

Санкт-Петербургский государственный университет

**ПАК Нелли Вадимовна**

**Выпускная квалификационная работа**

**Многоцелевая цифровая стабилизация маятника  
Фуруты**

Уровень образования: магистратура

Направление 02.04.02 «Фундаментальная информатика и информационные  
технологии»

Основная образовательная программа ВМ.5786.2019 «Цифровые технологии  
и системы»

Научный руководитель:  
доцент кафедры компьютерных  
технологий и систем, к. ф.-м. н.  
Погожев С. В.

Рецензент:  
старший инженер-программист,  
ООО «Санкт-Петербургский центр  
разработок ЕМС», к. ф.-м. н.  
Лифагина С. А.

Санкт-Петербург

2021

# Содержание

Введение.....	3
Обзор литературы.....	5
1. Содержательная постановка задачи .....	7
2. Математическая постановка задачи синтеза .....	10
2.1. Математическая модель объекта управления .....	10
2.2. Декомпозиция общей задачи синтеза .....	13
3. Методы решения локальных задач синтеза.....	18
3.1. Синтез базового регулятора по состоянию .....	18
3.2. Построение асимптотического наблюдателя .....	22
3.3. Формирование динамического фильтра .....	23
3.4. Построение амплитудно-частотной характеристики .....	28
3.5. Синтез дискретной многоцелевой структуры .....	32
4. Проведение практических расчетов .....	36
4.1. Моделирование динамической системы и её анализ .....	36
4.2. Выбор базового регулятора по состоянию .....	38
4.3. Построение асимптотического наблюдателя .....	45
4.4. Синтез динамического фильтра.....	46
4.5. Результаты компьютерного моделирования. Непрерывный регулятор.....	49
4.6. Построение цифрового регулятора .....	60
4.7. Результаты компьютерного моделирования. Цифровой регулятор .....	66
Выводы .....	70
Заключение .....	71
Список литературы .....	72
Приложение 1 .....	73
Приложение 2 .....	74
Приложение 3 .....	77

## Введение

В последние годы существенное внимание в научных исследованиях уделяется методам синтеза законов управления для нелинейных систем. Существуют различные подходы, обеспечивающие устойчивость их отдельных движений, при этом учитывающие требования к качеству динамических процессов. Однако не существует универсального метода, который бы позволял единообразно решать задачи для широких классов из возможных практических ситуаций. Это вызывает необходимость адаптировать известные методы для конкретных объектов управления и предъявляемых к ним требований.

Наиболее часто среди движений нелинейных систем рассматриваются положения равновесия, неустойчивые без управления. Их стабилизация является одним из обязательных требований, которые предъявляются к синтезируемому управлению. При этом реальные условия работы регулятора требуют учета воздействия на замкнутую нелинейную систему внешних возмущений, порождаемых средой, в которой функционирует объект.

В современных информационных системах основную роль играют цифровые вычислительные средства, осуществляющие основные функции по сбору, хранению, обработке и передаче информации. Цифровой характер работы подразумевает дискретность потоков информации по времени. Такие потоки определяются совокупностью дискретных сигналов, которые принимаются и преобразуются соответствующими цифровыми системами. Причём дискретность по времени принципиальна для работы информационно-управляющих систем, так как операции обработки сигналов, в том числе выполнение различных вычислений, имеют определённую конечную длительность. В силу таких условий реального функционирования объекта возникает задача синтеза цифрового регулятора для динамических нелинейных систем.

В качестве нелинейного объекта для исследования, анализа и верификации различных идей, подходов и методов синтеза часто рассматривается так

называемый маятник Фуруты, который требует особого подхода для построения управления. Он часто используется как тестовый пример при построении регуляторов для нелинейных систем.

Данная работа является продолжением исследовательской работы, начатой в бакалавриате. Здесь для стабилизации маятника применён многоцелевой подход к синтезу обратной связи, ранее практически не использовавшийся для нелинейных объектов с различными режимами функционирования. Важным аспектом работы является построение цифрового регулятора для стабилизации нелинейного объекта. Особое внимание уделяется подавлению колебаний элементов системы при действии на неё возмущений колебательного характера, в частности, определяемого морским волнением. Такая ситуация типична при установке маятника Фуруты на морских подвижных объектах.

## Обзор литературы

В книге [1] рассматриваются основные идеи современных подходов к моделированию, анализу и синтезу линейных систем с обратной связью, широко применяемых в настоящий момент для управления динамическими системами. Значительная роль отведена программной поддержке изучаемых вопросов, которая основывается на интегрированной среде MATLAB – Simulink.

Работа [2] посвящена совокупности вопросов, имеющих отношение к проблеме синтеза моделей оптимальных управляющих устройств динамическими объектами, которые функционируют в условиях воздействия внешней среды. В этой работе представлен ряд алгоритмов для построения программного обеспечения, реализующего описанные методов синтеза управления.

Многоцелевой подход к построению управления в линейном варианте подробно обсуждается в работах [1], [2], [7], [8]. Здесь детально описаны особенности и методы настройки отдельных элементов. Основное преимущество многоцелевой структуры перед другими подходами к синтезу законов управления состоит в декомпозиции общей задачи синтеза на отдельные подзадачи поиска компонент, которые решаются последовательно для каждого из рассматриваемых возможных режимов движения.

Недостатком отмеченных работ является рассмотрение только линейных объектов, хотя в статье [7] намечены общие идеи применения многоцелевого подхода в многоцелевом варианте.

В монографии [3] определяются основные идеи теории управления с прогнозирующими моделями (МРС) на примере маятника Фуруты. Изучаются методы синтеза управления не только с линейной, но и с нелинейной прогнозирующей моделью с учётом дискретного времени. Особо рассматриваются вопросы компенсации внешних возмущений. Однако при применении данного подхода используются очень мощные вычислительные ресурсы для его реализации.

Вопросы синтеза управления для маятника Фуруты рассмотрены в статьях [4] и [5]. Стоит отметить, что в данных работах, однако, предложены традиционные законы управления типа ПИД, не обеспечивающие желаемого качества стабилизации маятника в условиях его функционирования в различных режимах.

В выпускной квалификационной работе [9] предложен многоцелевой подход к стабилизации маятника Фуруты с учётом определённых требований к динамике управляемого объекта. Многоцелевая структура в непрерывном времени стабилизирует маятника при наличии начального отклонения маятника от вертикальной оси, а также компенсирует колебания при наличии внешних возмущений, вызванных, например, морским волнением.

# 1. Содержательная постановка задачи

В данном разделе приведено описание нелинейной механической системы, которая выступает в качестве объекта автоматического управления в работе. Здесь на содержательном уровне сформулированы требования, которые предъявляются к динамическим процессам, протекающим в замкнутой системе, а также к структуре регулятора, формируемого в контуре обратной связи.

Объектом управления служит так называемый маятник Фуруты, который широко используется в научной и учебной литературе [3, 4, 5] для тестирования новых идей и исследуемых подходов, применяемых для синтеза обратных связей.

Маятник Фуруты – это перевернутый вертикальный маятник, размещенный на вращающемся основании. Вся система смонтирована на платформе, которая вращается горизонтальной плоскости с помощью электромотора. На торце платформы шарнирами закреплен вертикальный стержень, который может вращаться в вертикальной плоскости. Схема рассматриваемой конструкции представлена на рис. 1:

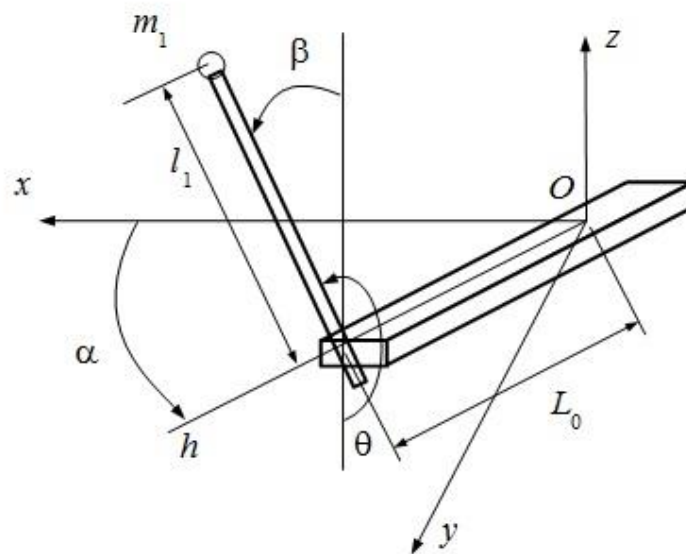


Рис. 1. Общая схема конструкции маятника Фуруты

Для описания пространства состояний системы введем в рассмотрение

неподвижную прямоугольную систему координат  $Oxyz$  (рис.1) с началом, совмещённым с неподвижной точкой  $O$ , вокруг которой осуществляется вращение платформы. Плоскость  $Oxy$  совпадает с горизонтальной плоскостью вращения платформы, а ось  $Oz$  направлена вертикально вверх.

Положение системы с маятником в пространстве однозначно определяется двумя углами: углом поворота платформы  $\alpha$  и углом отклонения маятника  $\beta$  от верхнего вертикального положения. Угол  $\alpha$  отсчитывается от оси  $Ox$ , причём положительным считается направление против часовой стрелки (если смотреть с конца оси  $Oz$ ). Маятник вращается вокруг подвижной оси платформы  $Oh$ , проходящей через начало координат  $O$  и точку крепления маятника к платформе. Угол  $\beta$  отсчитывается от верхнего вертикального положения: положительным считается направление отсчета против часовой стрелки (если смотреть с конца оси  $Oh$ ). В работе также приняты следующие обозначения (рис.1):  $L_0$  – длина платформы,  $l_1$  – длина маятника,  $m_1$  – масса маятника. Все размерности далее представляются в системе СИ.

Один из вариантов практической реализации маятника Фуруты изображен на рис. 2.



Рис. 2. Практическая реализация маятника Фуруты [3]



В данной работе предлагается применить многоцелевой подход к построению цифрового управления для нелинейной модели маятника Фуруты, основанный на решении задачи стабилизации маятника в условиях наличия внешнего возмущения (например, морского волнения для маятника, установленного на морском подвижном объекте).

Ставится задача построения цифрового управления для нелинейного объекта с использованием обратной связи с многоцелевой структурой. Найденное управление должно удовлетворять конкретным условиям для каждого из рассматриваемых базовых режимов функционирования объекта.

1. При собственном движении, которое определяется ненулевым начальным отклонением от вертикали, управление должно возвращать маятник в нулевое положение равновесия, учитывая определенные требования к качеству переходных процессов.

2. Для указанного режима движения должна учитываться неполнота информации, поступающей с датчиков, о векторе состояния объекта. В данном случае измеряются скорость вращения платформы и угол отклонения от вертикали.

3. При движении, определяемом воздействием колебательных возмущений (типа морского волнения), обратная связь должна удерживать систему в окрестности нулевого положения равновесия и подавлять колебания угла отклонения маятника от вертикальной оси. Это обеспечивает лучшую динамику стабилизируемого маятника и предотвращает износ деталей всей системы.

4. Необходимо учитывать дискретизацию по времени для обрабатываемой информации, которая определяется дискретным характером измерений датчиками поступающего сигнала. Таким образом, появляется необходимость в построении цифрового управляющего устройства.

5. Достижение описанных требований, в частности подавление колебаний элементов маятника, не должно приводить к использованию значительно больших энергетических ресурсов, чем при реализации управления, не учитывающего внешние возмущения.

## 2. Математическая постановка задачи синтеза

В работе рассматривается основной вопрос об аналитическом синтезе цифровой обратной связи, которая должна обеспечивать стабилизирующее управление маятником Фуруты для всех режимов функционирования. Учитывая всю широкую совокупность требований, которые предъявляются к динамическим свойствам замкнутой системы, данный вопрос трудно изучать в рамках традиционных подходов, таких, как ПИД регулирование, управление с прогнозом. По этим причинам здесь применяется подход, основывающийся на применении обратной связи с многоцелевой структурой и позволяющий декомпозировать общую задачу синтеза на последовательность локальных подзадач, каждая из которых относится к конкретным режимам движения объекта. Решениями данных задач будут являться модели настраиваемых элементов, которые позволяют существенно повысить качество процессов управления.

### 2.1. Математическая модель объекта управления

Математическая модель маятника Фуруты представляется следующей системой обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений [3, 4, 5]:

$$M_0(q)\ddot{q} + M_1(q, \dot{q})\dot{q} + M_2(q) = Tu, \quad (1)$$

где  $q = (\alpha, \beta)'$  – вектор обобщённых координат системы,  $u$  – управляющий сигнал, который представляется напряжением, подаваемым на привод электромотора. Здесь матрицы  $M_0, M_1, M_2, T$  определяются по формулам

$$M_0 = \begin{pmatrix} J_0 + m_1 L_0^2 + m_1 l_1^2 \sin^2 \beta & -m_1 L_0 l_1 \cos \beta \\ -m_1 L_0 l_1 \cos \beta & J_0 + m_1 l_1^2 \end{pmatrix},$$
$$M_1 = \begin{pmatrix} C_0 + \frac{K_t K_b}{R_a} + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\beta} \sin^2 2\beta & m_1 L_0 l_1 \dot{\beta} \sin \beta + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\alpha} \sin^2 2\beta \\ -\frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\alpha} \sin^2 2\beta & C_1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -m_1 g l_1 \sin \beta \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} \frac{K_t K_b}{R_a} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В приведенных выражениях используются следующие обозначения:  $J_0$  и  $J_1$  – моменты инерции платформы и маятника, а  $C_0$  и  $C_1$  – коэффициенты сухого трения для этих элементов системы. Коэффициенты  $K_t, K_b, K_u, R_a$  для электромотора являются постоянными числами.

Угол  $\alpha$  не входит в уравнения (1) и (2), как отмечено в работе [3], т. е. на динамику системы влияет только производная  $\dot{\alpha}$ .

Для приведения системы (1) к нормальной форме, введём вспомогательные векторы  $q_1 = q$  и  $q_2 = \dot{q}$ , что, с учетом  $\det(M_0) \neq 0$ , дает систему

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= q_2, \\ \dot{q}_2 &= M_0^{-1}(q_1)(-M_1(q_1, q_2)q_2 - M_2(q_1) + Tu). \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, можно утверждать, что динамика маятника Фуруты представляется нелинейной системой дифференциальных уравнений (3), (2) с вектором состояния  $(q_1 \ q_2)' = (\alpha \ \beta \ \dot{\alpha} \ \dot{\beta})' \in E^4$ .

Заметим, что данная система имеет два вертикальных положения равновесия: верхнее и нижнее. Особый интерес из них представляет верхнее положение равновесия, которому соответствует вектор состояния  $(q_1 \ q_2)'$  с компонентами:

$$\alpha_0 = const, \dot{\alpha}_0 = 0, \beta_0 = 0, \dot{\beta}_0 = 0, \quad (4)$$

Из физики следует, что данное положение неустойчиво.

Линеаризуем уравнения (1), (2) в окрестности точки (4), вводя для линейной системы вектор состояния  $x = (\dot{\alpha} \ \beta \ \dot{\beta})' = (\omega_\alpha \ \beta \ \omega_\beta)'$ , где компоненты  $\omega_\alpha, \omega_\beta$  – угловые скорости вращения платформы и маятника соответственно. Для этого воспользуемся методом линеаризации обратной связью.

В итоге приходим к линейной модели динамики маятника в пространстве состояний для верхнего вертикального положения равновесия (4):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + b\tau \\ y &= Cx,\end{aligned}\tag{5}$$

с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{g}{L_0} & \frac{C_1}{m_1 L_0 l_1} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \frac{J_0 + m_1 l_1^2}{m_1 L_0 l_1} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\tag{6}$$

Здесь в качестве управления выступает переменная  $\tau$ .

Отметим, что при синтезе регулятора для исходной нелинейной модели управление  $u$ , которое поступает непосредственно в систему, может быть вычислено по формуле:

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{t_1 M_{012}} [-\det(M_0)\tau - M_{011} m_2 + C_{11} M_{012} \dot{\alpha} - C_{22} M_{011} \dot{\beta} + A_{12} M_{011} \dot{\alpha}^2 \\ &\quad + B_{12} M_{012} \dot{\beta}^2 + (A_{12} + B_{11}) M_{012} \dot{\alpha} \dot{\beta}],\end{aligned}\tag{7}$$

где:

$$\begin{aligned}M_{011} &= J_0 + m_1 L_0^2 + m_1 l_1^2 \sin^2 \beta, \quad M_{012} = -m_1 L_0 l_1 \cos \beta, \\ A_{12} &= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \sin 2\beta, \quad B_{11} = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \sin 2\beta, \quad B_{12} = m_1 L_0 l_1 \sin \beta, \\ C_{11} &= C_0 + \frac{K_t K_b}{R_a}, \quad C_{22} = C_1, \\ m_2 &= \frac{K_t K_u}{R_a}, \quad t_1 = -m_1 g l_1 \sin \beta.\end{aligned}$$

Можно заметить, что управление  $u$  маятником Фуруты является нелинейным. Оно учитывает нелинейность исходной системы, что должно делать его более эффективным по сравнению с управлением, получаемым при работе

с обычной линеаризацией системы в окрестности верхнего положения равновесия.

Согласно (6), измерению подлежат угловая скорость вращения основания  $\omega_\alpha = \dot{\alpha}$  и угол отклонения маятника  $\beta$ .

Конкретные значения физических параметров рассматриваемого маятника Фуруты сведены в табл. 1.

Таблица 1.

Параметр	Обозначение	Единицы измерения	Значение
Длина платформы	$L_0$	м	0.1370
Длина маятника	$l_1$	м	0.1572
Масса маятника	$m_1$	кг	0.0319
Момент инерции платформы	$J_0$	кг×м <sup>2</sup>	0.008591
Момент инерции маятника	$J_1$	кг×м <sup>2</sup>	0.000217
Коэффициент трения платформы	$C_0$	кг×м <sup>2</sup> /с	0.006408
Коэффициент трения маятника	$C_1$	кг×м <sup>2</sup> /с	0.000158
Параметр электромотора	$R_a$	Ом	0.9
Параметр электромотора	$K_t$	Н×м/А	0.0706
Параметр электромотора	$K_b$	В×с/рад	0.0707
Параметр электромотора	$K_u$	В/об/с	0.0636

## 2.2. Декомпозиция общей задачи синтеза

Для того, чтобы обеспечить выполнение всей совокупности требований, которые предъявляются к динамике процессов управления маятником Фуруты, будем использовать обратную связь с многоцелевой структурой (МР), описанной в работах [1], [2], [7], [8]. Она описывается следующими уравнениями:

$$\dot{z} = Az + b\tau + H(y - Cz), \quad (8)$$

$$\tau = Kz + \xi, \quad (9)$$

$$\xi = F(p)(y - Cz), \quad p = d/dt. \quad (10)$$

Первый элемент структуры представляет собой асимптотический наблюдатель (8), предназначенный для восстановления информации о векторе состояния объекта по результатам его измерений.

С помощью второго элемента структуры формируется управляющий сигнал (9), который подается на электромотор. Основным назначением данного элемента является обеспечение устойчивости замкнутой системы.

Третьим элементом является динамический фильтр (10), который поддерживает устойчивость и обеспечивает желаемые динамические свойства замкнутой системы, когда она функционирует в условиях воздействия внешних возмущений. Здесь  $z \in E^n$  и  $\xi \in E^l$  – вектор состояния наблюдателя и выход фильтра соответственно.

Отметим, что если элементы передаточной матрицы фильтра являются строго правильными рациональными дробями, то его модель (10) может быть представлена уравнениями пространства состояний

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \alpha p + \beta(y - Cz), \\ \xi &= \gamma p, \end{aligned} \quad (10a)$$

где  $p \in E^l$  – вектор состояния фильтра, а его матрицы удовлетворяют тождеству  $\gamma(E_l s - \alpha)^{-1} \beta \equiv F(s)$ .

При этом в совокупности уравнения (8) – (10) определяют динамический регулятор

$$\tau = W(s)y, \quad (11)$$

где  $W(s) = [1 - V(s)b]^{-1}[V(s)H + F(s)]$ ,  $V(s) = [K - F(s)C](Es - A + HC)^{-1}$ .

Основная суть задачи синтеза многоцелевого регулятора для маятника Фуруты состоит в нахождении постоянных матриц  $K, H$  формирователя и наблюдателя и передаточной матрицы  $F(s)$  фильтра. Их поиск основывается на желаемых требованиях к динамике замкнутой системы для возможных режимов движения.

Учитывая свойства и особенности МР структуры, можно декомпозировать общую задачу синтеза, сведя ее к совокупности трех локальных задач, которые решаются последовательно и заключаются в следующем.

1. Задача о выборе матрицы  $K$  для базового регулятора по состоянию

$$\tau = Kx. \quad (12)$$

Матрица  $K$  должна определяться таким образом, чтобы нулевое положение равновесия базовой замкнутой нелинейной системы (3), (12) было асимптотически устойчивым, при этом необходимо выполнение желаемых требований к качеству переходного процесса в данной системе, который определяется начальными условиями  $(q_1(0) \ q_2(0))' = (\alpha_0 \ \beta_0 \ 0 \ 0)'$ .

2. Задача о выборе матрицы  $H$  в наблюдателе (8). Вторая задача рассматривается для движений замкнутой системы (3), (11) с измерениями  $y = Cx$  при условии, что фильтр выключен. В качестве матрицы  $K$  берется решение первой задачи. Начальные условия для наблюдателя (8) задаются нулевыми, а для объекта – такими же, как и для первой задачи. Матрица  $H$  определяется так, чтобы гарантировать асимптотическую устойчивость нулевому положению равновесия указанной замкнутой системы. Дополнительно должны быть выполнены требования по динамике переходного процесса.

3. Задача о выборе передаточной матрицы  $F(s)$  фильтра рассматривается на движениях замкнутой системы (3), (11) с измерениями  $y = Cx$ . В качестве матриц  $K$  и  $H$  принимаются решения первых двух задач. Все начальные условия при этом задаются нулевыми, однако вводится внешнее аддитивное возмущающее воздействие колебательного характера, которое влияет на движение маятника. Матрица  $F(s)$  должна выбираться так, чтобы минимизировать колебания маятника, которые характеризуется углом отклонения стержня от вертикальной оси. Компенсация колебаний может осуществляться с целью минимизации отклонения устройства от положения равновесия, которое является желаемым движением объекта управления. При этом колебания управляющего сигнала  $\tau$ , а, следовательно, и итогового управления  $u$  должны быть

ограниченными в силу конечности ресурсов управления.

После решения указанных задач формируется обратная связь в виде

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + b\tau + H(y - Cz), \\ \dot{p} &= \alpha p + \beta(y - Cz), \\ \tau &= Kz + \gamma p, \end{aligned} \quad (13)$$

которая подлежит непосредственной реализации в системе управления маятником Фуруты.

Отметим, что описанные задачи формируют непрерывную структуру управления. Однако в силу дискретности обрабатываемого потока информации и того факта, что во многих информационных системах вычислительные средства имеют цифровой характер работы, необходимо построить цифровое управление маятником Фуруты.

Для синтеза цифрового регулятора с использованием обратной связи с многоцелевой структурой, необходимо перейти к системам разностных уравнений. МР структура в дискретном времени описывается следующими уравнениями:

$$z[n+1] = A_d z[n] + b_d \tau[n] + H_d (y[n] - C_d z[n]), \quad (14)$$

$$\tau[n] = K_d z[n] + \xi[n], \quad (15)$$

$$\xi[n] = F_d(\tilde{z})(y[n] - C_d z[n]). \quad (16)$$

Здесь  $A_d, b_d, C_d$  – матрицы дискретной линейной системы, соответствующей непрерывной системе (5),  $K_d, H_d$  – матрицы дискретного формирователя и дискретного наблюдателя соответственно, а  $F_d$  – передаточная матрица дискретного фильтра.

Все три элемента структуры имеют те же значения, что и в непрерывном случае.

Так же, как и в непрерывном случае, если компоненты передаточной матрицы фильтра являются строго правильными рациональными дробями, то его модель (16) можно представить уравнениями пространства состояний



$$\begin{aligned} p[n+1] &= \alpha_d p[n] + \beta_d (y[n] - C_d z[n]), \\ \xi[n] &= \gamma_d p[n], \end{aligned} \quad (16a)$$

где  $p[n] \in E^l$  – вектор состояния фильтра, а его матрицы удовлетворяют тождеству  $\gamma_d (E_l \tilde{z} - \alpha_d)^{-1} \beta_d \equiv F_d(\tilde{z})$ .

Здесь в совокупности уравнения (14) – (16) определяют динамический регулятор

$$\tau = W(\tilde{z})y, \quad (17)$$

где  $W(\tilde{z})$  – передаточная функция замкнутой системы с дискретным управлением, определяемая соотношением

$$W(\tilde{z}) = [1 - V_d(\tilde{z})b_d]^{-1} [V_d(\tilde{z})H_d + F_d(\tilde{z})], \quad V_d(\tilde{z}) = [K_d - F_d(\tilde{z})C_d](E\tilde{z} - A_d + H_d C_d)^{-1}.$$

Решение задачи синтеза многоцелевой структуры аналогичным непрерывному случаю образом декомпозируется на три локальных задачи, которые решаются последовательно с учётом всех требований к динамике замкнутой системы, функционирующей в различных режимах.

Результатом решения локальных задач является формирование дискретной обратной связи в виде

$$\begin{aligned} z[n+1] &= A_d z[n] + b_d \tau[n] + H_d (y[n] - C_d z[n]), \\ p[n+1] &= \alpha_d p[n] + \beta_d (y[n] - C_d z[n]), \\ \tau[n] &= K_d z[n] + \gamma_d p[n], \end{aligned} \quad (18)$$

которая подлежит непосредственной реализации для управления рассматриваемым объектом.

### 3. Методы решения локальных задач синтеза

Находим собственные числа матрицы линейной модели (5) – (6) для верхнего вертикального положения равновесия. Они с математической точки зрения подтверждают отсутствие для него асимптотической устойчивости по Ляпунову для линейной системы и не гарантируют устойчивость нелинейной: все три собственных числа имеют нулевое значение, то есть находятся на границе правой полуплоскости. Для анализа устойчивости собственных чисел, имеющих нулевые вещественные части, необходимо провести дополнительные исследования, но в этом случае однозначно можно сделать вывод о том, что рассматриваемое движение не является асимптотически устойчивым. Полученные выводы для нулевых собственных значений линейной системы не дают однозначного ответа на вопрос об устойчивости нелинейной системы. Однако, из физики известно, что рассматриваемое положение равновесия является неустойчивым.

Вычисление ранга матриц управляемости и наблюдаемости для системы (5) – (6) показывает, что эта система является полностью управляемой и полностью наблюдаемой по выходу. Это говорит о применимости для управления маятником обратной связи с многоцелевой структурой.

Рассмотрим синтез регулятора в непрерывном времени.

#### 3.1. Синтез базового регулятора по состоянию

Первая задача заключается в построении управления в виде  $\tau = Kx$ , которое стабилизирует верхнее неустойчивое положение равновесия, где  $K$  – числовая матрица, подлежащая поиску. Среди различных существующих методов решения этой задачи для линейной модели (5) – (6) будем использовать два варианта: синтез модального регулятора и синтез линейно-квадратичного (LQR) регулятора.

Модальный регулятор обеспечивает достижение корнями характеристического полинома  $\Delta$  замкнутой системы определенных значений, т.е. имеет

место тождество  $\Delta(s) := \det(Es - A - BK) \equiv (s - \rho_1) \cdot \dots \cdot (s - \rho_n)$ ,  $\rho_i < 0, i = \overline{1, n}$ .

LQR-регулятор [1] вместе со стабилизацией замкнутой системы обеспечивает минимум интегрального квадратичного функционала

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + \tau^T R \tau + 2x^T N \tau) dt, \quad (19)$$

где  $Q \geq 0$ ,  $R > 0$  и  $N \geq 0$  – заданные симметрические матрицы. Матрица коэффициентов оптимального регулятора вычисляется по формуле

$$K = R^{-1} (b^T S + N^T) \quad (20)$$

где  $S$  – решение уравнения Риккати

$$A^T S + SA - (Sb + N)R^{-1} (b^T S + N^T) + Q = 0. \quad (21)$$

Необходимо сказать, что для линейной замкнутой системы оба регулятора обеспечивают глобальную асимптотическую устойчивость нулевого положения равновесия. Однако при замыкании этими же регуляторами исходного нелинейного объекта (3) достигается лишь локальная асимптотическая устойчивость в некоторой окрестности нуля.

Для решения задачи 1 надо проанализировать область асимптотической устойчивости для обоих описанных регуляторов для формирования базового закона управления для многоцелевой структуры и настройки его параметров для конкретных исходных данных маятника Фуруты.

Рассмотрим модальный регулятор, дающий корни  $s = \rho_i < 0, i = \overline{1, n}$  характеристического полинома замкнутой системы.

Значения параметров  $\rho_i, i = \overline{1, n}$  характеризуют интенсивность работы модального регулятора. Очевидно, что чем больше величина параметров для замкнутой линейной системы, тем интенсивнее функционирует управление.

Матрица  $K$  для модального регулятора определяется из тождества  $\det(A + bK) = (s - \rho_1) \cdot \dots \cdot (s - \rho_n)$ .

Для анализа устойчивости системы введём в рассмотрение кандидата на

роль функции Ляпунова (LFC) в виде квадратичной формы

$$V(x) = x^T Sx. \quad (22)$$

Матрица  $S$  здесь является решением матричного уравнения Ляпунова, которое формируется для гурвицевой матрицы  $A + bK$  замкнутой системы

$$(A + bK)^T S + S(A + bK) = -E, \quad (23)$$

где  $E$  – единичная матрица размера  $3 \times 3$ . Из теории устойчивости [6] известно, что уравнение (23) имеет единственное симметрическое положительно определенное решение.

Определяем скорость изменения LFC  $V(x)$  на движениях нелинейной системы (3):

$$\tilde{W}(x) = \left. \frac{dV(x)}{dt} \right|_{(3)} = \dot{x}^T Sx + x^T S\dot{x} = F^T(x, Kx)Sx + x^T SF(x, Kx). \quad (24)$$

В указанной формуле векторная функция  $F(x, Kx)$  в принятых обозначениях представляет собой правую часть замкнутой нелинейной системы с объектом (3) и регулятором  $\tau = Kx$ :

$$\dot{x} = F(x, \tau), \tau = Kx. \quad (25)$$

Если существует окрестность нулевой точки  $B \subset E^n$  такая, что в её пределах функция  $\tilde{W}(x)$  строго отрицательная, то функция  $V(x)$  становится функцией Ляпунова для данной системы. При этом максимальная из найденных окрестностей будет являться областью асимптотической устойчивости замкнутой системы.

Теперь перейдем к исследованию LQR регулятора, для которого матрица  $K$  обеспечивает кроме устойчивости минимум функционала (19). В данной работе в рамках принятого подхода матрица  $Q$  выбрана единичной,  $N$  – нулевой, а матрица  $R = \gamma$  представляется скалярным параметром  $\gamma > 0$ .

Аналогично параметрам  $\rho_i, i = \overline{1, n}$ , являющимися корнями характеристического полинома замкнутой системы, параметр  $\gamma$  характеризует интенсивность управления: с уменьшением значения параметра повышается интенсивность работы регулятора.

Для исследования устойчивости, как и в первом случае для модального регулятора, выбираем кандидата на роль функции Ляпунова (LFC) в виде (22), однако, в отличие от предшествующей ситуации, в качестве матрицы  $S$  принимается решение уравнения Риккати (16). Доказано, что это решение является симметрическим и положительно определенным.

Далее аналогично предыдущему случаю ищется производная для данной LFC в силу системы (3) по формуле (21). Проанализировав скорость  $\tilde{W}(x)$  изменения функции  $V(x)$ , делаем выводы об области асимптотической устойчивости замкнутого LQR-регулятором объекта.

Сравниваем полученные результаты и один из описанных регуляторов выбираем для формирования базовой обратной связи для закона управления с многоцелевой структурой.

Настраиваем обратную связь, полностью определяя её параметры, в смысле соответствия построенного управления определенным требованиям к качеству процесса. Это достигается проведением ряда экспериментов с исследуемым объектом и действующим выбранным регулятором.

### 3.2. Построение асимптотического наблюдателя

Для нахождения решения второй задачи рассмотрим обратную связь вида (8) – (10) с выключенным фильтром, т.е. регулятор

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + b\tau + H(y - Cz), \\ \tau &= Kz. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь в качестве матрицы  $K$  принимается решение первой задачи, а матрица  $H$  наблюдателя берется на основании его асимптотической устойчивости, т.е. гурвицевости матрицы  $A - HC$ .

Известно ([1], [2], [7], [8]), что характеристический полином такой замкнутой линейной системы (5), (26) будет представляться произведением полиномов  $\Delta_a(s) = \det(Es - A + HC)$  и  $\Delta_0(s) = \det(Es - A - BK)$ , а это значит, что построенная замкнутая система будет являться асимптотически устойчивой.

Обеспечение устойчивости наблюдателя может достигаться применением модального синтеза, как это было для базового закона управления, или оптимальной фильтрацией по Калману. В данном случае рассмотрим модальный вариант. Будем выбирать матрицу  $H$  из условия выполнения тождества  $\Delta_a(s) \equiv (s - \rho_1) \cdot (s - \rho_2) \cdot (s - \rho_3)$ .

Перейдем к рассмотрению непосредственно функционирования нелинейного объекта при отсутствии внешних возмущений и с заданным начальным отклонением маятника от вертикали. Схема соответствующей замкнутой нелинейной системы (3), (26) показана на рис. 3.

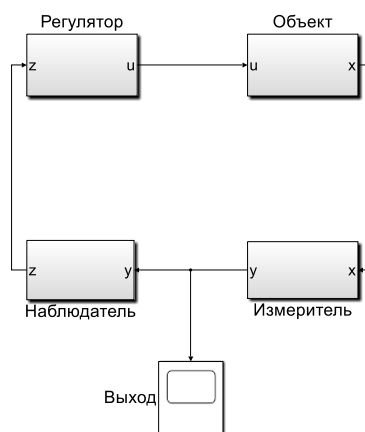


Рис. 3. Схема замкнутой системы с наблюдателем

Проведя ряд экспериментов для замкнутой нелинейной системы с наблюдателем в контуре обратной связи и проанализировав их результаты, необходимо скорректировать параметры асимптотического наблюдателя. Это осуществляется подбором значений корней характеристического полинома наблюдателя с учетом требований сохранения асимптотической устойчивости и требований к качеству динамических процессов замкнутой системы

### 3.3. Формирование динамического фильтра

Третья задача заключается в поиске передаточной матрицы дополнительного динамического объекта с математической моделью (10), который входит в состав многоцелевой структуры управления и называется фильтром.

Передаточная матрица фильтра формируется в общем виде

$$F(s) \equiv D(s)/\Phi(s),$$

где  $D$  – полиномиальная матрица, а  $\Phi$  – гурвицев полином.

Характеристический полином замкнутой системы при включенном фильтре, как показано в работах [1], [2], [7], [8], представляется произведением  $\Delta(s) = \Delta_a(s)\Delta_0(s)\Phi(s)$ , т. е. устойчивость замкнутой системы не зависит от выбора матрицы  $D$ , а обеспечивается исключительно тем, что полином  $\Phi$  является гурвицевым.

В данной работе проводится измерение двух компонент вектора состояния системы, а именно угловой скорости  $\dot{\alpha}$  вращения платформы и угла  $\beta$  отклонения маятника от вертикали, это определяется матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Надо отметить, что для рассматриваемой модели невозможно измерение только одной компоненты, например, угла отклонения маятника от вертикали. Вычисляя матрицы управляемости и наблюдаемости для асимптотического наблюдателя, получаем один нулевой корень в матрице управляемости, то есть

у матрицы замкнутой системы есть корень, на который нельзя повлиять выбором матрицы  $H$ . При этом наличие нулевого корня означает отсутствие у системы асимптотической устойчивости. В силу этого измерение двух компонент становится необходимым для синтеза многоцелевой структуры управления.

В этом случае матрица  $F$  примет вид

$$F(s) = \begin{bmatrix} \frac{b_2 s^2 + b_1 s}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} & \frac{b_3 s^2 + b_4 s}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \end{bmatrix}, \quad (28)$$

где  $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, b_4$  – подлежащие определению параметры.

Причём искомая передаточная матрица  $F(s)$  фильтра, решающая поставленную задачу, должна удовлетворять двум условиям:

а) условию, которое задается требованием астатизма:

$$F(0) = \Theta; \quad (29)$$

б) частотному условию

$$H_{d\beta}(F, j\omega_0) = 0 \quad (30)$$

где  $\omega_0$  – заданная частота, а  $H_{d\beta}(F, s)$  – передаточная функция замкнутой линейной системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + b\tau + ld(t), \\ y &= Cx, \\ \dot{z} &= Az + b\tau + H(y - Cz), \\ \xi &= F(s)(y - Cz), \\ \tau &= Kz + \xi, \end{aligned} \quad (31)$$

соответствующая блок-схема системы (31) изображена на рис. 4.

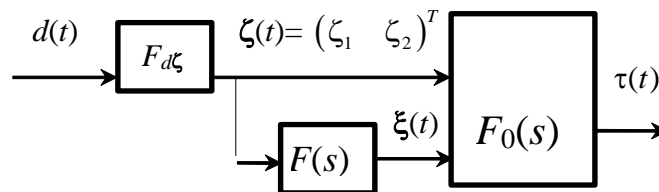


Рис. 4. Блок-схема замкнутой линейной системы

Передаточная матрица (28) удовлетворяет первому требованию, очевидно.



Тогда определяющим значения параметров матрицы (28) условием становится равенство (30).

Коэффициенты  $a_0, a_1, a_2$  полинома, который находится в знаменателе желаемой передаточной матрицы (28), ищутся из условия биномиального распределения его корней, которые в свою очередь задаются исходя из требований к качеству переходных процессов динамической системы в режиме невозмущенного движения.

Определим значения параметров  $b_1, b_2, b_3, b_4$ . Для этого введём величину

$$\varepsilon = x - z \quad (32)$$

отклонения состояния наблюдателя от реального положения объекта, т. е. асимптотического наблюдателя определим ошибку оценивания.

Тогда математическая модель замкнутой линейной системы будет представляться следующей системой уравнений:

$$\dot{z} = Az + b\tau + hC\varepsilon, \quad (33)$$

$$\dot{\varepsilon} = (A - hC)\varepsilon + ld, \quad (34)$$

$$\xi = F(s)C\varepsilon, \quad (35)$$

$$\tau = Kz + F(s)\varepsilon. \quad (36)$$

Преобразуем уравнения (33)-(36), введя переменную  $\zeta = C\varepsilon$ . Рассмотрим уравнение (34), эту переменную считаем выходом рассматриваемой подсистемы:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= (A - hC)\varepsilon + ld, \\ \zeta &= C\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (37)$$

т. е. на выходе подсистемы в отклонениях (31) получим первые две компоненты вектора  $\varepsilon$ .

Преобразуем модель (37) в tf-форму:

$$\zeta = F_{d\zeta}(s)d, \quad (38)$$

где  $F_{d\zeta}(s)$  является передаточной матрицей от входного внешнего возмущения

$$\text{к двум компонентам } \zeta = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}.$$

Все числовые параметры подсистемы (37) нам известны, поэтому можем найти её передаточную матрицу  $F_{d\zeta}(s)$ , которая представлена на рис. 4.

Учитывая (32), можно получить уравнение для нахождения угла отклонения маятника через координаты вектора состояния системы (33)-(36)

$$\beta = \tilde{C}(z + \varepsilon), \quad (39)$$

где  $\tilde{C} = (0 \ 1 \ 0)$ .

Или, учитывая новую переменную  $\zeta$

$$\beta = \tilde{C}_1 z + \tilde{C}_2 \zeta. \quad (40)$$

Здесь  $\tilde{C}_1 = (0 \ 1 \ 0)$ ,  $\tilde{C}_2 = (0 \ 1)$ .

Тогда рассмотрим совместно уравнения асимптотического наблюдателя (33) и представление угла  $\beta$  (40) уже с учетом введенной переменной  $\zeta$ :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (A + bK)z + b\xi + h\zeta, \\ \beta &= \tilde{C}_1 z + \tilde{C}_2 \zeta. \end{aligned} \quad (41)$$

Приведем данные уравнения к стандартной ss-форме. Получаем:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (A + bK)z + (b \ h) \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}, \\ \beta &= \tilde{C}_1 z + (0 \ \tilde{C}_2) \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (42)$$

Для линейной системы (42) с выходом  $\beta$  и тремя входами  $\xi$ ,  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  рассмотрим передаточную матрицу  $F_0(s) = [F_{01}(s) \ F_{02}(s) \ F_{03}(s)]$ . Теперь выходную переменную  $\beta$  можно представить в виде

$$\beta = F_{01}(s)\xi + F_{02}(s)\zeta_1 + F_{03}(s)\zeta_2. \quad (43)$$

Принимая во внимание введенный вектор переменных  $\zeta$ , можно преобразовать уравнение динамического фильтра (35)

$$\xi = F(s)\zeta, \quad (44)$$

или, вводя обозначения для передаточной матрицы  $F(s) = [F_1(s) \quad F_2(s)]$

$$\xi = [F_1(s) \quad F_2(s)] \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \quad (45)$$

Учитывая (43), (45) и (38), получаем

$$\beta = [F_{01}(s)F_1(s) + F_{02}(s) \quad F_{01}(s)F_2(s) + F_{03}(s)] \begin{bmatrix} F_{d\zeta_1} \\ F_{d\zeta_2} \end{bmatrix} d. \quad (46)$$

Здесь приняты обозначения  $F_{d\zeta} = \begin{bmatrix} F_{d\zeta_1} \\ F_{d\zeta_2} \end{bmatrix}$ .

Отсюда имеем следующий вид функции  $H_{d\beta}$ , для которой необходимо обеспечить выполнение условия (30)

$$H_{d\beta} = [F_{01}(s)F_1(s) + F_{02}(s) \quad F_{01}(s)F_2(s) + F_{03}(s)] \begin{bmatrix} F_{d\zeta_1} \\ F_{d\zeta_2} \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Тогда, выполняя указанное условие (30), получаем соотношения

$$H_{d\beta}(j\omega_0) = 0 \Leftrightarrow [F_{01}(s)F_1(s) + F_{02}(s) \quad F_{01}(s)F_2(s) + F_{03}(s)] = \Theta \Leftrightarrow \begin{cases} F_{01}(s)F_1(s) + F_{02}(s) = 0 \\ F_{01}(s)F_2(s) + F_{03}(s) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_1(s) = -F_{02}(s) / F_{01}(s) := p_1 + jp_2 \\ F_2(s) = -F_{03}(s) / F_{01}(s) := p_3 + jp_4 \end{cases}, \quad (48)$$

где  $p_1, p_3, p_2, p_4$  – вещественные и мнимые части найденных конкретных значений элементов вектора  $F(j\omega_0)$  соответственно.

Подставляя значение  $j\omega_0$  в (28), получаем, что справедливо соотношение

$$F(j\omega_0) = \left[ \frac{-b_2\omega_0^2 + b_1j\omega_0}{-j\omega_0^3 - a_2\omega_0^2 + a_1j\omega_0 + a_0} \quad \frac{-b_4\omega_0^2 + b_3j\omega_0}{-j\omega_0^3 - a_2\omega_0^2 + a_1j\omega_0 + a_0} \right].$$

Тогда, приравняв действительные и мнимые части к значениям из равенства (48), приходим к линейной системе, которая состоит из четырех уравнений с четырьмя неизвестными

$$\begin{pmatrix} \omega_0^2(a_1 - \omega_0^2) & \omega_0^2(a_2\omega_0^2 - a_0) & 0 & 0 \\ \omega_0(a_0 - a_2\omega_0^2) & \omega_0^3(a_1 - \omega_0^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_0^2(a_1 - \omega_0^2) & \omega_0^2(a_2\omega_0^2 - a_0) \\ 0 & 0 & \omega_0(a_0 - a_2\omega_0^2) & \omega_0^3(a_1 - \omega_0^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} =$$

(49)

$$= \begin{pmatrix} p_1((a_0 - a_2\omega_0^2)^2 + \omega_0^2(a_1 - \omega_0^2)^2) \\ p_2((a_0 - a_2\omega_0^2)^2 + \omega_0^2(a_1 - \omega_0^2)^2) \\ p_3((a_0 - a_2\omega_0^2)^2 + \omega_0^2(a_1 - \omega_0^2)^2) \\ p_4((a_0 - a_2\omega_0^2)^2 + \omega_0^2(a_1 - \omega_0^2)^2) \end{pmatrix}$$

Можно заметить, что значения всех параметров  $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, b_4$ , которые однозначно задают искомую функцию (28), зависят здесь от заранее определенных корней знаменателя передаточной матрицы фильтра  $F(s)$ .

### 3.4 Построение амплитудно-частотной характеристики

Для выбора параметров многоцелевой структура, анализа построенного управления, динамики исследуемого объекта при замыкании его синтезированным регулятором построим амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) нелинейной системы, замкнутой многоцелевой структурой обратной связи. При этом рассмотрим движение системы в режиме с включенным фильтром и без него.

Амплитудно-частотная характеристика определяется формулой

$$A(\omega) = |H_{dB}(j\omega)| \quad (50)$$

и характеризует зависимость амплитуды или величины колебаний выхода замкнутой системы от частоты колебаний входного сигнала.

Для удобства построения АЧХ и наглядного представления замкнутой системы сформируем искомый динамический фильтр в ss-форме

$$\begin{aligned}\dot{p} &= A_{\xi} p + b_{\xi} (y - Cz), \\ \xi &= C_{\xi} p,\end{aligned}\tag{51}$$

Пусть измеряется последняя компонента системы, т.е.

$$C_{\xi} = (0 \quad 0 \quad 1)\tag{52}$$

Матрицы  $A_{\xi}$  и  $b_{\xi}$  подлежат определению, причём они должны быть найдены таким образом, чтобы передаточная функция замкнутой динамической системы с построенной многоцелевой структурой, включающей сформированный фильтр, удовлетворяла условию (30).

Рассмотрим систему динамического фильтра в ss-форме (51). Для преобразования её к tf-форме необходимо найти передаточную функцию объекта, которая определяется соотношением

$$F(s) = C_{\xi} (Es - A_{\xi})^{-1} b_{\xi} + D_{\xi}.\tag{53}$$

Здесь матрица  $D_{\xi}$  из вида системы (51) является нулевой, а матрица  $C_{\xi}$  задается выражением (52). Тогда, вводя обозначения

$$A_{\xi} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad b_{\xi} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix},\tag{54}$$

вычисляем значений передаточной функции системы динамического фильтра. Таким образом, передаточная матрица  $F(s)$  будет иметь вид

$$F(s) = [F_1(s) \quad F_2(s)],\tag{55}$$

где

$$\begin{aligned}
F_1(s) &= \frac{b_{31}s^2 + (b_{11}a_{31} + b_{21}a_{32} - b_{31}a_{22} - b_{31}a_{11})s +}{\det(Es - A_\xi)} \\
&+ \frac{(b_{11}a_{21}a_{32} - b_{11}a_{31}a_{22} - b_{21}a_{32}a_{11} + b_{21}a_{12}a_{31} + b_{31}a_{11}a_{22} - b_{31}a_{21}a_{12})}{\det(Es - A_\xi)} \\
F_2(s) &= \frac{b_{32}s^2 + (b_{12}a_{31} + b_{22}a_{32} - b_{32}a_{22} - b_{32}a_{11})s +}{\det(Es - A_\xi)} \\
&+ \frac{(b_{12}a_{21}a_{32} - b_{12}a_{31}a_{22} - b_{22}a_{32}a_{11} + b_{22}a_{12}a_{31} + b_{33}a_{11}a_{22} - b_{32}a_{21}a_{12})}{\det(Es - A_\xi)}
\end{aligned} \tag{56}$$

При этом известно конкретное значение искомой передаточной матрицы, которое определяется соотношением (28) с найденными параметрами  $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, b_4$ .

Приравнивая знаменатели указанных рациональных дробей, найдем компоненты матрицы  $A_\xi$ . Учитывая соотношения (28) и (55), можно сделать вывод, что определитель матрицы  $A_\xi$  фильтра должен иметь заданный характеристический полином с коэффициентами  $a_0, a_1, a_2$ . Тогда в качестве матрицы системы (53) будем выбирать каноническую форму Фробениуса, поскольку коэффициенты её характеристического полинома всегда известны и являются элементами последней строки матрицы Фробениуса с противоположным знаком. Тогда матрица динамической системы фильтра будет определяться по формуле

$$A_\xi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}.$$

(56)

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях переменной  $s$  в числителях компонент матриц (28) и (55), получим линейную систему

алгебраических уравнений для нахождения матрицы  $b_\xi$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{32} & 0 & -(a_{11} + a_{22}) & 0 \\ a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22} & 0 & a_{12}a_{31} - a_{32}a_{11} & 0 & a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{31} & 0 & a_{32} & 0 & -(a_{11} + a_{22}) \\ 0 & a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22} & 0 & a_{12}a_{31} - a_{32}a_{11} & 0 & a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{21} \\ b_{22} \\ b_{31} \\ b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \\ 0 \\ b_4 \\ b_3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (57)$$

Найдя все компоненты матриц, формируем модель фильтра в ss-форме (51). Тогда динамическая система маятника, замкнутого многоцелевой структурой, будет иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bKz + bC_\xi p + ld(t), \\ \dot{z} &= HCx + (A - HC + bK)z + bC_\xi p, \\ \dot{p} &= b_\xi Cx - b_\xi Cz + A_\xi p, \\ \beta &= C_\beta x, \end{aligned} \quad (58)$$

где  $C_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  для построение амплитудно-частотной характеристики от входного внешнего возмущения  $d(t)$  к выходному сигналу, в качестве которого будем рассматривать угол  $\beta$  отклонения маятника от вертикали.

И для построения АЧХ  $A(\omega) = |H_{d\tau}(j\omega)|$  для передаточной функции от входа  $d(t)$  к выходному управляющему сигналу  $\tau(t)$  рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bKz + bC_\xi p + ld(t), \\ \dot{z} &= HCx + (A - HC + bK)z + bC_\xi p, \\ \dot{p} &= b_\xi Cx - b_\xi Cz + A_\xi p, \\ \tau &= Kz + C_\xi p. \end{aligned} \quad (59)$$

Построив графики АЧХ систем (58) и (59), получим представление о динамике замкнутого объекта: колебаниях угла отклонения от вертикальной оси, которые необходимо компенсировать, и колебаниях управляющего сигнала, которые должны быть ограниченными в силу конечности ресурсов регулятора.

### 3.5 Синтез дискретной многоцелевой структуры

Вначале найдем собственные числа матрицы разностной системы уравнений. Они оказываются все лежащими на единичном круге, что означает отсутствие у системы асимптотической устойчивости, хотя система и обладает устойчивостью. Отметим, что, несмотря на это, непрерывная нелинейная система в любом случае является неустойчивой, что подтверждается проводимыми экспериментами, что означает необходимость построения стабилизирующего управления. Для линеаризованной системы данная задача означает обеспечение асимптотической устойчивости, которая является одним из основных требований к динамике замкнутой системы.

Дискретное управление строится аналогичным непрерывному случаю способом. Однако есть принципиальные отличия, которые мы и рассмотрим.

Здесь решаются три локальные задачи по формированию отдельных элементов многоцелевой структуры управления.

Первой из них является определение матрицы  $K_d$  дискретного формирователя. Будем так же рассматривать два возможных подхода к формированию обратной связи: модальный и линейно-квадратичный (LQR) регуляторы.

Модальный регулятор для дискретной системы гарантирует выполнение тождества  $\Delta_d(s) := \det(Es - A_d - B_d K_d) \equiv (s - \rho_1) \cdot \dots \cdot (s - \rho_n)$ ,  $|\rho_i| < 1, i = \overline{1, n}$ , то есть доставляет полиному  $\Delta_d$  замкнутой системы разностных уравнений желаемые значения собственных чисел. Отметим, что в отличие от непрерывного случая, корни характеристического полинома должны находиться не в открытой левой полуплоскости, а внутри единичного круга.

Стабилизирующий LQR-регулятор обеспечивает минимум квадратичного функционала

$$J(\tau[n]) = \sum_{n=1}^{\infty} (x[n]^T Q x[n] + \tau[n]^T R \tau[n] + 2x[n]^T N \tau[n]), \quad (60)$$

где  $Q \geq 0$ ,  $R > 0$  и  $N \geq 0$  – заданные симметрические матрицы. Матрица коэффициентов  $K_d$  будет вычислять по формуле



$$K_d = (B_d^T S B_d + R)^{-1} (B_d^T S A_d + N^T) \quad (61)$$

Здесь  $S$  – решение соответствующего уравнения Риккати в дискретном случае

$$A_d^T S A_d - S - (A_d^T S B_d + N)(B_d^T S B_d + R)^{-1} (B_d^T S A_d + N^T) + Q = 0. \quad (62)$$

Выбор одного из предложенных регуляторов для построения базовой обратной связи многоцелевого управления будет осуществляться на основании анализа динамики непрерывной системы, описанного выше.

Как и в непрерывном случае, далее необходимо настроить обратную связь выбором параметров регулятора, что осуществляется, исходя из найденных параметров для цифровой модели.

Следующая особенность формирования цифрового регулятора проявляется при решении второй задачи, а именно построения асимптотического наблюдателя. Здесь рассматривается обратная связь (14) – (16) при условии выключенного фильтра, т.е. формируется регулятор

$$\begin{aligned} z[n+1] &= A_d z[n] + b_d \tau[n] + H_d (y[n] - C_d z[n]), \\ \tau[n] &= K_d z[n]. \end{aligned} \quad (63)$$

Решение первой задачи выбирается для определения значений матрицы  $K_d$ , а матрица  $H_d$  аналогично непрерывному варианту выбирается из условия асимптотической устойчивости наблюдателя, т.е. требования гурвицевости матрицы  $A_d - H_d C_d$ .

Построенная замкнутая система будет асимптотически устойчивой.

Обеспечивать устойчивость наблюдателя будем с помощью модального синтеза, то есть выбирать матрицу  $H_d$ , исходя из условия  $\Delta_{a_d}(s) \equiv (s - \rho_1) \cdot (s - \rho_2) \cdot (s - \rho_3)$ ,  $|\rho_i| < 1, i = \overline{1,3}$ .

Схема нелинейной замкнутой системы с наблюдателем аналогична той, что была приведена для непрерывной модели ранее, с заменой непрерывного наблюдателя и непрерывного регулятора дискретными.

Далее необходимо определить значения параметров асимптотического наблюдателя.

Рассмотрим третью локальную задачу и особенности поиска её решения для дискретной системы. Для решения третьей задачи необходимо найти передаточную матрицу динамического фильтра с математической моделью (16), который является частью формируемой многоцелевой структуры.

Искомая передаточная матрица строится в общем виде

$$F_d(\tilde{z}) \equiv D(\tilde{z}) / \Phi(\tilde{z}),$$

где  $D$  – полиномиальная матрица, а  $\Phi$  – устойчивый полином.

Стоит отметить, что необходимое для устойчивости замкнутой системы требование гурвицевости полинома в непрерывном варианте для дискретного случая принимает вид  $|\tilde{z}_i| < 1, i = \overline{1, 3}$  для корней полинома  $\Phi$ .

По-прежнему в системе измеряются две компоненты

$$C_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (64)$$

Тогда матрица  $F$  принимает следующий вид

$$F_d(\tilde{z}) = \begin{bmatrix} \frac{b_2\tilde{z}^2 + b_1\tilde{z}}{\tilde{z}^3 + a_2\tilde{z}^2 + a_1\tilde{z} + a_0} & \frac{b_3\tilde{z}^2 + b_4\tilde{z}}{\tilde{z}^3 + a_2\tilde{z}^2 + a_1\tilde{z} + a_0} \end{bmatrix}, \quad (65)$$

где  $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, b_4$  – подлежащие определению параметры.

Особо стоит отметить требования, предъявляемые к дискретной передаточной матрице  $F_d$ , поскольку второе из них отличается от условия, которое было ранее:

а) требование астатизма

$$F_d(0) = \Theta; \quad (66)$$

б) частотное условие

$$H_{d\alpha\beta}(F, e^{j\omega_0}) = 0 \quad (67)$$

где  $\omega_0$  – заданная частота, а  $H_{d\alpha\beta}(F, s)$  – передаточная функция замкнутой линейной системы разностных уравнений

$$\begin{aligned}
x[n+1] &= A_d x[n] + b_d \tau[n] + ld[n], \\
y[n] &= C_d x[n], \\
z[n+1] &= A_d z[n] + b_d \tau[n] + H_d (y[n] - C_d z[n]), \\
\xi[n] &= F_d(\tilde{z})(y[n] - C_d z[n]), \\
\tau[n] &= K_d z[n] + \xi[n].
\end{aligned} \tag{68}$$

Передаточная матрица (65) удовлетворяет первому требованию, поэтому все её неизвестные параметры определяются, исходя из условия (67).

Вводя величину  $\varepsilon[n] = x[n] - z[n]$  и новую переменную  $\zeta[n] = C_d \varepsilon[n]$ , находим неизвестные параметры  $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, b_4$  искомой передаточной функции, приходя к линейной алгебраической системе четырех уравнений с четырьмя неизвестными, как и в предыдущем случае. При этом все параметры непосредственно зависят от выбираемых корней полинома знаменателя передаточной матрицы фильтра.

Отметим, что для анализа динамики замкнутой системы можно построить амплитудно-частотную характеристику нелинейного объекта, замкнутого сформированным регулятором, которая представляется выражением

$$A(\omega) = \left| H_{d_{дв}}(e^{j\omega}) \right|. \tag{69}$$

## 4. Проведение практических расчетов

Здесь приводятся результаты применения описанного подхода к синтезу обратной связи с многоцелевой структурой для управления маятником Фуруты с конкретными числовыми параметрами, указанными в табл. 1. Все необходимые вычисления и непосредственно имитационное моделирование динамических процессов управления осуществляется в среде MATLAB с привлечением прикладного пакета Simulink.

### 4.1. Моделирование динамической системы и её анализ

Строим компьютерную модель системы в соответствии с нелинейными уравнениями (2), (3) динамики маятника, она представлена на рис. 7.

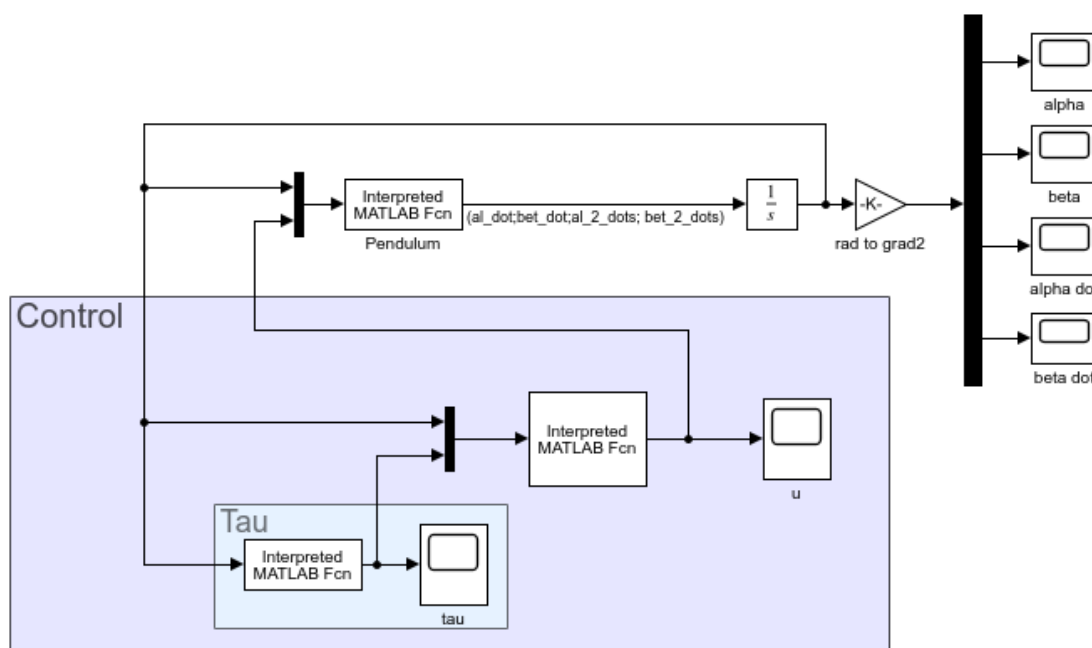


Рис. 7. Simulink- модель системы управления маятником Фуруты

В приведенной модели в блоке «Interpreted MATLAB Fcn» формируются правые части описанных уравнений. Исходный код программной функции на языке MATLAB, соответствующий данному блоку, приведен в Приложении 1. Дальнейшие все вычисления осуществляются с использованием этого блока.

Сначала вычислим собственные числа матрицы линейной модели (5)–(7) для верхнего вертикального положения равновесия, для чего найдем корни ее

характеристического уравнения

$$\Delta(s) = \det(Es - A) = 0. \quad (70)$$

Его решение для приведенных значений параметров (табл. 1) дает собственные числа:

$$s_1 = s_2 = s_3 = 0$$

Все три числа находятся на границе области асимптотической устойчивости линейной системы. Для того, чтобы сделать выводы, необходимо проанализировать данные собственные числа с помощью рангового критерия

$$\text{rang}(A - s_j E) = n - K_j, \quad j = \overline{1,3}, \quad (71)$$

где  $K_j$  – алгебраическая кратность каждого из собственных чисел матрицы системы, имеющих нулевую вещественную часть.

Если равенство (71) справедливо для всех таких собственных чисел с нулевой вещественной частью, а все остальные их значения лежат в открытой левой полуплоскости, то линейная система является устойчивой, но не асимптотически устойчивой.

Анализируя линейную систему (5)–(7), приходим к заключению о неустойчивости линейной системы.

Теперь исследуем свойства управляемости и наблюдаемости для рассматриваемой линейной модели. Вычисляя ранг матрицы управляемости, который оказывается равным трём, делаем вывод, что линейная система (5)–(7) с данными параметрами является полностью управляемой.

Проверим свойство наблюдаемости системы по выходу (6). Для этого строим матрицу наблюдаемости для системы (5)–(7), её ранг так же равен трём, т.е. система является полностью наблюдаемой. Тогда можно сделать вывод, что двух введённых измерений состояния объекта достаточно для оценивания полного вектора состояния  $x$ . Для данной линейной системы это будет справедливо и для ситуации, когда измеряется только один угол отклонения  $\beta$ .

## 4.2. Выбор базового регулятора по состоянию

Прежде всего, необходимо выбрать базовый регулятор в составе многоцелевой структуры. Для этого сначала определим параметры обоих рассматриваемых регуляторов (модального и LQR) так, чтобы по они были примерно равны по интенсивности. В результате экспериментов находим значения параметров, при которых это достигается:  $\rho_1 = -10$ ,  $\rho_2 = -2$ ,  $\rho_3 = -5$ ,  $\gamma = 0.7$ .

Проанализируем, как ведут себя управление и динамических переменных замкнутой нелинейной модели (2) – (3) при действии модального (рис. 8) и LQR (рис. 9) регуляторов. Рассмотрим движение объекта, задаваемое начальными условиями по вектору состояния. Определим все координаты, кроме  $\beta(0) = 5^\circ$ , нулевыми. Полученные графики показывают, что в нелинейной модели LQR-регулятор затрачивает меньшие усилия для обеспечения стабилизации, однако разница с модальным регулятором практически незначительная.

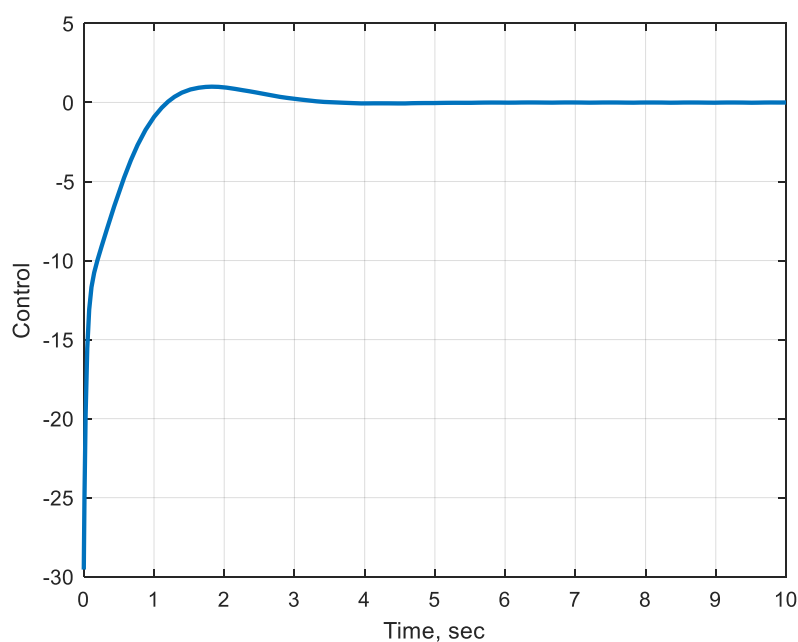
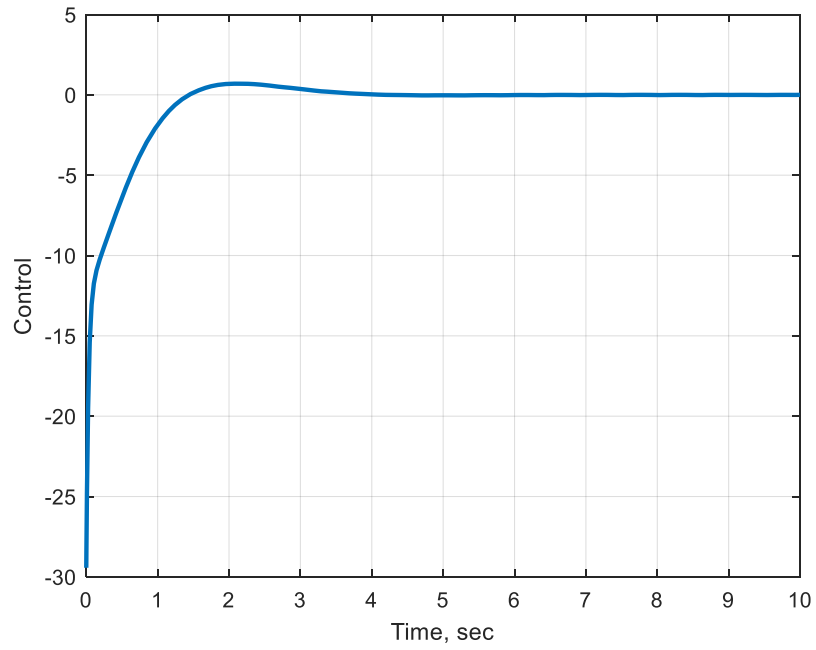
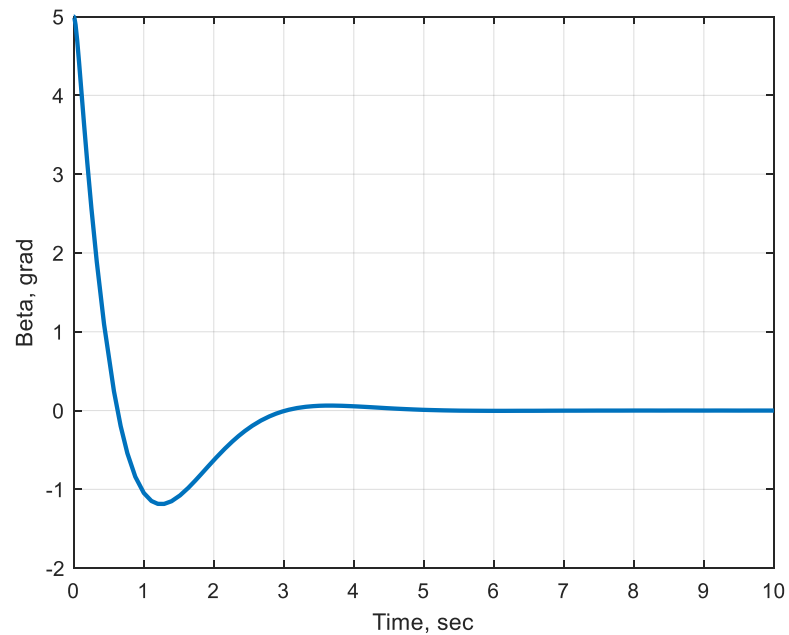


Рис. 8. Процесс по управлению для модального регулятора



*Рис. 9. Процесс по управлению для LQR регулятора*

Посмотрим, как в обоих случаях изменяется угол  $\beta$ . Переходные процессы по углу представлены на рис. 10 и рис. 11.



*Рис. 10. Процесс по углу  $\beta$  для модального регулятора*

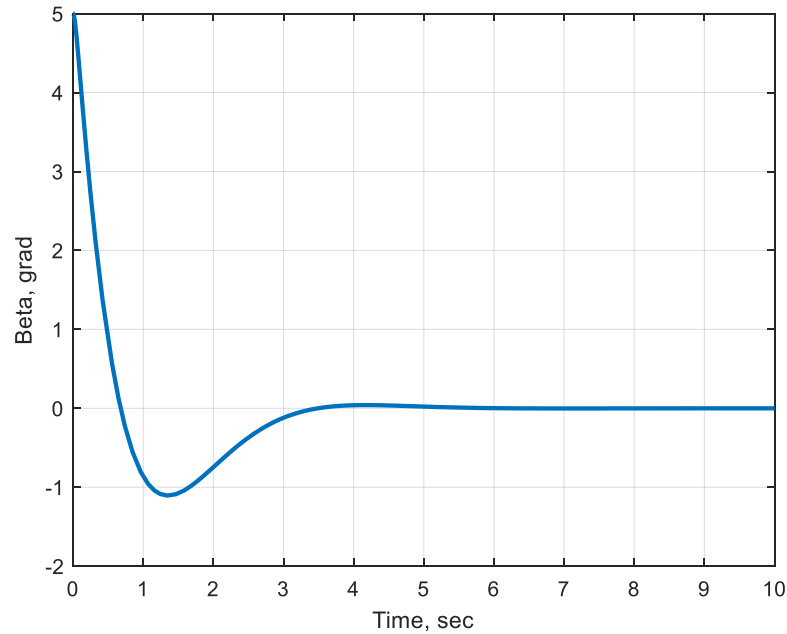


Рис. 11. Процесс по углу  $\beta$  для LQR регулятора

Сравнивая графики, видим, что в обоих случаях система возвращается в нулевое положение равновесия примерно за одинаковое время.

Далее для сравнения производится построение грубой оценки области асимптотической устойчивости маятника при замыкании системы модальным и LQR- регуляторами.

Для этого будем анализировать характер функции  $\tilde{W}(x)$ , которая определяется формулами (24), (25) в области

$$B = \{x = (\alpha \ \beta \ \dot{\alpha} \ \dot{\beta}) \in X : \alpha = 0, 0 \leq \beta \leq 2\pi, \dot{\alpha} = 0, \dot{\beta} = 0\}, \quad (41)$$

задаваемой начальным значением угла  $\beta$  отклонения маятника от нулевого положения равновесия.

Графики  $\tilde{W}(\beta)$  зависимостей скорости изменения рассматриваемой производной от угла отклонения для модального и линейно-квадратичного управления приводятся на рис. 12 и рис. 13 соответственно.



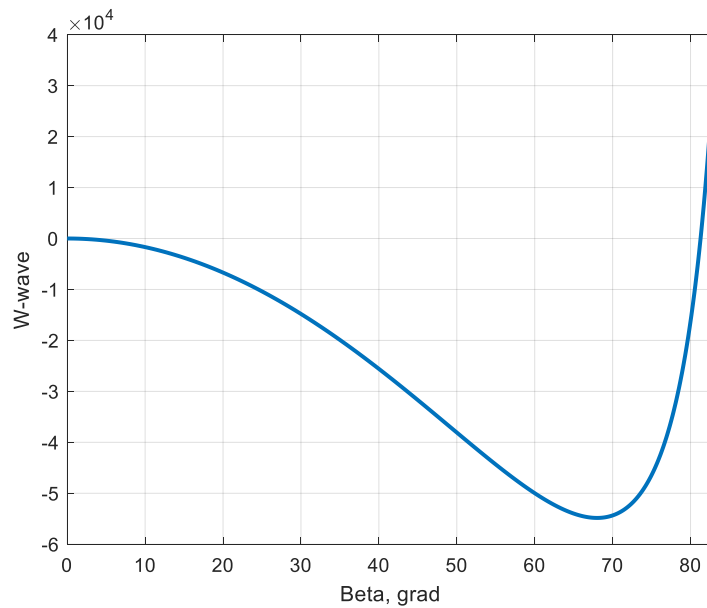


Рис. 12. Производная функции Ляпунова для модального регулятора

Надо заметить, что точки пересечения графиков с горизонтальной осью показывают максимальные отклонения, для которых соответствующее построенное управление гарантирует стабилизацию. Указанные точки и будем считать границами для оценок областей асимптотической устойчивости замкнутой системы.

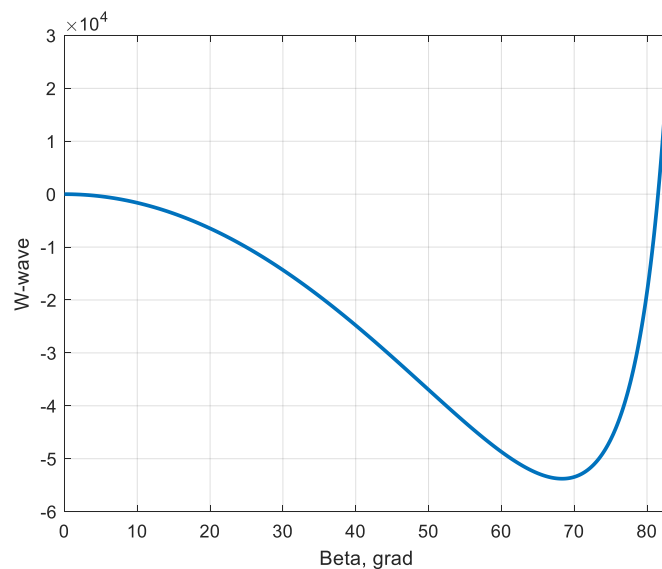


Рис. 13. Производная функции Ляпунова для LQR регулятора

Поскольку регуляторы выбирались сравнимыми по интенсивности, то исходя из графиков можно сделать вывод, что при заданной интенсивности

работы модального и LQR регуляторов область асимптотической устойчивости будет составлять около 81.9 и 81.5 градусов соответственно. Отсюда делаем вывод, что оценки областей асимптотической устойчивости при использовании как модального, так и LQR регуляторов имеют почти одинаковые значения.

После проведения экспериментов с имитационным моделированием выяснилось, что модальный регулятор требует намного меньших энергетических затрат, при этом стабилизируя линейную систему примерно за то же время, что и LQR. А сами области асимптотической устойчивости замкнутой нелинейной системы сравнимы по размеру для обоих регуляторов.

Естественно, что модальный регулятор следует выбрать как рабочий для формирования базового закона управления в многоцелевой структуре.

Определим параметры выбранного управления так, чтобы область асимптотической устойчивости включала большие значения отклонения угла маятника. Этой ситуации будут соответствовать корни характеристического полинома  $\rho_1 = -10$ ,  $\rho_2 = -2$ ,  $\rho_3 = -5$ . Отметим, что получаемая при таких значениях параметров область асимптотической устойчивости значительно шире, чем найденная в работе [9] при замыкании системы биномиальным регулятором, построенным на основании линеаризованной системы.

Надо сказать, что если найти LQR-регулятор ( $\gamma = 0.008$ ), сопоставимый по интенсивности с рабочим (рис. 15), то при оценке областей асимптотической устойчивости оказывается, что они для обоих регуляторов имеют сравнимые значения. На рис. 14 для иллюстрации сравнения поведения системы при работе регуляторов показаны графики переходных процессов по углу  $\beta$  при начальном значении  $\beta(0) = 10^\circ$ . Видим, что качество переходного процесса по углу  $\beta$  для двух регуляторов отличается: модальный регулятор быстрее возвращает систему в нулевое положение равновесия, чем LQR.

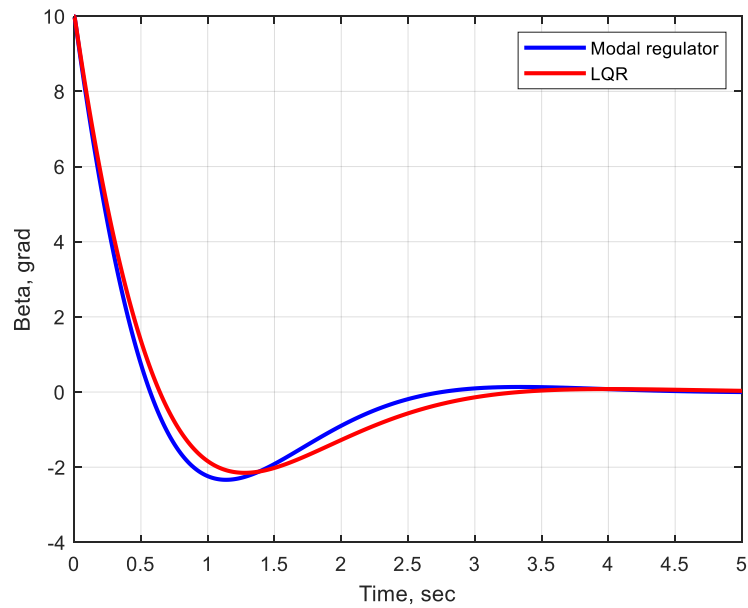


Рис. 14. Сравнение процессов по углу  $\beta$  для модального и LQR регуляторов

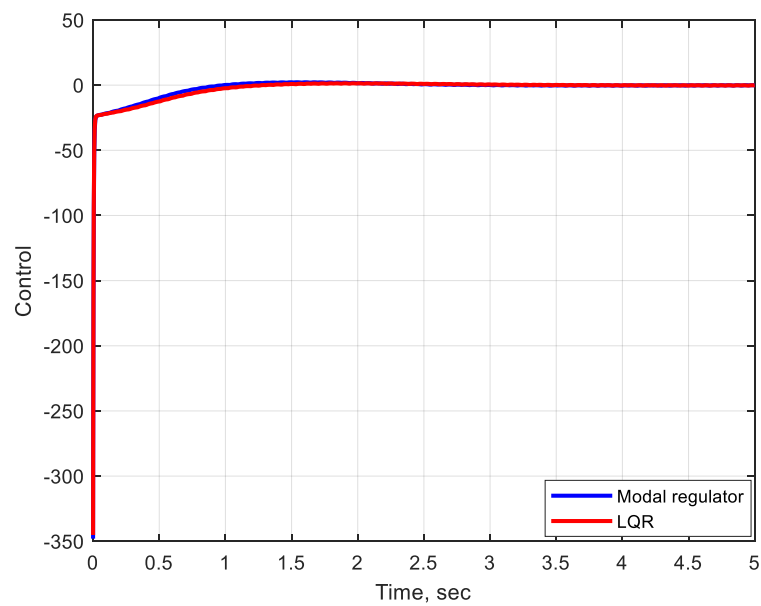


Рис. 15. Сравнение процессов по сигналу  $\tau$  для модального и LQR регуляторов

Однако при больших значениях начального отклонения системы модальный регулятор затрачивает гораздо меньше ресурсов по сравнению с LQR, при этом величина перерегулирования по углу  $\beta$  меньше, чем для второго регулятора, а время возвращения системы в нулевое положения равновесия такое же.

Поскольку модальный регулятор имеет более широкую область асимптотической устойчивости, при этом для больших отклонений он затрачивает меньше ресурсов по сравнению с LQR-регулятором, а в окрестности нулевого положения равновесия оба варианта по качеству управления почти идентичны, в качестве базового регулятора для обратной связи с многоцелевой структурой выберем описанный модальный регулятор. Далее вся работа будет проводиться с использованием принятого рабочего регулятора:

$$\tau = Kx,$$

$$K = (0 \quad -713.2151 \quad 13.9796 \quad -297.8541).$$

Однако, стоит отметить, что здесь и в дальнейшем графики приводятся для построенного управления  $\tau$ , от которого зависит управляющий сигнал  $u$ , поступающий уже непосредственно на вход в нелинейную систему управления маятника Фуруты, причём зависимость имеет линейный характер. Нелинейность управления  $u$  в формуле определяется зависимостью от переменных состояния объекта.

### 4.3. Построение асимптотического наблюдателя

На рис.16 представлена блок-схема компьютерной модели для системы управления маятником Фуруты. Здесь управляющий сигнал строится по оценкам для вектора состояния, т. е. по выходу линейного асимптотического наблюдателя, что отличает эту модель от модели в первой задаче.

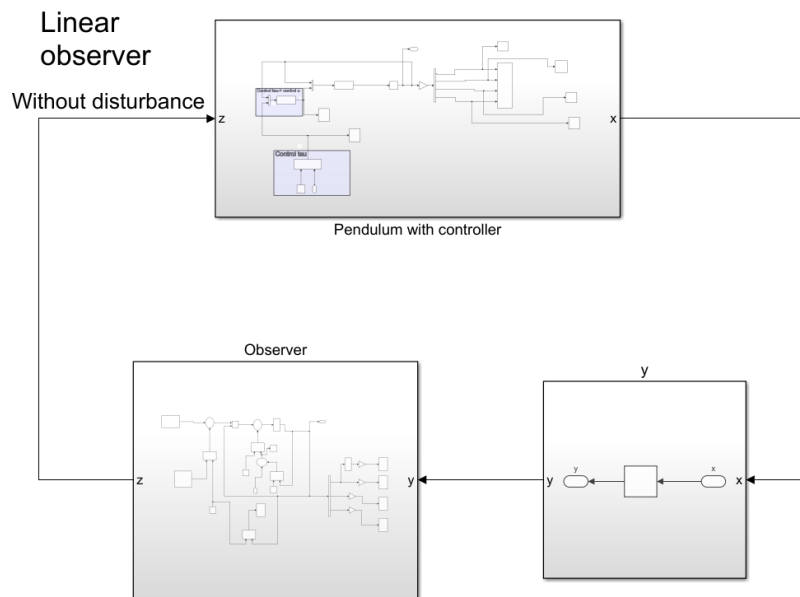


Рис. 16. Блок-схема Simulink-модели с регулятором по состоянию наблюдателя

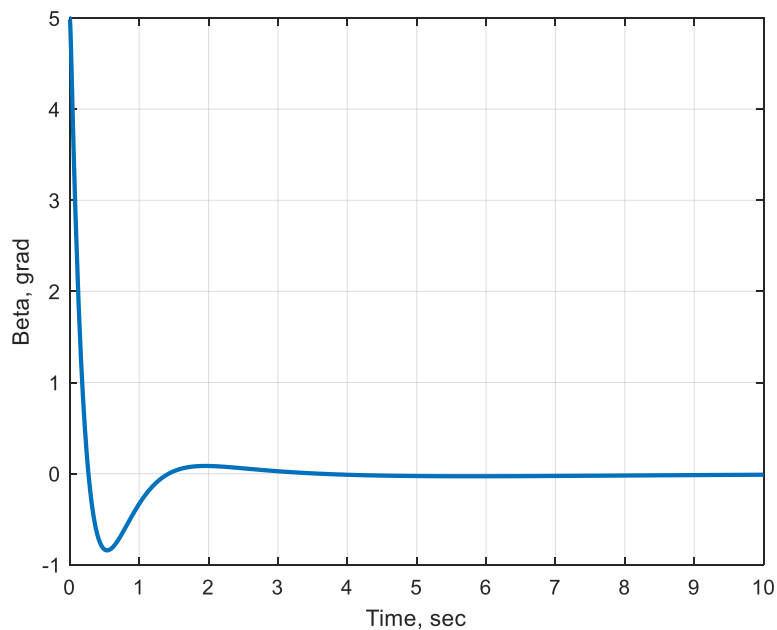


Рис. 17. Движение маятника при управлении  $u = u(\tau)$ ,  $\tau = Kz$

Настроим регулятор, сформированный по состоянию наблюдателя. Для этого определим матрицу  $H$  его коэффициентов. Зададим начальное отклонение  $\beta_0 = \beta(0) = 5^\circ$  и будем проводить имитационное моделирование с помощью данной Simulink-модели, а в качестве базового регулятора возьмем результат синтеза, который получен выше.

Проведенные эксперименты дают значение  $\rho = -0.5$  для кратного корня биномиального характеристического полинома построенного асимптотического наблюдателя. Этот корень обеспечивается матрицей коэффициентов:

$$H = \begin{pmatrix} 0.5033 & 0.0143 & 0.0072 \\ -71.4187 & 0.9962 & 0.2481 \end{pmatrix}'.$$

Соответствующий такой матрице  $H$  переходный процесс, показанный на рис. 17, говорит о хорошем динамическом качестве замкнутой системы.

#### 4.4. Синтез динамического фильтра

Вводится внешнее гармоническое воздействие. Зададим частоту  $\omega_0 = 0.5 \text{ рад/с}$  его колебаний. Такая частота характерна для морского волнения с интенсивностью около 5 баллов по шкале Бофорта.

Для нахождения числовых значений параметров числителя необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений (49). Тогда искомые параметры  $b_1 = b_1(a_0, a_1, a_2)$ ,  $b_2 = b_2(a_0, a_1, a_2)$ ,  $b_3 = b_3(a_0, a_1, a_2)$ ,  $b_4 = b_4(a_0, a_1, a_2)$  определяются как функции от коэффициентов знаменателя  $a_0 = a_0(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ ,  $a_1 = a_1(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ ,  $a_2 = a_2(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ , где  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  – заданные корни знаменателя передаточной полиномиальной матрицы  $F(s)$  (28).

Значения матриц  $K$  и  $H$  базового регулятора и асимптотического наблюдателя соответственно берутся те, которые были выбраны выше. Тогда с помощью Simulink-модели проводятся эксперименты, в ходе которых выбираются значения корней знаменателя передаточной матрицы фильтра.

Таковыми корнями оказались значения  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = -0.2$ . Найденные для них коэффициенты числителя и знаменателя передаточной матрицы (28) динамического фильтра принимают значения  $b_1 = -2.9902, b_2 = -3.7943, b_3 = 149.3032, b_4 = -424.3271, a_0 = 0.008, a_1 = 0.12, a_2 = 0.6$ .

Для анализа динамики замкнутой нелинейной системы построим её амплитудно-частотную характеристику.

Решая систему линейных алгебраических уравнений, находим числовые значения матриц ss-формы динамического фильтра и замыкаем полученным управлением рассматриваемую систему.

Построенная амплитудно-частотная характеристика  $A(\omega) = |H_{dB}(j\omega)|$  замкнутой системы с полностью настроенной многоцелевой обратной связью приведена на рис.18.

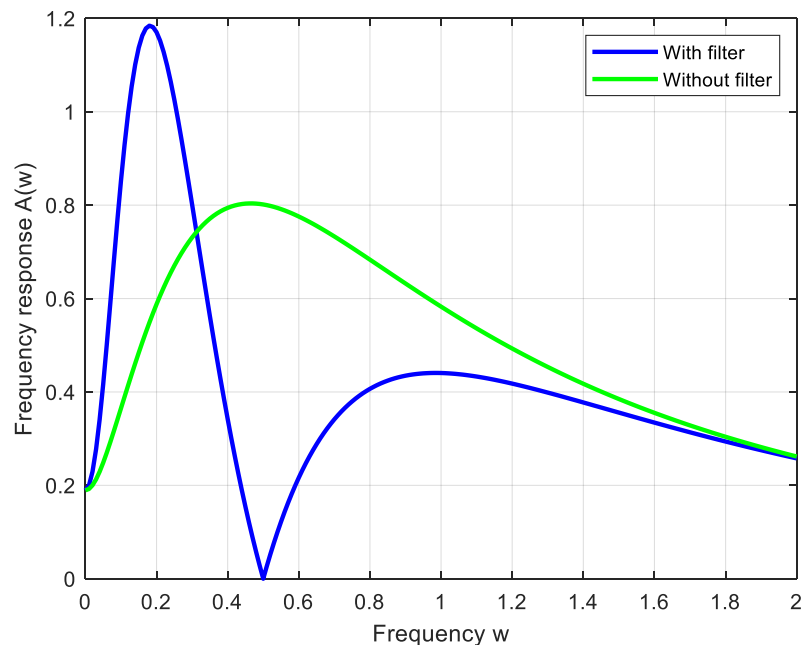


Рис. 18. Частотная характеристика  $A(\omega) = |H_{dB}(j\omega)|$  замкнутой системы с включенным и выключенным фильтром соответственно

Здесь видно, что на частоте 0.5, действительно, колебания системы обращаются в 0, что и следует из построения, при этом, начиная с частоты около 0.3, построенное управление компенсирует колебания маятника, вызванные внешним возмущающим воздействием, уменьшая их амплитуду. На очень

больших частотах колебания для с включенным и выключенным фильтром имеют почти одинаковую динамику.

Проанализируем качество процессов по управляющему сигналу при замыкании системы построенной многоцелевой структурой. Для этого, как и выше, построим АЧХ, но уже  $A(\omega) = |H_{d\tau}(j\omega)|$ , т. е. от входного возмущения  $d$  к выходу  $\tau$ . График полученной характеристики приведен на рис.19.

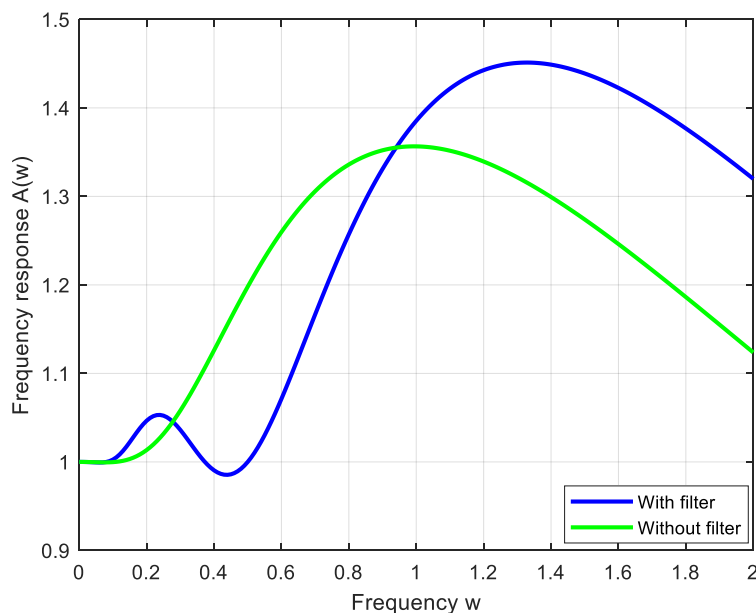


Рис. 19. Частотная характеристика  $A(\omega) = |H_{d\tau}(j\omega)|$  замкнутой системы с включенным и выключенным фильтром соответственно

Из графика можно сделать вывод о том, что управление с включенным фильтром для каких-то частот имеет даже более малую по величине амплитуду колебаний, чем при выключенном фильтре. На тех же частотах, где это не так, включенный фильтр увеличивает колебания в определенных границах, то есть не нарушает требование ограниченности ресурсов управляющего сигнала.

Теперь, для того, чтобы ввести синтезированный фильтр в компьютерную модель, воспользуемся блок-схемой, которая изображена на рис. 20. Она представляет собой реализацию полного регулятора (33) – (36) с многоцелевой структурой и учитывает воздействие внешнего возмущения.





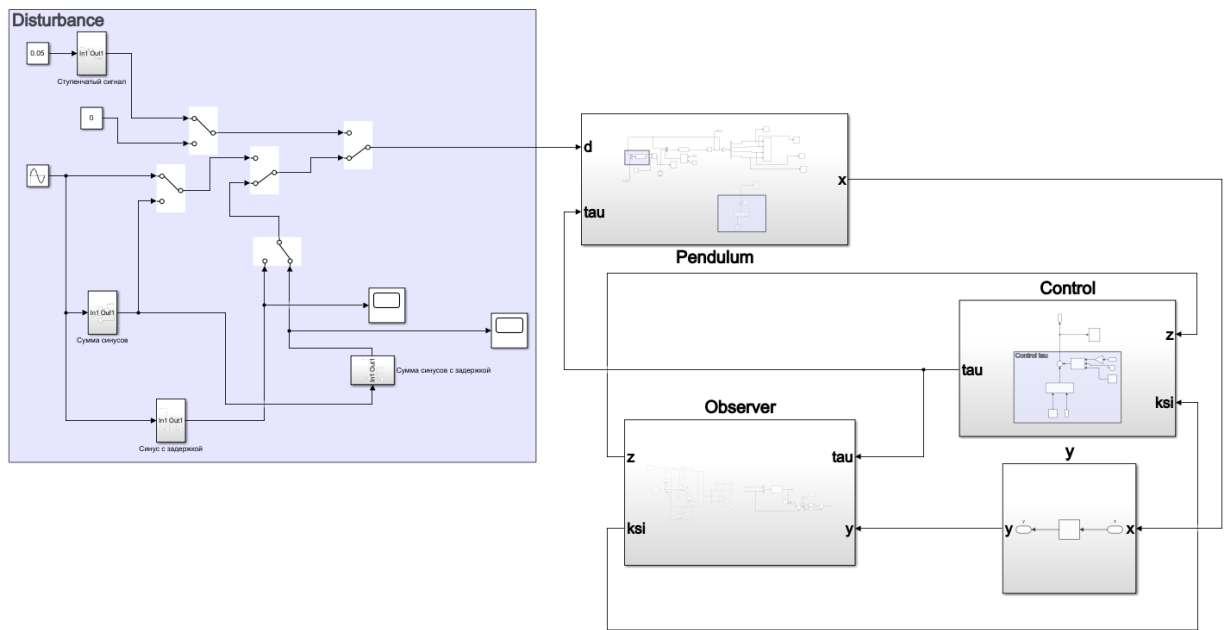


Рис. 21. Замокнутая модель с внешним возмущением

Будем подавать в систему различные типы внешнего возмущения и проводить эксперименты. Здесь начальное отклонение маятника от положения равновесия будем задавать нулевым.

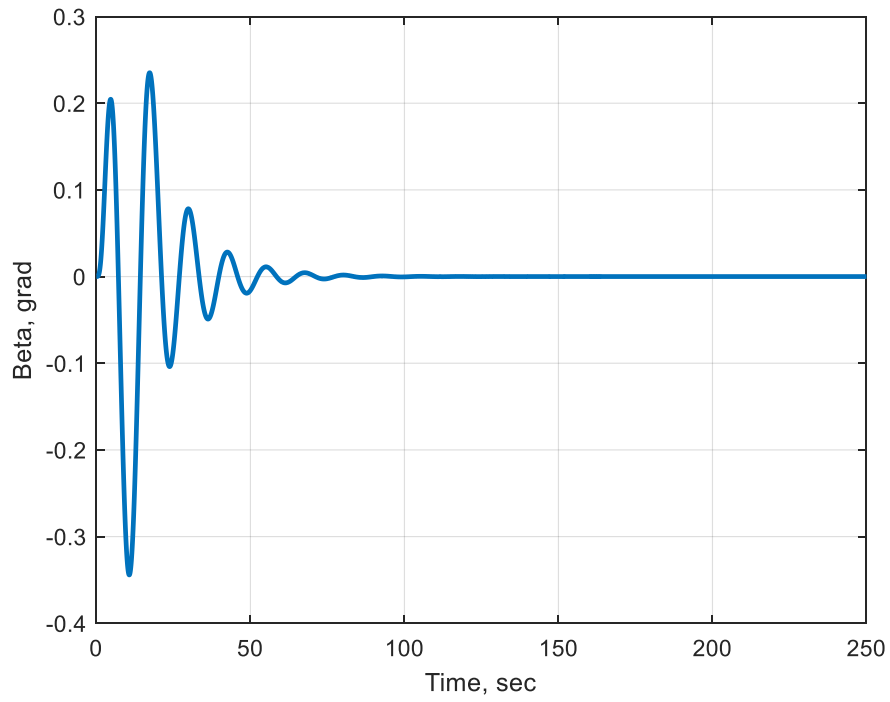
Для начала рассмотрим ситуацию, когда на возмущающий вход поступают гармонические колебания

$$d(t) = A \sin \omega_{0_k} t$$

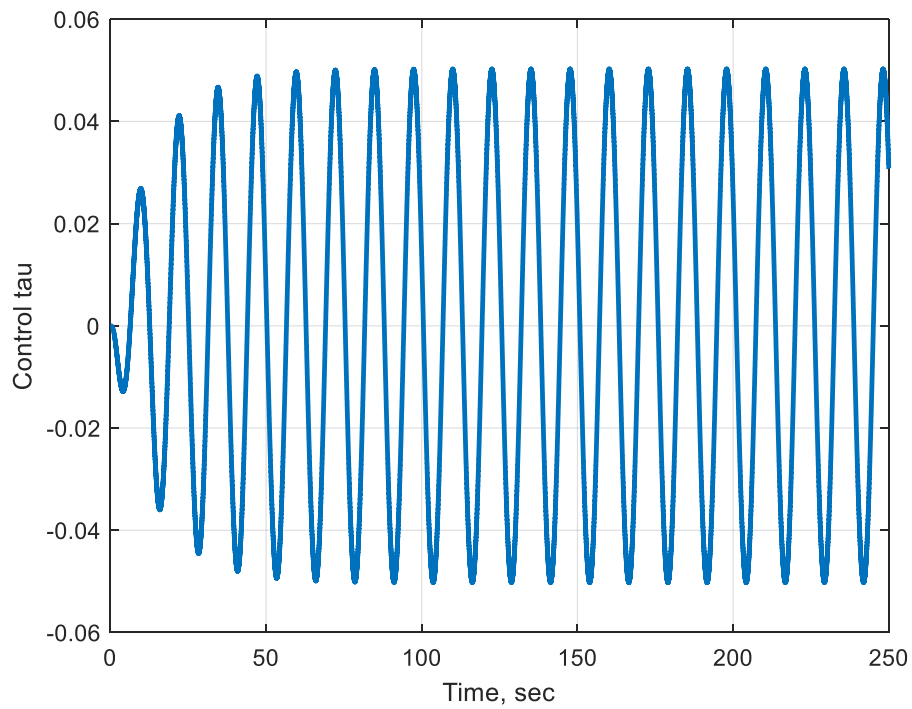
с заданной амплитудой  $A = 0.05 \text{ рад}$  и частотой колебаний  $\omega_{0_k} = \omega_0 = 0.5 \text{ рад/с}$ .

Проанализируем поведение замкнутой системы при движении в указанном режиме.

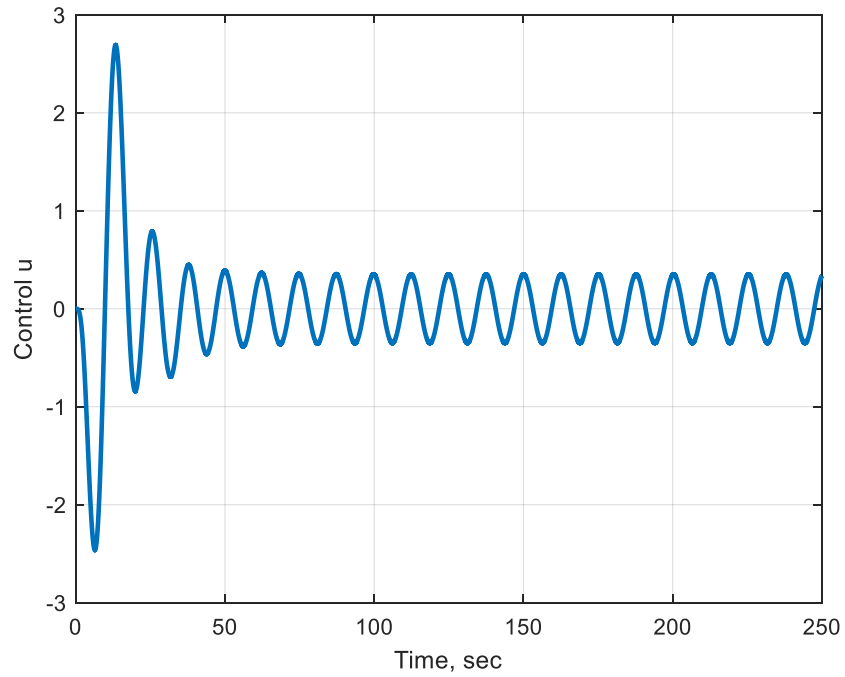
Рассмотрим динамику процессов по углу  $\beta$  и управляющим сигналам  $\tau$  и  $u$  при включённом фильтре, которая приведена на рис. 22, рис. 23 и рис.24.



*Рис. 23. Процесс по углу  $\beta$  при включённом фильтре*

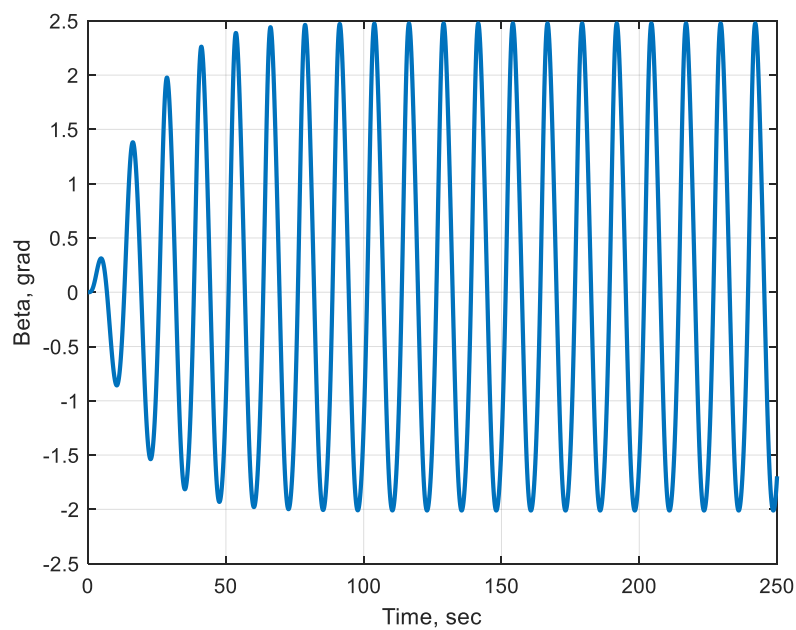


*Рис. 24. Процесс по управляющему сигналу  $\tau$  при включённом фильтре*

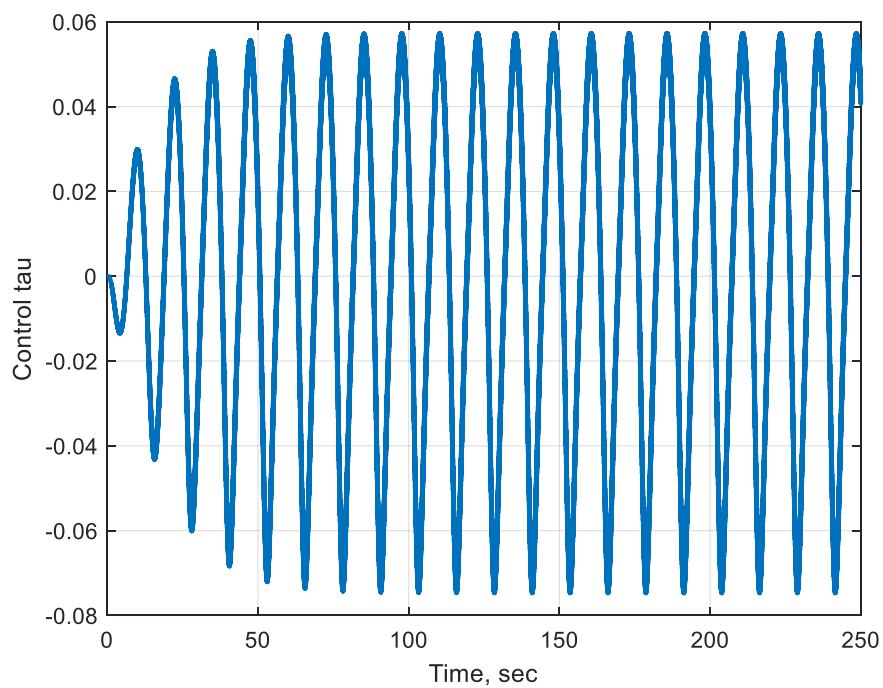


*Рис. 25. Процесс по управляющему сигналу  $u$  при включённом фильтре. Амплитуда колебаний 0.4.*

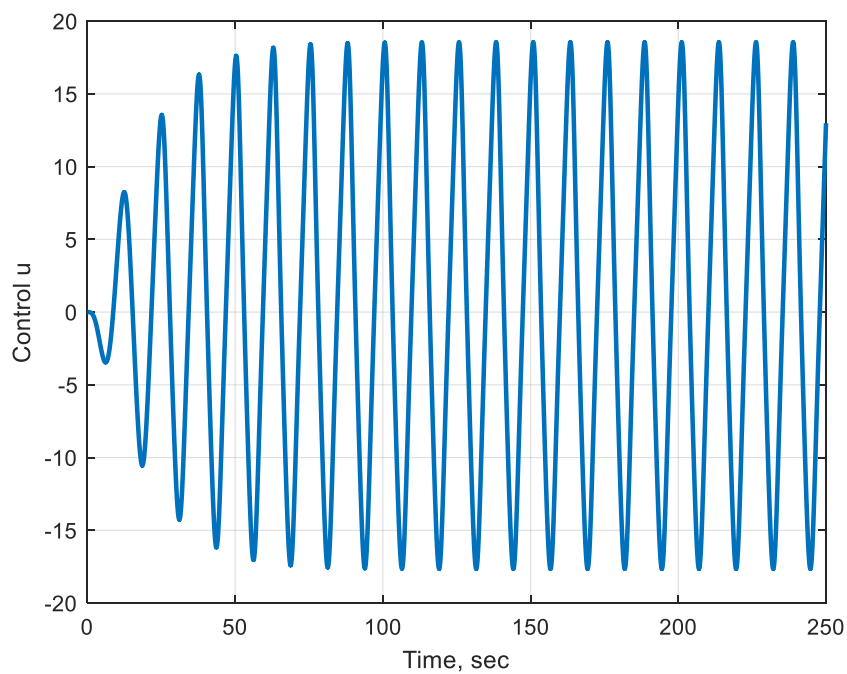
Теперь построим графики для аналогичных процессов, но при выключенном фильтре. Они изображены на рис. 26, рис. 27 и рис. 28. Сравним их с процессами, представленными выше.



*Рис. 26. Процесс по углу  $\beta$  при выключенном фильтре*



*Рис. 27. Процесс по управляющему сигналу  $\tau$  при выключенном фильтре*



*Рис. 28. Процесс по управляющему сигналу  $u$  при выключенном фильтре. Амплитуда колебаний 18.*

Сравнивая рис. 23, рис. 25, рис. 26 и рис. 28, можно увидеть, что построенный динамический фильтр полностью компенсирует колебания маятника, что и является целью его введения в структуру многоцелевого закона управления, и при этом уменьшает амплитуду колебаний управляющего сигнала  $u$  с 18 В до 0.4 В, тем самым подавляя их, что значительно уменьшает затраты на управление.

Для иллюстрации сравнения описанных процессов по углу и управляющему сигналу, приведем графики, на которых первая половина времени моделирования происходит при выключенном фильтре, а затем в работу включается динамический корректор, который компенсирует колебания (рис.29 и рис. 30).

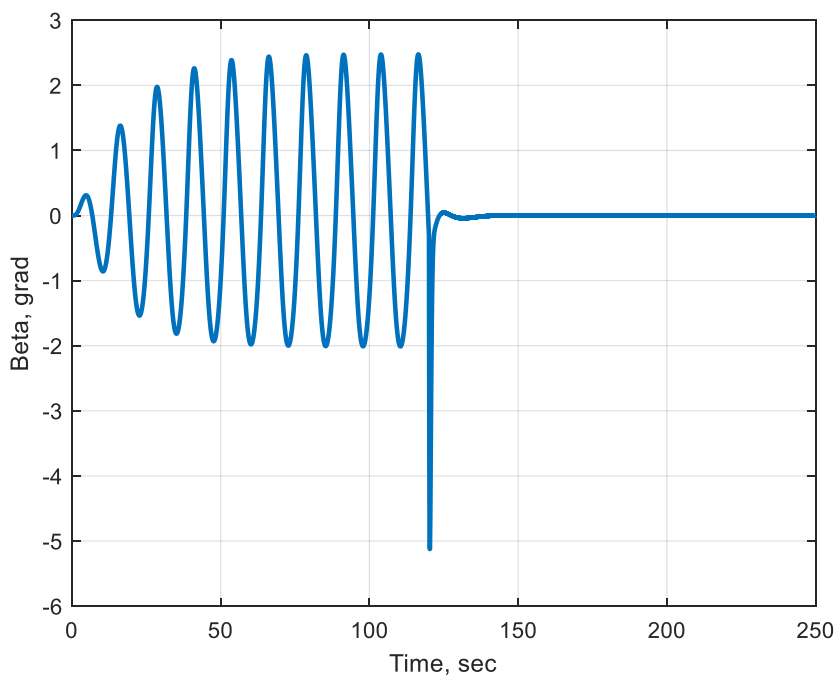
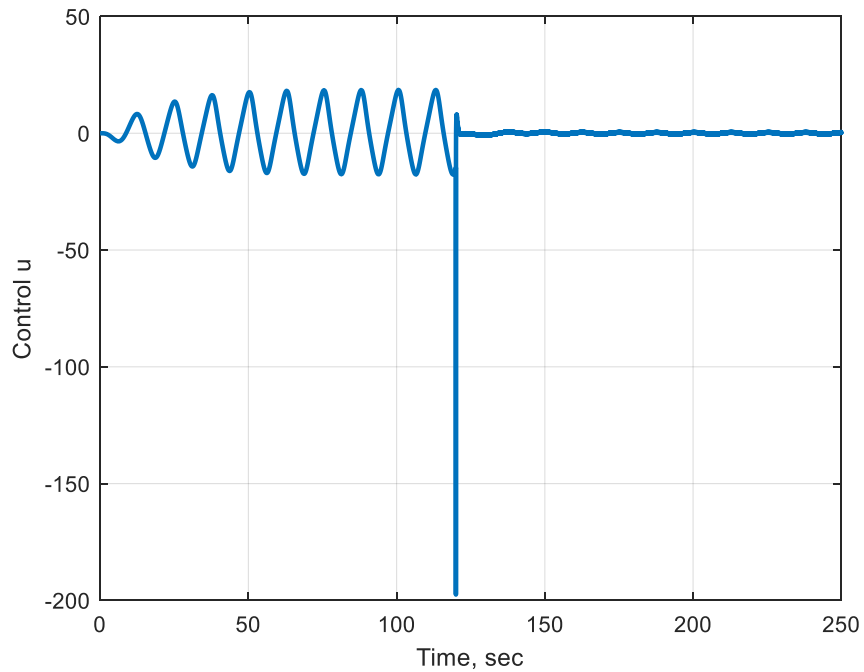


Рис. 29. Сравнение процессов по углу  $\beta$  при выключенном и включённом фильтре

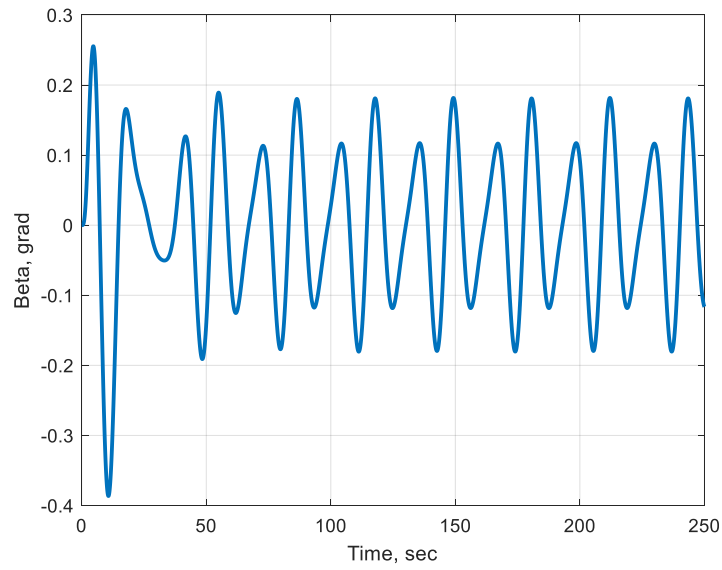


*Рис. 30. Сравнение процесс по управляющему сигналу и при выключенном и включенном фильтре*

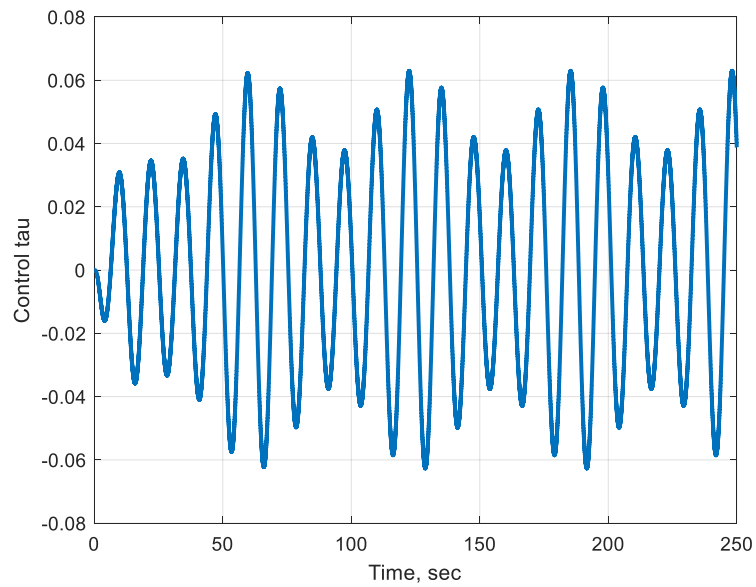
Стоит сказать, что на самом деле в реальных условиях гармонические возмущения не встречаются, поэтому как более реалистичское внешнее воздействие в модели предлагается использовать сумму трёх гармоник с разными частотами:

$$d(t) = \sum_{i=1}^3 A_i \sin \omega_{0_i} t ,$$

$$\omega_{0_1} = 0.4, \omega_{0_2} = 0.5, \omega_{0_3} = 0.6, A_1 = 0.008, A_2 = 0.05, A_3 = 0.005 .$$



*Рис. 31. Процесс по углу  $\beta$  при сложных колебаниях с включённым фильтром*



*Рис. 32. Процесс по управляющему сигналу  $\tau$  при композиции гармоник с включённым фильтром*



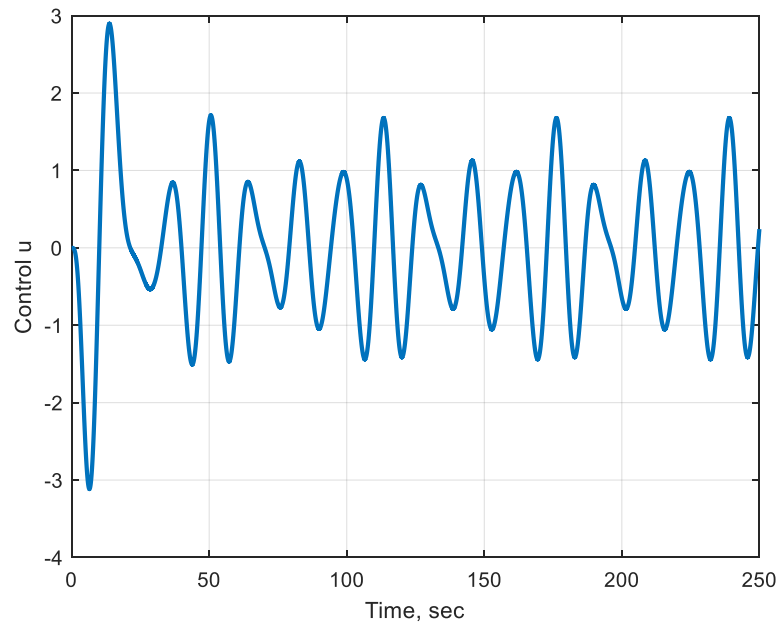


Рис. 33. Процесс по управляющему сигналу  $u$  и при композиции гармоник с включённым фильтром

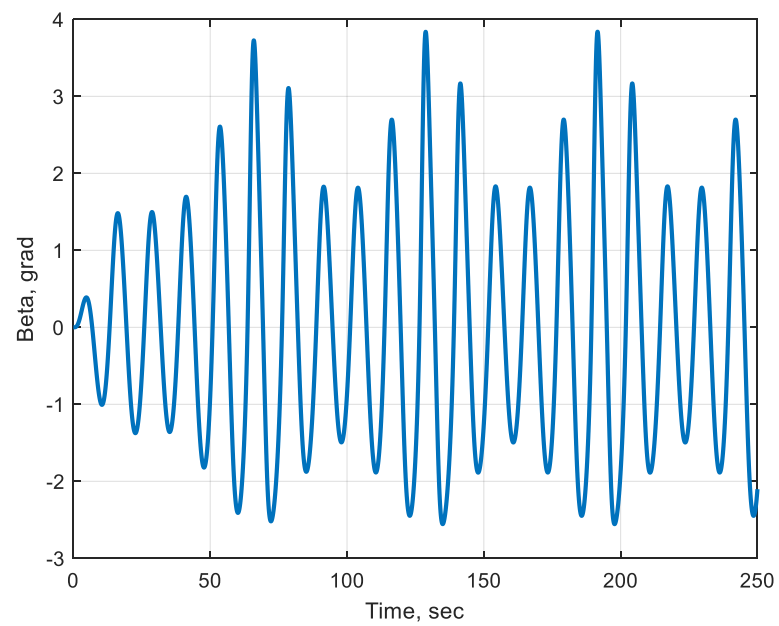
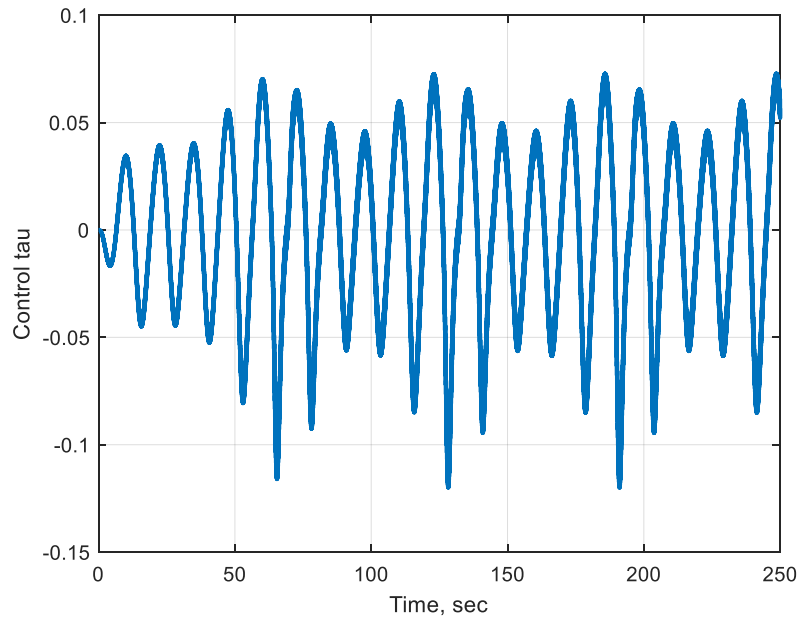
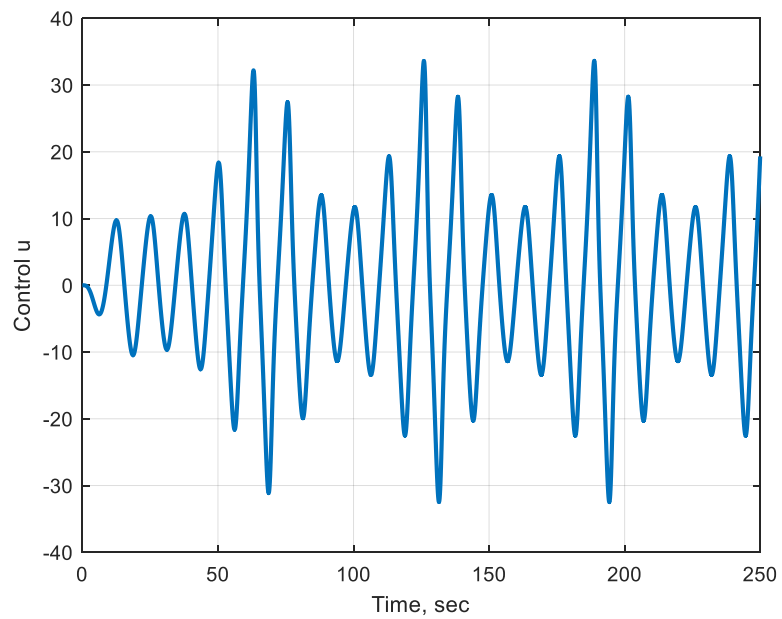


Рис. 34. Процесс по углу  $\beta$  при сложных колебаниях с выключенным фильтром

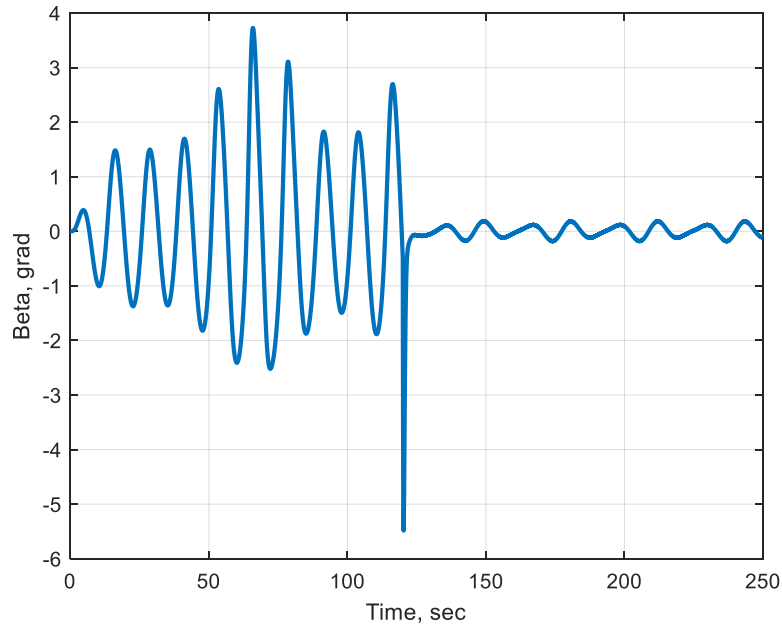


*Рис. 35. Процесс по управлению  $\tau$  при сложных колебаниях с выключенным фильтром*

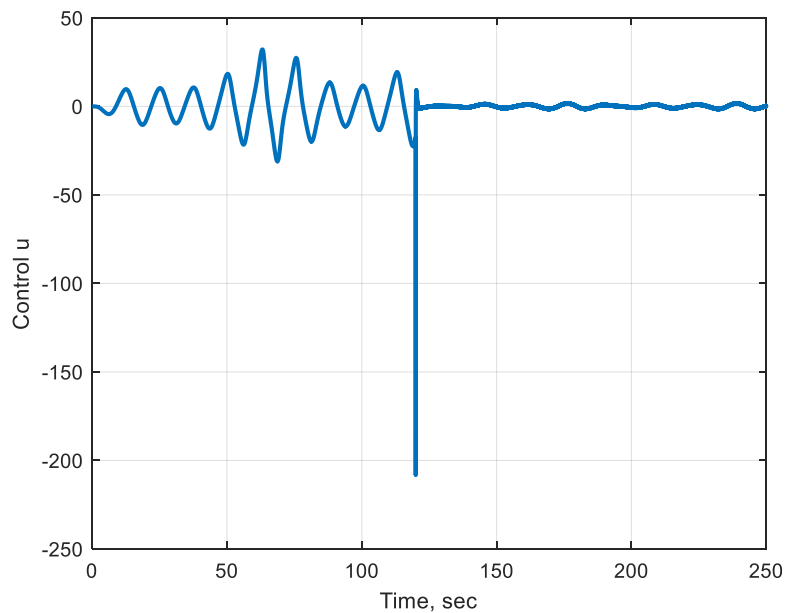


*Рис. 36. Процесс по управлению  $u$  при сложных колебаниях с выключенным фильтром*

И так же для сравнения построим графике для ситуации, когда фильтр включается на вторую половину всего времени моделирования (рис. 37 и рис. 38).



*Рис. 37. Процесс по углу  $\beta$  при сложных колебаниях*



*Рис. 38. Процесс по управлению  $u$  при сложных колебаниях*

Проанализируем и сравним динамику процессов по углу  $\beta$  и управляющему сигналу  $u$  при включённом и выключенном фильтре, представленную на рис. 31 – 38. Как видно, в таком режиме функционирования фильтр подавляет колебания по углу с  $3.8^\circ$  до  $0.19^\circ$ , а по управлению – с 32 до 1.7. Таким образом, в приближенной к реальной ситуации фильтр, пусть и не компенсируя колебания маятника полностью, подавляет их до небольших величин, при

этом так же происходит значительная экономия ресурсов управления.

#### 4.6. Построение цифрового регулятора

Теперь на основании построенное многоцелевого регулятора в непрерывном времени и анализа динамики замкнутой таким управлением нелинейной системы перейдём к формированию цифрового управляющего устройства.

Для начала, чтобы изучить поведение системы для дискретного сигнала, добавим дискретизацию выходного сигнала объекта и выходного значения управления  $\tau$ . В Simulink-модели это будет означать добавление блока Quantizer.

Теперь будет брать различные значения шага дискретизации, который для цифровой модели является одним из основных параметров, определяющих динамику системы, и смотреть, как изменится поведение маятника и управляющего сигнала. Возьмём значения шага  $ts_1 = 0.1$ ,  $ts_2 = 0.01$  и  $ts_3 = 0.001$ .

При проведении экспериментов оказалось, что при шаге дискретизации 0.1 величина значений динамических переменных системы неограниченно возрастает. Графики переходных процессов для шагов  $ts_2$  и  $ts_3$  приведены на рис. 39 и рис. 40 и рис. 41 и рис. 42 соответственно.

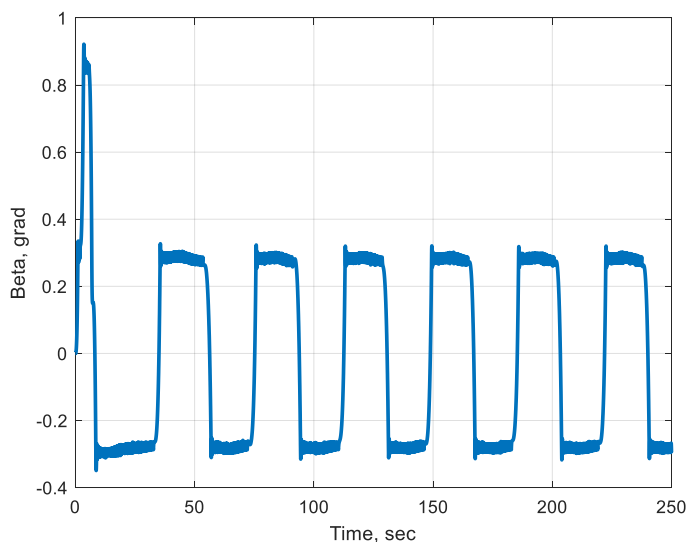


Рис. 39. Процесс по углу отклонения при дискретизации сигнала для  $ts=0.01$

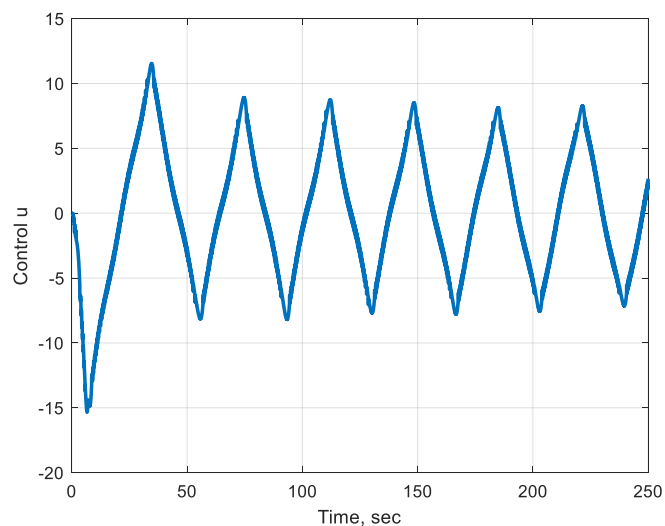


Рис. 40. Процесс по управляющему сигналу  $u$  и при дискретизации сигнала для  $ts=0.01$

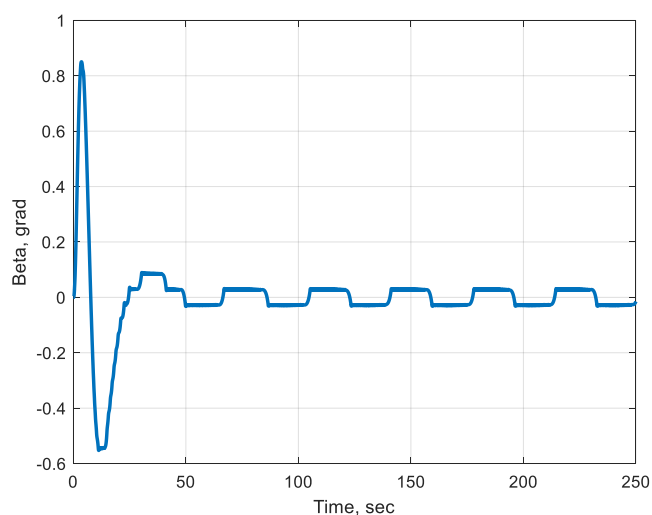


Рис. 41. Процесс по углу отклонения при дискретизации сигнала для  $ts=0.001$

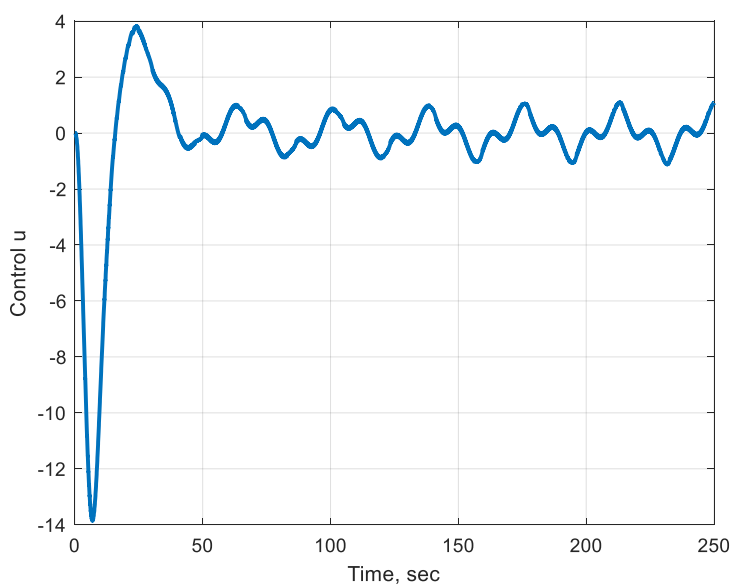


Рис. 42. Процесс по управляющему сигналу  $u$  и при дискретизации сигнала для  $ts=0.001$

Исходя из рис. 39 – 42, выберем для построения цифрового регулятора шаг дискретизации  $ts = 0.001$ , так как при таком значении поведение замкнутой системы не сильно отличается от непрерывного случая, т.е. величина колебаний, хоть и не является нулевой по углу  $\beta$ , но имеет небольшие значения.

Перейдём к построению дискретной многоцелевой структуры обратной связи.

В качестве базового закона управления для дискретного многоцелевого регулятора выберем закон, параметры которого соответствуют аналогичным для непрерывного регулятора.

Таковыми параметрами оказываются корни характеристического полинома замкнутой линейной системы разностных уравнений  $\rho_1 = 0.9048, \rho_2 = 0.995, \rho_3 = 0.998$ , для которых и вычисляется матрица коэффициентов  $K_d$  базового закона управления. Тогда рабочий базовый дискретный регулятор принимает вид

$$\tau[n] = K_d x[n]$$

$$K_d = (0 \quad -676.8259 \quad 13.2569 \quad -282.7984)$$

Следующим этапом построения цифрового многоцелевого регулятора является формирование дискретного асимптотического наблюдателя. Simulink-модель соответствующей замкнутой системы которого приведена на рис. 43.

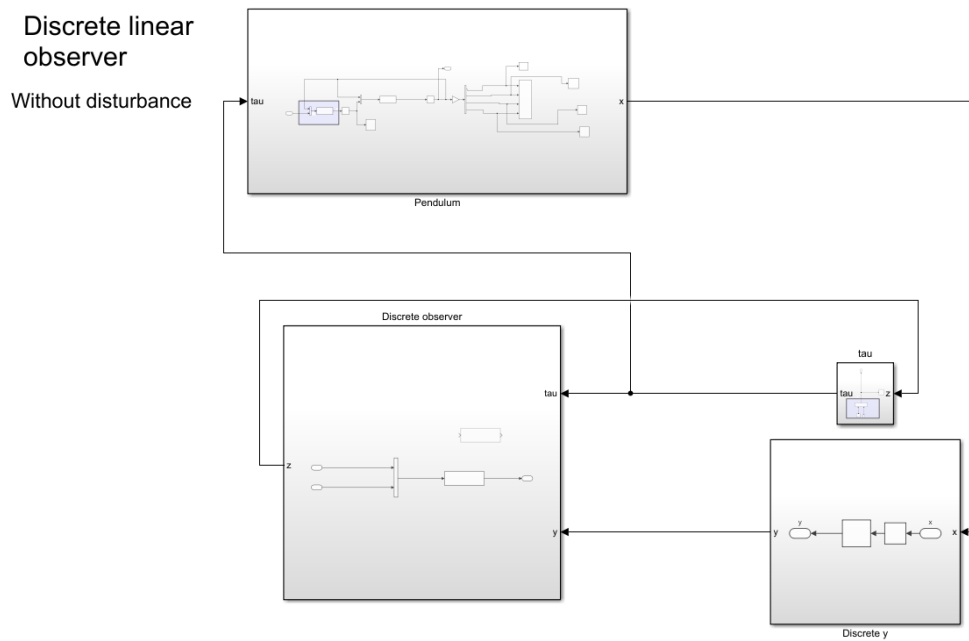


Рис. 43. Блок-схема Simulink-модели с регулятором по состоянию наблюдателя

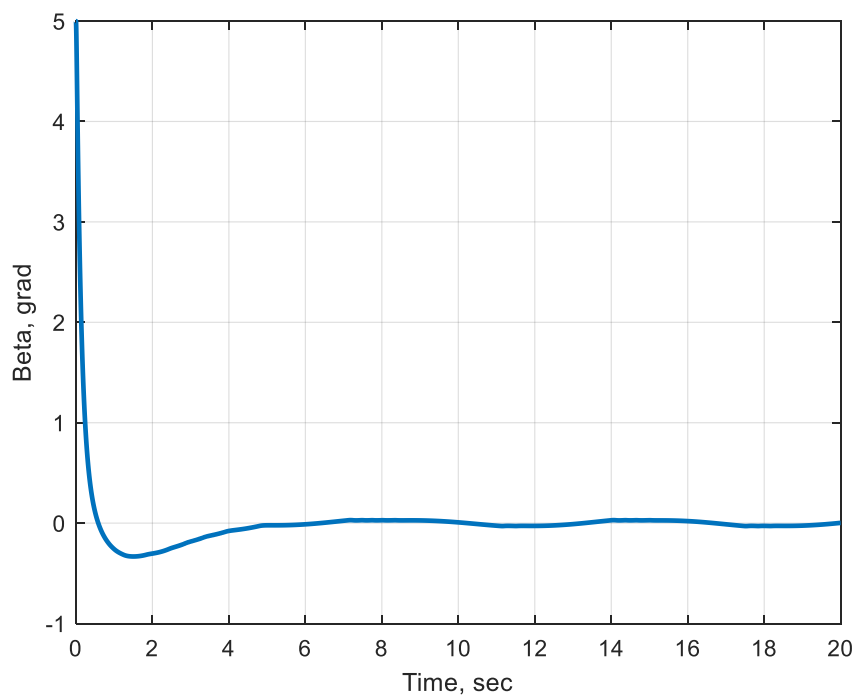


Рис. 44. Движение маятника при управлении  $u[n] = u(\tau[n])$ ,  $\tau[n] = K_d z[n]$

Настроим асимптотический наблюдатель путём выбора коэффициентов его матрицы  $H_d$ . Делать это будем, исходя из выбранных параметров для непрерывного регулятора. Тогда значения корней характеристического полинома замкнутой системы наблюдателя необходимо взять кратными равными  $\rho_i = 0.9995$ ,  $i = \overline{1,3}$ . Тогда матрица дискретного асимптотического наблюдателя

приобретает значения

$$H_d = \begin{pmatrix} 0.0005 & -0.0000097 & -0.0000048 \\ -0.0714 & 0.001 & 0.0003 \end{pmatrix}'.$$

Найденные матрицы  $K_d$  и  $H_d$  будут дальше использоваться для построения многоцелевой структуры.

Третья локальная задача синтеза – нахождение передаточной матрицы дискретного фильтра. Решая соответствующую систему линейных алгебраических уравнений (49), находим значения параметров фильтра  $b_1 = 0.0099, b_2 = -0.0317, b_3 = 9575, b_4 = -10415, a_0 = -0.000001, a_1 = -0.0003, a_2 = -0.03$ , выбрав кратный корень знаменателя характеристического полинома, равным  $\rho = 0.01$ .

Построим АЧХ замкнутой нелинейной системы с дискретным регулятором. Они имеет вид, представленный на рис. 45.



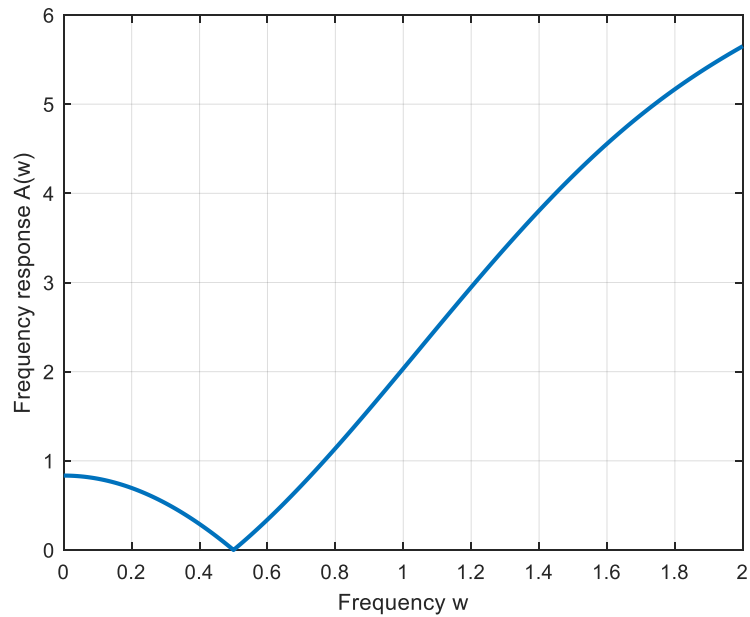


Рис. 45. Частотная характеристика  $A(\omega) = |H_{d\beta}(e^{j\omega})|$  замкнутой системы с включенным фильтром

Ниже (рис. 46) приведена блок-схема замкнутой нелинейной модели с цифровым управляющим устройством.

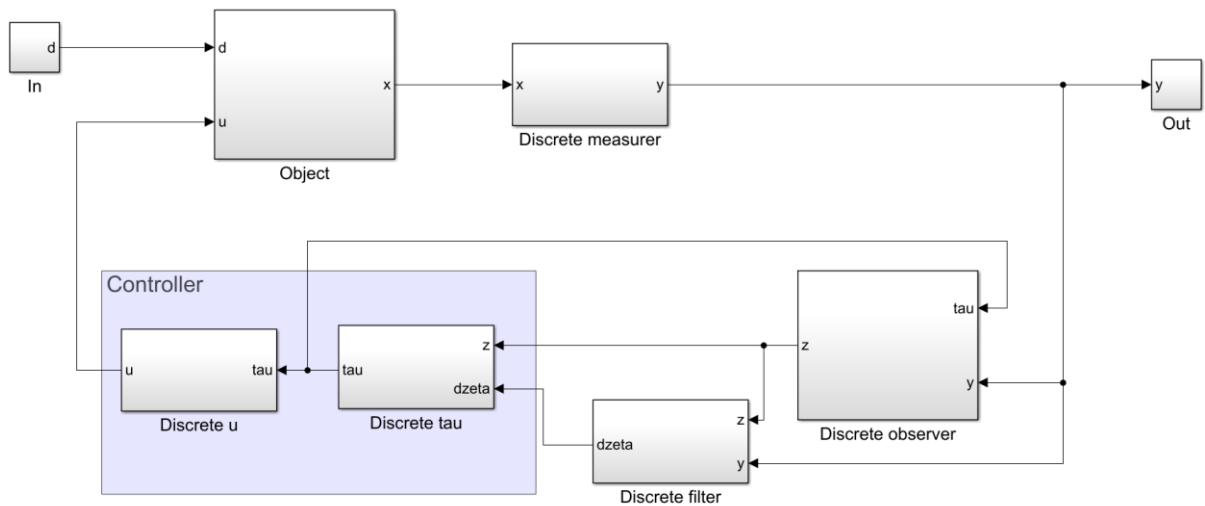


Рис. 46. Схема замкнутой модели с многоцелевой структурой управления

Соответствующая MATLAB-функция для реализации проведенных вычислений приведена в Приложении 3.

## 4.7. Результаты компьютерного моделирования. Цифровой регулятор

Рассматриваем движение маятника под воздействием внешних возмущений, при этом начальное отклонение маятника считается нулевым. Будем сразу говорить о реальных условиях работы объекта, которые в нашей модели характеризуется суммой трёх гармоник с разными частотами. Величина их характеристик берётся аналогично рассматриваемой для непрерывного случая.

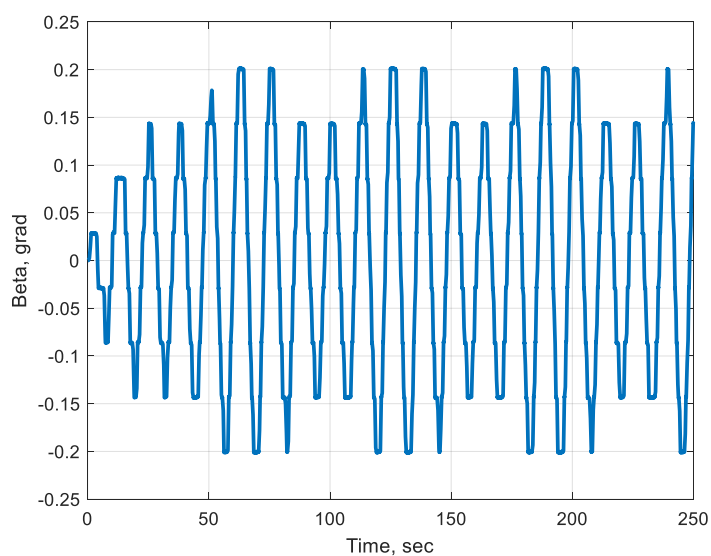


Рис. 47. Процесс по углу  $\beta$  при сложных колебаниях с включённым фильтром

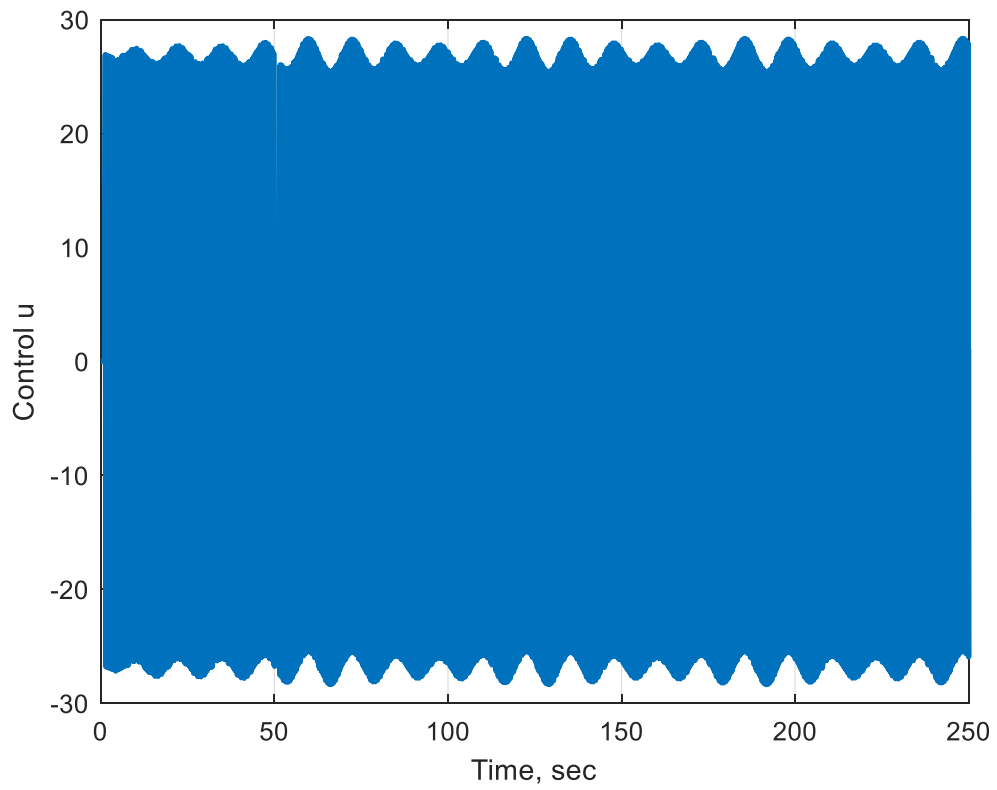


Рис. 48. Процесс по управляющему сигналу  $u$  при композиции гармоник с включенным фильтром

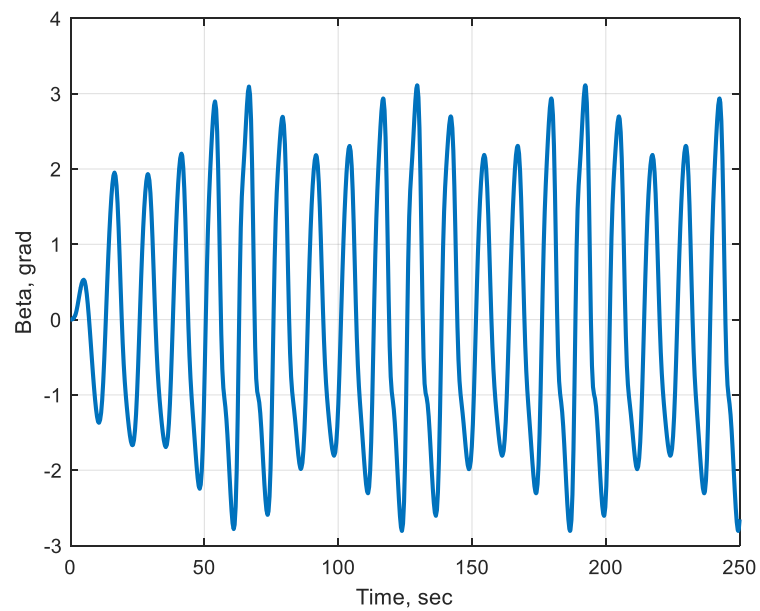


Рис. 49. Процесс по углу  $\beta$  при сложных колебаниях с выключенным фильтром

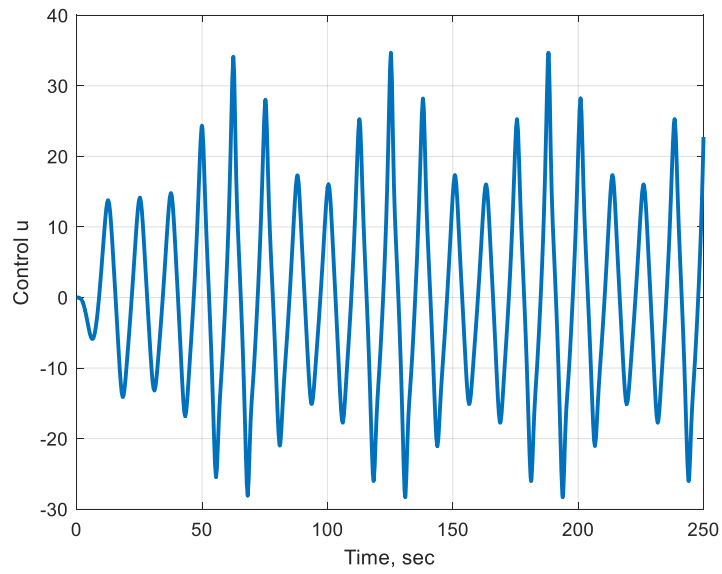


Рис. 50. Процесс по управлению  $u$  при сложных колебаниях с выключенным фильтром

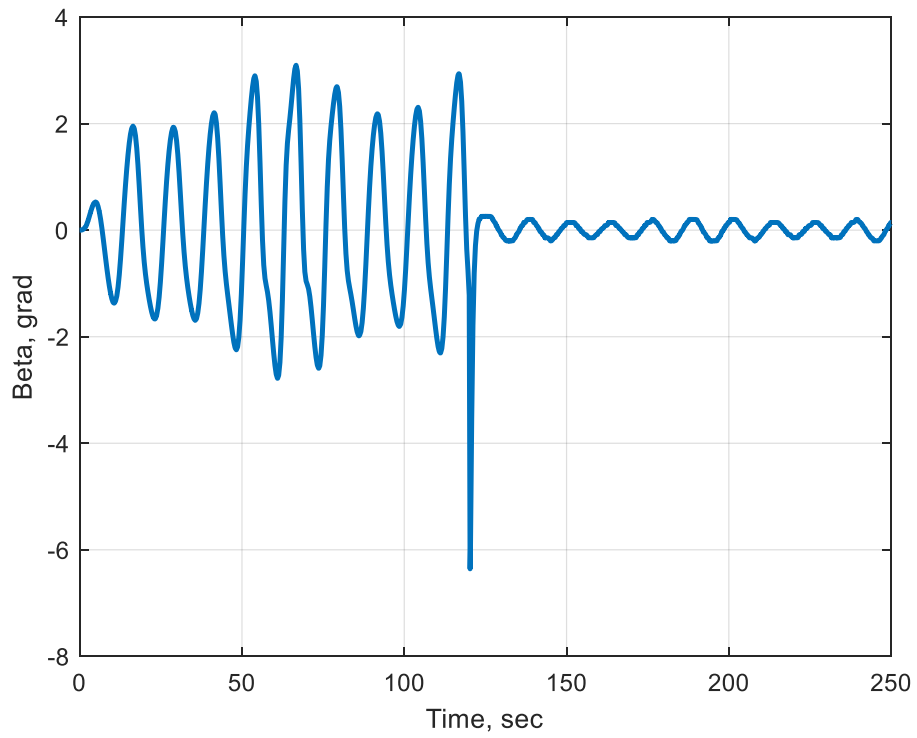
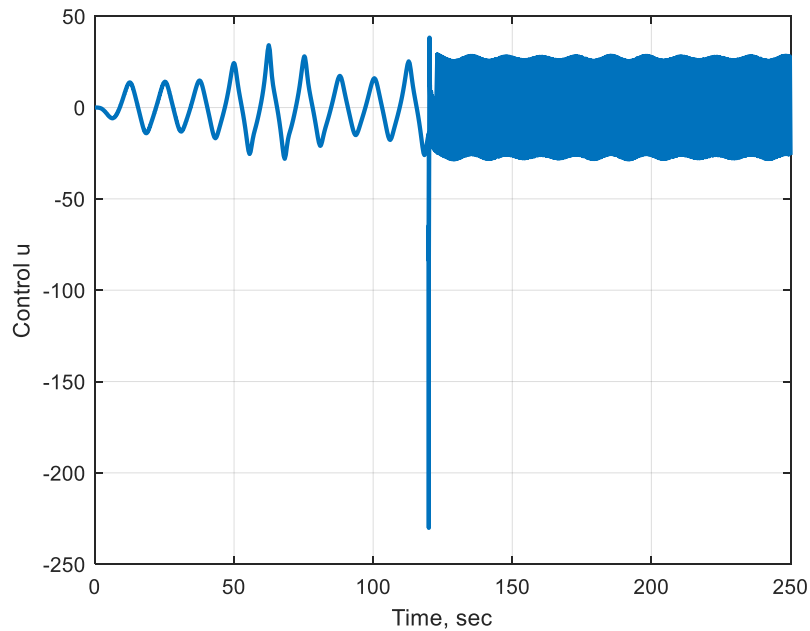


Рис. 51. Сравнение процессов по углу  $\beta$  при сложных колебаниях для дискретного управления



*Рис. 52. Сравнение процесс по управлению  $u$  при сложных колебаниях для дискретное системы*

Анализируя динамику процессов замкнутой системы с построенной цифровой многоцелевой структурой управления при включенном и выключенном цифровом фильтре, видим, что для данного режима с движения маятника фильтр подавляет колебания по углу от  $3^\circ$  до  $0.2^\circ$ , а по управлению амплитуда колебаний остаётся примерно на том же уровне.

Тогда можно сделать вывод, что в данном режиме функционирования построенный цифровой регулятор подавляет колебания маятника до небольших величин, увеличивая при этом затрачиваемые ресурсы на управление.

## Выводы

В ходе проделанной работы был исследован вертикальный маятник с вращающимся основанием (маятник Фуруты) и для него изучены вопросы построения стабилизирующих законов управления. В отличие от известных подходов, синтез обратной связи осуществлен на множестве законов управления с многоцелевой структурой. При выборе ее элементов определяющую роль играли два режима движения системы. Первым из них является собственное движение маятника, которое возникает при появлении ненулевого начального отклонения маятника от вертикали. Вторым режим задается воздействием на систему внешнего аддитивного возмущения колебательного характера. На основе непрерывных законов управления было осуществлено построение цифрового регулятора для рассматриваемой динамической системы.

Для функционирования в первом режиме с учетом нелинейности исходной системы была осуществлена настройка базового закона управления и асимптотического наблюдателя в непрерывном и дискретном времени.

Для второго режима в непрерывном и дискретном случаях выполнен синтез динамического фильтра, который входит в многоцелевую структуру, при этом минимизируя отклонения управления, возникающие при воздействии на систему внешнего возмущения. При этом обеспечивается ограниченность ресурсов привода, управляющего системой.

Для подтверждения работоспособности и эффективности принятого подхода выполнены практические расчеты, на основании которых проведено имитационное моделирование динамики замкнутой системы с синтезированной многоцелевой структурой управления. Также проведено моделирование для системы, управляемой цифровым регулятором. Результаты расчетов и моделирования свидетельствуют о достижении поставленных целей работы.

## Заключение

В результате проведенного исследования получены следующие результаты, которые выносятся на защиту:

1. Сформулирована задача синтеза многоцелевой структуры управления маятником Фуруты в непрерывном и дискретном времени, предложены способы нахождения ее элементов с их последующей настройкой в смысле обеспечения желаемой динамики процессов.
2. Разработан имитационно-моделирующий комплекс в среде MATLAB-Simulink для проведения исследований и экспериментов.
3. Выполнен синтез многоцелевой структуры непрерывного управления. Найденное численное решение данной задачи удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к желаемому результату.
4. Проведено численное решение задачи синтеза цифрового многоцелевого регулятора для маятника Фуруты, которое показало работоспособность и эффективность предложенного подхода.

## Список литературы

1. Веремей Е. И. Линейные системы с обратной связью. СПб.: Лань, 2013. – 448 с.
2. Веремей Е. И. Среднеквадратичная многоцелевая оптимизация. СПб: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2016. – 408 с.
3. Веремей Е. И., Сотникова М. В. Управление с прогнозирующими моделями. Воронеж: Изд-во "Научная книга", 2016. – 214 с.
4. Arnolds B. M. Identification and control of the Rotary Inverted Pendulum. – Technical Traineeship Report, University of Eindhoven, 2003. – DCT report No: 2003.100. – 60 p.
5. Furuta K., Iwase M. Swing-up time analysis of pendulum // Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences. – 2004. – Vol. 52, № 3. – P. 153–163.
6. Khalil H. K. Nonlinear Systems. Third edition. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2002.
7. Veremey E. I. Separate Filtering Correction of Observer-Based Marine Positioning Control Laws, International Journal of Control. – August 2017, Volume 90, Issue 8, pp. 1561–1575.
8. Evgeny I. Veremey. Optimization of filtering correctors for autopilot control laws with special structures // Optimal Control Applications and Methods. Volume 37, Issue 2, pp. 323–339.
9. Пак Н. В. Управление маятником Фуруты с использованием обратной связи с многоцелевой структурой. – Текст: электронный // Архив открытого доступа Санкт-Петербургского государственного университета. – URL: <http://hdl.handle.net/11701/25985> (дата обращения: 01.05.2021).



## Приложение 1

Код для реализации нелинейной математической модели (2) – (3) маятника Фуруты:

```
function [ dx ] = eqns_of_mayatnik( x )
global L0 l1 m1 J0 J1 C0 C1 Ra Kt Kb Ku g;
g=9.8;
beta=x(2);
wal=x(3);
wb=x(4);
u=x(5);
M0=[J0+m1*L0^2+m1*l1^2*(sin(beta))^2, -m1*L0*l1*cos(beta);
    -m1*L0*l1*cos(beta), J1+m1*l1^2];
M1=[C0+Kt*Kb/Ra+0.5*m1*l1^2*wb*sin(2*beta),
    m1*L0*l1*wb*sin(beta)+0.5*m1*l1^2*wal*sin(2*beta);
    -0.5*m1*l1^2*wal*sin(2*beta), C1];
M2=[0; -m1*g*l1*sin(beta)];
T=[Kt*Ku/Ra; 0];
dx=[x(3);x(4);inv(M0)*(-M1*x(3:4)-M2+T*u)];
end
```

## Приложение 2

Код для реализации многоцелевой структуры управления маятником Фуруты, непрерывный регулятор:

```
T=3/40;

init=input('Initial Condition:\n','s');
init_state=str2num(init);
init_state_z=init_state([3 2 4]);

times=input('Time of simulation:\n');
Corrector_turn=input('Turn on corrector:\n');
ro=input('Put root of denominator of F(s):\n');
w=0.5;
gamma=[0.1;0;1];
L0=0.1370;
l1=0.1572;
m1=0.0319;
J0=0.008591;
J1=0.000217;
C0=0.006408;
C1=0.000158;
Ra=0.9;
Kt=0.0706;
Kb=0.0707;
Ku=0.0636;
g=9.8;
A=[0 -g/L0 C1/(m1*L0*l1); 0 0 1;0 0 0];
b=[(J0+m1*l1^2)/(m1*L0*l1);0 ;1];
C=[1 0 0;0 1 0];
% D=[0;0];

% Поиск K
base_eig=input('Enter base eigenvalue:\n');
K_obs=-place(A,b,base_eig);

% Поиск h
new_eig=input('Enter eigenvalue of observer:\n');
h=place(A',C',new_eig);
h=h';

% Передаточная функция корректора от входа d к выходу
(x(10-z(1);x(2)-z(2)) (от d к
% dzeta, F_d_dzeta(s))
```

```

Aa=[-h(1,1) A(1,2)-h(1,2) A(1,3);-h(2,1) -h(2,2) 1;-h(3,1)
-h(3,2) 0];
sys=ss(Aa,gamma,C,0);
sys=tf(sys);

% Передаточная функция замкнутого наблюдателя (от dzeta и
ksi к tau, F_0(s))
Az=[b(1)*K_obs(1) A(1,2)+b(1)*K_obs(2)
A(1,3)+b(1)*K_obs(3); 0 0 1; K_obs(1) K_obs(2) K_obs(3)];
sys_z=ss(Az,[h b],[0 1 0],[0 1 0]);
sys_z=tf(sys_z);

% Подставляем в передаточную функцию наблюдателя j*0.5
P_11=sys_z.Numerator(1);
P_21=sys_z.Numerator(2);
P_31=sys_z.Numerator(3);

P_11=cell2mat(P_11);
P_21=cell2mat(P_21);
P_31=cell2mat(P_31);

P_11=polyval(P_11,1i*w);
P_21=polyval(P_21,1i*w);
P_31=polyval(P_31,1i*w);

P_Known=[-P_11/P_31 -P_21/P_31];

P_Desired_Denom=poly(ro);
P_Desired_Denom=polyval(P_Desired_Denom,w*1i);

%-----
syms b1 b2 b3 b4 real
P_Desired_Numerator(b1,b2,b3,b4)=[-b2*w^2+b1*w*1i -
b4*w^2+b3*w*1i];
P_Desired(b1,b2,b3,b4)=P_Desired_Numerator./P_De-
sired_Denom;

[S1,S2,S3,S4]=solve( real(P_Known)==real(P_De-
sired), imag(P_Known)==imag(P_Desired), [b1,b2,b3,b4]);
b11=double(S1);
b22=double(S2);
b33=double(S3);
b44=double(S4);

F_Num=[b22 b11 0;b44 b33 0];
F_Denom=poly(ro);

%-----

D_Num=sys.Numerator;

```

```
D_Denom=sys.Denominator;
D_Num=cell2mat(D_Num);
D_Denom=cell2mat(D_Denom);

set_param('MPS_model/Pendulum/beta','Open','On')
set_param('MPS_model/Pendulum/beta','SaveToWorkspace','On')
set_param('MPS_model/Pendulum/beta','DataFormat','Structure
with time')
set_param('MPS_model/Pendulum/beta','LimitData-
Points','off')
set_param('MPS_model/Pendulum/beta','SaveName','Beta')
set_param('MPS_model/Pendulum/Integrator','InitialCondi-
tion',init);
opts = simset('AbsTol',1e-7,'Solver','ode23',...
'SrcWorkspace','current');
sim('MPS_model',[0 times],opts);
```

## Приложение 3

Код для реализации многоцелевой структуры управления маятником Фуруты, цифровой регулятор:

```
T=3/40;

init=input('Initial Condition:\n','s');
init_state=str2num(init);
init_state_z=init_state([3 2 4]);
ts=input('Sample time:\n');

times=input('Time of simulation:\n');
Corrector_turn=input('Turn on corrector:\n');
ro=input('Put root of denominator of F(s):\n');
w=0.5;
gamma=[0.1;0;1];
L0=0.1370;
l1=0.1572;
m1=0.0319;
J0=0.008591;
J1=0.000217;
C0=0.006408;
C1=0.000158;
Ra=0.9;
Kt=0.0706;
Kb=0.0707;
Ku=0.0636;
g=9.8;
A=[0 -g/L0 C1/(m1*L0*l1); 0 0 1;0 0 0];
b=[(J0+m1*l1^2)/(m1*L0*l1);0 ;1];
C=[1 0 0;0 1 0];
D=[0;0];

%Dискретная линейная система
sys_d=c2d(ss(A,b,C,D),ts);
A_d=sys_d.A;
b_d=sys_d.B;
C_d=sys_d.C;
D_d=sys_d.D;

% Поиск K
base_eig=input('Enter base eigenvalue:\n');
K_obs=-place(A,b,base_eig);
%---Дискретное-----
sys_t=c2d(ss(A+b*K_obs,[0;0;0],C,D),ts);
eig_t=eig(sys_t.A);
```

```

K_obs=-place(A_d,b_d,eig_t);

% Поиск h
new_eig=input('Enter eigenvalue of observer:\n');
h=place(A',C',new_eig);
h=h';
%---Дискретное-----
sys_t=c2d(ss(A-h*C,[b h],eye(3),zeros(3)),ts);
eig_t=eig(sys_t.A);
h=place(A_d',C_d',eig_t);
h=h';

% Передаточная функция корректора от входа d к выходу
(x(10-z(1);x(2)-z(2)) (от d к
% dzeta, F_d_dzeta(s))
Aa=[-h(1,1) A_d(1,2)-h(1,2) A_d(1,3);-h(2,1) -h(2,2) 1;-
h(3,1) -h(3,2) 0];
sys=dss(Aa,gamma,C_d,0,eye(3),ts);
sys=tf(sys);

% Передаточная функция замкнутого наблюдателя (от dzeta и
ksi к tau, F_0(s))
Az=[b_d(1)*K_obs(1) A_d(1,2)+b_d(1)*K_obs(2)
A_d(1,3)+b_d(1)*K_obs(3); 0 0 1; K_obs(1) K_obs(2)
K_obs(3)];
sys_z=dss(Az,[h b_d],[0 1 0],[0 1 0],eye(3),ts);
sys_z=tf(sys_z);

% Подставляем в передаточную функцию наблюдателя j*0.5
P_11=sys_z.Numerator(1);
P_21=sys_z.Numerator(2);
P_31=sys_z.Numerator(3);

P_11=cell2mat(P_11);
P_21=cell2mat(P_21);
P_31=cell2mat(P_31);

P_11=polyval(P_11,exp(1i*w));
P_21=polyval(P_21,exp(1i*w));
P_31=polyval(P_31,exp(1i*w));

P_Known=[-P_11/P_31 -P_21/P_31];

P_Desired_Denom=poly(ro);
P_Desired_Denom=polyval(P_Desired_Denom,exp(w*1i));

%-----
syms b1 b2 b3 b4 real

```

```

P_Desired_Numerat-
tor(b1,b2,b3,b4)=[b2*(exp(1i*w))^2+b1*exp(w*1i)
b4*(exp(1i*w))^2+b3*exp(w*1i)];
P_Desired(b1,b2,b3,b4)=P_Desired_Numerator./P_De-
sired_Denom;

[S1,S2,S3,S4]=solve( real(P_Known)==real(P_De-
sired),imag(P_Known)==imag(P_Desired),[b1,b2,b3,b4]);
b11=double(S1);
b22=double(S2);
b33=double(S3);
b44=double(S4);

F_Num=[b22 b11 0;b44 b33 0];
F_Denom=poly(ro);

%-----

D_Num=sys.Numerator;
D_Denom=sys.Denominator;
D_Num=cell2mat(D_Num);
D_Denom=cell2mat(D_Denom);
%-----

set_param('Model_discrete/Pendulum/beta','Open','On')
set_param('Model_discrete/Pendulum/beta','SaveToWork-
space','On')
set_param('Model_discrete/Pendulum/beta','DataForm-
at','Structure with time')
set_param('Model_discrete/Pendulum/beta','LimitData-
Points','off')
set_param('Model_discrete/Pendulum/beta','SaveName','Beta')
set_param('Model_discrete/Pendulum/Integrator','InitialCon-
dition',init);
opts = simset('AbsTol',1e-7,'Solver','ode23',...
'SrcWorkspace','current');
sim('Model_discrete',[0 times],opts);

```