

Санкт–Петербургский государственный университет

НЕЧИПОРУК Александра Алексеевна

Выпускная квалификационная работа
*Анализ параметров моделей динамики мнений в
социальных сетях*

Уровень образования: бакалавриат

Направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Основная образовательная программа СВ.5005.2017 «Прикладная математика, фундаментальная информатика и программирование»

Профиль «Системный анализ, исследование операций и управление»

Научный руководитель:

профессор, кафедра математической
теории игр и статистических решений,
д.ф. - м.н. доцент Парилина Елена Михайловна

Рецензент:

научный сотрудник, институт проблем
управления им. В. А. Трапезникова РАН,
Федянин Денис Николаевич

Санкт-Петербург

2021 г.

Содержание

Введение	3
Обзор литературы	3
Постановка задачи	4
Глава 1. Модель	5
1.1. Описание модели	5
1.2. Модернизация модели	6
Глава 2. Эквивалентность динамики мнений в социальных сетях	7
2.1. Определение графов	7
2.1.1 Граф-звезда	7
2.1.2 Граф «2 агента»	8
2.1.3 Полный граф	8
2.1.4 Граф-ромб	9
2.1.5 Линейный граф с тремя узлами	10
2.2. Эквивалентность моделей	10
2.2.1 Граф-звезда и граф «2 агента»	11
2.2.2 Полный граф и граф «2 агента»	13
2.2.3 Граф-ромб и линейный граф	15
2.3. Симметричность для любого графа относительно управ- ляемого агента	17
2.4. Пример	22
Заключение	28
Выводы	28
Список литературы	29

Введение

Процесс принятия коллективных решений обычно не является ментальным, ведь у людей мнения часто расходятся. Со временем может происходить обмен мнениями, который в итоге может приводить к консенсусу. Моделирование таких ситуаций позволяет предсказывать исход, а также проверить рентабельность воздействия на мнение некоторых участников (например, посредством увеличения затрат на рекламу).

Обзор литературы

Исследование моделей динамики мнений начиналось с вопросов о достижимости консенсуса. основоположной работой в этой области является модель Де Грота [1]. В своей работе он привел простую модель динамики мнений, в которой каждый участник изменяет свое мнение, взвешивая собственное мнение и мнения связанных с ним участников. В дальнейшем эта модель модернизировалась. Среди модернизаций самыми значимыми являются следующие модели:

- Модель Фриедкина-Джонсена [2], где у каждого агента появилась «восприимчивость» к мнению других участников.
- Модель Хегсельманна-Крауза [3], где учитывается, что у агентов есть свой «круг общения».
- Модель с двумя центрами влияния [4, 5].

Однако в этих моделях не рассматривается управление мнением агентов. За последние 5 лет появилось множество работ, где эти модели модернизировались как задачи управления [6, 7, 8, 9], где присутствует только один игрок, способный воздействовать на некоторых агентов сети, с целью получить желаемое среднее мнение в сети. При увеличении количества игроков рассматривались задача теории игр [6, 10] и задача теории кооперативных игр [11]. В случае большого количества узлов в сети, которые могут быть трудны для изучения, рассматривается проблема разделения узлов [12, 13].

Постановка задачи

В качестве основной задачи настоящей работы рассматривается разработка идеи преобразования сетевой структуры в модели динамики мнений с управлением, представленной в [7] без влияния на оптимальное управление, что позволяет уменьшить размерность задачи управления. Для реализации этой задачи рассматривалась задача модернизации модели и задача построения таких преобразований для определенных классов графов.

Глава 1. Модель

1.1 Описание модели

За основу взята модель, предложенная в [7]. Рассматривается динамика мнений в обществе с бесконечным временем. Общество представлено парой (N, g) , где N – конечный набор агентов общества, а g – граф, который отражает коммуникационную структуру. Граф $g = (N, E)$ определяется как N – множество вершин, E – множество ребер. Помимо агентов общества существует независимый член общества, называемый игроком, который контролирует мнение агентов. В качестве примера можно рассматривать медиацентр как игрока, влияющего на мнение агентов. Динамика мнений в модели определяется следующими уравнениями:

$$x_i(t+1) = x_i(t) + a_i \left(\frac{x_i(t) + \sum_{j \in S_i} x_j(t)}{|S_i| + 1} - x_i(t) \right) + u_i(t), \quad i \in N, \quad (1)$$

где $x_i(t) \in \mathbb{R}^1$ – мнение агента i в момент времени t , $S_i = \{j : (i, j) \in E\}$ – множество соседей агента i в графе g , $a_i \in \mathbb{R}_+$ – заданный коэффициент для любого агента общества, $u_i \in U \subset (-\infty, \infty)$ является управлением игрока на агента i .

Цель игрока состоит в том, чтобы поддерживать мнение агентов общества ближе к определенному уровню \bar{x} , сводя к минимуму его затраты на контроль мнения агентов. Следующий функционал представляет расходы игрока:

$$J(u) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \sum_{i=1}^n [(x_i(t) - \bar{x})^2 + \gamma u_i^2(t)],$$

где $\delta \in (0; 1)$ – коэффициент дисконтирования, $\gamma > 0$ – стоимость единицы контроля.

Так же эти формулы можно представить в векторном виде следующим образом:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \quad (2)$$

где $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))' \in \mathbb{R}^n$, и

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

где $b_i \in \{0, 1\} \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ определяет на каких агентов может воздействовать игрок и

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 - \frac{|S_i|a_i}{|S_i| + 1} & i = j, \\ \frac{a_i}{|S_i| + 1} & j \in S_i, \\ 0 & j \notin \{S_i \cup i\}. \end{cases}$$

Затраты игрока определяются в векторном виде следующим функционалом

$$J(u) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t [x'(t)Qx(t) + qx(t) + n\bar{x}^2 + \gamma u^2(t)],$$

где $Q = \mathbb{I}_n$ — единичная матрица размера n и $q = (-2\bar{x}, -2\bar{x}, \dots, -2\bar{x})$.

1.2 Модернизация модели

Рассмотрим модернизированную версию представленной выше модели. В ней рассмотрим динамику мнений, определяемую уравнениями (1), но при этом в функционал добавим «ценность» каждого агента следующим образом:

$$J(u) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \sum_{i=1}^n [q_i(x_i(t) - \bar{x})^2 + \gamma u_i^2(t)],$$

где $q_i \in \mathbb{N}$ — ценность агента i . В векторном виде представляется:

$$J(u) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \left[x'(t)Qx(t) + qx(t) + \sum_{i=1}^n q_i \bar{x}^2 + \gamma u^2(t) \right],$$

где $q = (-2q_1\bar{x}, -2q_2\bar{x}, \dots, -2q_n\bar{x})$ и Q — диагональная матрица вида:

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & q_n \end{pmatrix}.$$

Глава 2. Эквивалентность динамики мнений в социальных сетях

В этой главе будет рассмотрено несколько моделей с различными графами, и показано соотношение параметров, при котором они эквивалентны и будут иметь решения, равные по величине.

2.1 Определение графов

В этом разделе будет определено несколько моделей с различными графами.

2.1.1 Граф-звезда

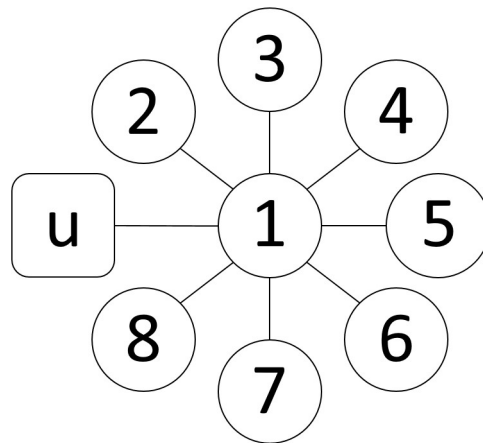


Рис. 1: Изображение графа-звезды при $n = 8$

Первый граф характеризуется тем, что один агент связан со всеми остальными (центр), все остальные агенты связаны только с этим агентом,

и больше ни с кем. Воздействие со стороны игрока происходит только на центр. Такой граф представлен на рис. 1. Динамика мнений на этом графе будет определяться уравнениями:

$$\tilde{x}_i(t+1) = \begin{cases} \tilde{x}_1(t) + \tilde{a}_1 \left(\frac{\sum_{j=1}^n \tilde{x}_j(t)}{n} - \tilde{x}_1(t) \right) + u(t), & i = 1, \\ \tilde{x}_i(t) + \tilde{a}_i \left(\frac{\tilde{x}_i(t) + \tilde{x}_1(t)}{2} - \tilde{x}_i(t) \right), & i \neq 1. \end{cases} \quad (3)$$

2.1.2 Граф «2 агента»

Второй граф представляет собой 2 вершины и связь между ними, игрок воздействует на одного из агентов, как изображено на рис. 2. Динамика мнений для этого случая определяется уравнениями:

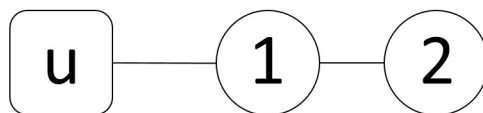


Рис. 2: Изображение графа «2 агента»

$$\hat{x}_i(t+1) = \begin{cases} \hat{x}_1(t) + \hat{a}_1 \left(\frac{\hat{x}_1(t) + \hat{x}_2(t)}{2} - \hat{x}_1(t) \right) + u(t), & i = 1, \\ \hat{x}_2(t) + \hat{a}_2 \left(\frac{\hat{x}_1(t) + \hat{x}_2(t)}{2} - \hat{x}_2(t) \right), & i = 2. \end{cases} \quad (4)$$

2.1.3 Полный граф

Третья модель построена на полном графе, с управлением на одного агента. Пример такого графа представлен на рис. 3. Динамика мнений определяется уравнениями:

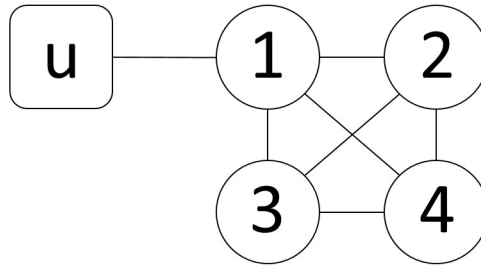


Рис. 3: Изображение полного графа для $n = 4$

$$\tilde{x}_i(t+1) = \begin{cases} \tilde{x}_1(t) + \tilde{a}_1 \left(\frac{\sum_{j=1}^n \tilde{x}_j(t)}{n} - \tilde{x}_1(t) \right) + u(t), & i = 1, \\ \tilde{x}_i(t) + \tilde{a}_i \left(\frac{\sum_{j=1}^n \tilde{x}_j(t)}{n} - \tilde{x}_i(t) \right), & i \neq 1. \end{cases} \quad (5)$$

2.1.4 Граф-ромб

Граф представляет 4 вершины, соединенные кольцом. Управление производится на одного агента. Изображение этого графа представлено на рис. 4. Динамика мнений определяется следующими уравнениями:

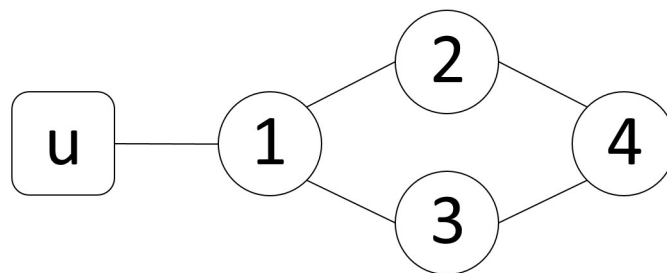


Рис. 4: Изображение графа-ромба

$$\tilde{x}_i(t+1) = \begin{cases} \tilde{x}_1(t) + \tilde{a}_1 \left(\frac{\sum_{j=1}^3 \tilde{x}_j(t)}{3} - \tilde{x}_1(t) \right) + u(t), & i = 1, \\ \tilde{x}_i(t) + \tilde{a}_i \left(\frac{\tilde{x}_1(t) + \tilde{x}_i(t) + \tilde{x}_4(t)}{3} - \tilde{x}_i(t) \right), & i \in \{2, 3\}, \\ \tilde{x}_4(t) + \tilde{a}_4 \left(\frac{\sum_{j=2}^4 \tilde{x}_j(t)}{3} - \tilde{x}_4(t) \right), & i = 4. \end{cases} \quad (6)$$

2.1.5 Линейный граф с тремя узлами

Последний из рассмотренных графов представляет 3 вершины без одной связи. Управление производится на крайнего агента. Изображение этого графа представлено на рис. 5. Динамика мнений определяется следующими уравнениями:

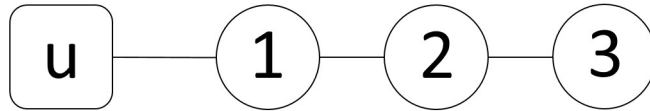


Рис. 5: Изображение линейного графа с тремя узлами

$$\hat{x}_i(t+1) = \begin{cases} \hat{x}_1(t) + \hat{a}_1 \left(\frac{\hat{x}_1(t) + \hat{x}_2(t)}{2} - \hat{x}_1(t) \right) + u(t), & i = 1, \\ \hat{x}_2(t) + \hat{a}_2 \left(\frac{\sum_{j=1}^3 \hat{x}_j(t)}{3} - \hat{x}_2(t) \right), & i = 2, \\ \hat{x}_3(t) + \hat{a}_3 \left(\frac{\hat{x}_2(t) + \hat{x}_3(t)}{2} - \hat{x}_3(t) \right), & i = 3. \end{cases} \quad (7)$$

2.2 Эквивалентность моделей

В этом разделе показано соотношение параметров, при котором модели и задачи управления, соответствующие им, эквивалентны.

2.2.1 Граф-звезда и граф «2 агента»

Утверждение 2.1. Для модели динамики, определяемой уравнениями (3), при $\tilde{a}_2 = \tilde{a}_3 = \dots = \tilde{a}_n$ и $\tilde{x}_2(0) = \tilde{x}_3(0) = \dots = \tilde{x}_n(0)$ и модели, задаваемой уравнениями (4), при одинаковом управлении и при соотношении констант $\hat{a}_2 = \tilde{a}_2$, $\hat{a}_1 = \tilde{a}_1 \frac{2(n-1)}{n}$ и $\hat{x}_1(0) = \tilde{x}_1(0)$, $\hat{x}_2(0) = \tilde{x}_2(0)$ будут выполняться равенства:

$$\hat{x}_1(t) = \tilde{x}_1(t), \quad \hat{x}_2(t) = \tilde{x}_2(t) = \tilde{x}_3(t) = \dots = \tilde{x}_n(t) \quad \forall t. \quad (8)$$

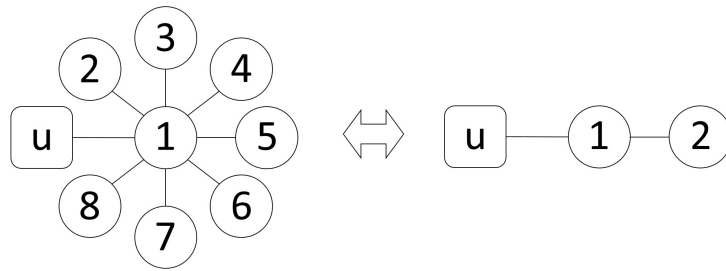


Рис. 6: Иллюстрация преобразования из утверждения 2.1. При указанном соотношении параметров a агенты 1 будут иметь одинаковые мнения, и агент 2 справа будет иметь то же мнение, что и агенты 2 – 8 слева

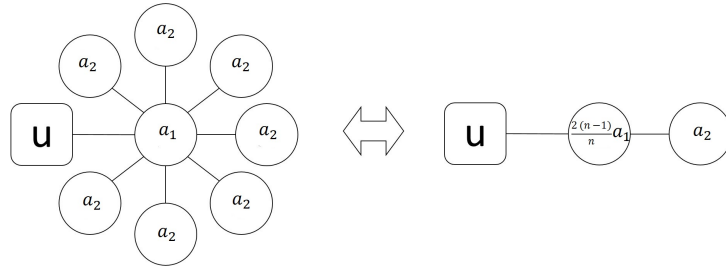


Рис. 7: Иллюстрация соотношения параметров a в утверждении 2.1.

Доказательство. Используем метод математической индукции. По условию равенства верны для $t = 0$. Предполагаем, что выполняются равенства $\hat{x}_1(t) = \tilde{x}_1(t)$, $\hat{x}_2(t) = \tilde{x}_2(t) = \tilde{x}_3(t) = \dots = \tilde{x}_n(t)$. Покажем, что выполняются равенства $\hat{x}_1(t+1) = \tilde{x}_1(t+1)$, $\hat{x}_2(t+1) = \tilde{x}_2(t+1) = \tilde{x}_3(t+1) = \dots = \tilde{x}_n(t+1)$. Используя (3), (4), а также условия утверждения, получим

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_1(t+1) &= \tilde{x}_1(t) + \tilde{a}_1 \left(\frac{\sum_{j=1}^n \tilde{x}_j(t)}{n} - \tilde{x}_1(t) \right) + u(t) = \\
&= \hat{x}_1(t) + \hat{a}_1 \frac{n}{2(n-1)} \left(\frac{\hat{x}_1(t) + \sum_{j=2}^n \hat{x}_2(t)}{n} - \hat{x}_1(t) \right) + u(t) = \\
&= \hat{x}_1(t) + \hat{a}_1 \frac{n}{2(n-1)} \left(\frac{(n-1)\hat{x}_2(t) - (n-1)\hat{x}_1(t)}{n} \right) + u(t) = \\
&= \hat{x}_1(t) + \hat{a}_1 \left(\frac{\hat{x}_2(t) - \hat{x}_1(t)}{2} \right) + u(t) = \hat{x}_1(t+1)
\end{aligned}$$

и для $\forall i \in \{2, 3, \dots, n\}$ имеем

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_i(t+1) &= \tilde{x}_i(t) + \tilde{a}_i \left(\frac{\tilde{x}_i(t) + \tilde{x}_1(t)}{2} - \tilde{x}_i(t) \right) = \\
&= \hat{x}_2(t) + \hat{a}_2 \left(\frac{\hat{x}_2(t) + \hat{x}_1(t)}{2} - \hat{x}_2(t) \right) = \hat{x}_2(t+1).
\end{aligned}$$

Утверждение 2.1 доказано. □

Утверждение 2.2. При условиях, описанных в Утверждении 2.1, задачи, определяемые функционалами

$$\tilde{J}(u) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \sum_{i=1}^n [\tilde{q}_i(\tilde{x}_i(t) - \bar{x})^2 + \gamma u_i^2(t)], \quad (9)$$

$$\hat{J}(u) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \sum_{i=1}^2 [\hat{q}_i(\hat{x}_i(t) - \bar{x})^2 + \gamma u_i^2(t)], \quad (10)$$

для моделей, определяемых графом-звездой и графом «2 агента» соответственно, являются эквивалентными при $\hat{q}_1 = \tilde{q}_1$, $\hat{q}_2 = \sum_{i=2}^n \tilde{q}_i$.

Доказательство. Отметим, что $u_i \neq 0$ только при $i = 1$. Значит функционалы (9), (10) могут быть записаны как

$$\tilde{J}(u) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \left[\tilde{q}_1(\tilde{x}_1(t) - \bar{x})^2 + \gamma u^2(t) + \sum_{i=2}^n \tilde{q}_i(\tilde{x}_i(t) - \bar{x})^2 \right], \quad (11)$$

$$\widehat{J}(u) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t [\widehat{q}_1(\widehat{x}_1(t) - \bar{x})^2 + \gamma u^2(t) + \widehat{q}_2(\widehat{x}_2(t) - \bar{x})^2], \quad (12)$$

соответственно. При подстановке равенств (8) в (11) получаем

$$\widetilde{J}(u) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \left[\widetilde{q}_1(\widehat{x}_1(t) - \bar{x})^2 + \gamma u^2(t) + (\widehat{x}_2(t) - \bar{x})^2 \sum_{i=2}^n \widetilde{q}_i \right], \quad (13)$$

При \widehat{q}_i , заданными в условии, равенство (13) будет совпадать с функционалом (12).

Утверждение 2.2 доказано. \square

2.2.2 Полный граф и граф «2 агента»

Утверждение 2.3. Для модели динамики, определяемой уравнениями (5), при $\widetilde{a}_2 = \widetilde{a}_3 = \dots = \widetilde{a}_n$ и $\widetilde{x}_2(0) = \widetilde{x}_3(0) = \dots = \widetilde{x}_n(0)$ и модели, задаваемой уравнениями (4), при одинаковом управлении и при соотношении констант $\widehat{a}_2 = \widetilde{a}_2 \frac{2}{n}$, $\widehat{a}_1 = \widetilde{a}_1 \frac{2(n-1)}{n}$ и $\widehat{x}_1(0) = \widetilde{x}_1(0)$, $\widehat{x}_2(0) = \widetilde{x}_2(0)$ будут выполняться равенства:

$$\widehat{x}_1(t) = \widetilde{x}_1(t), \quad \widehat{x}_2(t) = \widetilde{x}_2(t) = \widetilde{x}_3(t) = \dots = \widetilde{x}_n(t) \quad \forall t. \quad (14)$$

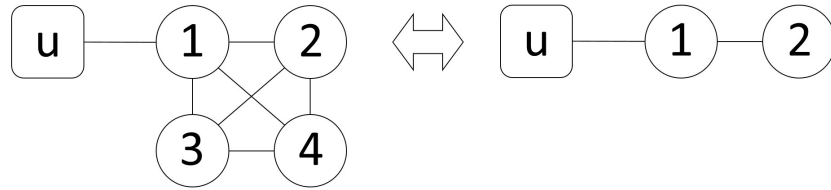


Рис. 8: Иллюстрация преобразования 2.3. При указанном соотношении параметров a агенты 1 будут иметь одинаковые мнения, и агент 2 справа будет иметь то же мнение, что и агенты 2 – 4 слева

Доказательство. Используем метод математической индукции. По условию равенства верны для $t = 0$. Предполагаем, что выполняются равенства $\widehat{x}_1(t) = \widetilde{x}_1(t)$, $\widehat{x}_2(t) = \widetilde{x}_2(t) = \widetilde{x}_3(t) = \dots = \widetilde{x}_n(t)$. Покажем, что выполняются равенства $\widehat{x}_1(t+1) = \widetilde{x}_1(t+1)$, $\widehat{x}_2(t+1) = \widetilde{x}_2(t+1) = \widetilde{x}_3(t+1) =$

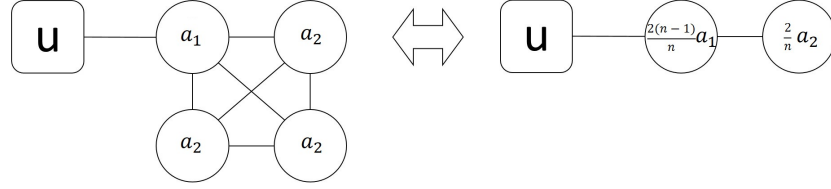


Рис. 9: Иллюстрация соотношения параметров a в утверждении 2.3.

$\dots = \tilde{x}_n(t+1)$. Используя (5), (4), а также условия утверждения, получим

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_1(t+1) &= \tilde{x}_1(t) + \tilde{a}_1 \left(\frac{\sum_{j=1}^n \tilde{x}_j(t)}{n} - \tilde{x}_1(t) \right) + u(t) = \\
&= \hat{x}_1(t) + \hat{a}_1 \frac{n}{2(n-1)} \left(\frac{\hat{x}_1(t) + \sum_{j=2}^n \hat{x}_2(t)}{n} - \hat{x}_1(t) \right) + u(t) = \\
&= \hat{x}_1(t) + \hat{a}_1 \frac{n}{2(n-1)} \left(\frac{(n-1)\hat{x}_2(t) - (n-1)\hat{x}_1(t)}{n} \right) + u(t) = \\
&= \hat{x}_1(t) + \hat{a}_1 \left(\frac{\hat{x}_2(t) - \hat{x}_1(t)}{2} \right) + u(t) = \hat{x}_1(t+1)
\end{aligned}$$

и для $\forall i \in \{2, 3, \dots, n\}$ имеем

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_i(t+1) &= \tilde{x}_i(t) + \tilde{a}_i \left(\frac{\sum_{j=1}^n \tilde{x}_j(t)}{n} - \tilde{x}_i(t) \right) = \\
&= \hat{x}_2(t) + \hat{a}_2 \frac{n}{2} \left(\frac{\hat{x}_1(t) + \sum_{j=2}^n \hat{x}_2(t)}{n} - \hat{x}_2(t) \right) = \\
&= \hat{x}_2(t) + \hat{a}_2 \frac{n}{2} \left(\frac{\hat{x}_1(t) - \hat{x}_2(t)}{n} \right) = \\
&= \hat{x}_2(t) + \hat{a}_2 \left(\frac{\hat{x}_1(t) - \hat{x}_2(t)}{2} \right) = \hat{x}_2(t+1).
\end{aligned}$$

Утверждение 2.3 доказано. □

Утверждение 2.4. При условиях, описанных в Утверждении 2.3, задачи, определяемые функционалами

$$\tilde{J}(u) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \sum_{i=1}^n [\tilde{q}_i(\tilde{x}_i(t) - \bar{x})^2 + \gamma u_i^2(t)], \quad (15)$$

и 10 для моделей, определяемых полным графом и графом «2 агента» соответственно, являются эквивалентными при $\hat{q}_1 = \tilde{q}_1$, $\hat{q}_2 = \sum_{i=2}^n \tilde{q}_i$.

Доказательство. Отметим, что $u_i \neq 0$ только при $i = 1$. Значит функционал (15) может быть записан как

$$\tilde{J}(u) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \left[\tilde{q}_1 (\tilde{x}_1(t) - \bar{x})^2 + \gamma u^2(t) + \sum_{i=2}^n \tilde{q}_i (\tilde{x}_i(t) - \bar{x})^2 \right]. \quad (16)$$

При подстановке равенств (14) в (16) получаем

$$\tilde{J}(u) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \left[\tilde{q}_1 (\hat{x}_1(t) - \bar{x})^2 + \gamma u^2(t) + (\hat{x}_2(t) - \bar{x})^2 \sum_{i=2}^n \tilde{q}_i \right], \quad (17)$$

При \hat{q}_i , заданными в условии, равенство (17) будет совпадать с функционалом (12).

Утверждение 2.4 доказано. □

2.2.3 Граф-ромб и линейный граф

Утверждение 2.5. Для модели динамики, определяемой уравнениями (6), при $\tilde{a}_2 = \tilde{a}_3$ и $\tilde{x}_2(0) = \tilde{x}_3(0)$ и модели, задаваемой уравнениями (7), при одинаковом управлении и при соотношении констант $\hat{a}_1 = \frac{4}{3}\tilde{a}_1$, $\hat{a}_2 = \tilde{a}_2$, $\hat{a}_3 = \frac{4}{3}\tilde{a}_4$ и $\hat{x}_1(0) = \tilde{x}_1(0)$, $\hat{x}_2(0) = \tilde{x}_2(0)$, $\hat{x}_3(0) = \tilde{x}_4(0)$ будут выполняться равенства:

$$\hat{x}_1(t) = \tilde{x}_1(t), \quad \hat{x}_2(t) = \tilde{x}_2(t) = \tilde{x}_3(t), \quad \hat{x}_3(t) = \tilde{x}_4(t) \quad \forall t. \quad (18)$$

Доказательство. Используем метод математической индукции. При $t = 0$ равенство выполняется из условия. Предположим, что выполняется (18) для t , докажем, что равенство выполнено для $t + 1$. Для $i \in \{2, 3\}$

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i(t+1) &= \tilde{x}_i(t) + \tilde{a}_i \left(\frac{\tilde{x}_1(t) + \tilde{x}_i(t) + \tilde{x}_4(t)}{3} - \tilde{x}_i(t) \right) + u(t) = \\ &= \hat{x}_2(t) + \hat{a}_2 \left(\frac{\hat{x}_1(t) + \hat{x}_2(t) + \hat{x}_3(t)}{3} - \hat{x}_2(t) \right) + u(t) = \hat{x}_2(t+1). \end{aligned}$$

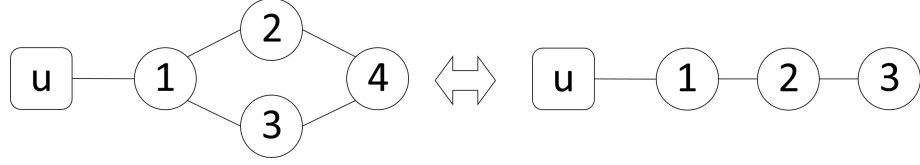


Рис. 10: Иллюстрация преобразования 2.5. При указанном соотношении параметров a агенты 1 будут иметь одинаковые мнения, агент 3 справа будет иметь одинаковые мнения с агентом 4 слева, и агент 2 справа будет иметь то же мнение, что и агенты 2 – 3 слева

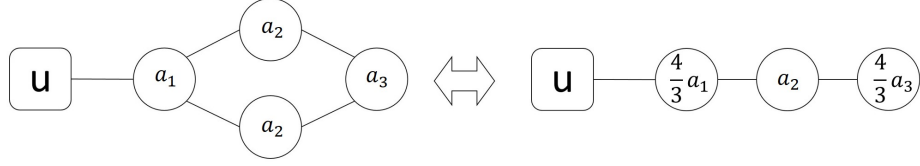


Рис. 11: Иллюстрация соотношения параметров a в утверждении 2.5.

Для $i = 1$

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_1(t+1) &= \tilde{x}_1(t) + \tilde{a}_1 \left(\frac{\sum_{j=1}^3 \tilde{x}_j(t)}{3} - \tilde{x}_1(t) \right) + u(t) = \\
&= \hat{x}_1(t) + \frac{3}{4} \hat{a}_1 \left(\frac{2\hat{x}_2(t) + \hat{x}_1(t)}{3} - \hat{x}_1(t) \right) + u(t) = \\
&= \hat{x}_1(t) + \frac{3}{4} \hat{a}_1 \left(\frac{2\hat{x}_2(t) - 2\hat{x}_1(t)}{3} \right) + u(t) = \\
&= \hat{x}_1(t) + \hat{a}_1 \left(\frac{\hat{x}_2(t) - \hat{x}_1(t)}{2} \right) + u(t) = \hat{x}_1(t+1).
\end{aligned}$$

И для $i = 4$

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_4(t+1) &= \tilde{x}_4(t) + \tilde{a}_4 \left(\frac{\sum_{j=2}^4 \tilde{x}_j(t)}{3} - \tilde{x}_4(t) \right) + u(t) = \\
&= \hat{x}_3(t) + \frac{3}{4} \hat{a}_3 \left(\frac{2\hat{x}_2(t) + \hat{x}_3(t)}{3} - \hat{x}_3(t) \right) + u(t) = \\
&= \hat{x}_3(t) + \frac{3}{4} \hat{a}_3 \left(\frac{2\hat{x}_2(t) - 2\hat{x}_3(t)}{3} \right) + u(t) = \\
&= \hat{x}_3(t) + \hat{a}_3 \left(\frac{\hat{x}_2(t) - \hat{x}_3(t)}{2} \right) + u(t) = \hat{x}_3(t+1).
\end{aligned}$$

Утверждение 2.5 доказано. \square

Утверждение 2.6. *При условиях, описанных в Утверждении 2.5, задачи, определяемые функционалами*

$$\tilde{J}(u) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \sum_{i=1}^4 [\tilde{q}_i(\tilde{x}_i(t) - \bar{x})^2 + \gamma u_i^2(t)], \quad (19)$$

$$\hat{J}(u) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \sum_{i=1}^3 [\hat{q}_i(\hat{x}_i(t) - \bar{x})^2 + \gamma u_i^2(t)], \quad (20)$$

для моделей, определяемых графом-ромбом и линейным графом соответственно, являются эквивалентными при $\hat{q}_1 = \tilde{q}_1$, $\hat{q}_2 = \tilde{q}_2 + \tilde{q}_3$, $\hat{q}_3 = \tilde{q}_4$

Доказательство. Отметим, что $u_i \neq 0$ только при $i = 1$. Значит функционалы (19), (20) могут быть записаны как

$$\tilde{J}(u) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \left[\tilde{q}_1(\tilde{x}_1(t) - \bar{x})^2 + \gamma u^2(t) + \sum_{i=2}^4 \tilde{q}_i(\tilde{x}_i(t) - \bar{x})^2 \right], \quad (21)$$

$$\hat{J}(u) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \left[\hat{q}_1(\hat{x}_1(t) - \bar{x})^2 + \gamma u^2(t) + \sum_{i=2}^3 \hat{q}_i(\hat{x}_i(t) - \bar{x})^2 \right], \quad (22)$$

соответственно. При подстановке равенств (18) в (21) получаем

$$\tilde{J}(u) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t [\tilde{q}_1(\hat{x}_1(t) - \bar{x})^2 + \gamma u^2(t) + (\hat{x}_2(t) - \bar{x})^2(\tilde{q}_2 + \tilde{q}_3) + \tilde{q}_4(\hat{x}_3(t) - \bar{x})^2], \quad (23)$$

При \hat{q}_i , заданными в условии, равенство (23) будет совпадать с функционалом (22).

Утверждение 2.6 доказано. \square

2.3 Симметричность для любого графа относительно управляемого агента

В этом разделе будет построено преобразование для определенной симметрии в графах.

Будем рассматривать общий вид графа, в котором управление производится только на одного агента. Динамика мнений определяется уравнениями:

$$x_i(t+1) = \begin{cases} x_1(t) + a_1 \left(\frac{x_1(t) + \sum_{j \in S_1} x_j(t)}{|S_1| + 1} - x_1(t) \right) + u(t), & i = 1, \\ x_i(t) + a_i \left(\frac{x_i(t) + \sum_{j \in S_i} x_j(t)}{|S_i| + 1} - x_i(t) \right), & i \neq 1 \end{cases} \quad (24)$$

или в векторном виде:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t),$$

где $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))' \in \mathbb{R}^n$, и

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

где

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 - \frac{|S_i|a_i}{|S_i| + 1} & j = i, \\ \frac{a_i}{|S_i| + 1} & j \in S_i, \\ 0 & j \notin \{S_i \cup i\}. \end{cases}$$

Для любого такого графа будут работать утверждения, подобные утверждениям, доказанным выше с графами большей размерности. Определим новый граф. Назовем j -копией граф той же структуры, где вершины перенумерованы: вершина под номером 1 сохраняется и имеет тот же номер, а вершины под номерами $i = 2, \dots, n$ нумеруются как вершины i_j , при этом дуги между вершинами сохраняются, т.е. если в графе была дуга (k, l) , то в j -копии будет дуга (k_j, l_j) . Определим новый граф объединив j -копии $j = 1, \dots, m$. При таком объединении у каждой вершины графа,

кроме вершины с индексом $i = 1$, будет m копий. Обозначим множество копий для вершины с индексом i как $C_i = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$. Для вершины i_j из полученного графа связи будут определяться следующим образом:

$$\tilde{S}_{i_j} = \begin{cases} \bigcup_{k \in S_1} C_k & i = 1, \\ \bigcup_{k \in S_{i_j}} k_j & i \neq 1. \end{cases}$$

Эти связи показывают, что копии всех вершин, которые были связаны с управляемым агентом в изначальном графе будут связаны с управляемым агентом в новом графе и связи копий будут повторять связи оригинала с соответствующими копиями. Тогда динамика мнений для этого будет определяться следующим

$$\tilde{x}_i(t+1) = \begin{cases} \tilde{x}_1(t) + \tilde{a}_1 \left(\frac{\tilde{x}_1(t) + \sum_{j \in \tilde{S}_1} \tilde{x}_j(t)}{|\tilde{S}_1| + 1} - \tilde{x}_1(t) \right) + u(t), & i = 1, \\ \tilde{x}_i(t) + \tilde{a}_i \left(\frac{\tilde{x}_i(t) + \sum_{j \in \tilde{S}_i} \tilde{x}_j(t)}{|\tilde{S}_i| + 1} - \tilde{x}_i(t) \right), & i \neq 1 \end{cases}$$

в векторном случае для этого графа будет определяться следующим

$$\tilde{x}(t+1) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t), \quad (25)$$

где $\tilde{x}(t) = (\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_{2_1}(t), \tilde{x}_{2_2}(t), \dots, \tilde{x}_{n_m}(t))' \in \mathbb{R}^n$, и

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} & \dots & \tilde{A}_{1m} \\ \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_1 & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{A}_{21} & 0 & \tilde{A}_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{A}_{m1} & 0 & 0 & \dots & \tilde{A}_m \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\tilde{A}_{1k} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{21k} \\ \dots \\ \tilde{a}_{n1k} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_{k1} = (\tilde{a}_{12k} \quad \dots \quad \tilde{a}_{1n_k}), \quad \tilde{A}_k = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{22k} & \dots & \tilde{a}_{2n_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde{a}_{n2k} & \dots & \tilde{a}_{nn_k} \end{pmatrix},$$

где

$$\tilde{a}_{ij_k} = \begin{cases} 1 - \frac{|\tilde{S}_i| \tilde{a}_{i_k}}{|\tilde{S}_i| + 1} & j = i, \\ \frac{\tilde{a}_{i_k}}{|\tilde{S}_i| + 1} & j \in \tilde{S}_i, \\ 0 & j \notin \{\tilde{S}_i \cup i\}. \end{cases}$$

k обозначает номер копии.

Утверждение 2.7. Для модели динамики, определяемой уравнениями (25), при $\tilde{a}_{i_1} = \tilde{a}_{i_2} = \dots = \tilde{a}_{i_m}$ и $\tilde{x}_{i_1}(0) = \tilde{x}_{i_2}(0) = \dots = \tilde{x}_{i_m}(0) \quad \forall i \in \{2, 3, \dots, n\}$ и модели, задаваемой уравнениями (24), при одинаковом управлении и при соотношении констант $a_1 = \frac{m(|S_1|+1)}{m|S_1|+1} \tilde{a}_1$, $a_i = \tilde{a}_{i_1} = \tilde{a}_{i_2} = \dots = \tilde{a}_{i_m} \quad \forall i \in \{2, 3, \dots, n\}$, и $x_1(0) = \tilde{x}_1(0)$, $x_i(0) = \tilde{x}_{i_1}(0) = \tilde{x}_{i_2}(0) = \dots = \tilde{x}_{i_m}(0) \quad \forall i$ будут выполняться равенства:

$$x_1(t) = \tilde{x}_1(t), \quad x_i(t) = \tilde{x}_{i_1}(t) = \tilde{x}_{i_2}(t) = \dots = \tilde{x}_{i_m}(t) \quad \forall i \quad \forall t. \quad (26)$$

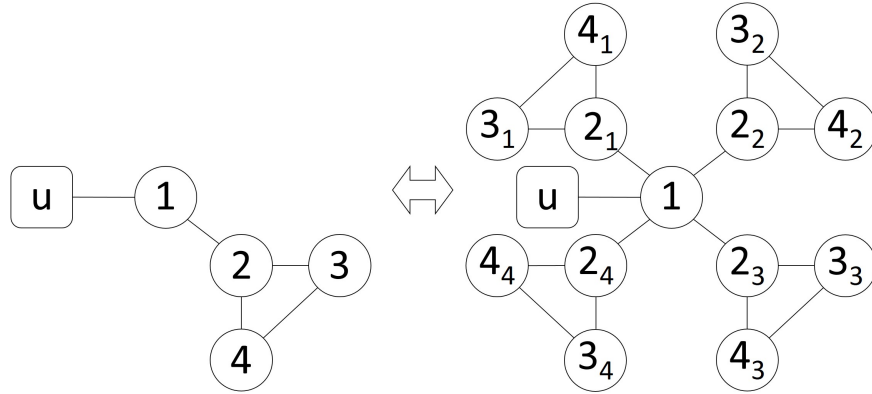


Рис. 12: Иллюстрация преобразования 2.7. При указанном соотношении параметров a агенты 1 будут иметь одинаковые мнения, и агент i слева будет иметь то же мнение, что и агенты i_j справа $i = 2, \dots, 4, j = 1, \dots, 4$.

Доказательство. Используем метод математической индукции. При $t = 0$ равенство выполняется из условия. Предположим, что выполняется (26)

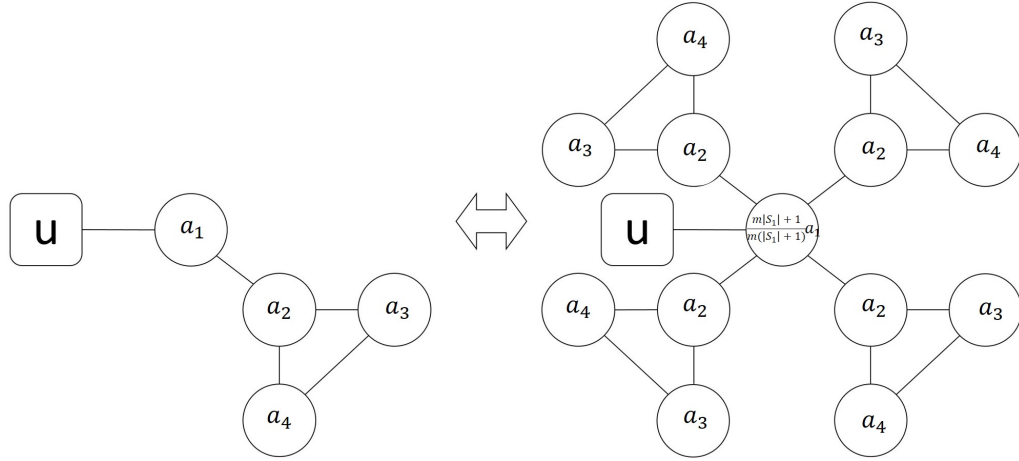


Рис. 13: Иллюстрация соотношения параметров a в утверждении 2.7. m обозначает количество копий, а $|S_1|$ количество агентов, связанных с первым агентом в изначальной версии графа.

для некоторого t , докажем, что равенства выполнены для $t + 1$. Для $i = 1$

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_1(t+1) &= \tilde{x}_1(t) + \tilde{a}_1 \left(\frac{\tilde{x}_1(t) + \sum_{j \in \tilde{S}_1} \tilde{x}_j(t)}{|\tilde{S}_1| + 1} - \tilde{x}_1(t) \right) + u(t) = \\
&= x_1(t) + a_1 \frac{m|S_1| + 1}{m(|S_1| + 1)} \left(\frac{x_1(t) + m \sum_{j \in S_1} x_j(t)}{m|S_1| + 1} - x_1(t) \right) + u(t) = \\
&= x_1(t) + a_1 \frac{m|S_1| + 1}{m(|S_1| + 1)} \left(\frac{m \sum_{j \in S_1} x_j(t) - m|S_1|x_1(t)}{m|S_1| + 1} \right) + u(t) = \\
&= x_1(t) + a_1 \left(\frac{\sum_{j \in S_1} x_j(t) - |S_1|x_1(t)}{|S_1| + 1} \right) + u(t) = x_1(t+1)
\end{aligned}$$

Для $i \neq 1$

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_{i_j}(t+1) &= \tilde{x}_{i_j}(t) + \tilde{a}_{i_j} \left(\frac{\tilde{x}_{i_j}(t) + \sum_{k \in \tilde{S}_{i_j}} \tilde{x}_k(t)}{|\tilde{S}_{i_j}| + 1} - \tilde{x}_{i_j}(t) \right) + u(t) = \\
&= x_i(t) + a_i \left(\frac{x_i(t) + \sum_{j \in S_i} x_j(t)}{|S_i| + 1} - x_i(t) \right) + u(t) = x_i(t+1)
\end{aligned}$$

Утверждение 2.7 доказано. □

Утверждение 2.8. При условиях, описанных в Утверждении 2.7, задачи,

определяемые функционалами

$$J(u) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \left[q_1(x_1(t) - \bar{x})^2 + \gamma u^2(t) + \sum_{i=2}^n q_i(x_i(t) - \bar{x})^2 \right], \quad (27)$$

$$\tilde{J}(u) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \left[\tilde{q}_1(\tilde{x}_1(t) - \bar{x})^2 + \gamma u^2(t) + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^m \tilde{q}_{i_j}(\tilde{x}_{i_j}(t) - \bar{x})^2 \right], \quad (28)$$

для моделей, определяемых общим графом с управлением на одного агента и графом построенным от него копированием соответственно, являются эквивалентными при $q_1 = \tilde{q}_1$, $q_i = \tilde{q}_{i_1} + \tilde{q}_{i_2} + \dots + \tilde{q}_{i_m} \quad \forall i$.

Доказательство. При подстановке равенств (26) в (28) получаем

$$J(u) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \left[\tilde{q}_1(x_1(t) - \bar{x})^2 + \gamma u^2(t) + \sum_{i=2}^n \left((x_i(t) - \bar{x})^2 \sum_{j=1}^m \tilde{q}_{i_j} \right) \right], \quad (29)$$

При q_i , заданными в условии, равенство (29) будет совпадать с функционалом (27).

Утверждение 2.8 доказано. \square

Замечание. Утверждения 2.1 и 2.2 являются частными случаями утверждений 2.7 и 2.8 соответственно.

2.4 Пример

В качестве примера проведена симуляция для графа с 16 узлами, изображенного на рис. 14. Определим динамику мнений для этого графа в векторном виде уравнением 2 с A и B следующего вида

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \frac{15}{16}a_1 & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{15} \\ A_{11} & A_1 & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{51} & 0 & 0 & \dots & A_5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

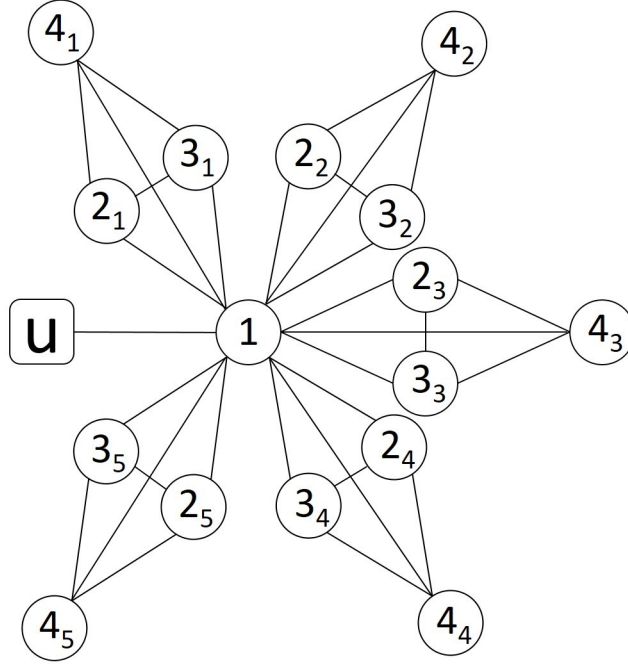


Рис. 14: Изображение изначального графа из примера

где

$$A_{1i} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}a_2 \\ \frac{1}{4}a_2 \\ \frac{1}{4}a_2 \end{pmatrix}, \quad A_{i1} = \left(\frac{1}{16}a_1 \quad \frac{1}{16}a_1 \quad \frac{1}{16}a_1 \right), \quad A_i = \begin{pmatrix} 1 - \frac{3}{4}a_2 & \frac{1}{4}a_2 & \frac{1}{4}a_2 \\ \frac{1}{4}a_2 & 1 - \frac{3}{4}a_2 & \frac{1}{4}a_2 \\ \frac{1}{4}a_2 & \frac{1}{4}a_2 & 1 - \frac{3}{4}a_2 \end{pmatrix}.$$

Параметры $\gamma = 0.5$, $\delta = 0.6$. Все агенты имеют одинаковую ценность 1. Целевое значение $\bar{x} = 50.0$. Изначально вершина 1 имеет состояние $x_1(0) = 70.0$ и параметр $a_1 = 0.500$. Вершины 2_j , 3_j и 4_j $j = 1, \dots, 5$ имеют одинаковое начальное состояние $x_2(0) = 10.0$ и одинаковый параметр $a_2 = 0.300$.

С помощью утверждений 2.7 и 2.8 преобразуем рассматриваемую модель. A и B преобразуются в \tilde{A} и \tilde{B} имеющие меньшую размерность. Их значения определяются следующим образом

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{3}{4}\tilde{a}_1 & \frac{1}{4}\tilde{a}_1 & \frac{1}{4}\tilde{a}_1 & \frac{1}{4}\tilde{a}_1 \\ \frac{1}{4}\tilde{a}_2 & 1 - \frac{3}{4}\tilde{a}_2 & \frac{1}{4}\tilde{a}_2 & \frac{1}{4}\tilde{a}_2 \\ \frac{1}{4}\tilde{a}_2 & \frac{1}{4}\tilde{a}_2 & 1 - \frac{3}{4}\tilde{a}_2 & \frac{1}{4}\tilde{a}_2 \\ \frac{1}{4}\tilde{a}_2 & \frac{1}{4}\tilde{a}_2 & \frac{1}{4}\tilde{a}_2 & 1 - \frac{3}{4}\tilde{a}_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

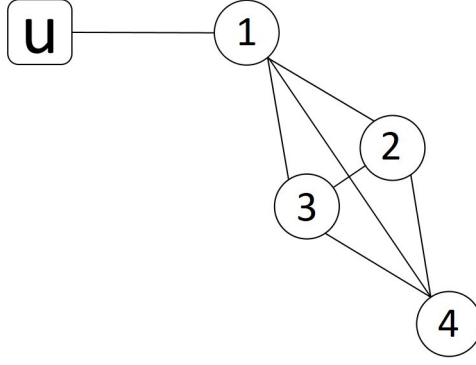


Рис. 15: Изображение графа из примера после первого преобразования

Соответственно у 1 агента параметр $\tilde{a}_1 = a_1 \frac{20}{16} = 0.625$, начальное состояние $\tilde{x}_1(0) = x_1(0) = 70.0$, ценность 1. У 2, 3 и 4 агентов одинаковый параметр $\tilde{a}_2 = a_2 = 0.300$, одинаковое начальное состояние $\tilde{x}_2(0) = x_2(0) = 10.0$ и одинаковая ценность 5.

Затем с помощью утверждений 2.3 и 2.4 производится преобразование, и новые \hat{A} и \hat{B} определяются следующим образом

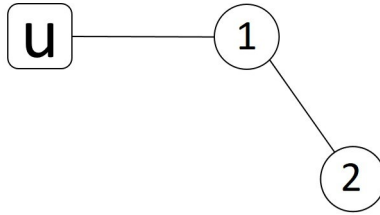


Рис. 16: Изображение графа из примера после второго преобразования

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\hat{a}_1 & \frac{1}{2}\hat{a}_1 \\ \frac{1}{2}\hat{a}_2 & 1 - \frac{1}{2}\hat{a}_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Соответственно у 1 агента параметр $\hat{a}_1 = \tilde{a}_1 \frac{6}{4} = 0.938$, начальное состояние $\hat{x}_1(0) = \tilde{x}_1(0) = 70.0$ и ценность 1. У 2 агента параметр $\hat{a}_2 = \tilde{a}_2 \frac{2}{4} = 0.150$, начальное состояние $\hat{x}_2(0) = \tilde{x}_2(0) = 10.0$ и ценность 15.

Таким образом, применив решение для последнего графа, в котором 2 агента, последовательно применяя равенства 14 и 26 можно узнать оптимальное управление и состояния для системы из 4 и 16 агентов соот-

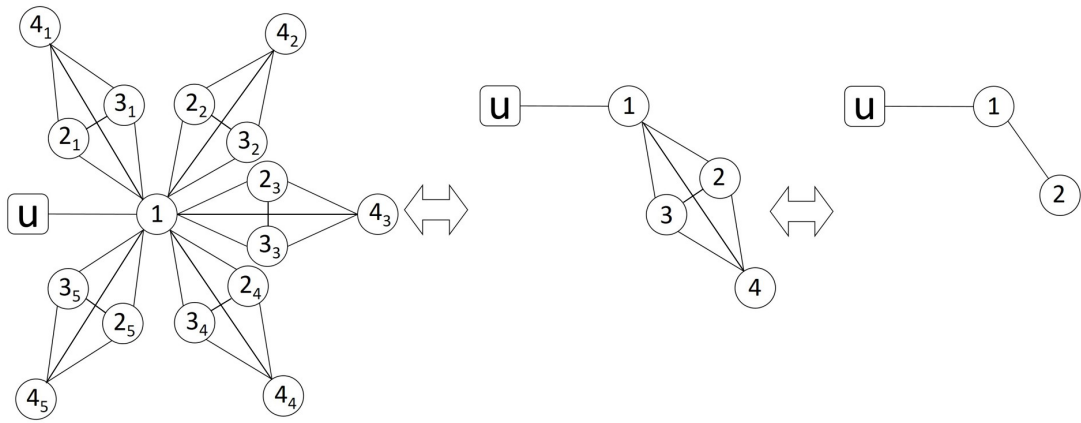


Рис. 17: Изображение последовательных преобразований из примера. Все агенты под номером 1 имеют одинаковое мнение на всем промежутке времени. Агент 2 справа имеет то же мнение, что и агенты 2 – 4 по центру и агенты 2_j , 3_j и 4_j при $j = 1, \dots, 5$ слева.

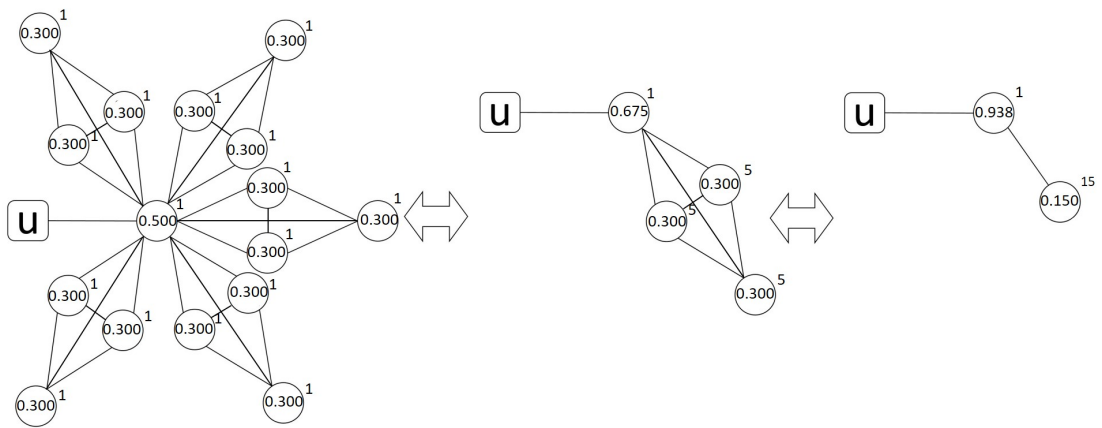


Рис. 18: Изображение параметров моделей при преобразованиях из примера. В узлах указаны значения параметров a , рядом я узлами указана ценность q .

ответственно. Для этого графа применяется решение из [7]. На следующих изображениях 19, 20 и 21 представлены состояния систем в разные моменты времени. График изображающий состояния систем в моменты времени от 0 до 100 изображен на рис. 22. График изображающий управление, производящееся на первого агента в этот же промежуток времени изображен на рис. 23

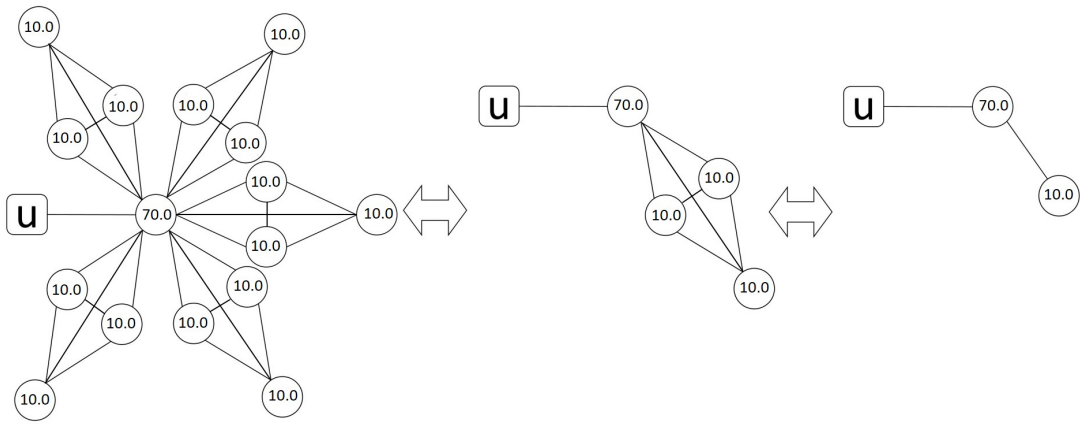


Рис. 19: Состояние систем в момент времени $t = 0$.

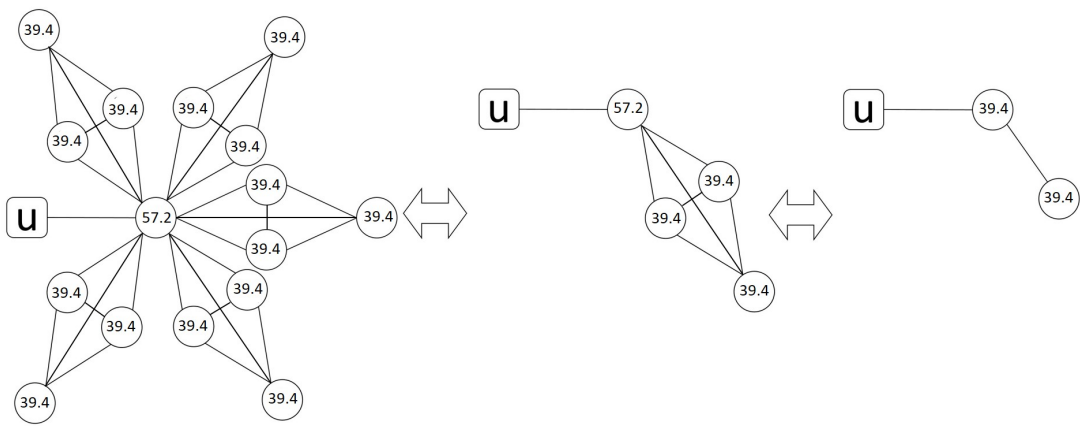


Рис. 20: Состояние систем в момент времени $t = 10$.

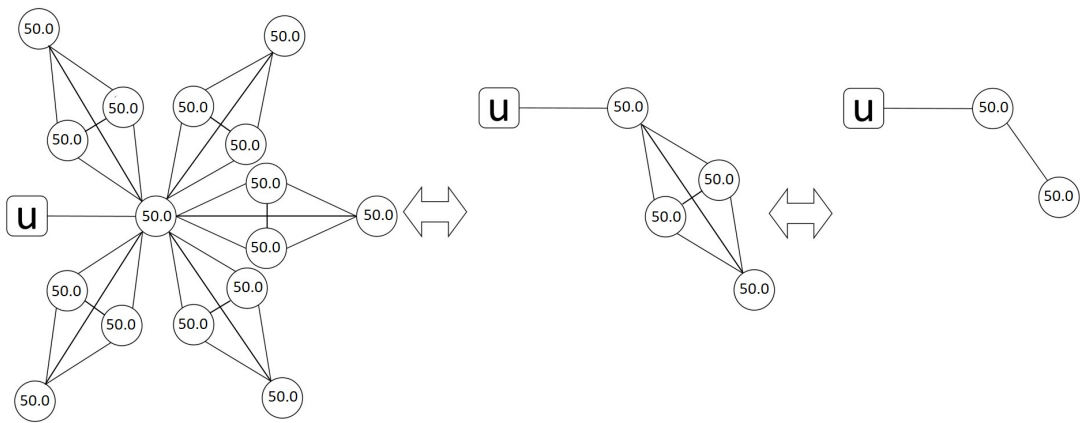


Рис. 21: Состояние систем в момент времени $t = 100$.

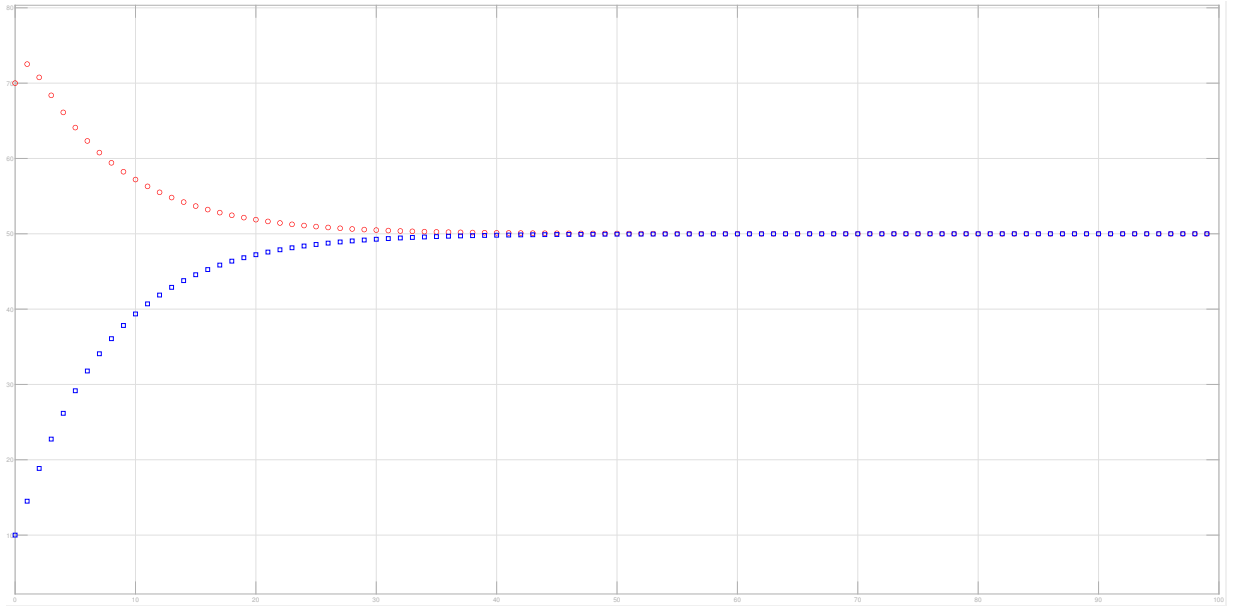


Рис. 22: Состояние систем в промежуток времени от 0 до 100. Красные метки показывают состояние агентов с номером 1, синие показывают состояния остальных агентов.

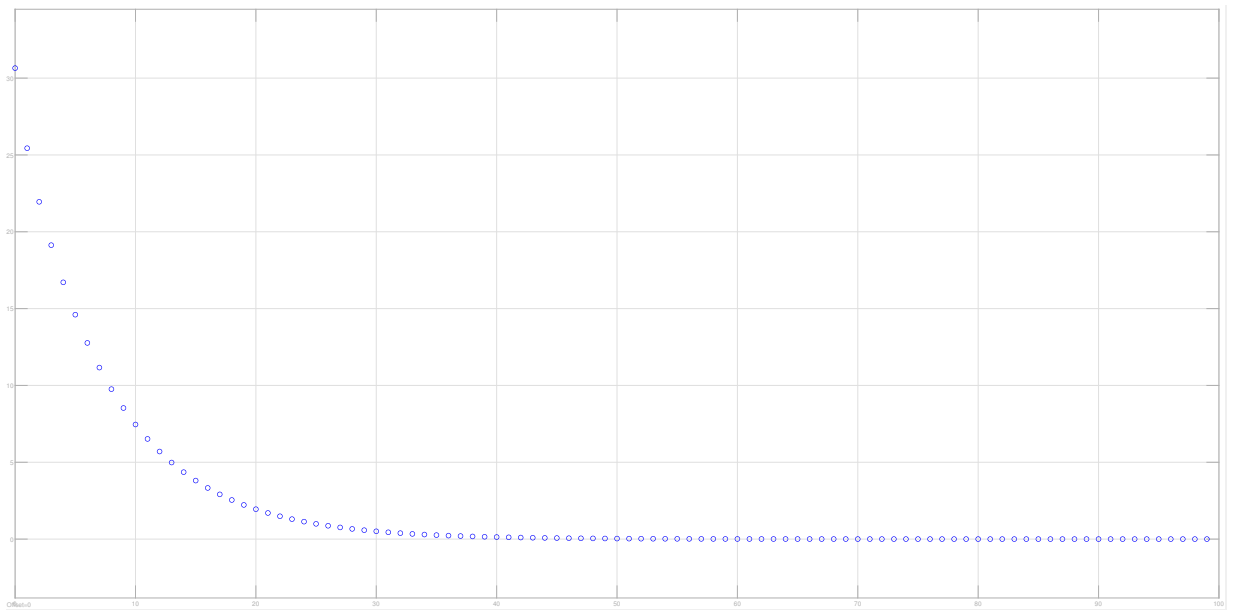


Рис. 23: Управление, производящееся на первого агента в промежуток времени от 0 до 100.

Заключение

В работе рассмотрена модель управления динамики мнений в обществе с бесконечным временем. Для неё был создан способ преобразования сетевой структуры без влияния на задачу управления. Для этого была модернизирована модель и рассмотрены определенные классы графов. Были сформулированы и доказаны утверждения, которые показывают соотношение параметров, при котором определяется взаимно-однозначное соответствие между моделями, определяемыми этими графами. Получен вид функционалов, соответствующий этим моделям, и сформулированы и доказаны утверждения о соотношении параметров, при которых задачи управления эквивалентны.

Выводы

Агенты схожие по изначальному мнению и восприимчивости к воздействию других агентов могут быть рассмотрены как один агент с изменением параметров восприимчивости в сети. Это позволяет уменьшить размерность задачи, что упрощает исследование моделей с большим количеством агентов.

В качестве развития настоящего исследования можно рассмотреть задачу преобразования сетевой структуры при различных видах симметрии в графах. Так же возможно исследование задачи преобразования сетевой структуры с потерями.

Список литературы

- [1] DeGroot M. H. Reaching a consensus // Journal of the American Statistical Association. – 1974. – Т. 69. – №. 345. – С. 118-121.
- [2] Friedkin N. E., Johnsen E. C. Social influence and opinions // Journal of Mathematical Sociology. – 1990. – Т. 15. – №. 3-4. – С. 193-206.
- [3] Hegselmann R., Krause U. Opinion dynamics driven by various ways of averaging // Computational Economics. – 2005. – Т. 25. – №. 4. – С. 381-405.
- [4] Bure V. M., Parilina E. M., Sedakov A. A. Consensus in a social network with two principals // Automation and Remote Control. – 2017. – Т. 78. – №. 8. – С. 1489-1499.
- [5] Mazalov V., Parilina E. Game of competition for opinion with two centers of influence // International Conference on Mathematical Optimization Theory and Operations Research. – Springer, Cham, 2019. – С. 673-684.
- [6] Mazalov V., Parilina E. The Euler-Equation Approach in Average-Oriented Opinion Dynamics // Mathematics. – 2020. – Т. 8. – №. 3. – С. 1–6.
- [7] Mazalov V. V., Dorofeeva Y. A., Parilina E. M. Opinion control in a team with complete and incomplete communication // Contributions to Game Theory and Management. - 2020. - Т. 13. С. 324–334.
- [8] Дорофеева Ю. А. Влияние управления на динамику мнений участников коллектива // Труды Карельского научного центра Российской академии наук. – 2020. – №. 7. - С. 28-33.
- [9] Chkhartishvili A. G., Gubanov D. A., Novikov D. A. Social Networks: Models of information influence, control and confrontation. – Springer, 2018. – Т. 189.
- [10] Sedakov A. A., Zhen M. Opinion dynamics game in a social network with two influence nodes // Вестник Санкт-Петербургского универси-

тета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления.
– 2019. – №. 1. - С. 118–125.

- [11] Рогов М. А., Седаков А. А. Согласованное влияние на мнения участников социальной сети //Математическая теория игр и её приложения.
– 2018. – Т. 10. – №. 4. – С. 30-58.
- [12] Avrachenkov K. E., Kondratev A. Y., Mazalov V. V. Cooperative game theory approaches for network partitioning //International Computing and Combinatorics Conference. – Springer, Cham, 2017. – С. 591-602.
- [13] Mazalov V. V. Comparing game-theoretic and maximum likelihood approaches for network partitioning //Transactions on Computational Collective Intelligence XXXI. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2018. – С. 37-46.