-n}{2}}},$$

$\mu_0 = 0.56 \frac{\text{динн}}{\text{см}^2} \text{с}$, $\mu_\infty = 0.0345 \frac{\text{динн}}{\text{см}^2} \text{с}$, $\lambda = 3.313 \text{ с}$, $n = 0.3568$ [13].

Модель Carreau–Yasuda(CY):

$$\mu(I_2) = \mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{\left(1 + \left(\lambda I_2^{1/2}\right)^a\right)^{\frac{1-n}{a}}},$$

$\mu_0 = 0.56 \frac{\text{динн}}{\text{см}^2} \text{с}$, $\mu_\infty = 0.0345 \frac{\text{динн}}{\text{см}^2} \text{с}$, $\lambda = 1.902 \text{ с}$, $n = 0.3568$, $a = 1.25$ [13].

Модель Cross(Cr):

$$\mu(I_2) = \mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + \left(\lambda I_2^{1/2}\right)^m},$$

$\mu_0 = 0.56 \frac{\text{динн}}{\text{см}^2} \text{с}$, $\mu_\infty = 0.0345 \frac{\text{динн}}{\text{см}^2} \text{с}$, $\lambda = 1.007 \text{ с}$, $m = 1.028$, [13].

Упрощённая модель Cross(SCr):

$$\mu(I_2) = \mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + \lambda I_2^{1/2}},$$

$\mu_0 = 1.3 \frac{\text{динн}}{\text{см}^2} \text{с}$, $\mu_\infty = 0.05 \frac{\text{динн}}{\text{см}^2} \text{с}$, $\lambda = 8 \text{ с}$, [13].

Модифицированная модель Cross(MCr):

$$\mu(I_2) = \mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{\left(1 + \left(\lambda I_2^{1/2}\right)^m\right)^a},$$

$\mu_0 = 0.56 \frac{\text{динн}}{\text{см}^2} \text{с}$, $\mu_\infty = 0.0345 \frac{\text{динн}}{\text{см}^2} \text{с}$, $\lambda = 3.736 \text{ с}$, $m = 2.406$, $a = 0.254$ [13].

Модель Yeleswarapu (Y):

$$\mu(I_2) = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \frac{1 + \ln(1 + \lambda\sqrt{I_2})}{1 + \lambda\sqrt{I_2}},$$

$\mu_0 = 0.736 \frac{\text{динн}}{\text{см}^2} \text{с}$, $\mu_\infty = 0.05 \frac{\text{динн}}{\text{см}^2} \text{с}$, $\lambda = 14.81 \text{ с}$, [14].

Также рассмотрим модели, позволяющие учесть влияние гематокрита H . Модифицированная модель Yeleswarapu (MY):

$$\mu(I_2) = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \frac{1 + \ln(1 + \lambda\sqrt{I_2})}{1 + \lambda\sqrt{I_2}},$$

$\mu_0(H) = m_0(0.1293 - 1.7912H + 7.6047H^2)$, $\mu_\infty(H) = m_\infty(0.2114 + 0.9067H + 1.9879H^2)$, $\lambda(H) = l(2.4024H - 2.3810H^2)$, где m_0 , m_∞ и l — параметры модели Yeleswarapu [15].
 Модель Quemada (Q):

$$\mu(I_2) = 2\mu \left(1 - \frac{1}{2}k_Q H \right), \quad k_Q = \frac{k_0 + k_\infty \sqrt{\frac{\sqrt{I_2}}{\dot{\gamma}_c}}}{1 + \sqrt{\frac{\sqrt{I_2}}{\dot{\gamma}_c}}},$$

$\mu = 0.012 \frac{\text{дин}}{\text{см}^2} \text{с}$, $k_0 = 4.33$, $k_\infty = 2.07$, $\dot{\gamma}_c = 1.88 \frac{1}{\text{с}}$ [16]. Здесь k_0 — наибольшая объёмная доля эритроцитов при нулевой скорости сдвига, k_∞ — наибольшая объёмная доля эритроцитов при бесконечной скорости сдвига, $\dot{\gamma}_c$ — показатель формирования «монетных столбиков» эритроцитов.

Решение (2)–(3) при расчёте течений в разветвлённых, длинных сосудах трудоёмко. По этой причине проводится процедура усреднения. Для этого принимается ряд предположений [25]:

1. Сосуд рассматривается как цилиндр с переменным круговым поперечным сечением;
2. Предполагается, что для сосуда верна осевая симметрия т.е. в цилиндрической системе координат все рассматриваемые величины не зависят от угла φ . Компонента скорости u_φ равна нулю;
3. Давление одинаково для фиксированного поперечного сечения;
4. Имеют место только радиальные смещения стенки сосуда т.е. считаем ось цилиндра не смещающейся со временем;
5. Не учитываются внешние воздействия на сосуд.

С учётом таких предположений, уравнение (2) примет вид

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + \nabla \cdot (u_z \mathbf{u}) = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{S}_z, \quad (4)$$

где $\mathbf{S}_z = (S_{zr}, S_{z\varphi}, S_{zz})^T$.

Радиус сосуда в деформированном состоянии зададим функцией $R = R(t, z)$. Тогда осевая компонента вектора скорости записывается как

$$u_z(t, r, z) = U(t, z) s \left(\frac{r}{R(t, z)} \right).$$

Здесь $U(t, z)$ — средняя скорость по поперечному сечению в точке z , s — безразмерный профиль скорости.

Введём функции $A(t, z)$ и $Q(t, z)$. $A(t, z) = \pi R^2(t, z)$ — площадь поперечного сечения сосуда. $Q(t, z)$ — объёмный расход т.е. объём жидкости, протекающий через поперечное сечение сосуда S_v в единицу времени:

$$Q(t, z) = \iint_{S_v} u_z d\sigma = A(t, z) U(t, z).$$

Также введём коэффициент Буссинеска α — отношение количества движения жидкости, проходящей в единицу времени через поперечное сечение сосуда к количеству движения, вычисленному по средней скорости:

$$\alpha = \frac{\iint_{S_v} s^2 d\sigma}{A(t, z)}.$$

Учитывая приведённые предположения и проведя осреднение трёхмерных уравнений (1)–(2), можно получить одномерную модель движения крови в сосуде [20]

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha \frac{Q^2}{A} \right) + \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = f(A, Q), \quad (6)$$

где $f(A, Q)$ — функция, учитывающая вязкие свойства крови, p — давление, α — коэффициент Буссинеска. Далее в работе речь будет идти исключительно об одномерной модели.

Что бы замкнуть систему (5)–(6), вводится уравнение состояния [17]

$$P - P_{\text{ext}} = P_{\text{min}} + \frac{\beta}{A_{\text{min}}} \left(\sqrt{A} - \sqrt{A_{\text{min}}} \right). \quad (7)$$

Здесь $P = P(A)$ — давление, отвечающее конкретному поперечному сечению, P_{ext} — постоянное внешнее давление, A_{min} и P_{min} — диастолические площадь поперечного сечения и давление, $\beta = \frac{4}{3} \sqrt{\pi} E h_v$, E — модуль Юнга и h_v — толщина стенки сосуда. Подставив (7) в (6) получим

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha \frac{Q^2}{A} \right) + \gamma \sqrt{A} \frac{\partial A}{\partial z} = f(A, Q), \quad \gamma = \frac{\beta}{2A_{\text{min}}\rho}. \quad (8)$$

1.4 Выводы

Так как для расчёта движения крови в трёхмерном сосуде нужны значительные вычислительные мощности, то часто рассматривают сердечно-сосудистую систему в одномерном приближении. При этом перспективным выглядит учёт неньютоновских свойств крови, а получение аналитического решения позволит проводить тестирование численных решений для схожих задач.

Таким образом, цель работы состоит в получении аналитических решений задач для уравнений одномерной гемодинамики. Для достижения цели, ставится ряд задач:

1. Получение аналитического решения задачи Коши для случая модели крови как идеальной жидкости;
2. Получение аналитического решения задачи Коши для случая модели крови как вязкой жидкости с учётом неньютоновости;
3. Получение аналитического решения начально-краевой задачи для случая модели крови как вязкой жидкости с учётом неньютоновости.

2 Модель без учёта вязкости

2.1 Решение задачи Коши

Процесс течения крови при пренебрежении вязкими свойствами, в одномерном случае описывается системой вида:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q^2}{A} \right) = -\frac{A}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (10)$$

С учетом того, что $Q = AU$, систему (9)–(10) можно переписать в виде [21]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + U \frac{\partial A}{\partial z} + A \frac{\partial U}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\rho D(A)A} \frac{\partial A}{\partial z} + U \frac{\partial U}{\partial z} &= 0, \end{aligned}$$

здесь $D = D(A)$ — коэффициент растяжимости. Предполагается, что зависимость $D(A)$ известна [21] и имеет вид $D(A) = D_0/A^n$, $n > 0$, D_0 — константа.

В той же работе было показано, что, с учётом малых изменений площади поперечного сечения, система (9)–(10) может быть сведена к нелинейному уравнению вида:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \sqrt{\frac{A_0^n}{\rho D_0}} \left(1 + \frac{n+1}{2A_0} (A - A_0) \right) \frac{\partial A}{\partial z} = 0, \quad (11)$$

где A_0 — площадь поперечного сечения сосуда в недеформированном состоянии.

В [22] было получено точное аналитическое решение задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} + f(v) \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad v = v(t, z)$$

с начальным условием

$$v(0, z) = \varphi(z).$$

При этом само решение представлено в параметрическом виде:

$$\begin{cases} z = \xi + \mathfrak{F}(\xi)t, \\ v = \varphi(\xi). \end{cases}$$

Здесь $\mathfrak{F}(\xi) = f(\varphi(\xi))$.

Как можно видеть, уравнение (11), с точностью до обозначений, можно переписать в виде:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (\beta_1 + \beta_2 U) \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad (12)$$

где $\beta_1 = \sqrt{\frac{A_0^n}{\rho D_0}} \left(1 - \frac{n+1}{2A_0} A_0 \right)$, $\beta_2 = \sqrt{\frac{A_0^n}{\rho D_0}} \left(1 + \frac{n+1}{2A_0} A \right)$.

Полученное решение представляет собой бегущую волну. В случае, когда $f(v)$ отлична от константы, возникает искажение волнового профиля бегущей волны и, как следствие, потеря единственности решения. В [22] было получено значение момента времени начала искажения решения

$$t_{\min} = -\frac{1}{\mathfrak{F}'(\xi_0)},$$

где ξ_0 находится из условия $|\mathfrak{F}'(\xi_0)| = \max |\mathfrak{F}'(\xi)|$ при $\mathfrak{F}'(\xi) < 0$. В области $t > t_{\min}$ решение перестаёт быть однозначным, а потому поиск решения после этого момента времени не проводился.

2.2 Разностные схемы

Уравнение (11) можно представить в дивергентной форме:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial z} = 0, \quad F(U) = \alpha U + \beta \frac{U^2}{2}, \quad (13)$$

где U — искомая функция, а F — поток.

Пространственная координата z рассматривается на промежутке $[-L, L]$. Используется равномерная сетка, разбивающая этот промежуток на N частей. Узлы сетки обозначаются как z_j , через h обозначается шаг по пространственной сетке. Время t рассматривается на промежутке $[0, T]$, узлы обозначаются t_n и отстоят друг от друга на расстоянии Δt , M — число шагов по времени. На этой сетке выделяются ячейки $I_j = [z_{j-1/2}, z_{j+1/2}]$, где $z_{j-1/2} = (z_{j-1} + z_j)/2$, $z_{j+1/2} = (z_j + z_{j+1})/2$.

Используемый в работе способ представления численного решения состоит в том, что распределение величин аппроксимируется ступенчатыми функциями такими, что эти величины имеют постоянное значение на каждом интервале $[z_j, z_{j+1}]$.

Существует множество способов представления потока F . По причине широкого применения на практике и простоты реализации [23], были выбраны следующие способы аппроксимации: HLL-аппроксимации, аппроксимации Рusanова и аппроксимации Лакса–Фридрихса.

Для аппроксимации (13) будем использовать

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{h} \left(\hat{F}_{j+\frac{1}{2}}^n - \hat{F}_{j-\frac{1}{2}}^n \right).$$

Обозначим:

$$U_L = U_j, \quad U_R = U_{j+1},$$

где индексы R и L обозначают правые и левые границы ячейки соответственно.

HLL-аппроксимация потока по [24] имеет вид:

$$\hat{F}_{j+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} F_j & S_L \geq 0, \\ \frac{S_R F_j - S_L F_{j+1} + S_R S_L (U_R - U_L)}{S_R - S_L} & S_L < 0 < S_R, \\ F_{j+1} & S_R \leq 0, \end{cases}$$

$S_R = U_R + a_{j+1}$, $S_L = U_L - a_j$, где a_j — «скорость звука».

Аппроксимация же Лакса–Фридрихса имеет вид:

$$\begin{aligned} \hat{F}_{j-\frac{1}{2}}^n &= \frac{1}{2}(F_{j-1} + F_j) - \frac{h}{2\Delta t} (U_j^n - U_{j-1}^n), \\ \hat{F}_{j+\frac{1}{2}}^n &= \frac{1}{2}(F_j + F_{j+1}) - \frac{h}{2\Delta t} (U_{j+1}^n - U_j^n). \end{aligned}$$

Для аппроксимации Рusanова

$$\begin{aligned} \hat{F}_{j-\frac{1}{2}}^n &= \frac{1}{2}(F_{j-1} + F_j) - S^+ (U_j^n - U_{j-1}^n), \\ \hat{F}_{j+\frac{1}{2}}^n &= \frac{1}{2}(F_j + F_{j+1}) - S^+ (U_{j+1}^n - U_j^n), \end{aligned}$$

где $S^+ = \max\{|U_L - a_L|, |U_R - a_R|, |U_L + a_L|, |U_R + a_R|\}$.

Для практической оценки порядка сходимости в данной работе применяется подход Рунге. Порядок сходимости β рассчитывается как тангенс угла наклона логарифмической зависимости $E(h)$. Здесь $h = h(P)$ — текущий шаг по пространственной координате

z . Этот шаг представляет собой в общем виде $h = 1/m^P$, m — константа; и увеличение P позволяет мельчить шаг. Тогда практический порядок сходимости

$$E(h) = \sqrt{h(P) \sum_{j=1}^{N+1} (U_j - u_j^{An})^2},$$

где U_j^{An} — аналитическое решение, N — число разбиений по пространственной сетке.

2.3 Практическая оценка порядка сходимости

Уравнение (12) решалось с начальным условием

$$u(0, z) = \sin(z).$$

В таком случае, аналитическое решение будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} z = \xi + (\beta_1 + \beta_2 \sin(\xi))t, \\ U = \sin(\xi). \end{cases}$$

При расчёте были взяты значения $\beta_1 = 0.5$, $\beta_2 = 1$, $L = 2\pi$, шаг $h = \frac{1}{1.5^P}$ и временной отрезок $[0, 0.5]$ с числом разбиений $M = 1000$.

Были построены графики зависимости погрешности от логарифма шага. Однако, так как переменная z зависит от параметра и, следовательно, может не совпадать с узлами сетки, то проводится кусочно-полиномиальная интерполяция для получения значений в узлах.

Численные решения, получаемые по схемам Лакса–Фридрикса и HLL, в теории, дают решение со 2 порядком сходимости, а потому на рисунках 1 и 2 строится прямая с наклоном 2. Для решения, полученного с применением схемы Рунанова, теоретический порядок сходимости равен 1, а потому строится прямая с таким же наклоном на рисунке 3.

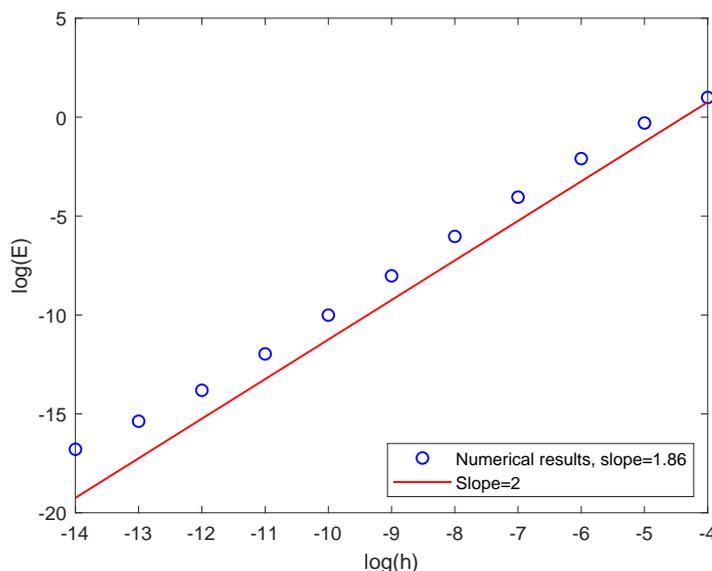


Рис. 1: Результат оценки практической скорости сходимости HLL-аппроксимации

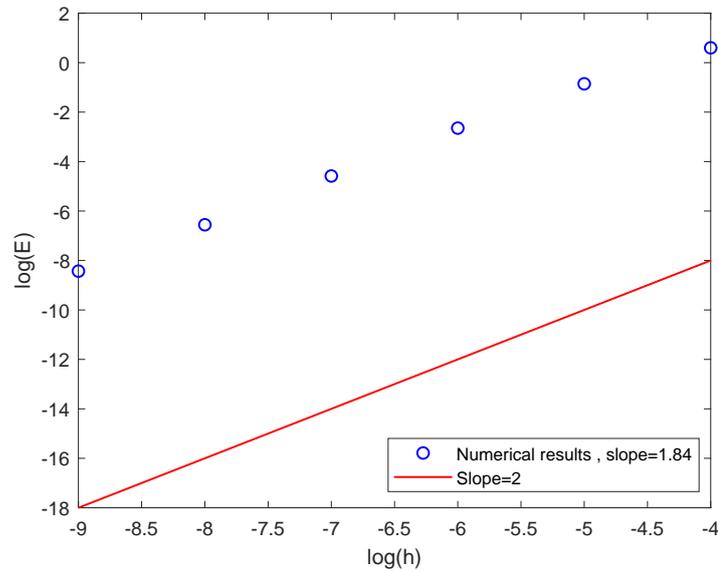


Рис. 2: Результат оценки практической скорости сходимости аппроксимации Лакса–Фридрикса

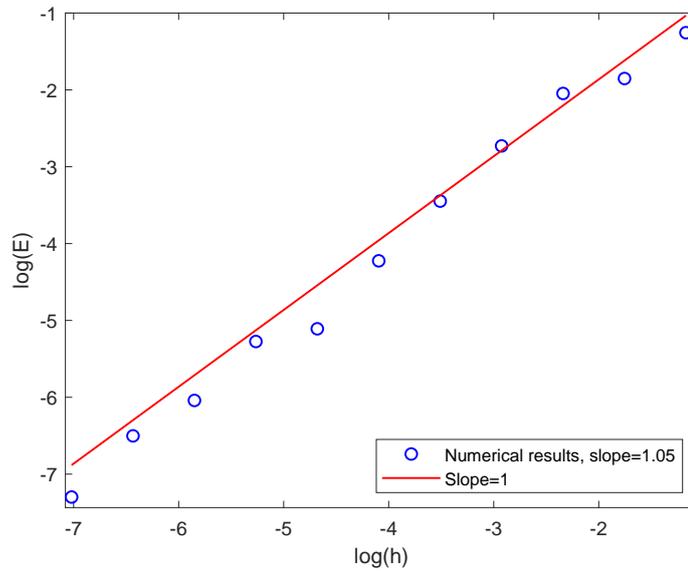


Рис. 3: Результат оценки практической скорости сходимости аппроксимации Рунге–Кутты

2.4 Результаты и вывод

В текущей главе были получены следующие результаты:

1. Получено аналитическое решение задачи Коши при рассмотрении одномерной модели без учёта вязкости;
2. Осуществлена программная реализация алгоритмов расчёта по явным разностным схемам;
3. Проведена оценка порядка сходимости численного решения.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что программы, реализующие разностные схемы, позволяют получать корректные результаты. При этом тестирование проводилось с использованием полученного аналитического решения.

3 Модели с учётом вязкости

3.1 Одномерные неньютоновские модели

Профиль скорости для неньютоновской жидкости отличается от параболического профиля, характерного для ньютоновской жидкости [18]. В [19] была рассмотрена задача о течении в цилиндрической трубке с постоянным поперечным сечением. Из (4) для модели PL было получено точное выражение для безразмерного профиля скорости

$$s(y) = \frac{3n+1}{n+1} \left(1 - y^{1+\frac{1}{n}}\right),$$

где $y = r/R$ — безразмерный радиус.

Для других моделей нельзя получить точное выражение для $s(y)$, при этом, значения $s'(1)$ фигурируют в коэффициентах для f и значение α вычисляется с использованием $s(y)$. В связи с этим, предлагается описывать профиль скорости следующей зависимостью:

$$s(y) = \left(1 + \frac{2}{d}\right) (1 - y^d).$$

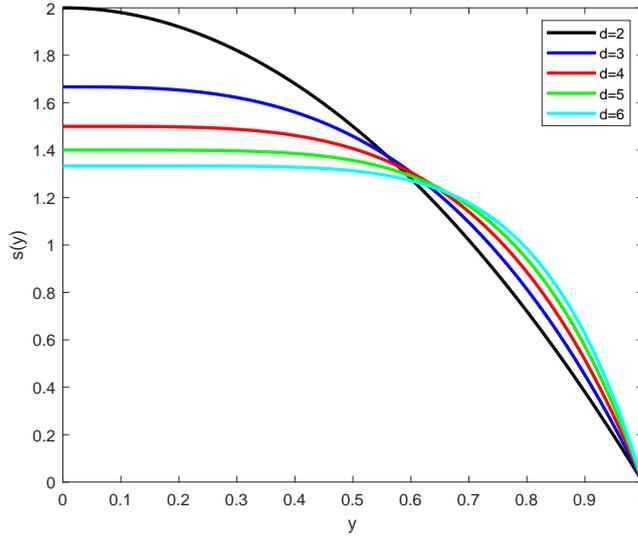


Рис. 4: Профиль скорости $s(y)$ в зависимости от d .

В одномерной модели (5)–(6), влияние вязкости жидкости учитывается функцией $f(A, Q)$. Выражение для этого члена получается в результате процедуры усреднения уравнения (2). При использовании различных, ранее упомянутых моделей, f примет следующий вид:

Для модели PL

$$f(A, Q) = -K \frac{Q|Q|^{n-1}}{A^{\frac{3n-1}{2}}},$$

$$K = -\frac{2ks'(1)|s'(1)|^{n-1}\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\rho}.$$

Для модели C

$$f(A, Q) = -K_1 \frac{Q}{A} - K_2 \left(1 + K_3 \frac{Q^2}{A^3}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{Q}{A},$$

$$K_1 = -\frac{2\pi s'(1)\mu_\infty}{\rho}, \quad K_2 = -\frac{2\pi s'(1)(\mu_0 - \mu_\infty)}{\rho}, \quad K_3 = \lambda^2 \pi (s'(1))^2.$$

Для модели СУ

$$f(A, Q) = -K_1 \frac{Q}{A} - K_2 \left(1 + K_3 \frac{|Q|^a}{A^{3a/2}} \right)^{\frac{n-1}{a}} \frac{Q}{A},$$

$$K_1 = -\frac{2\pi s'(1)\mu_\infty}{\rho}, \quad K_2 = -\frac{2\pi s'(1)(\mu_0 - \mu_\infty)}{\rho}, \quad K_3 = \lambda^a \pi^{\frac{a}{2}} |s'(1)|^a.$$

Для модели Сг

$$f(A, Q) = -K_1 \frac{Q}{A} - K_2 \frac{1}{1 + K_3 \frac{|Q|^m}{A^{\frac{3m}{2}}}} \frac{Q}{A},$$

$$K_1 = -\frac{2\pi s'(1)\mu_\infty}{\rho}, \quad K_2 = -\frac{2\pi s'(1)(\mu_0 - \mu_\infty)}{\rho}, \quad K_3 = \lambda^m \pi^{\frac{m}{2}} |s'(1)|^m.$$

Для модели SСг

$$f(A, Q) = -K_1 \frac{Q}{A} - K_2 \frac{1}{1 + K_3 \frac{|Q|}{A^{\frac{3}{2}}}} \frac{Q}{A},$$

$$K_1 = -\frac{2\pi s'(1)\mu_\infty}{\rho}, \quad K_2 = -\frac{2\pi s'(1)(\mu_0 - \mu_\infty)}{\rho}, \quad K_3 = \lambda^m \pi^{\frac{1}{2}} |s'(1)|.$$

Для модели МСг

$$f(A, Q) = -K_1 \frac{Q}{A} - K_2 \frac{1}{\left(1 + K_3 \frac{|Q|^m}{A^{\frac{3m}{2}}} \right)^a} \frac{Q}{A},$$

$$K_1 = -\frac{2\pi s'(1)\mu_\infty}{\rho}, \quad K_2 = -\frac{2\pi s'(1)(\mu_0 - \mu_\infty)}{\rho}, \quad K_3 = \lambda^m \pi^{\frac{m}{2}} |s'(1)|^m.$$

Для модели Y и MY

$$f(A, Q) = -K_1 \frac{Q}{A} - K_2 \frac{1 + \ln(1 + K_3 \frac{|Q|}{A^{3/2}})}{1 + K_3 \frac{|Q|}{A^{3/2}}} \frac{Q}{A},$$

$$K_1 = -\frac{2\pi s'(1)\mu_\infty}{\rho}, \quad K_2 = -\frac{2\pi s'(1)(\mu_0 - \mu_\infty)}{\rho}, \quad K_3 = \lambda \sqrt{\pi} |s'(1)|.$$

Для модели Q

$$f(A, Q) = -K_1 \left(1 - \frac{H k_0 + k_\infty K_2 \frac{\sqrt{|Q|}}{A^{3/4}}}{1 + K_2 \frac{\sqrt{|Q|}}{A^{3/4}}} \right)^{-2} \frac{Q}{A},$$

$$K_1 = -\frac{2\pi s'(1)\mu}{\rho}, \quad K_2 = \frac{\pi^{\frac{1}{4}} \sqrt{|s'(1)|}}{\gamma_c}.$$

Перейдём к безразмерным уравнениям, чтобы, по возможности, выделить малый параметр. Пусть введены следующие безразмерные переменные:

$$\tilde{z} = \frac{z}{L_c}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{T_c}, \quad \tilde{A} = \frac{A}{A_c}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{\rho U_c^2}, \quad \tilde{Q} = \frac{Q}{A_c U_c},$$

где L_c — характерная длина (длина сосуда), U_c — характерная скорость (скорость волны при среднем давлении), $T_c = L_c/U_c$ — характерное время, рассчитывающееся через U_c и L_c , A_c — характерная площадь поперечного сечения. Далее волна над безразмерными величинами будет опускаться.

В таком случае, уравнения (5) и (8) можно переписать в безразмерном виде:

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \tilde{z}} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha \frac{Q^2}{A} \right) + \chi \sqrt{A} \frac{\partial A}{\partial z} = f(A, Q), \quad (15)$$

где $\chi = \gamma \sqrt{A_c} / U_c^2$.

Член f , учитывающий вязкие свойства, для безразмерной системы можно записать в следующем виде:

Для модели PL

$$f(A, Q) = -\varepsilon \frac{Q|Q|^{n-1}}{A^{\frac{3n-1}{2}}}, \quad \varepsilon = \frac{K U_c^{n-1} T_c}{A_c^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Для модели С

$$f(A, Q) = -\varepsilon \frac{Q}{A} - \xi \left(1 + \zeta \frac{Q^2}{A^{\frac{3a}{2}}} \right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{Q}{A},$$

$$\varepsilon = \frac{K_1 T_c}{A_c}, \quad \xi = \frac{K_2 T_c}{A_c}, \quad \zeta = \frac{K_3 U_c^2}{A_c}.$$

Для модели СУ

$$f(A, Q) = -\varepsilon \frac{Q}{A} - \xi \left(1 + \zeta \frac{|Q|^a}{A^{\frac{3a}{2}}} \right)^{\frac{n-1}{a}} \frac{Q}{A},$$

$$\varepsilon = \frac{K_1 T_c}{A_c}, \quad \xi = \frac{K_2 T_c}{A_c}, \quad \zeta = \frac{K_3 U_c^a}{A_c^{a/2}}.$$

Для модели Сг

$$f(A, Q) = -\varepsilon \frac{Q}{A} - \xi \frac{1}{1 + \zeta \frac{|Q|^m}{A^{\frac{3m}{2}}}} \frac{Q}{A},$$

$$\varepsilon = \frac{K_1 T_c}{A_c}, \quad \xi = \frac{K_2 T_c}{A_c}, \quad \zeta = \frac{K_3 U_c^m}{A_c^{m/2}}.$$

Для модели SCг

$$f(A, Q) = -\varepsilon \frac{Q}{A} - \xi \frac{1}{1 + \zeta \frac{|Q|}{A^{\frac{3}{2}}}} \frac{Q}{A},$$

$$\varepsilon = \frac{K_1 T_c}{A_c}, \quad \xi = \frac{K_2 T_c}{A_c}, \quad \zeta = \frac{K_3 U_c}{\sqrt{A_c}}.$$

Для модели МСг

$$f(A, Q) = -\varepsilon \frac{Q}{A} - \xi \frac{1}{\left(1 + \zeta \frac{|Q|^m}{A^{\frac{3m}{2}}} \right)^a} \frac{Q}{A},$$

$$\varepsilon = \frac{K_1 T_c}{A_c}, \quad \xi = \frac{K_2 T_c}{A_c}, \quad \zeta = \frac{K_3 U_c^m}{A_c^{m/2}},$$

Для модели Y и MY

$$f(A, Q) = -\varepsilon \frac{Q}{A} - \xi \frac{1 + \ln \left(1 + \zeta \frac{|Q|}{A^{3/2}} \right)}{1 + \zeta \frac{|Q|}{A^{3/2}}} \frac{Q}{A},$$

$$\varepsilon = \frac{K_1 T_c}{A_c}, \quad \xi = \frac{K_2 T_c}{A_c}, \quad \zeta = \frac{K_3 U_c}{\sqrt{A_c}}.$$

Для модели Q

$$f(A, Q) = -\varepsilon \left(1 - \frac{H k_0 + k_\infty \zeta \frac{\sqrt{|Q|}}{A^{3/4}}}{1 + \zeta \frac{|Q|}{A^{3/4}}} \right)^{-2} \frac{Q}{A},$$

$$\varepsilon = \frac{K_1 T_c}{A_c}, \quad \zeta = \frac{K_2 \sqrt{U_c}}{\sqrt{A_c^{1/4}}}.$$

Таблица 1: Значения параметров для различных моделей.

Модель	ε			
	$n = 1$	$n = 0.9$	$n = 0.82$	$n = 0.6$
PL	0.0571	0.0235	0.0306	0.0016

Модели		ε		ξ		ζ		c	
		$d = 2$	$d = 6$	$d = 2$	$d = 6$	$d = 2$	$d = 6$	$d = 2$	$d = 2$
C		0.0543	0.1087	0.8276	1.6552	$8.86 \cdot 10^8$	$3.54 \cdot 10^9$	15.24	15.23
CY		0.0543	0.1087	0.8276	1.6552	$1.96 \cdot 10^6$	$4.95 \cdot 10^5$	15.24	15.23
Cr		0.0543	0.1087	0.8276	1.6552	403.5	822.8	15.24	15.23
MC		0.0543	0.1087	0.8276	1.6552	$6.07 \cdot 10^{10}$	$3.22 \cdot 10^{11}$	15.24	15.23
SC		0.0787	0.1575	1.9686	3.9371	$7.19 \cdot 10^4$	$1.44 \cdot 10^5$	25.01	24.99
MY	$H = 0.4$	0.0702	0.1405	0.6595	1.319	$7.72 \cdot 10^4$	$1.54 \cdot 10^5$	9.39	9.39
	$H = 0.5$	0.0952	0.183	1.2239	2.4479	$8.07 \cdot 10^4$	$1.61 \cdot 10^5$	12.86	13.37
Q	$H = 0.4$	0.0189	0.0378	—	—	69.14	97.78	—	—
	$H = 0.5$	0.0189	0.0378	—	—	69.14	97.78	—	—

В таблице 1 приведены некоторые полученные значения ε , ξ и ζ для различных моделей. Можно видеть, что ε , содержащийся в члене $f(A, Q)$ безразмерного уравнения (15), мал, по сравнению с остальными параметрами. Считаем $\xi = c\varepsilon$, c — константа. И, в таком случае, для решения нелинейных задач, образованных системой (14)–(15), можно искать методом возмущений.

3.2 Случай бесконечного промежутка

Рассмотрим систему (14)–(15) с начальными условиями вида

$$A(0, z) = A^0 + \varepsilon\varphi_1(z), \quad Q(0, z) = Q^0 + \varepsilon\psi_1(z),$$

где $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ ограничены на всём промежутке z , а A^0 и Q^0 — константы.

таким образом величины A и Q представляются в виде: Так как в системе присутствует малый параметр ε , решение можно искать методом возмущений, таким образом величины A и Q представляются в виде:

$$A(t, z) = A_0(t, z) + \varepsilon A_1(t, z), \quad (16)$$

$$Q(t, z) = Q_0(t, z) + \varepsilon Q_1(t, z). \quad (17)$$

Причём ограничимся первым порядком ε . Несложно показать, что слагаемые $A_0(t, z)$ и $Q_0(t, z)$ равны A^0 и Q^0 соответственно.

Для $A_1(t, z)$ и $Q_1(t, z)$ задача Коши примет вид

$$\frac{\partial A_1}{\partial t} + \frac{\partial Q_1}{\partial z} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial z} + \left(\chi\sqrt{A_0} - \alpha \frac{Q_0^2}{A_0^2} \right) \frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{2\alpha Q_0}{A_0} \frac{\partial Q_1}{\partial z} = f_0, \quad (19)$$

где $f_0 = f(A_0, Q_0)/\varepsilon$.

$$A_1(0, z) = \varphi_1(z), \quad Q_1(0, z) = \psi_1(z),$$

Перепишем систему (18)–(19) в виде

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z} = \mathbf{g}, \quad (20)$$

где \mathbf{a} и \mathbf{g} — векторы решения и неоднородности соответственно. Матрица \mathbf{M} имеет вид

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \xi\sqrt{A_0} - \alpha\frac{Q_0^2}{A_0^2} & 2\alpha\frac{Q_0}{A_0} \end{pmatrix}.$$

Матрицу \mathbf{M} можно представить как: $\mathbf{M} = \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}\mathbf{L}$, где \mathbf{R} и \mathbf{L} — матрицы правых и левых собственных векторов соответственно, а $\mathbf{\Lambda}$ — диагональная матрица собственных значений. Собственные значения матрицы \mathbf{M} равны

$$\lambda_{1,2} = \alpha\frac{Q_0}{A_0} \pm \sqrt{\frac{Q_0^2}{A_0^2}(\alpha^2 + \alpha) - \chi\sqrt{A_0}}.$$

Матрица левых собственных векторов имеет следующий вид:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \frac{\chi\sqrt{A_0} - \alpha\frac{Q_0^2}{A_0^2}}{\alpha\frac{Q_0}{A_0} + \sqrt{\frac{Q_0^2}{A_0^2}(\alpha^2 + \alpha) - \chi\sqrt{A_0}}} & \frac{\chi\sqrt{A_0} - \alpha\frac{Q_0^2}{A_0^2}}{\alpha\frac{Q_0}{A_0} - \sqrt{\frac{Q_0^2}{A_0^2}(\alpha^2 + \alpha) - \chi\sqrt{A_0}}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Домножив систему (20) слева на \mathbf{L} и обозначив $\mathbf{w} = \mathbf{L}\mathbf{a}$ и $\mathbf{G} = \mathbf{L}\mathbf{g}$, сведём её к системе двух независимых неоднородных уравнений переноса

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial w_1}{\partial z} &= G_1(t, z), \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial w_2}{\partial z} &= G_2(t, z). \end{aligned}$$

Эти уравнения решаются следующим образом: проводится замена переменных (t, z) на (τ, θ) , где $\tau = t$, а $\theta = \theta(t, z)$ такой, что удовлетворяет

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0.$$

Тогда уравнения переноса сводятся к уравнению вида

$$\frac{\partial w_i}{\partial \tau} = \tilde{g}(\tau, \theta),$$

которое решается интегрированием. Окончательное решение получается после возврата к старым переменным.

Таким образом, решение задачи Коши для системы (18)–(19) имеет вид

$$\begin{aligned} A_1(t, z) &= \frac{1}{L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}} \left(L_{22}L_{11}\varphi_1(z - \lambda_1 t) + L_{22}L_{12}\psi_1(z - \lambda_1 t) - \right. \\ &\quad \left. - L_{12}L_{21}\varphi_1(z - \lambda_2 t) - L_{12}L_{22}\psi_1(z - \lambda_2 t) \right), \\ Q_1(t, z) &= f_0 t - \frac{1}{L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}} \left(L_{21}L_{11}\varphi_1(z - \lambda_1 t) + L_{21}L_{12}\psi_1(z - \lambda_1 t) - \right. \\ &\quad \left. - L_{11}L_{21}\varphi_1(z - \lambda_2 t) - L_{11}L_{22}\psi_1(z - \lambda_2 t) \right). \end{aligned}$$

Для проведения расчётов были взяты следующие значения: $\varphi(z) = 0$, $\psi_1(z) = \cosh^{-2}(x - 2) + 1$, $\varphi_2(z) = \psi_2(z) = 0$; $A_0 = \pi$, $Q_0 = 1$. Координату z ограничим промежутком $(-10, 10)$, $t \in (0, 2\pi)$. Показатель гематокрита $H \in (0.4, 0.5)$.

Для сравнения решений, полученных при применении различных моделей, введём показатель затухания и показатель относительного отклонения

Т.к. рассматриваем вязкую жидкость, то решение будет иметь затухающий характер при возрастании t . В связи с этим, имеет смысл рассмотреть показатель затухания, по которому будет видно, как изменяется амплитуда колебаний со временем. Рассчитывать его будем как:

$$Q_{rel} = \frac{\max_z Q(T, z)}{\max_z Q(0, z)},$$

где T — финальный момент времени.

Относительное отклонение решений, полученных при использовании моделей неньютоновской жидкости от решений, полученных с использованием моделей ньютоновской или идеальной жидкости, рассчитываются следующим образом:

$$\mathfrak{D} = \frac{\|\tilde{Q}(t, z) - Q(t, z)\|}{\|\tilde{Q}(t, z)\|} \cdot 100\%,$$

где \tilde{Q} — решение, полученное для невязкой или ньютоновской жидкости.

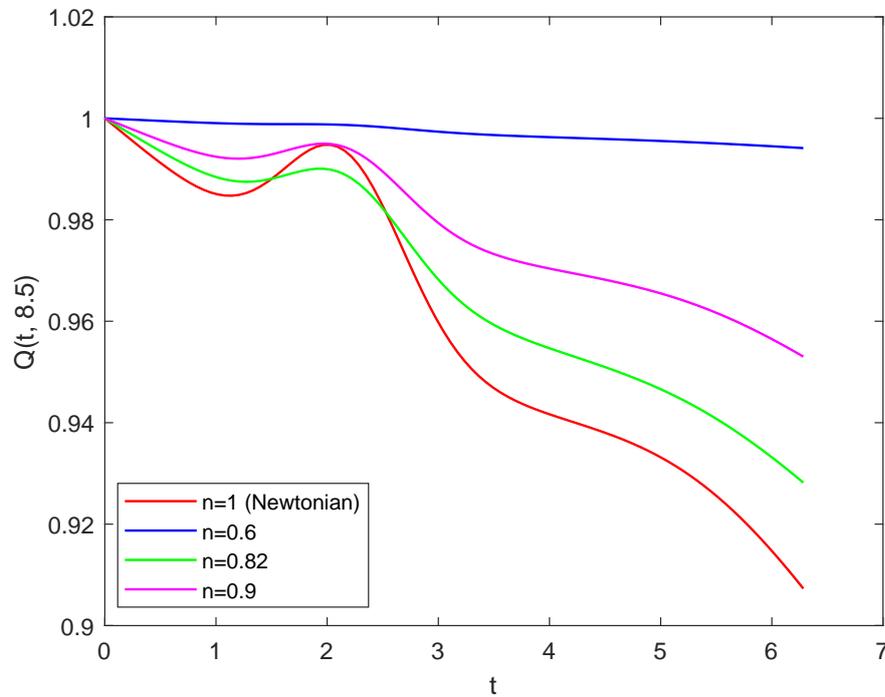


Рис. 5: График зависимости Q от t для различных показателей n в степенной модели. Бесконечный промежуток.

Значения $Q(t, z_p)$ (здесь $z_p = 8.5$) для степенной модели при различных значениях n при решении на бесконечном промежутке показаны на рисунке рис. 5. Как можно видеть, решения для любых n , отличных от $n = 1$ затухают слабее, чем решение, полученное для ньютоновской жидкости.

Зависимости Q_{rel} и \mathfrak{D} от выбранного значения d для моделей СУ, Сг, их модификаций и модели Y приведены на рис. 6 и рис. 7. Можно заметить, что решения, полученные с применением моделей неньютоновской жидкости, не совпали с решениями, полученными с применением моделей ньютоновской или невязкой жидкости. Поведение графиков зависимости \mathfrak{D} от d имеют одинаковый характер при сравнении и с невязкой, и с ньютоновской жидкостью.

С возрастанием d величина \mathfrak{D} уменьшается, а Q_{rel} — увеличивается. Это верно и для решений, полученных с применением моделей неньютоновской жидкости, и для решений, полученных с применением ньютоновской или невязкой жидкости. Однако

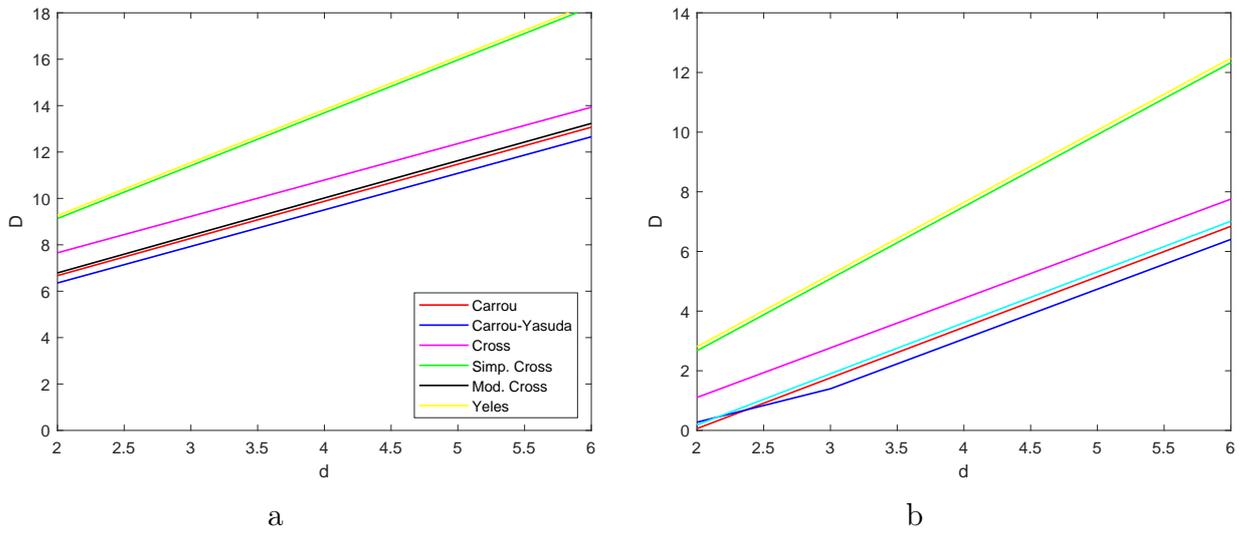


Рис. 6: Графики зависимостей \mathfrak{D} от выбранного d при расчёте относительно невязкой и ньютоновской жидкости. a — относительно невязкой жидкости, b — относительно ньютоновской.

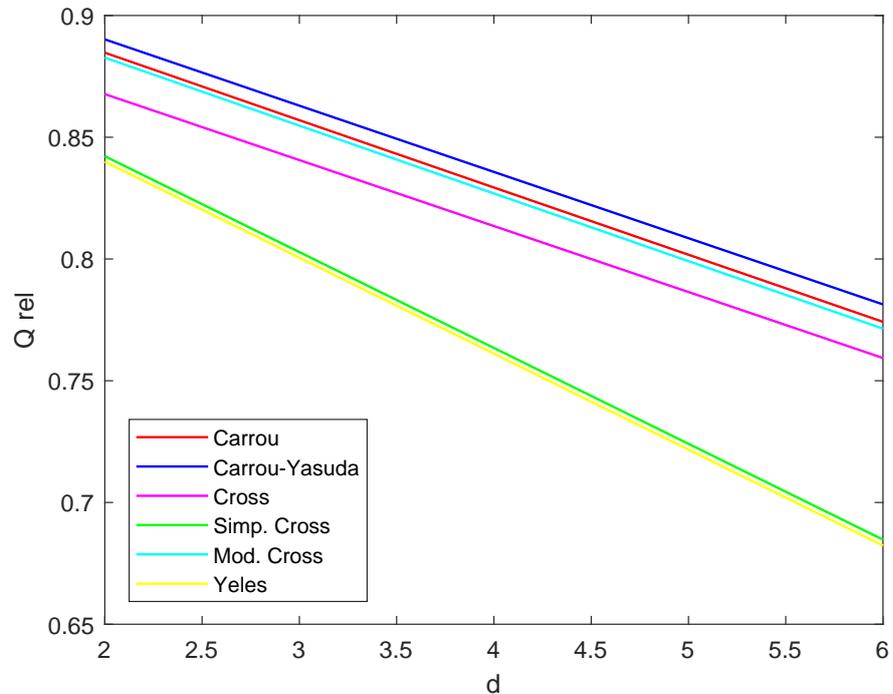


Рис. 7: График зависимости Q_{rel} от выбранного d .

для моделей SC и Y значения показателей отстоят от всех прочих. При этом значение d , близкое к 2, означает параболический профиль скорости s , что близко уже к ньютоновской жидкости.

Как можно видеть на рис. 8–11, величина \mathfrak{D} ещё больше увеличивается и с ростом величины гематокрита H , а значение Q_{rel} всё больше уменьшается с ростом H .

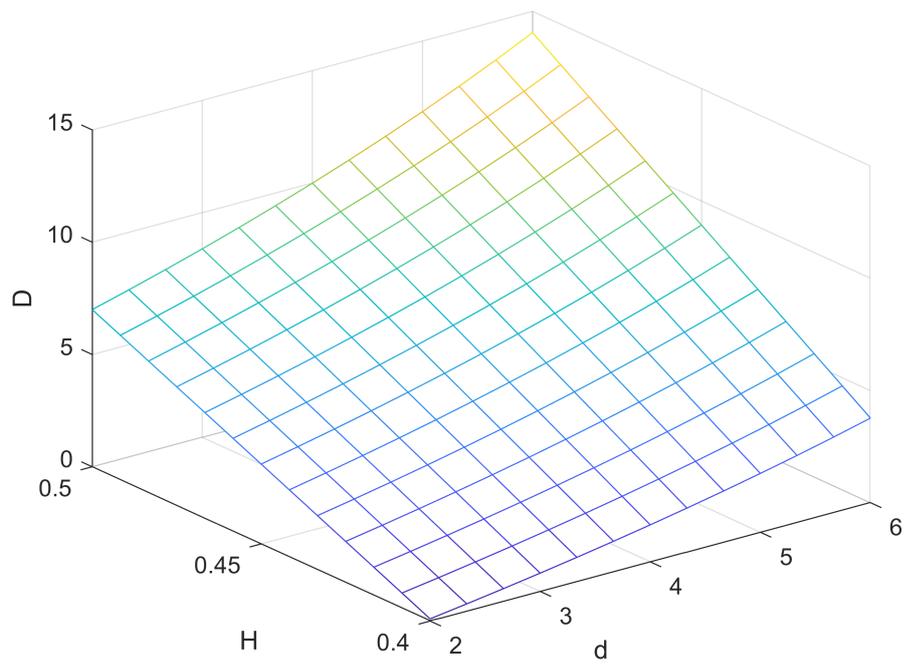


Рис. 8: График зависимости \mathfrak{D} от d и H для модели Q .

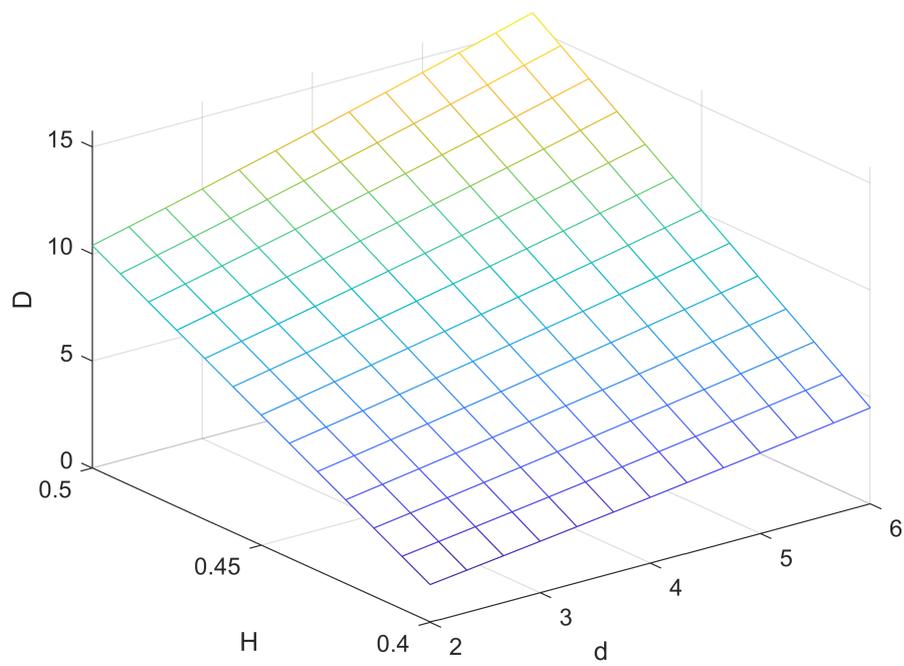


Рис. 9: График зависимости \mathfrak{D} от d и H для модели MY .

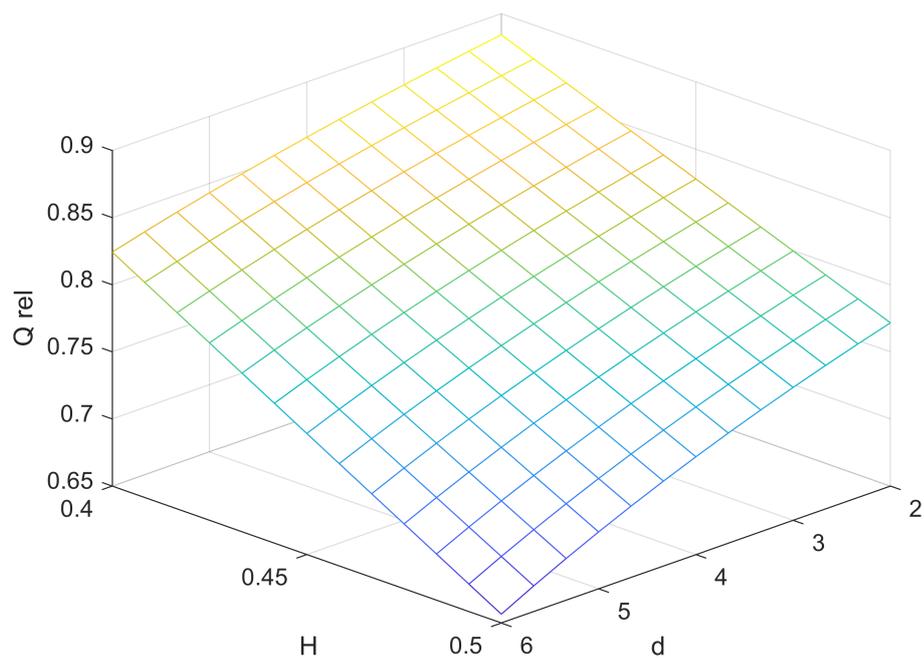


Рис. 10: График зависимости Q_{rel} от d и H для модели Q.

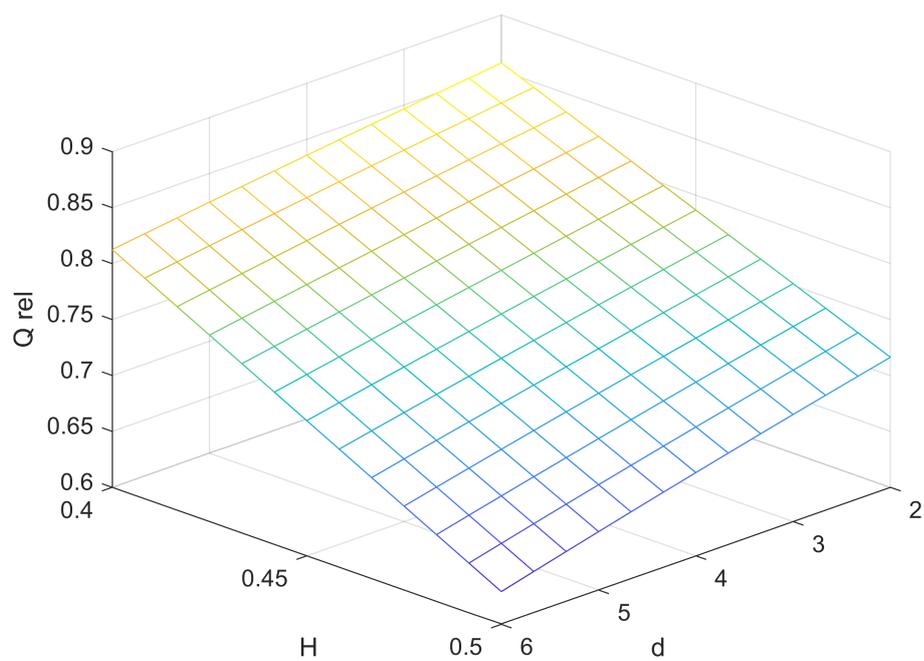


Рис. 11: График зависимости Q_{rel} от d и H для модели MY.

3.3 Случай конечного промежутка

Аналогично с решением задачи Коши (18)–(19), будем решать начально-краевую задачу методом возмущений.

В качестве граничных условий будем рассматривать условия периодичности

$$A(t, 1) = A(t, 0), \quad Q(t, 1) = Q(t, 0).$$

Аналогично с решением задачи Коши на бесконечном сосуде, рассматриваем только первое приближение в разложении A и Q (16)–(17). Тогда начальные и граничные условия примут вид

$$\begin{aligned} A_1(0, z) &= \varphi_1(z), & Q_1(0, z) &= \psi_1(z), \\ A_1(t, 1) &= A_1(t, 0), & Q_1(t, 1) &= Q_1(t, 0). \end{aligned}$$

Воспользуемся методом Фурье. Для этого рассмотрим решение задачи для однородной системы:

$$\frac{\partial A_1}{\partial t} + \frac{\partial Q_1}{\partial z} = 0, \tag{21}$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial z} + \left(\chi \sqrt{A_0} - \alpha \frac{Q_0^2}{A_0^2} \right) \frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{2\alpha Q_0}{A_0} \frac{\partial Q_1}{\partial z} = 0. \tag{22}$$

Решение уравнений (21)–(22) ищется в следующем виде:

$$A(t, z) = a(t)Z(z), \quad Q(t, z) = q(t)Z(z),$$

и тогда можно получить задачу на собственные значения:

$$Z'(z) - \lambda Z(z) = 0, \quad Z(0) = Z(1),$$

которая имеет следующее решение:

$$Z_m(z) = e^{i2\pi mz}, \quad \lambda_m = 2\pi mi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Запишем члены A_1 и Q_1 в виде разложения по собственным функциям

$$A_1(t, z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m(t) e^{i2\pi mz}, \quad Q_1(t, z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} q_m(t) e^{i2\pi mz},$$

где коэффициенты находятся следующим образом:

$$a_m(t) = C_{1m} e^{i\pi m r_1 t} + C_{2m} e^{i\pi m r_2 t}, \quad q_m(t) = -\frac{\dot{a}_m(t)}{\lambda_m}, \quad m \neq 0,$$

$$C_{1m} = -\frac{2\psi_{1m} + r_2 \varphi_{1m}}{r_1 - r_2}, \quad C_{2m} = \frac{2\psi_{1m} + r_2 \varphi_{1m}}{r_1 - r_2},$$

где $r_1 = -b_2 + \sqrt{b_2^2 + 4b_1}$, $r_2 = -b_2 - \sqrt{b_2^2 + 4b_1}$. Причём

$$a_0(t) = C_0, \quad q_0(t) = f_0 t + D_0.$$

Раскладывая начальные условия в ряд Фурье и приравнивая соответствующие коэффициенты разложения, можно получить

$$a_m(0) = \varphi_{1m} = \int_0^1 \varphi_1(z) e^{-i2\pi mz} dz, \quad q_m(0) = \psi_{1m} = \int_0^1 \psi_1(z) e^{-i2\pi mz} dz.$$

В качестве начальных условий возьмём

$$\varphi_1(z) = 0, \quad \psi_1(z) = \sin(2z), \quad \varphi_2(z) = \psi_2(z) = 0.$$

В этом случае функции A_1 и Q_1 вещественны:

$$A_1(t, z) = \frac{2}{r_1 - r_2} (\sin(\pi(2z + r_1t)) - \sin(\pi(2z + r_2t))),$$

$$Q_1(t, z) = f_0t + \frac{1}{r_1 - r_2} (r_1 \sin(\pi(2z + r_1t)) - r_2 \sin(\pi(2z + r_2t))).$$

Как можно видеть на рисунках 12–17, решения на конечном промежутке имеют такие же особенности, что и решения на бесконечном промежутке.

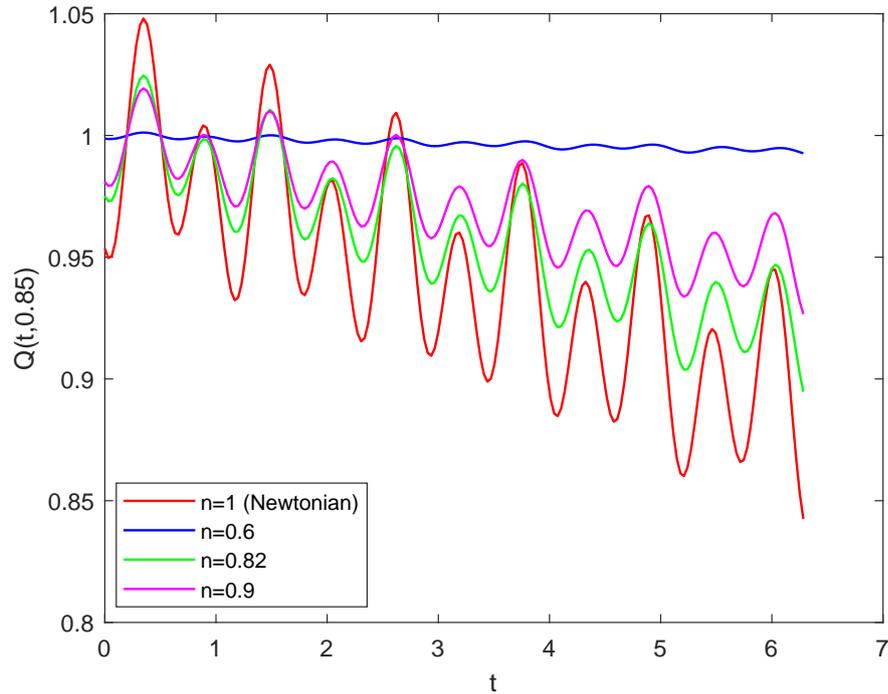


Рис. 12: График зависимости Q от t . для различных показателей n в степенной модели. Конечный промежуток.

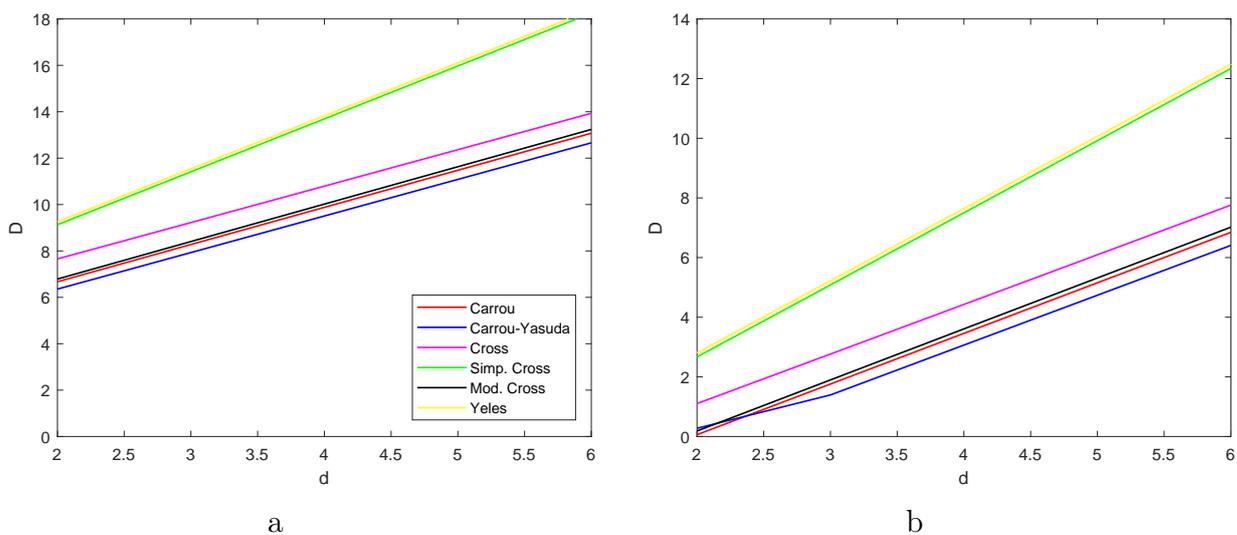


Рис. 13: Графики зависимостей \mathcal{D} от выбранного d при расчёте относительно невязкой и ньютоновской жидкости. a — относительно невязкой жидкости, b — относительно ньютоновской.

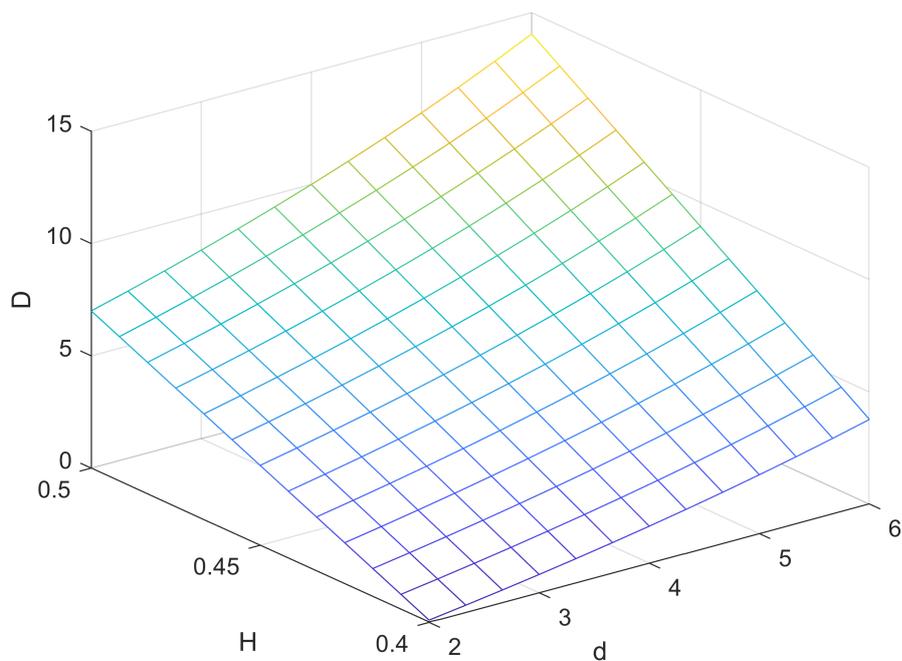


Рис. 14: График зависимости \mathcal{D} от d и H для модели Q .

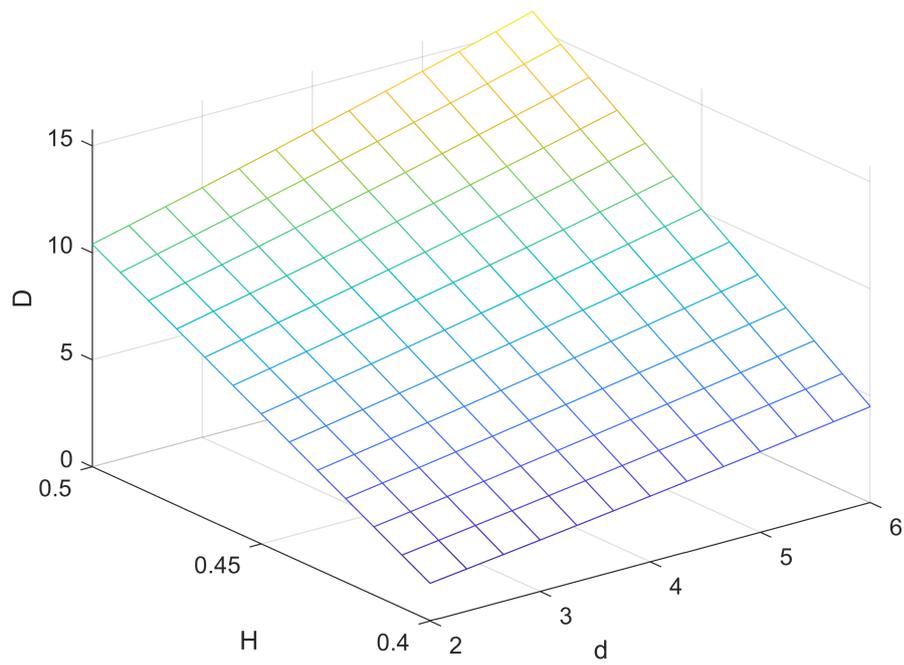


Рис. 15: График зависимости \mathfrak{D} от d и H для модели MY.

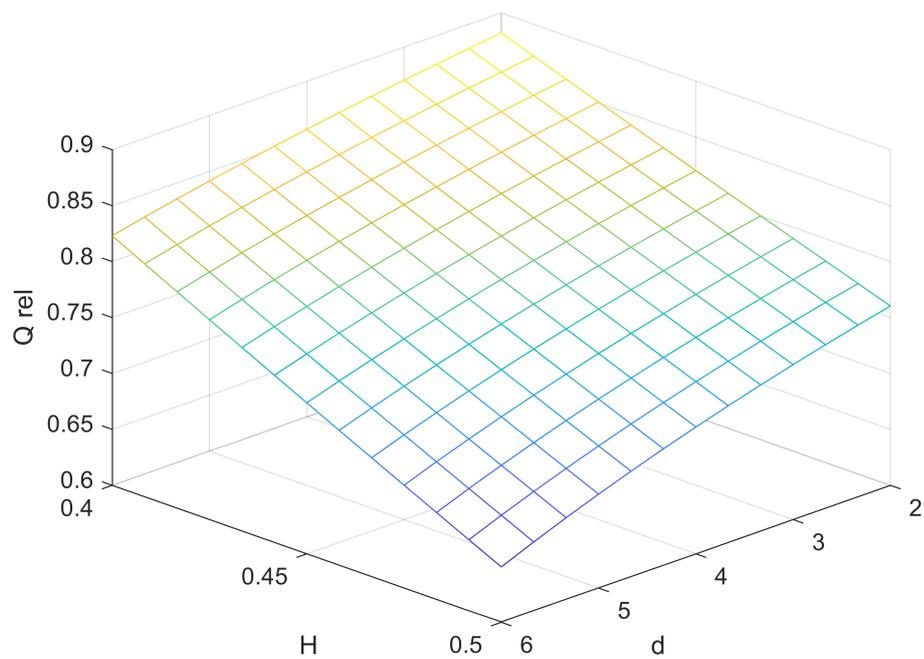


Рис. 16: График зависимости Q_{rel} от d и H для модели Q.

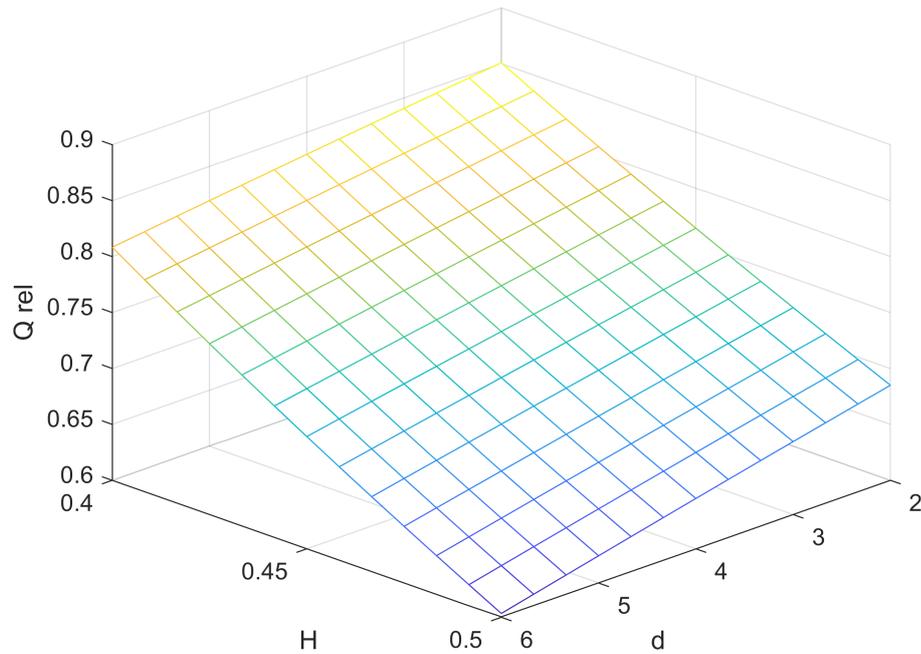


Рис. 17: График зависимости Q_{rel} от d и H для модели МУ.

3.4 Результаты и выводы

В текущей главе были получены следующие результаты:

1. Получено аналитическое решение задачи Коши в случае бесконечного промежутка;
2. Получено аналитическое решение задачи Коши в случае конечного промежутка с периодическими граничными условиями;
3. Проведено сравнение решений с разными моделями учёта неньютоновости.

Таким образом, можно сделать выводы о том, что

1. При уплощении профиля скорости (при возрастании d) наблюдается всё большее отклонение от модели ньютоновской жидкости и увеличивается затухание;
2. При уплощении профиля скорости наблюдается всё большее отклонение решения от случаев невязкой и ньютоновских жидкостей и увеличивается соответствующее относительное отклонение;
3. Увеличение гематокрита H приводит к большим отклонениям от модели ньютоновской жидкости.

Заключение

В ходе выполнения выпускной квалификационной работы были получены следующие результаты:

1. Получено аналитическое решение для задачи Коши в случае рассмотрения крови как идеальной жидкости;
2. Получено аналитическое решение задачи Коши с учётом неньютоновских свойств крови;
3. Получено аналитическое решение начально-краевой задачи с учётом неньютоновских свойств крови;
4. С использованием полученных решений проведено сравнение различных моделей крови.

Из полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1. Полученные решения могут быть успешно использованы при тестировании программ, реализующие численные методы;
2. Для всех рассмотренных моделей характерно наличие отклонения решения от случая ньютоновской жидкости;
3. Для всех моделей, в которых учитываются неньютоновские свойства крови, характерно схожее поведение решений задач для конечного и бесконечного промежутков.

Литература

- [1] 10 ведущих причин смерти в мире, 2020 [Электронный ресурс] / URL: <https://www.who.int/ru/news-room/fact-sheets/detail/the-top-10-causes-of-death>
- [2] A.R. Ghigo, P.-Y. Lagree, J.-M Fullana. A time-dependent non-Newtonian extension of a 1D blood flow model // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 253. 2018. P. 36-49.
- [3] G. Thurston. Viscoelasticity of human blood // *Biophysical Journal* 12. 1972. P. 1205-1217.
- [4] Fasano A., Sequeira A. *Hemomath: The Mathematics of Blood*. 2017
- [5] Регирер С.А., Скобелева И.М. Течение вязкой жидкости в трубке с деформирующейся стенкой // *Механика жидк. и газа* №3. 1971. С.242-264.
- [6] Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У. *Механика кровообращения*. 1981
- [7] F. Irgens. *Rheology and Non-Newtonian Fluids*. 2014.
- [8] J.V. Soulis, G.D. Giannoglou, Y.S. Chatzizisis, K.V. Seralidou, G.E. Parcharidis, G.E. Louridas. Non-Newtonian models for molecular viscosity and wall shear stress in a 3D reconstructed human left coronary artery // *Medical Engineering and Physics* 30. 2008. P. 9–19.
- [9] B.M. Johnston, P.R. Johnston, S. Corney, D. Kilpatrick. Non-Newtonian blood flow in human right coronary arteries: steady state simulations // *Journal of Biomechanics* 37. 2004. P. 709-720.
- [10] M.S. Razavi, E. Shirani. Development of a general methods for designing microvascular using distribution of wall shear stress // *Journal of Biomechanics* 46. 2013. P. 2303-2309.
- [11] M. Iasiello, K. Vafai, A. Andreozzi, N. Bianco. Analysis of non-Newtonian effects within an aorta-iliac bifurcation region // *Journal of Biomechanics* 64. 2017. P. 153-163.
- [12] A. Razavi, E. Shirani, M.R. Sadeghi. Numerical simulation of blood pulsatile flow in a stenosed carotid artery using dfferent rheological models // *Journal of Biomechanics* 44. 2011. P. 2021-2030.
- [13] Y.I. Cho, K.R. Kensey. Effects of the non-Newtonian viscosity of blood on flows in a diseased arterial vessel. Part 1: Steady flows // *Biorheology* 28. 1991. P. 241-262.
- [14] M. Abbasian, M. Shams, Z. Valizadeh, A. Moshfegh, A. Javadzadegan, Cheng, S. Effects of different non-Newtonian models on unsteady blood flow hemodynamics in patient-specific arterial models with in-vivo validation // *Computer Methods and Programs in Biomedicine* 186. 2020.
- [15] M. Ameenuddin, M. Anand, M. Massoudi. Effects of shear-dependent viscosity and hematocrit on blood flow // *Applied Mathematics and Computation* 356. 2019. 299-311.
- [16] M.M. Molla, M.C. Paul. LES of non-Newtonian physiological blood flow in a model of arterial stenosis // *Medical Engineering and Physics* 34. 2012. 1079-1087.
- [17] E.F. Toro. Brain venous haemodynamics, neurological diseases and mathematical modelling. A review // *Applied Mathematics and Computation* 272. 2015. 542-579.

- [18] В.Г. Приданов, В.И. Хоничев. К вопросу о течении неньютоновской жидкости // Журнал технической физики 11. 2012. Том 82. С.11-14.
- [19] Артюшков Л. С. Динамика неньютоновских жидкостей. 1997.
- [20] Буничева А. Я., Мухин С. И., Соснин Н. В., Хруленко А. Б. Математическое моделирование квазиодномерной гемодинамики // Журнал вычислительной математики и математической физики № 8. 2015. Том 55. С. 1417–1428
- [21] Pyin O. Nonlinear pressure-velocity waveforms in large arteries, shock waves and wave separation // Wave Motion 84. 2019. P. 56-67.
- [22] Зайцев, В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. 2003.
- [23] Токарева, С.А. Прикладная газовая динамика. Численные методы решения гиперболических систем уравнений. 2019.
- [24] V. Springel and C.P. Dullemond. Numerische Strömungsmechanik, 2011 [Электронный ресурс] / URL:
http://www.ita.uni-heidelberg.de/~dullemond/lectures/num_fluid_2011/
- [25] L. Formaggia, D. Lamponi, A. Quarteroni. One-dimensional models for blood flow in arteries // Journal of Engineering Mathematics 47. 2003 P. 251-276.