

Санкт-Петербургский государственный университет

***ЖУКОВА Наталья Игоревна***

**Выпускная квалификационная работа**

***Теория и практика эффектов дисконтирования***

Уровень образования: **бакалавриат**

Направление: **01.03.02 «Прикладная математика и информатика»**,

Основная образовательная программа: **СВ.5004.2017 «Прикладная математика и информатика»**

Профиль: исследование операций и принятие решений в задачах  
оптимизации, управления и экономики

Научный руководитель:

доцент кафедры Исследования  
операций, кандидат физико-  
математических наук  
Бухвалова В.В.

Рецензент:

Руководитель направления  
Отдел обеспечения  
деятельности и контроля  
эффективности Департамент  
ИТ блока «Корпоративно-  
инвестиционный бизнес»  
ПАО Сбербанк  
Ковальчук А.В.

Санкт-Петербург

2021

Saint Petersburg State University

*ZHUKOVA Nataliia Igorevna*

**Final qualifying work**

*Theory and practice of discounting effects*

Education level: **bachelor**

Course: **01.03.02 «Applied Mathematics and Computer Science»**

Basic educational program: **CB.5004.2017 «Applied Mathematics and Computer Science»**

Profile: Operational Research and Decision Making in Optimization, Control and Economics Problems

Scientific Supervisor:

Associate Professor of the  
Department of Operations  
Research, Candidate of Physical  
and Mathematical Sciences

Bukhvalova V.V.

Reviewer:

Head of Direction Department  
of Operations Support and  
Efficiency Control IT  
Department of the Corporate  
and Investment Business Unit  
PJSC Sberbank

Kovalchuk A.V.

Saint Petersburg  
2021

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>1 Базовые функции дисконтирования</b>	<b>2</b>
<b>2 Основные классы функций дисконтирования</b>	<b>4</b>
<b>3 Эффект задержки</b>	<b>8</b>
<b>4 Эксперимент Хэвон Юна</b>	<b>9</b>
4.1 Шаблоны поведения . . . . .	9
4.2 Структура анализа. . . . .	9
4.3 Эксперимент . . . . .	11
<b>5 Опрос</b>	<b>13</b>
5.1 Участники . . . . .	13
5.2 Структура опроса . . . . .	13
5.3 Обратная связь с участниками опроса . . . . .	14
5.4 Общий анализ результатов нового опроса . . . . .	14
5.5 Результаты 2021 года против результатов 2019 года. . . . .	17
5.6 Распределение по подгруппам математиков в сравнении с медиками. . . . .	18
5.7 Распределение по подгруппам женщин в сравнении с мужчинами. . . . .	18
<b>6 Заключение</b>	<b>19</b>
<b>Литература</b>	<b>20</b>
<b>Приложение</b>	<b>21</b>

# Введение

В настоящее время тема дисконтирования продолжает быть актуальной. Ее исследуют с теоретической стороны, рассматривая функции дисконтирования, их свойства, вводя новые обобщенные классы и абстракции, доказывая теоремы. Примером подобной работы является статья [6].

С развитием социологии и психологии практическая сторона темы дисконтирования тоже не теряет к себе интереса и продолжает развиваться. Рассматриваются функции дисконтирования заложенные в самих людях. Задаются вопросы о том, как индивид видит изменение вознаграждения во времени, влияет ли его окружающая среда, пол, возраст. Строятся модели лучше всего описывающие поведение людей, как в статье [4]. Собирается все больше данных за счет множества опросов проводимых по всему миру, ведь это самый распространенный способ сбора нужной информации и удобный для дальнейшего анализа, как в статье [7].

В работе рассматриваются различные функции дисконтирования, их виды и свойства; анализируются модели поведения людей и оцениваются их внутренние функции дисконтирования. Работа имеет следующую структуру. В разделе 1 приведено определение стационарной функции дисконтирования. Представлены основные функции, которые используются в книгах и статьях о дисконтировании [1],[4],[5],[6]. В разделе 2 определяются основные классы функций дисконтирования и их свойства. Приведены примеры, демонстрирующие введенные понятия. Приведено доказательство теоремы о супераддитивной динамической функции дисконтирования. В разделе 3 обсуждаются понятия эффектов задержки и немедленности, введенных в работе [6]. Раздел 4 посвящен описанию эксперимента Юна [4], проведенного в 2020 году. Целью работы Юна был подбор функции дисконтирования лучше всего описывающей результаты его эксперимента. В разделе 5 описывается новый опрос, который был проведен в начале 2021 года. Целью опроса было изучить, как Covid-19 повлиял на принятие людьми финансовых решений. Для проведения опроса использовались Google Forms. Для анализа ответов была использована программа на Python. Результаты опроса 2021 года сравниваются с результатами идентичного опроса 2019 года [2],[3]. Впервые в опросе 2021 года анализируются различия между ответами в разных профессиональных группах (математики и медики), а также между ответами женщин и мужчин.

## 1 Базовые функции дисконтирования

Эта глава посвящена рассмотрению стационарных функций дисконтирования. Приведены примеры базовых функций этого класса. В этой главе и далее используется таблица функций дисконтирования (таб. 1), в которой приведены функции дисконтирования, рассматриваемые в статьях на эту тему [1][4][5].

**Определение 1.** *Стационарная функция дисконтирования (stationary discount function)* — непрерывная строго убывающая функция от одной переменной  $a$  с вещественными значениями из интервала  $[0, 1]$ :

$$F(a) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [0, 1], \quad (1)$$

для которой выполняется условие  $F(0) = 1$ .

Переменная  $a$  является длиной временного промежутка. В банковской практике и финансовых моделях принято измерять эту переменную в годах.

Ниже перечислены основные виды стационарных функций дисконтирования, которые используются в теории и практике финансовых вычислений.

*Дисконтирование по простому проценту (Н2)* определяется формулой:

$$F(a) = \frac{1}{1 + ra},$$

где  $r$  — процентная ставка. Обычно применяется при  $a < 1$ .

*Банковское дисконтирование [1] (D)* определяется формулой:

$$F(a) = 1 - da,$$

где  $d$  — учетная ставка банка. Применяется при учете векселей, когда  $a < 1$ .

Дисконтирование по сложному проценту (**QH**) определяется формулой:

$$F(a) = \frac{1}{(1+r)^a},$$

где  $r$  — процентная ставка. Часто применяется в банковской практике и финансовых моделях.

Дисконтирование по непрерывному проценту (**ES**) определяется формулой:

$$F(a) = e^{-ra},$$

где  $r$  — процентная ставка. Применяется в финансовом моделировании.

Далее в таб. 1 приведен полный (на настоящий момент) список функций дисконтирования, который встречается в работах посвященных данной тематике. В частности, функция дисконтирования **FC** была предложена только в работе [5] в 2010 году.

Таблица 1: Функции дисконтирования

Обозначение	Формула	Стационарная	Свойства
<b>D</b>	$F(a) = 1 - da, a < 1, 0 < d < 1$	+	супераддитивна
<b>E</b>	$F(a) = \frac{1}{(1+r)^a}, 0 < r < 1$	+	аддитивна
<b>ES</b>	$F(a) = \left(\frac{1}{e^a}\right)^\beta, \beta > 0$	+	аддитивна
<b>QH</b>	$F(a) = \frac{\beta}{(1+r)^a}, 0 < r < 1, \beta > 0$	-	
<b>H1</b>	$F(a) = \frac{1}{a}, 0 < a$	-	
<b>H2</b>	$F(a) = \frac{1}{1+\alpha a}, \alpha > 0$	+	субаддитивна
<b>H3</b>	$F(a) = \frac{1}{1+\alpha a^y}, \alpha > 0$	+	-
<b>H4</b>	$F(a) = \left(\frac{1}{a}\right)^p, p > 0, a > 0$	-	
<b>H5</b>	$F(a) = \left(\frac{1}{1+\alpha a}\right)^{\beta/\alpha}, \alpha > 0, \beta > 0$	+	субаддитивна
<b>W</b>	$F(a) = \left(\frac{1}{e^{av}}\right)^\beta, \beta > 0, 0 < v < 1$	+	аддитивна
<b>FC</b>	$F(y, a) = \frac{1}{\beta[1 - (1-\theta)ra]^{1/(1-\theta)} - b/y},$ $\beta > 0, \theta > 0, 0 < r < 1$	-	
<b>CS</b>	$F(a) = e^{-(\alpha a)^\beta}, 0 < \beta < 1, 0 < \alpha < 1$	+	субаддитивна
<b>QH</b>	$F(a) = \begin{cases} \beta \delta^a, & \text{if } a > 0 \\ 1, & \text{if } a = 0 \end{cases}, 0 < \beta < 1, 0 < \delta < 1$	+	субаддитивна

## 2 Основные классы функций дисконтирования

В этой главе будут определены основные классы функций дисконтирования и приведены их примеры.

**Определение 2.** Стационарная функция дисконтирования называется *аддитивной* (*additive*), если она удовлетворяет уравнению:

$$F(a + b) = F(a)F(b) \text{ при } a > 0, b > 0. \quad (2)$$

**Пример 1.** Покажем, что функция **Е** является аддитивной,  $F(a) = \frac{1}{(1+r)^a}$ :

$$F(a)F(b) = \frac{1}{(1+r)^a(1+r)^b} = \frac{1}{(1+r)^{a+b}} = F(a+b).$$

**Определение 3.** Стационарная функция дисконтирования называется *субаддитивной* (*subadditive*), если она удовлетворяет неравенству:

$$F(a + b) > F(a)F(b) \text{ при } a > 0, b > 0. \quad (3)$$

**Пример 2.** Покажем, что функция **Н2** является субаддитивной,  $F(a) = \frac{1}{1+ra}$ :

$$F(a)F(b) = \frac{1}{(1+ra)(1+rb)} = \frac{1}{(1+r(a+b)+r^2ab)} < \frac{1}{1+r(a+b)} = F(a+b)$$

**Определение 4.** Стационарная функция дисконтирования называется *супераддитивной* (*superadditive*), если она удовлетворяет неравенству:

$$F(a + b) < F(a)F(b) \text{ при } a > 0, b > 0. \quad (4)$$

**Пример 3.** Покажем, что функция **Д** является супераддитивной,  $F(a) = 1 - da$ :

$$F(a)F(b) = (1 - da)(1 - db) = 1 - d(a+b) + d^2ab > 1 - d(a+b) = F(a+b)$$

**Определение 5.** Стационарная функция дисконтирования называется *субаддитивной второго порядка* (*subadditive of the second order*), если при  $b < c$  она удовлетворяет неравенству:

$$F(c)F(a+b) < F(b)F(a+c) \text{ при } a > 0, b > 0, c > 0. \quad (5)$$

В частности, если  $b = 0$ , то

$$F(c)F(a) < F(a+c) \text{ при } a > 0, c > 0,$$

что означает, что функция является субаддитивной.

**Пример 4.** Покажем, что функция **Н2** является субаддитивной второго порядка,  $F(a) = \frac{1}{1+ra}$ :

$$\begin{aligned} F(c)F(a+b) &= \frac{1}{(1+rc)(1+ra+rb)} = \frac{1}{1+rc+rb+ra+r^2ac+r^2bc} < \\ &< \frac{1}{1+ra+rb+rc+r^2ab+r^2bc} = \frac{1}{(1+rb)(1+ra+rc)} = F(b)F(a+c) \end{aligned}$$

**Пример 5.** Покажем, что функция **Н3** не обладает ни одним из перечисленных выше свойств,  $F(a) = \frac{1}{1+ra^y}$ :

$$F(a)F(b) = \frac{1}{(1+ra^y)(1+rb^y)} = \frac{1}{1+ra^y+rb^y+r^2(ab)^y} ? \frac{1}{1+r(a+b)^y} = F(a+b)$$

$$F(c)F(a+b) = \frac{1}{(1+rc^y)(1+r(a+b)^y)} =$$

$$= \frac{1}{1 + rc^y + r(a+b)^y + r^2(ac+bc)^y} ? \frac{1}{1 + rb^y + r(a+c)^y + r^2(ab+bc)^y} = F(b)F(a+c)$$

**Определение 6.** Динамическая функция дисконтирования (*dynamic discount function*) — непрерывная функция от двух переменных  $t$  и  $a$  с вещественными значениями из интервала  $[0, 1]$ :

$$F(t, a) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow [0, 1], \quad (6)$$

для которой выполняются условия  $F(t, 0) = 1$  и  $F(t, \cdot)$  строго убывает для каждого  $t$ .

В определении 6  $t$  и  $a$  представляют переменную «время», где  $t$  относится к моменту времени (дате или календарному времени), а  $a$  относится к времени как интервалу. Для обозначения длины интервала  $a$  будем использовать обозначение  $|a|$ .

**Определение 7.** Динамическая функция дисконтирования называется *аддитивной*, если ее значение для интервала  $[t, t + |a| + |b|]$  равно произведению значений для подинтервалов:

$$F(t, a + b) = F(t, a)F(t + |a|, b) \text{ при } t \in \mathbb{R}, a > 0, b > 0. \quad (7)$$

**Определение 8.** Динамическая функция дисконтирования называется *субаддитивной*, если она удовлетворяет неравенству:

$$F(t, a + b) > F(t, a)F(t + |a|, b) \text{ при } t \in \mathbb{R}, a > 0, b > 0. \quad (8)$$

**Определение 9.** Динамическая функция дисконтирования называется *супераддитивной*, если она удовлетворяет неравенству:

$$F(t, a + b) < F(t, a)F(t + |a|, b) \text{ при } t \in \mathbb{R}, a > 0, b > 0. \quad (9)$$

**Определение 10.** Динамическая функция дисконтирования называется *субаддитивной второго порядка*, если при  $t < s$  и  $s + |c| < t + |a|$ , она удовлетворяет неравенству:

$$F(t, a)F(s, c + b) < F(s, c)F(t, a + b). \quad (10)$$

Если, в частности,  $s = t + |a|$  (что означает  $c = 0$ ), то:

$$F(t, a)F(t + |a|, b) < F(t, a + b)$$

что является субаддитивностью.

**Определение 11.** Пусть  $x$  и  $y$  ценности, полученные в моменты времени  $t$  и  $s$  соответственно. Для стационарной функции дисконтирования  $F(a)$  мы будем говорить, что эти ценности эквивалентны (обозначаем  $\sim$ ):

$$(x, s) \sim (y, t), \text{ если } xF(s) = yF(t). \quad (11)$$

**Определение 12.** Пусть  $x$  и  $y$  ценности, полученные в моменты времени  $t$  и  $s$  соответственно. Для стационарной функции дисконтирования  $F(a)$  мы введем отношение порядка: будем говорить, что ценность  $x$  больше ценности  $y$  (обозначаем  $\succ$ ):

$$(x, s) \succ (y, t), \text{ если } xF(s) > yF(t), \quad (12)$$

будем говорить, что ценность  $x$  меньше ценности  $y$  (обозначаем  $\prec$ ):

$$(x, s) \prec (y, t), \text{ если } xF(s) < yF(t). \quad (13)$$

**Определение 13.** Пусть  $x$  и  $y$  ценности, полученные в моменты времени  $s + |b|$  и  $s + |b| + |c|$  соответственно. Для динамической функции дисконтирования  $F(t, a)$  мы будем говорить, что эти ценности эквивалентны (обозначаем  $\sim$ ):

$$(x, s + |b|) \sim (y, s + |b| + |c|), \text{ если } xF(s, b) = yF(s, b + c). \quad (14)$$

**Определение 14.** Пусть  $x$  и  $y$  ценности, полученные в моменты времени  $s + |b|$  и  $s + |b| + |c|$  соответственно. Для динамической функции дисконтирования  $F(t, a)$  мы введем отношение порядка: будем говорить, что ценность  $x$  больше ценности  $y$  (обозначаем  $\succ$ ):

$$(x, s + |b|) \succ (y, s + |b| + |c|), \text{ если } xF(s, b) > yF(s, b + c), \quad (15)$$

будем говорить, что ценность  $x$  меньше ценности  $y$  (обозначаем  $\prec$ ):

$$(x, s + |b|) \prec (y, s + |b| + |c|), \quad \text{если} \quad xF(s, b) < yF(s, b + c). \quad (16)$$

**Замечание.** В ряде работ неравенства, представленные в определениях субаддитивности и супераддитивности, имеют вид дробных неравенств. Например:

$$\frac{F(a+b)}{F(b)} < \frac{F(a+c)}{F(c)} \quad \text{при} \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0.$$

В терминах отношения порядка справедлива следующая теорема:

**Теорема 1.** *Следующие три условия эквивалентны:*

1.  $F(t, a)$  субаддитивна.
2. При  $t$  и  $a > 0, b > 0$ , если  $(x, t) \sim (y, t + |a|)$  и  $(y, t + |a|) \sim (z, t + |a| + |b|)$ , то  $(x, t) \prec (z, t + |a| + |b|)$ .
3. При  $t$  и  $a > 0, b > 0$  существуют  $x, y$  и  $z$  такие, что  $(x, t) \succ (y, t + |a|)$  и  $(y, t + |a|) \succ (z, t + |a| + |b|)$ , но  $(x, t) \prec (z, t + |a| + |b|)$ .

Доказательство теоремы 1 приведено в статье [6].

Для супераддитивной функции можно доказать аналогичную теорему.

**Теорема 2.** *Следующие три условия эквивалентны:*

1.  $F(t, a)$  супераддитивна.
2. При  $t$  и  $a > 0, b > 0$ , если  $(x, t) \sim (y, t + |a|)$  и  $(y, t + |a|) \sim (z, t + |a| + |b|)$ , то  $(x, t) \succ (z, t + |a| + |b|)$ .
3. При  $t$  и  $a > 0, b > 0$  существуют  $x, y$  и  $z$  такие, что  $(x, t) \prec (y, t + |a|)$  и  $(y, t + |a|) \prec (z, t + |a| + |b|)$ , но  $(x, t) \succ (z, t + |a| + |b|)$ .

*Доказательство.* (1)  $\rightarrow$  (2)

Пусть  $F(t, a)$  супераддитивна.

Тогда, если  $(x, t) \sim (y, t + |a|)$ , то  $x = yF(t, a)$ . С другой стороны, если  $(y, t + |a|) \sim (z, t + |a| + |b|)$ , то  $y = yF(t + |a|, 0) = zF(t + |a|, b)$ . Получаем:

$$x = zF(t, a)F(t + |a|, b) > zF(t, a + b) \longrightarrow (x, t) \succ (z, t + |a| + |b|).$$

(2)  $\rightarrow$  (3)

Пусть выполняется пункт (2).

Покажем, что существуют пары вида:

$$(1 - \varepsilon, t), \left( \frac{1}{F(t, a)} - \delta, t + a \right), \left( \frac{1}{F(t, a)F(t + |a|, b)}, t + a + b \right), \quad (17)$$

для которых выполняется условие пункта (3). Величины  $\varepsilon$  и  $\delta$  выберем достаточно малыми, чтобы выполнялись неравенства:

$$\delta F(t, a) < \varepsilon < 1 - \frac{F(t, a + b)}{F(t, a)F(t + |a|, b)}. \quad (18)$$

Из (2) пункта мы знаем, что

$$zF(t, a)F(t + |a|, b) > zF(t, a + b),$$

то есть

$$1 - \frac{F(t, a + b)}{F(t, a)F(t + |a|, b)} > 0.$$

Из последнего неравенства следует, что такие  $\varepsilon$  и  $\delta$  существуют.

Докажем, что для предложенных пар выполняется условие (3). Выполняются следующие неравенства отношения порядка, которые эквивалентны неравенствам 18:

$$1 - \varepsilon < \left( \frac{1}{F(t, a)} - \delta \right) F(t, a) \iff \delta F(t, a) < \varepsilon,$$

$$\frac{1}{F(t, a)} - \delta < \left( \frac{1}{F(t, a)F(t + |a|, b)} \right) F(t + |a|, b) \iff 0 < \delta,$$

$$1 - \varepsilon > \left( \frac{1}{F(t, a)F(t + |a|, b)} \right) F(t, a + b) \iff 1 - \frac{F(t, a + b)}{F(t, a)F(t + |a|, b)} > \varepsilon.$$

Значит мы нашли подходящие

$$x = 1 - \varepsilon, \quad y = \frac{1}{F(t, a)} - \delta, \quad z = \frac{1}{F(t, a)F(t + |a|, b)}.$$

(3)  $\rightarrow$  (1)

Пусть выполнено условие пункта (3).

Нам нужно доказать, что выполнено неравенство:

$$F(t, a)F(t + |a|, b) > F(t, a + b).$$

Из пункта (3) следует существование таких  $x, y, z$ :

$$x < yF(t, a), \quad y < zF(t + |a|, b), \quad x > zF(t, a + b). \quad (19)$$

Преобразуем неравенства 21:

$$x > zF(t, a + b) > \frac{yF(t, a + b)}{F(t + |a|, b)} > \frac{xF(t, a + b)}{F(t + |a|, b)F(t, a)}.$$

Откуда следует, что функция  $F(t, a)$  супераддитивна:

$$F(t, a)F(t + |a|, b) > F(t, a + b).$$

Теорема доказана. □

**Пояснения.** Условие 2 означает, что для субаддитивных и супераддитивных функций не выполняется условие транзитивности для отношения эквивалентности. Условие 3 означает, что для субаддитивных и супераддитивных функций не выполняется условие транзитивности для отношения порядка.

**Утверждение.** Для аддитивной функции  $F(t, a)$  выполняются следующие свойства, доказательство которых аналогично доказательству теоремы 2 (первая часть):

1. При  $t$  и  $a > 0, b > 0$ , если  $(x, t) \sim (y, t + |a|)$  и  $(y, t + |a|) \sim (z, t + |a| + |b|)$ , то  $(x, t) \sim (z, t + |a| + |b|)$ .
2. При  $t$  и  $a > 0, b > 0$ , если  $(x, t) \prec (y, t + |a|)$  и  $(y, t + |a|) \prec (z, t + |a| + |b|)$ , то  $(x, t) \prec (z, t + |a| + |b|)$ .
3. При  $t$  и  $a > 0, b > 0$ , если  $(x, t) \succ (y, t + |a|)$  и  $(y, t + |a|) \succ (z, t + |a| + |b|)$ , то  $(x, t) \succ (z, t + |a| + |b|)$ .

**Пример 6.** Пусть лицо, принимающее решение (ЛПР), должно сделать выбор в каждой из трех следующих ситуаций:

1. 1000 рублей через месяц и 1500 рублей через 2 месяца,
2. 1500 рублей за 2 месяца и 2000 рублей через 4 месяца,

3. 1000 рублей через месяц и 2000 рублей через 4 месяца.

Обозначим выбор меньшей суммы (получаемой раньше), здесь и далее,  $SS$ , а большей —  $LL$ . В таб. 2 перечислены варианты выборов и свойства функций им соответствующих.

Таблица 2: Пример 6

Выбор 1	Выбор 2	Выбор 3	Свойство функции дисконтирования ЛПП
$SS$	$SS$	$SS$	транзитивная
$SS$	$SS$	$LL$	субаддитивная
$SS$	$LL$	$SS$	—
$LL$	$SS$	$SS$	—
$SS$	$LL$	$LL$	—
$LL$	$SS$	$LL$	—
$LL$	$LL$	$SS$	супераддитивная
$LL$	$LL$	$LL$	транзитивная

### 3 Эффект задержки

В этой главе рассматриваются эффекты задержки (delay effect) и немедленности (immediacy effect), введенные в [6]. Эти понятия демонстрируются на численных примерах. В данном контексте, под эффектом задержки понимается ситуация, когда ставка дисконтирования меньше для интервалов, которые начинаются позже.

Рассмотрение начнем с конкретного примера, в котором описывается эффект задержки.

**Пример 7.** Пусть лицо, принимающее решение (ЛПП), должно сделать выбор в каждой из двух ситуаций:

1. 500 рублей через месяц или 750 рублей через 2 месяца ( $t = 1$ ),
2. 500 рублей за 12 месяцев или 750 рублей через 13 месяцев ( $t + \varepsilon = 12$ ).

ЛПП может предпочесть  $SS$  в первом случае, и при этом  $LL$  во втором.

**Замечание.** Обратите внимание, что между двумя наградами существует разница в один месяц, но предпочтения лица, принимающего решение, изменились, что привело к несогласованности во времени, несовместимой с экспоненциальной функцией дисконтирования.

В примере 7 описана ситуация, когда в ближайший момент времени (через  $t = 1$  месяц) предпочтительнее вариант  $SS$ , а в отдаленный момент времени (через  $t + \varepsilon = 12$  месяцев) предпочтительнее вариант  $LL$ .

Обобщая этот пример, можно ввести следующее определение.

**Определение 15.** *Эффектом задержки* называется ситуация, при которой в ближайшем выборе предпочтительнее  $SS$ , тогда как в отдаленном —  $LL$ , при определенной задержке:

$$(x, s) \sim (y, t) \quad \text{влечет} \quad (x, s + \varepsilon) \prec (y, t + \varepsilon), \quad (20)$$

где  $x$  и  $y$  ( $x < y$ ) представляют собой ценности в моменты  $s$  и  $t$  соответственно, а  $\varepsilon > 0$  обозначает дополнительную задержку (в примере 7  $\varepsilon$  составляет 11 месяцев), применяемую к каждому вознаграждению.

**Замечание.** В определении мы используем  $(x, s) \sim (y, t)$ , то есть исходим из того, что ценности эквивалентны, так как иначе при наличии не соответствия во времени ЛПП всегда всегда может предпочесть  $SS$  (пример 3).

**Пример 8.** Пусть лицо, принимающее решение (ЛПП), должно сделать выбор в каждой из двух ситуаций:

1. 500 рублей через месяц и 501 рубль через 2 месяца ( $t = 1$ ),
2. 500 рублей за 12 месяцев и 501 рубль через 13 месяцев ( $t + \varepsilon = 12$ ).

Тогда ЛПП может предпочесть  $SS$  в обоих случаях.

**Определение 16.** В [6] рассматривается частный случай эффекта задержки — *эффект немедленности*, когда ближайший момент времени  $t = 0$  и для ЛПП, не зависимо от ценностей  $x$ ,  $y$  и величины задержки  $\varepsilon$ , предпочтительнее вариант  $SS$ :

$$(x, 0) \sim (y, t) \text{ влечет } (x, \varepsilon) \prec (y, t + \varepsilon), \quad (21)$$

где  $x$  и  $y$  ( $x < y$ ) представляют собой ценности в моменты  $s = 0$  и  $t$  соответственно, а  $\varepsilon > 0$  обозначает возрастающую задержку.

## 4 Эксперимент Хэвон Юна

В этом разделе описывается эксперимент и его результаты из статьи [4]. Автор этой статьи провел опрос (304 вопроса) среди 100 участников. Был проведен анализ соответствия полученных ответов с функциями дисконтирования (таб. 1):

- E** — экспоненциальная (exponential) функция,  $r$  — коэффициент дисконтирования;
- ES** — гиперболическая (hyperbolic) функция,  $r$  — коэффициент дисконтирования;
- CS** — квази-гиперболическая (quasi-hyperbolic) функция,  $\delta$  — коэффициент дисконтирования;
- QH** — функция постоянной чувствительности (constant-sensitivity),  $\alpha$  — коэффициент дисконтирования.

### 4.1 Шаблоны поведения

В статье [4] рассматриваются три шаблона поведения, для которых используются следующие обозначения:

- $LL - SS$ , когда выбирается  $LL$ , а затем ЛПП переключается на  $SS$  с уменьшением задержки;
- $LL - LL$ , который представляет согласованное во времени предпочтение  $LL$ ;
- $SS - SS$ , который представляет согласованное во времени предпочтение  $SS$ .

Вычисляются пропорции этих трех шаблонов поведения ( $LL - LL$ ,  $LL - SS$  и  $SS - SS$ ) в различных вопросах межвременного выбора и исследуется, как эти пропорции меняются в зависимости от коэффициента дисконтирования.

### 4.2 Структура анализа.

#### Серии вопросов

Чтобы выявить шаблоны  $LL - LL$ ,  $LL - SS$  и  $SS - SS$ , была создана серия вопросов межвременного выбора следующим образом. Есть выбор из двух вариантов вознаграждений ( $SS$  и  $LL$ ). Примеры подобного выбора представлены в Примере 7 в обоих пунктах. При фиксированных ценностях  $S_{value}$  и  $L_{value}$ , а также разнице в задержках  $\Delta = L_{delay} - S_{delay}$  (в Примере 7 это разница равна одному месяцу), изменяется задержка для более раннего, меньшего вознаграждения  $S_{delay}$ . Таким образом, получаем множество выборов, где каждый выбор соответствует определенному  $S_{delay}$ . В нашем эксперименте  $S_{delay}$  варьируется от 0 до 99.

Эта серия вопросов межвременного выбора может выявить одну из трех моделей выбора. Если ЛПП предпочитает  $LL$ , когда  $S_{delay}$  дольше (например, предпочитает 500 рублей через 13 месяцев, а не 300 рублей через 12), но предпочитает  $SS$ , когда  $S_{delay}$  становится короче (например, предпочитая 300 рублей через месяц, а не 500 рублей через 2 месяца), то оно демонстрирует шаблон  $LL - SS$ . С другой стороны, если ЛПП предпочитает  $SS$  для каждого выбора в серии, то оно демонстрирует образец  $SS - SS$ ; если она предпочитает  $LL$  для каждого варианта в серии, то она демонстрирует образец  $LL - LL$ .

Затем серия вопросов межвременного выбора была расширена, за счет варьирования отношения  $L_{value}$  к  $S_{value}$  и  $\Delta$ . Это дало трехмерное пространство параметров, как показано на рисунке 1. В этом пространстве параметров конкретная координата представляет собой один вопрос межвременного выбора.

Например, комбинация  $L_{value}/S_{value} = 750/500$  рублей,  $\Delta = 1$  месяц и  $S_{delay} = 12$  месяцев ( $T_1$  на рис. 1) представляет собой выбор между 500 рублей через 12 месяцев или 750 рублей через 13 месяцев. В тоже время  $L_{value}/S_{value} = 750/500$  рублей,  $\Delta = 1$  месяц и  $S_{delay} = 0$  месяцев ( $T_2$  на рис. 1) представляет собой выбор между 500 рублей сейчас и 750 рублей через 1 месяц.

В рамках этого трехмерного пространства параметров текущая структура анализа создала список всех возможных комбинаций вопросов межвременного выбора для масштабно-инвариантных моделей дисконтирования.

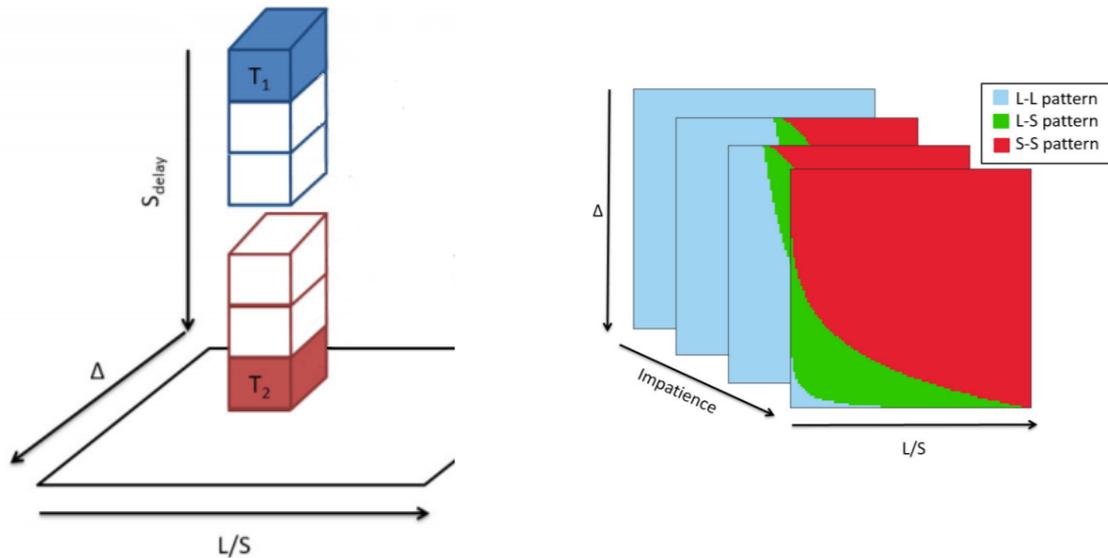


Рис. 1: Пространство параметров для списка вопросов межвременного выбора. Распределение шаблонов выбора. Источник [4].

**Замечание.** На рис. 1 используется сокращение  $LL - LL$ ,  $LL - SS$  и  $SS - SS$  до  $L - L$ ,  $L - S$ ,  $S - S$  соответственно. Не следует их путать с ранее введенными обозначениями  $SS$  и  $LL$  для вариантов выбора. Обозначение отношения ценностей  $L_{value}/S_{value}$  сокращено до  $L/S$ .

### Распределение ответов по шаблонам выбора

Затем каждая функция дисконтирования была использована для оценки каждого вопроса межвременного выбора по очереди.

Как обсуждалось ранее, каждая комбинация  $L_{value}/S_{value}$  и  $\Delta$  давала серию межвременных вопросов выбора (представленных в виде вертикально уложенных прямоугольников от  $T_1$  до  $T_2$ ). Ответы на эти вопросы выбора были отнесены к одному из трех шаблонов выбора ( $SS - SS$ ,  $LL - LL$  или  $LL - SS$ ), и эта процедура категоризации была повторена для всех комбинаций  $L_{value}/S_{value}$  и  $\Delta$  в пространстве параметров.

Таким образом, как показано на рисунке 1(справа), в результате этого процесса был получен двухмерный «срез», определяемый параметрами  $\Delta$  и  $L_{value}/S_{value}$ , с цветовым кодированием для трех шаблонов выбора (красный: шаблон  $SS - SS$ , синий: шаблон  $LL - LL$  и зеленый:  $LL - SS$ ) и с одним срезом для каждого значения коэффициента дисконтирования. Этот процесс категоризации повторялся для каждой функции с разными диапазонами для коэффициентов дисконтирования, создавая множество двумерных «срезов».

Затем взаимосвязь между коэффициентами дисконтирования каждой модели и шаблонами выбора была упрощена за счет выявления доли каждого шаблона выбора при различных

значениях коэффициентов дисконтирования, что представлено на следующих схемах.

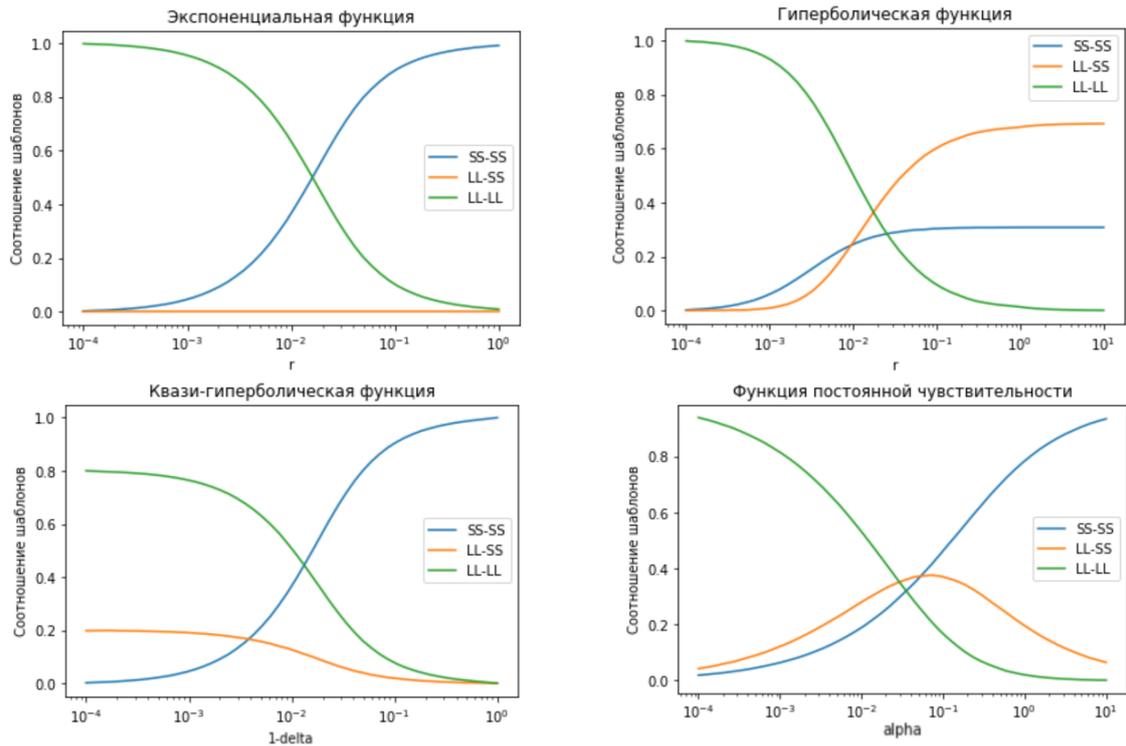


Рис. 2: Графики соотношения шаблонов при изменении коэффициентов дисконтирования.

**Замечание.** Для построения данных графиков была разработана программа на языке Python.

### 4.3 Эксперимент

В эксперименте Юна аппроксимировались поведенческие реакции (человеческие выборы) модельными результатами функций дисконтирования. Для каждого участника была измерена частота каждого из трех шаблонов выбора и был извлечен коэффициент дисконтирования участника как показатель нетерпения. Затем наблюдаемая доля каждого шаблона выбора была измерена, и полученный график был сравнен с графиками прогнозирования полученными по функциям дисконтирования (рис. 2).

#### Метод

В эксперименте приняло участие 100 человек из Amazon Mechanical Turk, средний диапазон доходов которых составлял 35 000–49 999 долларов. Участие было ограничено жителями США в возрасте 18 лет и старше.

Опрос включал в себя 304 вопроса межвременного выбора (288 основных вопросов и 16 вопросов для проверки внимания), представленных в случайном порядке. 16 вопросов для проверки внимания были распределены случайным образом по основному набору вопросов в виде пар выбора с очевидным ответом (например, «Вы бы предпочли 7,69 доллара через 196 дней или 10 долларов сегодня?»). 288 основных вопросов сформировали верхний и нижний уровни пространства параметров (см. рис. 1, верхняя и нижняя ячейки). Нижний уровень (144 вопроса) состоял из вариантов между меньшим, немедленным вариантом и большим, задержанным вариантом, а верхний уровень (144 вопроса) состоял из вопросов, в которых оба варианта были задержаны. 144 вопроса в каждом слое были сформированы путем пересечения 12 значений  $\Delta$  (в диапазоне от 28 до 336 дней) с 12 значениями  $S_{value}$  (в диапазоне от 0,77 до 9,23 доллара, с фиксированным  $L_{value}$  на уровне 10 долларов). Шаблоны выбора были определены путем сравнения ответов на вопросы верхнего уровня с соответствующими ответами на вопросы нижнего уровня.

## Результаты

288 межвременных выборов дали 144 модели выбора для каждого участника. В целом ответы участников демонстрировали следующее распределение паттернов: 46,24% —  $LL - LL$ , 33,03% —  $SS - SS$ , 18,62% —  $LL - SS$  и 2,11% —  $SS - LL$ . Коэффициент дисконтирования каждого участника был оценен, как показатель нетерпения. Была использована следующая формула сложной процентной ставки,  $PV = FV/(1+r)^n$ , и для каждой пары вариантов решалась формула для расчета коэффициента дисконтирования ( $r$ ), которая делает два варианта эквивалентными:

$$r = e^{\frac{\log(S_{value}) - \log(L_{value})}{S_{delay} - L_{delay}}} - 1.$$

Диаграммы разброса на рисунке 3 показывают наблюдаемые пропорции трех шаблонов выбора в зависимости от предполагаемого нетерпения. Регрессионные кривые LOESS ( $\alpha = 0.7$  и  $\lambda = 2$ ) были наложены на три графика рассеяния. На рисунке 4 сравниваются прогнозы моделирования для функции постоянной чувствительности с тремя регрессионными кривыми LOESS.

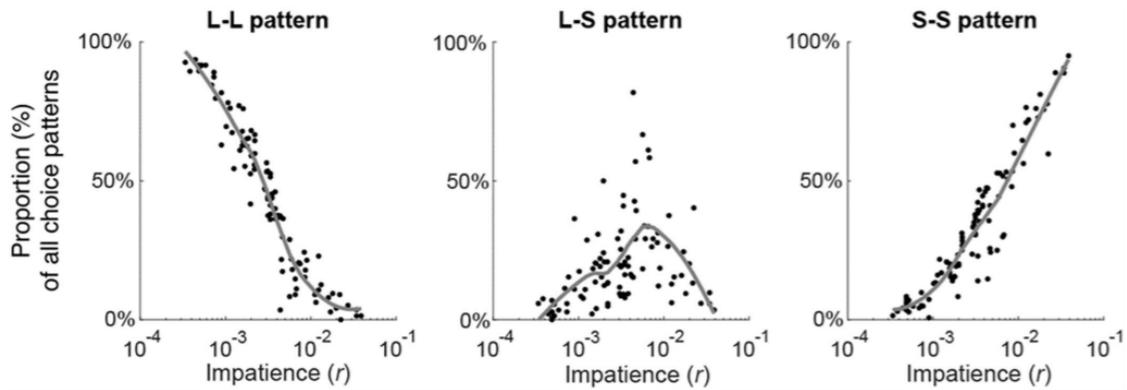


Рис. 3: Доля наблюдаемых шаблонов выбора как функция нетерпения участников. Источник [4].

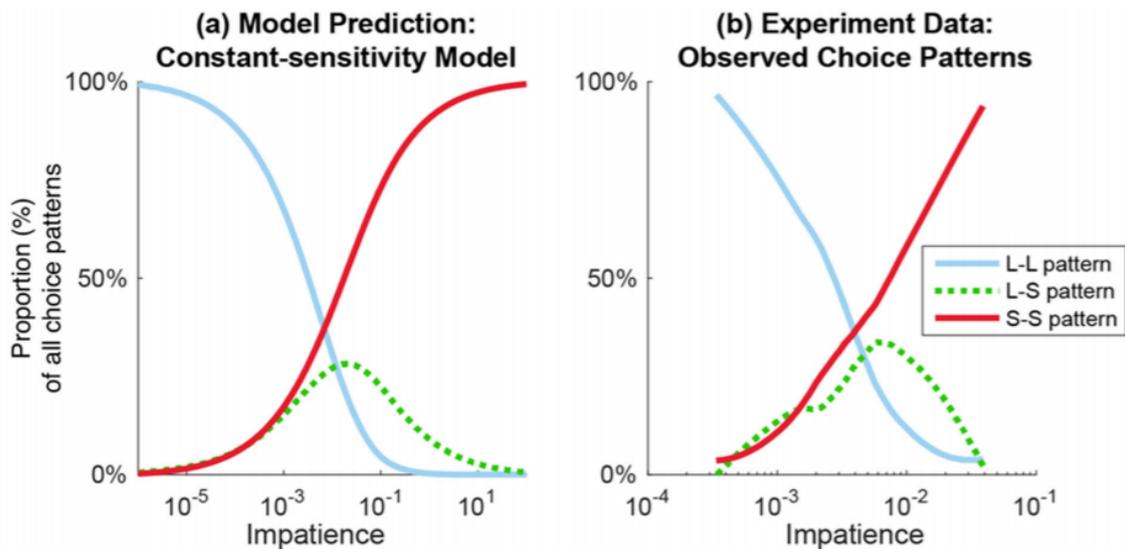


Рис. 4: Прогнозы модели на основе функции постоянной чувствительности ( $b = 0.5$ ) в сопоставлении с наблюдаемыми моделями выбора с использованием кривых регрессии LOESS. Источник [4].

**Замечание.** На рис. 4 используются следующие обозначения  $L - L$ ,  $L - S$ ,  $S - S$  для  $LL - LL$ ,  $LL - SS$  и  $SS - SS$  соответственно. Не следует их путать с ранее введенными обозначениями  $SS$  и  $LL$  для вариантов выбора.

Соответствие моделям было проверено с использованием оценки максимального правдоподобия. Во-первых, оценка модели предоставила прогнозируемую долю каждого шаблона выбора ( $pSS_m$ ,  $pLS_m$  и  $pLL_m$ ) для каждого значения параметра ( $m$ ). Во-вторых, из эмпирических данных было определено фактическое количество наблюдений каждого шаблона выбора ( $cSS_i$ ,  $cLS_i$  и  $cLL_i$ ) от каждого участника ( $i$ ). Учитывая эти две величины, вероятность каждого значения параметра для каждого участника была вычислена,  $L(m|i)$ , с использованием полиномиального распределения:

$$L(m|i) = \frac{cSS_i + cLS_i + cLL_i}{cSS_i!cLS_i!cLL_i!} pSS_m pLS_m pLL_m.$$

Для каждого участника было определено значение параметра с максимальной вероятностью и была вычислена сумма максимальной логарифмической вероятности ( $LgLk$ ) для каждой модели:

$$LgLk = - \sum \log_{10} L(m|i)_{max}$$

Суммы максимальных логарифмических правдоподобий обеспечивают сводную статистику соответствия модели к функциям дисконтирования. Из-за отрицательного знака меньшее значение означает лучшее соответствие. Логарифмическая вероятность (основание 10) составляла 1075 ( $b = 0.5$ ) для функции постоянной чувствительности, 1607 для гиперболической функции и 2028 ( $\beta = 0.7$ ) для квазигиперболической функции, что означает, что эта модель подходит лучше всего для функции постоянной чувствительности.

## 5 Опрос

В работах [3][2] были описаны результаты опроса, проведенного в 2019 году. В 2020 году опрос был проведен повторно (результаты не были опубликованы). В 2021 году был опрос был повторен с целью выявления различий результатов между математиками и медиками, а также общих изменений результатов на фоне кризиса из-за COVID-19. Все приведенные далее в этом разделе результаты относятся к опросу 2021 года.

Опрос был создан с помощью конструктора Google Forms, собранная информация сохранялась в Google Sheets. Информация об опросе распространялась онлайн с помощью платформ Вконтакте и LiveJournal. Опрос проводился с 11 марта по 25 марта 2021 года (2 недели).

### 5.1 Участники

В опросе приняло участие 362 человека, из которых 247(68,2%) женщины и 115(31,8%) мужчины. Женщины оказались более склонны отвечать на онлайн опросы. В таб. 3 представлена общая информация об участниках.

Возраст	Пол	Род деятельности						Всего
		Связан с мат./фин.		Связан с медициной			Иное	
		ММ СПбГУ	Другое	ПСПбГМУ	СПбГУ	Другое		
18-25	Ж	4,7%(17)	0,8%(3)	–	–	0,6%(2)	3%(11)	9,1%(33)
	М	9,7%(35)	4,1%(15)	0,3%(1)	–	–	2,2%(8)	16,3%(59)
26-40	Ж	1,1%(4)	0,6%(2)	0,8%(3)	0,3%(1)	0,3%(1)	6,1%(22)	9,1%(33)
	М	3,3%(12)	1,4%(5)	–	–	–	0,6%(2)	1,4%(5)
Более 40	Ж	2,8%(10)	6,9%(25)	15,7%(57)	0,8%(3)	3%(11)	20,7%(75)	50%(181)
	М	1,9%(7)	1,4%(5)	3%(11)	–	0,3%(1)	2,2%(8)	8,8%(32)
Всего		23,5%(85)	15,2%(55)	19,9%(72)	1,1%(4)	4,7%(17)	35,6%(129)	

Таблица 3: Информация об участниках

### 5.2 Структура опроса

Новый опрос содержал те же 21 однотипных выбора между  $SS$  и  $LL$ . Варианты выбора составлялись из следующего множества (таб. 4). Поскольку каждый вариант сравнивался с

каждым вариантом, то количество задаваемых вопросов равно 21:  $C_7^2 = \frac{7*6}{2} = 21$ . Перечень вопросов представлен в таб.5 с использованием обозначений из таб. 4.

Обозначение	Сумма, руб.	Временной промежуток
A	10 000	1 неделя
B	10 500	2 недели
C	11 000	3 недели
D	11 500	4 недели
E	15 500	3 месяца
F	21 500	6 месяцев
G	33 500	12 месяцев

Таблица 4: Варианты выбора

Номер вопроса	SS	LL	Номер вопроса	SS	LL
1	A	B	12	C	E
2	B	C	13	D	E
3	C	D	14	A	F
4	A	C	15	B	F
5	A	D	16	C	F
6	B	D	17	D	F
7	E	F	18	A	G
8	F	G	19	B	G
9	E	G	20	C	G
10	A	E	21	D	G
11	B	E			

Таблица 5: Перечень вопросов

В качестве минимального выигрыша было выбрано 10 000 рублей, а в качестве недельной процентной ставки — 5%, для согласованности с результатами опроса из [2][3], а также для сравнения результатов с результатами опроса из [7].

### 5.3 Обратная связь с участниками опроса

При проведении опроса в 2021 году некоторые участники оставляли свои комментарии и размышления, которыми они руководствовались при прохождении опроса. Приведем здесь некоторые из них, сохраняя анонимность участников и объединяя похожие комментарии:

- Участник не руководствовался каким-то общим принципом и действовал по наитию.
- Участник сомневался, что в жизни получит такое вознаграждение с увеличением временного промежутка.
- Участник всегда выбирал *SS*, так как уверен, что раз ему представился подобный выбор, то и в последствии он снова сможет с ним столкнуться. Например, в вопросе 1 участник выбирал 10 000 через неделю, так как надеется, что через неделю он снова сможет сделать такой же выбор и получить 10 000 за вторую неделю, то есть 20 000 за 2 недели, что больше чем 10 500.
- Участник всегда выбирал *LL*, так как такая большая процентная ставка — это редкость и нужно использовать этот шанс.

### 5.4 Общий анализ результатов нового опроса

Как и в [2][3], были использованы ориентированные графы, как метод представления выборов одного участника. На рис.5 представлен граф выборов участника 0.

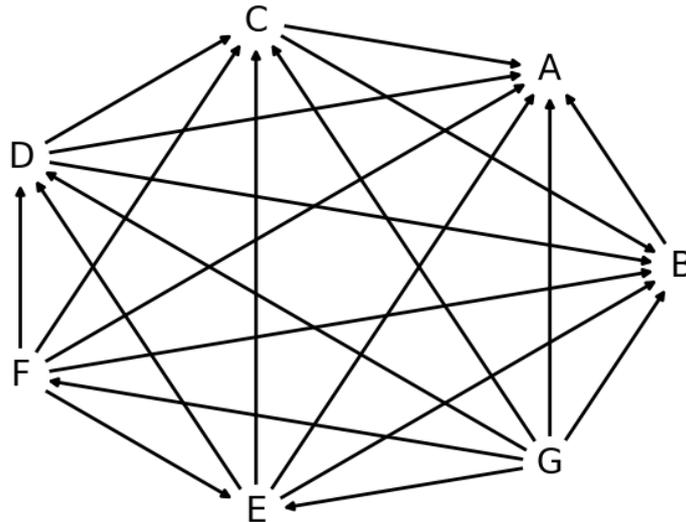


Рис. 5: Пример графа: участник 0.

По результатам опроса все участники разбивались на две группы, каждая из которых разбивалась в свое очередь еще на три подгруппы.

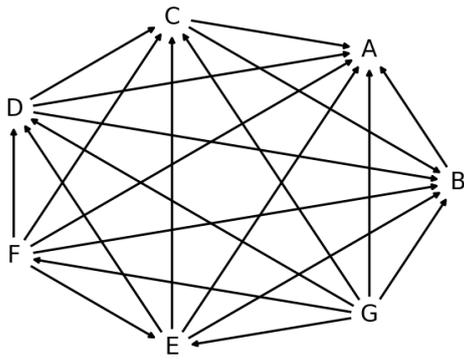
1. Транзитивная ( $TR$ ):

- $TR_{SS}$  — участники, всегда предпочитающие  $SS$ ;
- $TR_{LL}$  — участники, всегда предпочитающие  $LL$ ;
- $TR_{SL}$  — участники, чье предпочтение изменяется при изменении временного интервала.

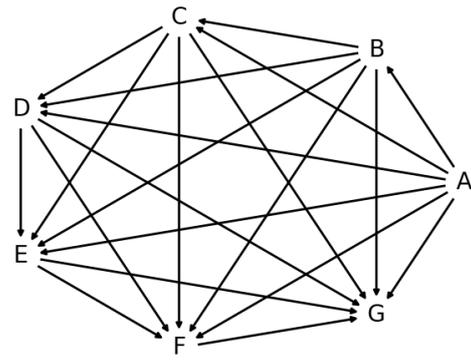
2. Не транзитивная ( $ITR$ ):

- $ITR_{sub}$  — участники, чье внутреннее дисконтирование обладает свойством субаддитивности;
- $ITR_{super}$  — участники, чье внутреннее дисконтирование обладает свойством супераддитивности;
- $ITR_a$  — участники, не вошедшие ни в одну другую группу.

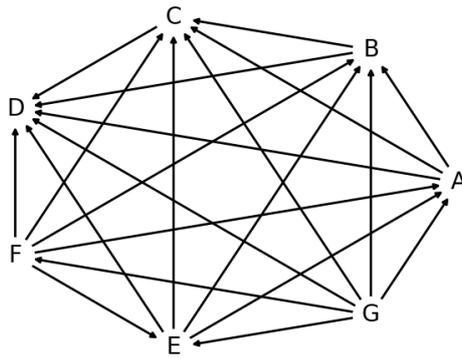
Примеры графов, построенных на результатах опроса участников из группы  $TR$ , приведены на рис.6. Примеры графов, построенных на результатах опроса участников из группы  $ITR$ , приведены на рис.7.



а) Участник 0 из  $TR_{SS}$



б) Участник 1 из  $TR_{LL}$



в) Участник 3 из  $TR_{SL}$

Рис. 6: Примеры транзитивных графов

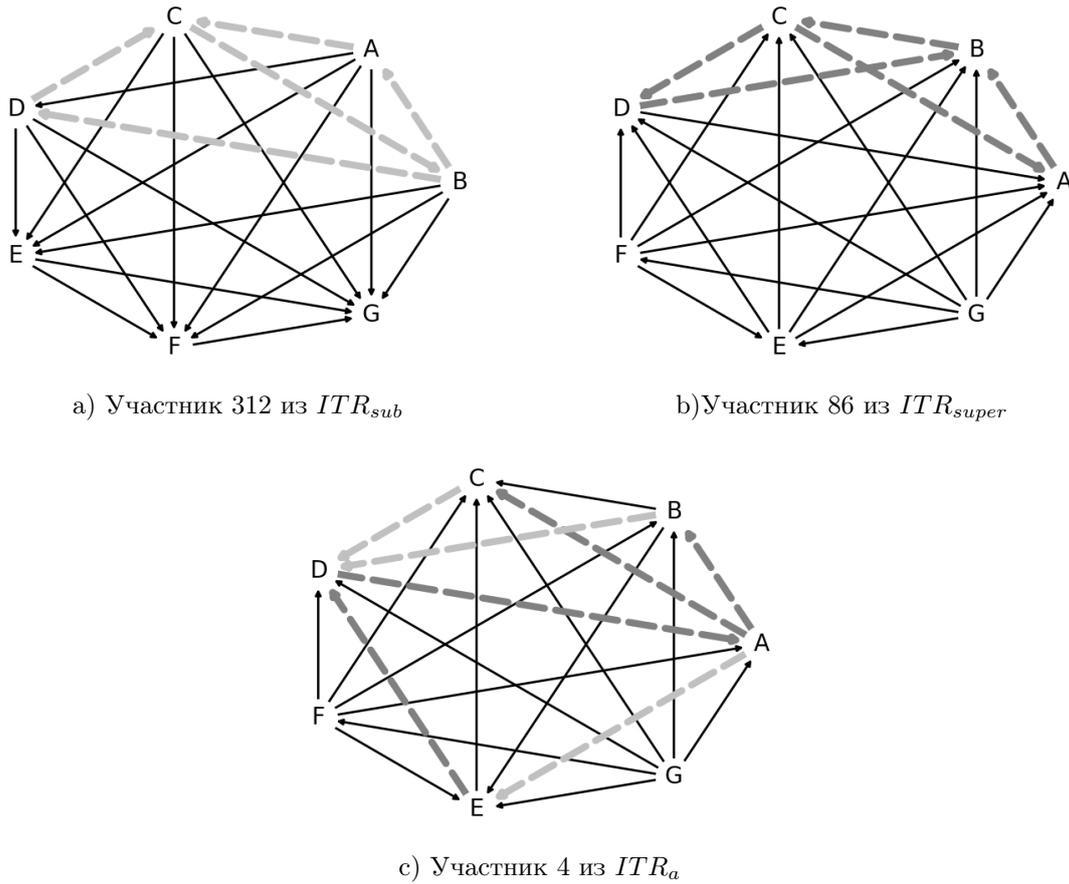


Рис. 7: Примеры не транзитивных графов

Как и в [2][3], было решено допустить до 4 аномалий для подгрупп  $ITR_{sub}$  и  $ITR_{super}$ . Свойства субаддитивности и супераддитивности указывают на то, что с какого-то момента ( $\Delta t$ ) предпочтение  $SS$  сменится предпочтением  $LL$  и наоборот соответственно. **Аномалиями** мы назовем наличие в последовательности ответов выборов, которые нарушают возможность включения в одну из подгрупп. Для субаддитивности это будут выборы  $LL$  до  $\Delta t$  и выборы  $SS$  после  $\Delta t$ . Разбиение участников опроса по группам и подгруппам приведено в таб.6.

Транзитивная			Не транзитивная		
$TR_{SS}$	$TR_{LL}$	$TR_{SL}$	$ITR_{sub}$	$ITR_{super}$	$ITR_a$
20,2%(73)	32%(116)	18,8%(68)	10,2%(37)	5,2%(19)	13,5%(49)
71%(257)			29%(105)		

Таблица 6: Распределение участников опроса по группам и подгруппам

### 5.5 Результаты 2021 года против результатов 2019 года.

Для наглядности при сравнении приведена таб. 7 разбиения по группам и подгруппам по результатам опроса 2019 года из [2][3].

Транзитивная			Не транзитивная		
$TR_{SS}$	$TR_{LL}$	$TR_{SL}$	$ITR_{sub}$	$ITR_{super}$	$ITR_a$
26,9%(28)	18,3%(19)	10,6%(11)	11,5%(12)	5,8%(6)	26,9%(28)
55,8%(58)			44,2%(46)		

Таблица 7: Распределение участников опроса по группам и подгруппам 2019. Источник [2][3].

Из наблюдаемых изменений, произошедших за два года, можно сделать несколько выводов:

- Количество людей попавших в транзитивную группу выросло на 15,2%;
- Количество людей попавших в аномальную группу уменьшилось на 13,4%;
- Количество людей выбирающих всегда вариант  $LL$  выросло на 13,7%.

Допуская гипотезу о влиянии кризиса на фоне Covid-19, можно предположить, что люди стали более осознанно подходить к выборам, касающихся их финансов. Более того больше людей предпочитают проявлять терпение ради получения большей суммы.

## 5.6 Распределение по подгруппам математиков в сравнении с медиками.

Распределение по группам участников, род деятельности которых связан с математикой, представлено на таб.8.

Транзитивная			Не транзитивная		
$TR_{SS}$	$TR_{LL}$	$TR_{SL}$	$ITR_{sub}$	$ITR_{super}$	$ITR_a$
17,9%(25)	45%(63)	14,3%(20)	7,9%(11)	5%(7)	10%(14)
77,1%(108)			22,9%(32)		

Таблица 8: Распределение математиков по группам и подгруппам.

Распределение по группам участников, род деятельности которых связан с медициной, представлено на таб.9.

Транзитивная			Не транзитивная		
$TR_{SS}$	$TR_{LL}$	$TR_{SL}$	$ITR_{sub}$	$ITR_{super}$	$ITR_a$
24,7%(23)	19,4%(18)	20,4%(19)	11,8%(11)	5,4%(5)	18,3%(17)
64,5%(60)			35,5%(33)		

Таблица 9: Распределение медиков по группам и подгруппам.

Сравнивая распределения этих двух групп, можно заметить, что среди людей, связанных с медициной, значительно больше в процентном соотношении не транзитивная группа (на 12,6%). Данное различие связано в основном с большим количеством людей, попавших в аномальную группу (на 8,3%). Более того, рассматривая группы людей по отдельности, можно увидеть, что более  $3/4$  математиков попали в транзитивную группу, тогда как у медиков это менее  $2/3$ .

Если рассматривать только распределение по подгруппам в транзитивной группе, то у людей, связанных с математикой, наблюдается преобладание группы  $TR_{LL}$  (на 25,6%), тогда как участники, связанные с медициной, более равномерно распределены по подгруппам.

Можно предположить, что среди людей из математической сферы деятельности больше тех, кто осознанно подходит к финансовым вопросам, по сравнению с людьми из медицинской сферы. Более того математики больше склонны к ожиданию для получения большей суммы, тогда как среди людей из медицинской сферы нет такого выраженного шаблона поведения.

## 5.7 Распределение по подгруппам женщин в сравнении с мужчинами.

Распределение по группам участников женского пола представлено на таб.10.

Транзитивная			Не транзитивная		
$TR_{SS}$	$TR_{LL}$	$TR_{SL}$	$ITR_{sub}$	$ITR_{super}$	$ITR_a$
21,5%(53)	25,1%(62)	21,9%(54)	11,3%(28)	5,7%(14)	14,6%(36)
68,4%(169)			31,6%(78)		

Таблица 10: Распределение женщин по группам и подгруппам.

Распределение по группам участников мужского пола представлено на таб.11.

Транзитивная			Не транзитивная		
$TR_{SS}$	$TR_{LL}$	$TR_{SL}$	$ITR_{sub}$	$ITR_{super}$	$ITR_a$
17,4%(20)	47%(54)	12,2%(14)	7,8%(9)	4,3%(5)	11,3%(13)
76,5%(88)			23,5%(27)		

Таблица 11: Распределение мужчин по группам и подгруппам.

При сравнении этих двух таблиц можно отметить следующие выводы:

- Количество людей попавших в не транзитивную группу у мужчин на 8,1% меньше, чем у женщин;
- При этом каждая из подгрупп в не транзитивной группе у женщин больше примерно на треть, чем у мужчин.
- Распределение по подгруппам транзитивной группы у женщин более равномерно, тогда как у мужчин преобладает подгруппа  $TR_{LL}$ .

Можно предположить, что женщины больше подвержены эффекту задержки нежели мужчины. Тем не менее нет оснований утверждать о меньшей осознанности в финансовых вопросах у женщин по сравнению с мужчинами, так как аномальная группа у женщин больше мужской в том же отношении, что и остальные подгруппы не транзитивной группы. Из приведенных выводов видно, что мужчины более склонны к терпению ради получения большей суммы, так как у женщин данный шаблон поведения не столь выражен.

## 6 Заключение

В рамках исследования темы дисконтирования были выполнены следующие задачи.

- Прочитаны самые актуальные статьи по этой теме.
- Доказана теорема 2 о суперрадикальной динамической функции.
- Подобраны данные для графиков распределения шаблонов поведения. Построены графики для четырех функций дисконтирования, которые представлены на рис. 3.
- Был проведен опрос с 362 участниками. Вычислено общее распределение участников по группам.
- Проведено сравнение результатов распределения по группам 2021 года с результатами 2019 года. Сделаны выводы о предположительном влиянии кризиса на фоне Covid-19.
- Проведено сравнение распределений по группам в зависимости от рода деятельности участников.
- Проведено сравнение распределений по группам в зависимости от пола участников.

## Список литературы

- [1] **Бухвалов А. В., Бухвалова В. В.** *Финансовые вычисления для менеджеров* — Издательство «Высшая школа менеджмента», СПб., 2010.
- [2] **Бухвалова В.В., Вингерт А. С.** *Эффекты дисконтирования* — Финансы и бизнес, 2019, с. 61-77.
- [3] **Bukhvalova V., Bukhvalova V., Vingert A.** *Behavioral discounting: Empirical results and potential pitfalls.* — ANNUAL GSOM EMERGING MARKETS CONFERENCE 2019 Conference book. St. Petersburg State University, Graduate School of Management. 2019, p. 297-303.
- [4] **Haewon Y.** *Impatience and Time Inconsistency in Discounting Models* — Management Science 66(12), 2020, p. 5850-5860.
- [5] **Benhabib J., Bisin A., Schotter A.** *Present-bias, quasi-hyperbolic discounting, and fixed costs* — Games and Economic Behavior, 69, 2010, p. 205–223.
- [6] **Salvador R., Piedad O.** *Delay Effect and Subadditivity. Proposal of a New Discount Function: The Asymmetric Exponential Discounting* — Mathematics, 2020, 8, p. 367.
- [7] **Scholten M., Read D.** *Discounting by Intervals: A Generalized Model of Intertemporal Choice* — Management Science. 2006a. Vol. 15. N 9., p. 1424–1436.

## Приложение

Представленная программа, написанная на языке Python, создает 4 графика по функциям **E**, **ES**, **CS**, **QH**. На каждом графике изображено соотношение шаблонов поведения при изменении коэффициента дисконтирования. Пример графиков представлен на рис.3.

```
# Используемые библиотеки
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math

# Рассматриваемые функции
def hyber(t, r):
    return 1/(1+r*t)

def ex(t, r):
    return math.exp(-r*t)

def qu_hyper(t, r):
    beta = 0.8
    delta = 1 - r
    if t == 0:
        return 1
    return beta*(delta**t)

def const_sens(t, r):
    a = r
    b = 0.5
    return math.exp(-(a*t)**b)

# Создание трехмерных данных и вычисление по ним соотношения шаблонов
def data(f, right_bound):
    x = np.logspace(-4, right_bound)
    delta_all = [i for i in range(1, 101, 2)]
    LS_all = [500/i for i in range(1, 500, 5)]
    y_S = []
    y_LS = []
    y_L = []
    all_point = len(delta_all)*len(LS_all)

    for r in x:
        L = 0
        L_S = 0
        S = 0
        for delta in delta_all:
            for LS in LS_all:
                line = []
                for delay in range(0, 100, 2):
                    if f(delay, r) >= LS*f(delay+delta, r):
                        line.append("S")
                    if f(delay, r) < LS*f(delay+delta, r):
                        line.append("L")
                if 'L' in line and 'S' in line:
                    L_S += 1
                if 'L' in line and 'S' not in line:
                    L += 1
                if 'L' not in line and 'S' in line:
```

```
S += 1
```

```
    y_S.append(S/all_point)
    y_LS.append(L_S/all_point)
    y_L.append(L/all_point)
return y_S, y_LS, y_L
```

```
# Изображение графика с экспоненциальной функцией
```

```
y_S, y_LS, y_L = data(ex, 0)
x = np.logspace(-4, 0)
plt.plot(x,y_S, label='SS-SS')
plt.plot(x,y_LS, label='LL-SS')
plt.plot(x,y_L, label='LL-LL')
plt.xscale('log')
plt.xlabel(u'r')
plt.ylabel(u'Соотношение шаблонов')
plt.title(u'Экспоненциальная функция')
plt.legend()
plt.show()
```

```
# Изображение графика с гиперболической функцией
```

```
y_S, y_LS, y_L = data(hyper, 2)
x = np.logspace(-4, 1)
plt.plot(x,y_S, label='SS-SS')
plt.plot(x,y_LS, label='LL-SS')
plt.plot(x,y_L, label='LL-LL')
plt.xscale('log')
plt.xlabel(u'r')
plt.ylabel(u'Соотношение шаблонов')
plt.title(u'Гиперболическая функция')
plt.legend()
plt.show()
```

```
# Изображение графика с квази-гиперболической функцией
```

```
y_S, y_LS, y_L = data(qu_hyper, 0)
x = np.logspace(-4, 0)
plt.plot(x,y_S, label='SS-SS')
plt.plot(x,y_LS, label='LL-SS')
plt.plot(x,y_L, label='LL-LL')
plt.xscale('log')
plt.xlabel(u'alpha')
plt.ylabel(u'Соотношение шаблонов')
plt.title(u'Квази-гиперболическая функция')
plt.legend()
plt.show()
```

```
# Изображение графика с функцией постоянной чувствительности
```

```
y_S, y_LS, y_L = data(const_sens, 1)
x = np.logspace(-4, 1)
plt.plot(x,y_S, label='SS-SS')
plt.plot(x,y_LS, label='LL-SS')
plt.plot(x,y_L, label='LL-LL')
plt.xscale('log')
plt.xlabel(u'1-delta')
plt.ylabel(u'Соотношение шаблонов')
plt.title(u'Функция постоянной чувствительности')
plt.legend()
```

```
plt.show()
```