САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ – ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ

КАФЕДРА МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Сачков Александр Валерьевич

Магистерская диссертация

Проблемы принятия решений в актуарных моделях

Направление 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»

Основная образовательная программа ВМ.5759 «Цифровая экономика»

Научный руководитель,
доктор физ.-мат. наук,
профессор
Смирнов Н. В.

Санкт-Петербург

2021

Содержание

Введение

В современном мире страхование считается неотъемлемой частью жизни как простых граждан, связанных обязательным и добровольным страхованием жизни, транспортных средств и проч., так и крупные транснационалные корпорации, страхующие свои производства, цепочки поставок и другие аспекты деятельности. В России общая сумма заключённых договоров страхования в 2020 году превысила 32 триллиона рублей ([1]).

Естественно, что в такой ситуации поддерживающие страховую деятельность математические расчёты в рамках актуарной математики видятся довольно актуальными и интересными для изучения, на что и нацелена данная работа.

Следуя основным принципам математического моделирования (в первую очередь – поиску баланса между применимостью и точностью) мы разбираем актуарную модель страхования жизни и модифицируем её, разбирая возникающие особенности.

Помимо этого в работе разбираются задачи выбора (в том числе интегрированные в страхование), которые являются одними из старейших в истории человечества. Этот факт вполне естественен, ведь необходимость выбрать то или иное направление действия постоянно встаёт перед каждым из нас.

Если же говорить о задачах выбора в чисто математическом смысле, то возникает некая проблема – недостаточная формализованность. Обычно потенциальным решениям задачи ставят в соответствие некоторые числовые функции, называемые критериями, которые количественно оценивают решения на основе их качеств. Но как можно понять, какой из критериев важнее?

Чаще всего используется т.н. взвешенная сумма критериев – каждому из них приписывается вес, символизирующий его важность, и всё это складывается; «оптимальным» признаётся решение с наибольшей суммой. Такой подход, несмотря на свою простоту и интуитивную понятность, так и не был строго формализован.

Существует, однако, и чисто математическое решение – аксиоматическая теория выбора, которая была разработана (и сейчас разрабатывается) на факультете ПМ-ПУ СПбГУ Ногиным В.Д. и Басковым О. А. Эта теория строится на некоторых простых и, в то же время, естественных аксиомах, учитывающих то, как люди принимают решения в реальности, и позволяет учитывать предпочтения конкретного лица, принимающего решение (ЛПР).

В работе мы посмотрим на то, как данный подход можно использовать в страховании и актуарных расчётах, равно как и затронем некоторые число технические аспекты, возникающие в связи с применением аксиоматической теории выбора. В частности, будут предложены «схема» программы сбора квантов, механизм принятия решений как страховой компанией, так и её клиентом по принципу «обратной связи», исследованы некоторые смежные задачи, вытекающие отсюда вычислительные алгоритмы и возможности их оптимизации.

Обзор литературы

Книги профессора МГУ Фалина [2], [3] используются как базис сведений по актуарной математике и расчётам. Они учитывают реалии отечественного рынка страхования, изложение строго и полно, но при этом дополнено большим числом наглядных примеров.

Книга [4] посвящена пенсионному страхованию и может служить для первого знакомства со сферой. Стоит также отметить краткое описание законодательной базы страховой деятельности в РФ, что может оказаться полезным для будущих специалистов.

На английском языке заслуживает внимания монография [5], изданная обществом актуариев в соответствии с их требованиями к экзаменам на звание актуария. Изложение исчерпывающее, покрывает все области современного актуарного ремесла, и может считаться фундаментальным учебником или справочником для профессионалов.

Сведения по ТВиМС и теории полезности приводятся по книгам [6], [7], которые могут также служить для углубления знаний по данным областям; однако же не являются исключительным источником используемых нами понятий.

Все сведения по аксиоматической теории выбора взяты из монографии [9], являющейся полноценным изложением данного подхода. Вычислительный алгоритм для применения общего кванта рассмотрен в статье [10].

Глава 1. Необходимые сведения из теории вероятностей, математической статистики, теории полезности и актуарной математики

В данной главе приводятся необходимые для дальнейшего исследования сведения из ТВиМС, актуарной математики, теории полезности и некоторые другие.

§ 1.1. Теория вероятностей

Случайная природа риска является для него определяющей, поэтому неудивительно, что для его исследования используется в основном инструментарий теории вероятностей. Она применяется для построения соответствующих моделей, тогда как математическая статистика позволяет накапливать и обрабатывать подходящие данные, которые затем передаются в наши модели.

Далее кратко перечислим основные понятия теории вероятностей, которые потребуются нам в дальнейшем.

По своей сути вероятность есть нормированная мера реализации случайных событий. Из этого можно извлечь следующее:

1. Вероятность является мерой в смысле определения меры из математического анализа.

2. Вероятность принимает значения от 0 до 1 включительно (нормированность).

3. Аргументом вероятности выступает т.н. случайное событие (то есть такое, исход которого неизвестен заранее).

Естественным образом возникает понятие случайной величины – сущности, принимающей в результате каких-то действий (опыта, эксперимента и проч.) заранее неизвестное значение из своей области определения (бросок монетки – 0 или 1).

Случайными величинами для актуариев обычно выступают выражающие последствия риска численно – в денежном эквиваленте (т.н. экономический риск). Риски, не выразимые в денежном эквиваленте, страхованию не подлежат.

Если мы говорим о страховании жизни и смежных областях, то там часто фигурируют случайные величины возраста индивида в момент смерти и времени дожития, определения которых мы дадим позднее.

Вместо самой случайной величины X можно рассматривать её функцию распределения $F_X(x)$, значение которой в точке x равно вероятности события $\{X \leq x\}$, иными словами:

$$F_X(x) = \mathcal{P}(X \leq x).$$

Строя график функции распределения, можно наблюдать прирост общей вероятности (суммарно 1) в зависимости от текущего аргумента и прослеживать определённые закономерности.

Среднее значение случайной величины X при стремлении количества её «разыгрывания» к бесконечности называют математическим ожиданием этой величины.

Математическое ожидание дискретной случайной величины X вычисляется как:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p_i,$$

где x_i – возможные значения X, p_i – вероятности их появления.

Математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания именуется её дисперсией (разброс):

$$D(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

$\mathbb{E}(X)$ и $D(X)$ позволяют получить представление о наиболее ожидаемом значении случайной величины и о её отклонении от данного значения при большом количестве экспериментов соответственно.

§ 1.2. Страхование

Познакомимся с терминологией страхования, что позволит нам лучше понять суть данной области деятельности (на примере самого популярного вида страхования – страхования ТС (транспортных средств)):

1. *Страховщик* – юридическое лицо, имеющее государственную лицензию на страховую деятельность и действующее в соответствии с законодательством РФ.

2. *Страхователь* – страхуемое физическое или юридическое лицо.

3. *Страховая премия* – плата за заключение договора страхования, взимаемая страховщиком у страхователя, может быть единичной или разделённой на части.

4. *Страховое событие* – по сути это риск, от которого и страхуются, например, дорожно-транспортное происшествие с участием застрахованного ТС.

5. *Страховой случай* – свершившееся событие, влекущее за собой обязанность страховщика выплатить указанную в договоре страхования сумму в установленные сроки.

6. *Страховая выплата* – сумма, получаемая страхователем от страховщика при наступлении страхового случая, может быть единичной или разделённой на части, выплачиваться единовременно или в разные сроки.

Часто договоры страхования разрабатываются типовым образом (например, для ОСАГО – обязательного страхования автогражданской ответственности); в таком случае их именуют *полисами*.

§ 1.3. Статистика

Статистика, как уже напоминалась выше, работает с данными, необходимыми для построения актуарных моделей. Естественно, у страховщиков за время их деятельности такие данные накапливаются, систематизируются и обрабатываются соответствующими методами (выходящими, однако, за рамки нашего изложения). Это позволяет страховщикам лучше выстраивать свою деятельность (например, лучше быть готовыми к неожиданным событиям, результирующим в больших объёмах страховых выплат). *Таблицы продолжительности жизни*, в которых указываются данные по выживаемости индивидов из крупной (100000 и выше) выборки для: количество живых к началу каждого периода (бывают периоды в один год, месяц и реже – неделю), количество умерших к началу периода, доля выживших и умерших и проч., часто используются при работе со страхованием жизни. Мы будем использовать извлекаемую из таких таблиц величину l_x – число выживших на начало периода x индивидов.

§ 1.4. Теория полезности

Небольшое рассуждение наводит нас на мысль о том, что людские предпочтения почти никогда не бывают линейными – каждая новая единица блага, в зависимости от уже имеющегося его количества, расценивается по-разному. Эту мысль пытается формализовать теория полезности.

Рассмотрим множество альтернатив A (произвольной природы). Определим на основе предпочтений индивида его отношение предпочтения следующим образом: для любых двух альтернатив x, $y \in A$ выполняется только что-то одно – $x \preceq y$, то есть индивид не видит между x и разницы, или предпочтёт y, ; $x \sim y$, то есть индивид не видит между ними разницы; $x \prec y$, то есть при выборе индивид предпочтёт y.

Естественно, что не любое такое отношение может считаться отношением предпочтения; требуется проверка на адекватность. Чаще всего в связи с этим отношение предпочтения подчиняют свойствам рефлексивности, полноты и транзитивности.

Количественную оценку альтернативы берёт на себя функция полезности вида

$$u : A \to \mathbb{R},$$

которая каждой альтернативе сопоставляет вещественное число. Нетрудно провести связь между отношением предпочтения и функцией полезности, она даётся следующими соотношениями:

1. $u(x) \leq u(y) \Leftrightarrow x \preceq y$
2. $u(x) = u(y) \Leftrightarrow x \sim y$
3. $u(x) < u(y) \Leftrightarrow x \prec y$

Функция полезности незаменима в связи с тем, что позволяет работать не с абстрактными альтернативами, а с числами. Довольно часто используется в разных областях функция полезности денег; природа рисков диктует и нам её применение. Множество альтернатив в таком случае совпадает с $\mathbb{R}_+$(или же до всего $\mathbb{R}_+$, если требуется как-то представить долги).

Мысленное представление о функции полезности денег может дать натуральный логарифм – характер его поведения хорошо представляет дополнительную полезность денег на каждом уровне благосостояния, по мере роста которого меняется также потребительское поведение индивида в связи с сокращением числа товаров и услуг «должной» стоимости.

Далее в тексте будет рассмотрено отношение предпочтения ЛПР, которое по своей сути довольно сильно напоминает функцию полезности.

§ 1.5. Актуарная математика

Риски самой своей природой диктуют их представление в виде случайных величин разного характера. Всегда в том или ином виде фигурирует размер риска в денежном выражении.

Если же говорить о страховании жизни, то там играет центральную роль возраст индивида в момент смерти; обозначим соответствующую ему случайную величину за X. Мы будем использовать дискретный вариант с функцией распределения $F_X(x)$.

Можно работать не только с X и $F_X(x)$, но и с их дополнениями, определяемыми следующим образом:

Определение. Функция распределения вида

$$s(x) = 1 - F_X(x) = \mathcal{P}(X \leq x)$$

называется *функцией выживания*.

Определение. Случайная величина вида

$$T(x) = X - x$$

называется *остаточным временем жизни* индивида.

Оценка этих случайных величин естественным образом влияет на параметры полисов для соответствующих страхователей и страховщиков; такая оценка крайне важна в практических расчётах.

Для удобства можно ввести также следующие обозначения:

$$_tq_x = \mathcal{P}(T(x) \leq t)$$

– вероятность того, что X умрёт раньше, чем $x + t$ лет, и её дополнение,

$$_tp_x = 1 - {}_tq_x$$

– вероятность того, что X выживет по меньшей мере в течение t лет с текущего года.

§ 1.6. Основные задачи актуарной математики

Несмотря на то, что сфера страхования и соответствующих актуарных расчётов кажется очень широкой, все задачи актуариев можно объединить в две большие группы (бывает, что выделяют три): расчёт страховых премий и расчёт объёмов запасов страховщика. Рассмотрим каждую из них чуть более подробно.

Расчёт страховых премий

Страховщик при решении вопроса о заключении договора страхования со страхователем оценивает последнего по многим параметрам: возраст, пол, уровень дохода и проч. Связано это с тем, что страхователи есть люди, а все люди очень разные, следовательно, их риски также очень разнятся. Для сохранения коммерческой выгоды страховые премии «подгоняют» под страхователей, оглядываясь на их особенности.

Одна из формализаций данной задачи может быть изложена следующим образом: пусть страхователь имеет капитал ω и обладает функцией полезности денег $u(x)$; Y (во избежание коллизии обозначений) – размер случайного убытка страхователя в денежном выражении (при наступлении страхового случая). Стоимость заключения договора страхования составляет p. Тогда естественно задаться следующим вопросом: при каких значениях p страхователь готов заключить договор, если считать, что при наступлении страхового случая весь случайный убыток Y будет возмещён?

Записывая вышесказанное формально, получаем:

$$u(\omega - G) = \mathbb{E}(u(\omega - Y)).$$

Иногда принимают $G = \mathbb{E}(Y)$(т.н. *нетто-премия*), записывая при этом уравнения вида

$$G = (1 + a)\,\mathbb{E}(Y) + C$$

(т.н. *брутто-премия*), где помимо случайных колебаний убытка Y учтены также и постоянные издержки страховщика на заключение и поддержание договора C.

Расчёт запасов компании

Деятельность страховщиков не ограничивается одним страхователем, их много из самых разных областей. Это отражается и разнообразием страховых услуг (вплоть до страхования убытков от вынужденной приостановки производства). На практике говорят о т.н. *портфелях рисков*; случайность наступления страховых событий по ним вынуждают страховщика держать часть своей прибыли (собранных премий) в качестве резервов. Расчёт количества таких резервов, обеспечивающий страховщику неразорение при текущем портфеле рисков с достаточно высокой вероятностью (напр. 95%) составляет важнейшую задачу, от результата которой зависят стабильность работы и репутация страховщика.

Будем исследовать первую задачу для одной актуарной модели, параллельно прослеживая общие закономерности, возникающие в рамках математического моделирования. Впоследствии также посмотрим, как выбор может быть интегрирован в актуарные исследования.

Глава 2. Построение и модификация одной актуарной модели

§ 2.1. Описание модели

В нашей модели дискретное время, период дискретизации один год. Рассмотрим страхователя X, чей возраст в настоящий период составляет x. Страхователь рассматривает возможность заключения со страховщиком договора страхования следующего содержания: в случае выживания страхователя в течение ещё n лет, страховщик выплачивает страхователю страховую выплату в размере 1 условной единицы (которую часто полагают равной 1.000 или 100.000 рублям). Страхователь при этом выплачивает страховщику премию за заключение договора (один раз).

Требуется провести расчёт размера премии, в некотором смысле приемлемой для обеих сторон, заключающих договор.

§ 2.2. Базовые расчёты

Пусть $A_{x:\overline{n}}$ есть ожидаемое значение страхового обеспечения (в теории пенсионного обеспечения пишут ${}_nE_x$). Тогда,

$$A_{x:\overline{n}} = \nu^n \frac{l_{x+n}}{l_x} = \nu^n {}_n p_x, \tag{1}$$

где ν^n есть РЗУ для нашего страхователя.

В силу того, что мы приняли размер страховой выплаты равным 1 условной единице, получаем, что $\nu^n = (1+\delta)^{-n}$, где δ есть средняя процентная ставка на рынке займов; по сути мы проводим процесс, называемый *дисконтированием* – выражением стоимости денег применительно к текущему моменту. Значение же величины ${}_n p_x$ – вероятности выживания страховщика в течение ещё n лет берётся из таблицы продолжительности жизни соответственно его показателям.

Теперь мы можем получить грубое приближение размера нетто-премии для страхователя. Вспоминая формулу для вычисления брутто-премии, получаем для неё:

$$\overline{A_{x:\overline{n}}} = (1+\theta)A_{x:\overline{n}} + C. \tag{2}$$

Обратимся к численному примеру, в котором параметры модели принимают следующие значения: $x = 30,\ m = 100000,\ n = 5,\ \delta = 0{,}05$ (здесь m – размер выборки таблицы продолжительности жизни).Используя данные из [5], получаем такие значения: $l_{30} = 96477,\ l_{35} = 95808$. Тогда

$$A_{30:\overline{5}} = (1+\delta)^{-n}\frac{l_{35}}{l_{30}} = (1+0{,}05)^{-5}\frac{95808}{96477} \approx 0{,}778092. \tag{3}$$

Заметим, что количество знаков после запятой в расчётах обусловлено нашей интерпретацией условной единицы. Полученный результат позволяет нам сообщить следующее – премия в данном типе договора не может быть ниже 0,778092 условных единиц.

Для демонстрации вычисления брутто-премии положим θ и C равными 0,1 и 0,02, соответственно; отсюда

$$\overline{A_{30:\overline{5}}} \approx 0{,}875901. \tag{4}$$

§ 2.3. Модификация с вариативностью

Зададимся теперь вопросом о потенциальных путях модификации модели для приближения её к реальности без существенных жертв в плане применимости. Одним из таких направлений представляется рассмотрение непостоянной процентной ставки. В реальной жизни процентная ставка, естественно, не является постоянной (см. таблицу [8]):

Таблица. Средняя процентная ставка по вкладам по всем российским банкам, отчёт ЦБ РФ, 2020

Месяц	Процентная ставка
Январь	4,46
Февраль	4,23
Март	4,21
Апрель	4,67
Май	4,05
Июнь	3,90
Июль	3,43
Август	3,18
Сентябрь	3,27
Октябрь	3,23
Ноябрь	3,22
Декабрь	3,38

Как можно учесть этот факт в нашей модели? Конечно, абсолютно точного и верного пути сделать это не существует, ибо, как всегда бывает в таких ситуациях, нам недоступны все факторы влияния на объект исследования, что не позволяет выписать окончательную систему уравнений; приходится мириться с некоторой погрешностью.

В актуарной практике на данный момент разработаны 3 сценария работы с вариативностью процентной ставки:

1. Если имеется лишь небольшое количество данных прошлых лет, то приходится полагаться в предсказании лишь на собственных знаний и опыта;

2. Когда большие объёмы нужных данных имеются, можно строить статистические модели (напр. регрессия, временные ряды) и уже на их основе делать наши предсказания;

3. Если выполняется вторая ситуация, можно дополнительно использовать экспертные оценки и общие закономерности работы фондовых рынков.

В каждой конкретной ситуации выбор одного из сценариев диктуется самой постановкой задачи (в т.ч. предпочтениями заказчика, внутреннего или стороннего) и объемами данных в нашем распоряжении.

Предположим, что в рамках первого сценария получены для n последующих лет значения процентной ставки $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$. Перепишем в соответствии с этим выражение для $A_{x:\overline{n}}$:

$$A_{x:\overline{n}} = \prod_{i=1}^{n} (1+\delta_i)^{-1}{}_n p_x. \tag{5}$$

Пусть $\Delta = (0{,}05; \ldots; 0{,}02; \ldots; 0{,}05)$, что можно интерпретировать как наличие некого всплеска в данных. Проведём по формуле (3) расчёт с данными нашего примера:

$$A_{30:\overline{5}} \approx 0{,}800977. \tag{6}$$

Какой вывод можно сделать? Изменение результата, вызванное учётом скачка процентной ставки, может показаться незначительным, но это лишь на первый взгляд. Так как страховщики работают с сотнями тысяч однотипных полисов в рамках портфелей, то такое изменение может привести к значительному понижению/повышению их прибыли, что в свою очередь может сыграть решающую роль в их неразорении. Применение моделей регрессии или временных рядов повысит точность расчётов, но уведёт нас в другой сценарий и повысит вычислительную сложность.

Проведём для полноты подобный расчёт и для брутто-премии:

$$\overline{A_{30:\overline{5}}} \approx 0{,}901075. \tag{7}$$

§ 2.4. Модификация с полезностью

Попробуем теперь подойти к нашей модели со стороны страхователя, использовав для этого аппарат теории полезности.

Будем считать, что страхователь обладает капиталом ω и попробуем определить, что в нашей ситуации играет роль случайного убытка (обозначим его Y)? Понятно, что не заключая договор, страхователь остаётся «при своих» в случае недожития; если же он доживает, теряется потенциальная дисконтированная страховая выплата. Вышесказанное даёт нам распределение вида:

$$\begin{cases} \mathcal{P}(Y = 0) = {}_nq_x, \\ \mathcal{P}(Y = \nu^n) = {}_np_x. \end{cases} \tag{8}$$

Пусть G есть нетто- или брутто-премия (на суть это несильно влияет). При формулировки задачи о расчёте страховых премий мы выписывали соотношение

$$u(\omega - G) = \mathbb{E}(u(\omega - Y)).$$

Проводя ряд преобразований, учитывающий дискретность соответствующих случайных величин, получаем для правой части выражение:

$$\mathbb{E}(u(\omega - Y)) = u(\omega) \times {}_nq_x + u(\omega - \nu^n) \times {}_np_x. \tag{9}$$

Окончательно имеем следующее:

$$u(\omega - G) = u(\omega) \times {}_nq_x + u(\omega - \nu^n) \times {}_np_x. \tag{10}$$

Уравнение (10) показывает связь полезности денег страхователя с его желанием заключать соответствующий договор страхования, что позволит и ему, и страховщику принимать решения.

Естественно, для каждой функции полезности подобный расчёт будет своим. Для модельного примера $u(x) = \ln(x + 1)$получаем:

$$G = \omega + 1 - (\omega + 1)^{{}_nq_x} \times (\omega - \nu^n + 1)^{{}_np_x}. \tag{11}$$

Небольшое изменение нашего выражения позволит значительно расширить его применимость. Заменим знак равенства на знак неравенства:

$$u(\omega - G) > \mathbb{E}(u(\omega - Y)).$$

Справа стоит матожидание случайного риска, слева – точные потери от заключения договора страхования. Ставя себе задачу нахождения G, удовлетворяющего данному неравенству, страховщик для себя отвечает на вопрос:

«В каком случае страхователь предпочтёт обратиться к нам с учётом его рисков и предпочтений (полезности денег)?», что позволит в разумных рамках более точно подбирать параметры своих продуктов.

Отдельно можно также рассмотреть вопрос об определении средней в некотором смысле функции полезности денег для страхователей из отдельных групп клиентов страховщика (например, поделённые на децили по доходам), однако он выходит за рамки нашего исследования.

§ 2.5. Общая схема действий

Кратко суммируя вышесказанное, приведём некую схему действий при работе с подобными задачами:

1. Получить каким-либо образом приближение страховой премии;
2. Вычислить правую и левую части выражения $u(\omega - G) = \mathbb{E}(u(\omega - Y))$;
3. Получить ответ на интересующий вопрос или констатировать неприменимость модели, пробовать использовать другие.

Глава 3. Выбор в страховании

§ 3.1. Аксиоматическая теория выбора

В данном разделе мы постараемся познакомится с аксиоматическим подходом в теории выбора. Более подробно о нём можно прочитать в [9].

В первую очередь введём множество решений (альтернатив, вариантов) X произвольной природы (машины, недвижимость, смартфоны и пр.). Как ясно из названия, нашей задачей будет выбрать наилучший в некотором смысле элемент X.

Для сравнения решений введём критерии, оценивающие различные их качества. Строго говоря, критерий есть векторная функция

$$f : X \to \mathbb{R}^n,$$

где n – число параметров решения, каждый из которыз представляется вещественным числом.

Также требуется ввести отношение предпочтения $\succ_X$ на X, которое описывает предпочтения ЛПР, то есть, если ЛПР предпочитает решение $x_1 \in X$ решению $x_2 \in X$, то верно $x_1 \succ_X x_2$.

Теперь можно привести постановку задачи многокритериального выбора: дана тройка $(X,\ f,\ \succ_X)$, найти $C(X)$ – множество выбираемых решений. $C(X)$ представляет собой решение задачи выбора и содержит окончательно выбранные варианты.

Следует заметить, что произвольная природа элементов множества X затрудняет непосредственную работу с ними. Поэтому часто вводят множество возможных векторов $Y = f(X)$ – значения критериев всех решений, и $\succ_Y$ – отношение предпочтения на Y определяемое следующим образом:

$$f(x_1) = y_1 \succ_Y y_2 = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 \succ_X x_2.$$

Можно переформулировать задачу многокритериального выбора соответственно: даны Y и $\succ_Y$, найти $C(Y)$.

Переходим к заявленной ранее аксиоматичности, которая подкрепляет адекватность нашей модели реальности, накладывая ограничения на отношение $\succ_Y$. Их всего 4:

1. $y_1 \succ_Y y_2 \Leftrightarrow y_2 \notin C(Y)$;
2. $\succ_Y$ транзитивно;
3. $\succ_Y$ согласовано с каждым из критериев $f_1, \ldots, f_n$; это означает, что $\forall i$ если y_1 и y_2 отличаются только в i-й компоненте и $y_1^i > y_2^i$, тогда $y_1 \succ_Y y_2$;
4. $\succ_Y$ линейно и однородно.

В случае выполнения вышеописанных аксиом мы можем ввести самое важное для нас понятие – элементарный квант информации об отношении предпочтения ЛПР (для краткости просто квант). Сразу будем использовать его упрощённую форму (подробный вывод можно найти в книге [9]).

Определение. Пусть $i,\ j \in 1 : n$. Говорят, что задан элементарный квант информации об отношении предпочтения ЛПР (квант) w_i, w_j, если $y \in \mathbb{R}^n$ вида $y^i = w_i,\ y^j = w_j\ y^k = 0,\ k \neq i, j$ удовлетворяет выражению $y \succ_Y (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

Формальное определение может выглядеть громоздко, но его смысл прост – ЛПР готово пожертвовать w_j количеством критерия f_j, при этом получив взамен w_i единиц критерия f_i.

Как можно использовать полученный квант? Это делается следующим образом: пересчитываем старый критерий f и получаем новый f_1, где $f_1^j = f^i \times w_j + f^j \times w_i,\ f_1^k = f^k,\ k \neq j$. f_1 используем для пересчёта всех $y \in Y$, после чего отбрасываем те решения, которые попадают под действие аксиомы 1 (становятся доминируемыми) и, в зависимости от ситуации, продолжаем процесс сбора квантов или заканчиваем его, оглашая решение.

Теперь стоит привести пример использования элементарного кванта для принятия решения в области страхования: пусть имеется случайный риск X, который оценён экспертно с матожиданием $\mathbf{E}(X)$, страхователь (того, кого страхуют), обладает капиталом ω, p есть премия – гарантированный убыток. Тогда страхователю предлагаем на сравнение решения вида $(0, \mathbf{E}(X))$ и $(p, \mathbf{E}(X) + L)$, где L – общая сумма страховых выплат (может быть единовременной или растянутой во времени, условной и безусловной в зависимости от типа договора (полиса)). Может показаться, что такое сравнение довольно бессмысленно, однако это не так, ибо исходя из решения, принятого страхователем, мы сможем делать рекомендации в подобных ситуациях в будущем.

Рассмотрим также числовой пример, чтобы лучше понять механизм работы с квантами: пусть требуется выбрать полис на основе двух критериев. Первый – выгода. В качестве второго возьмём репутацию страховщика – естественно, что более известные и стабильные компании выглядят в глазах клиентов более привлекательными. Имеются варианты:

1. $L = 1000,\ R = -10$
2. $L = 500,\ R = -1$
3. $L = 700,\ R = -5$,

где R есть рейтинг страховщика. R отрицателен в силу того, что чем он меньше, тем лучше; вообще разные знаки значений критериев символизирует разность их сущности.

Пусть ЛПР сделал выбор между 1 и 2: $2 \succ_Y 1$. Из этого мы извлекаем квант: $w_1 = 500,\ w_2 = 9$. Пересчитываем критерий: $f_1 = (9 \times f^1 + 500 \times f^2,\ f^2)$ и варианты:

1. $L = 4000,\ R = -10$
2. $L = 4000,\ R = -1$
3. $L = 3800,\ R = -5$.

Таким образом, полис 2 признаётся лучшим – он по второму критерию лучше остальных, а по первому – не хуже двух других.

Можно заметить, что понятие элементарного кванта сильно ограничивает его область применимости, ведь в подавляющем большинстве случаем число критериев ≥ 3. Следовательно, логично было бы ввести понятие общего кванта информации (об отношении предпочтения ЛПР), которое уже совместимо с любым числом критериев.

Пусть n обозначает число критериев, $I = \{1, \ldots, n\}$ — множество номеров критериев.

Определение. Пусть $A,\ B \in I,\ A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$. Говорят, что задан (общий) квант информации об отношении предпочтения ЛПР (квант) для групп критериев $A,\ B$ вместе с наборами положительных параметров w_i^* для всех $i \in A$ и w_j^* для всех $j \in B$, если для вектора $y' \in \mathbb{R}^n$ вида

$$\begin{aligned} &y_i' = w_i^* && \text{для всех } i \in A, \\ &y_j' = -w_j^* && \text{для всех } j \in B, \\ &y_s' = 0 && \text{для всех } s \in I \setminus \{A \cup B\} \end{aligned}$$

выполняется $y' \succ_Y (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

Как можно видеть, пару индексов здесь мы заменили на пару подмножеств множества индексов, которые представляют собой группы критериев, сравнительную важность которых показывает квант.

Смысл понятия схож с таковым для элементарного кванта: ЛПР готово пожертвовать w_j^* количеством критериев f_j для всех $j \in B$, при этом получив взамен w_i^* единиц критерия f_i для всех $i \in A$. Такое определение предоставляет гораздо большую гибкость при выборе спектра решаемых задач.

Формула для пересчёта критериев здесь несколько меняется, при этом также происходит повышение размерности самого критерия до $p = n - |B| + |A| \times |B|$. Нетрудно догадаться, что данное обстоятельство может привести к определённым проблемам в вычислительном плане при большом количестве решений; обсуждением этого займёмся более подробно в следующей секции.

Можно здесь провести параллель с формулами принятия решения о заключении договора страхования, приведёнными выше – там выбор делался на основе аппарата актуарной математики, теперь же мы можем проделывать то же самое с помощью аксиоматического подхода.

§ 3.2. Вычислительные аспекты

В статье [10] рассмотрены формулы для пересчёта решений при работе с общим квантом; они предполагают умножение матриц с постоянно растущей размерностью. Как известно, операция умножения матриц является весьма затратной в вычислительном плане (в настоящее время достигнута сложность порядка $O(n^{2.37})$ [11], при этом известно, что она не может быть ниже $O(n^2)$), и требует некоторой степени оптимизации. В нашем случае специфические алгоритмы, применяемые, например, для разреженных матриц, неприменимы, кроме того, особенности предлагаемой программы (см. ниже) также требуют максимального понижения нагрузки на вычислительные устройства.

Предлагается рассмотреть два подхода: первый заключается в дроблении множества решений на части и выбора наилучшего решения для каждой из них в отдельности; при этом число шагов алгоритма (и размерности вспомогательных матриц) снижается, но сам он запускается несколько раз (для каждой части отдельно). Оставшиеся после пересчёта решения далее объединяются, и для них алгоритм запускается вновь. Нетрудно понять, что в данном случае возможны проблемы с корректностью (другими словами – соответствию аксиомам), кроме того, при небольшом количестве решений могут возникать вопросы целесообразности подхода в целом.

Второй подход состоит в оптимизации процесса получения у ЛПР критериев, так как степень сужения в каждом случае может кардинально разниться – отсечение только одного решения или же сразу половины всех. Очевидно, что решение такой задачи довольно сложно с чисто теоретической точки зрения (и многократно превосходит ментальные возможности автора), поэтому предлагается рассмотреть эвристические идеи: можно предлагать на сравнение решения $y^{'}, y^{''}$ с максимальной абсолютной суммарной разницей по всем критериям:

$$\max_{y^{'},y^{''}} \to \sum_{i=1}^{n} |y_i^{'} - y_i^{''}|,$$

с максимальной усреднённой абсолютной суммарной разницей по всем критериям:

$$\max_{y^{'},y^{''}} \to \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |y_i^{'} - y_i^{''}|,$$

или же с максимальной абсолютной разницей по какому-либо одному критерию:

$$\max_{y^{'},y^{''}} \to |y_i^{'} - y_i^{''}| \text{ для какого-либо } i \in I.$$

Более подробный разбор данной задачи планируется начать в аспирантуре.

§ 3.3. Принятие решений по схеме «обратной связи»

В страховании, грубо говоря, две стороны – клиент (страхователь) и фирма (страховщик), у каждой стороны свои задачи. Задачами клиента являются следующие:

1. Принять решение о страховании вообще;
2. Выбрать страховщика;
3. Выбрать конкретный продукт.

Для фирмы же стоят такие вопросы:

1. Принятие внутренних решений;
2. Сбор информации (квантов) от клиентов;
3. Подбор параметров продуктов.

Для решения этих задач предлагается следующее: через медиум (мобильное приложение – о нём ниже) фирма собирает от клиентов кванты, при этом последние получают продукт (с подобранными оптимальными параметрами) по своим предпочтениям, а первая – лучше понимает рынок и подбирает параметры.

§ 3.4. «Схема» программы

Представим теперь набросок «схемы» программы, предполагающийся для автоматизации как сбора квантов у ЛПР, так и для предоставления рекомендаций на основе предпочтений самому ЛПР. Программа предполагается мобильной (что связано со взрывным распространением портативных устройств – смартфонов, планшетов и проч. по всему миру и росту сопутствующих рынков). Она состоит из:

1. Удалённого сервера, занимающегося основными вычислениями, агрегацией входных данных (путём парсинга сайтов-каталогов), их накоплением, хранением и обработкой;

2. Графической оболочки (т.н. GUI – Graphical user interface, графический пользовательский интерфейс), позволяющей пользователю легко получать нужные рекомендации;

3. Вычислительно-технический блок на устройстве пользователя, позволяющий получать рекомендации даже при отсутствии доступа к сети Интернет;

4. Прочие службы.

Именно тот факт, что вычисления предполагаются к проведению как на мощном железе (на удалённом сервере), так и на слабом (на устройстве пользователя), разница в производительности между которыми может десятки тысяч раз, указывает на необходимость оптимизации соответствующих вычислений.

Остановимся отдельно на вопросе о парсинге сайтов. Сам данный процесс необходим для автоматизации начального этапа работы приложения – сбора данных об интересующих нас продуктах, выделение критериев и представление их в приемлемом для вычислений виде. Также в рамках этого блока предполагается решить важный вопрос о преобразовании нечисловых характеристик продуктов (дизайн, цвет и проч.) в численные и необходимость такого преобразования в принципе (оказывает ли такой критерий достаточное влияние на принятие решения для его учёта?).

Некоторые размышления приводят нас к следующей мысли – а что нам делать, если некоторые кванты, полученные от ЛПР в процессе его опроса, после их обработки приводят к неоднозначным результатам? Иными словами, один квант отбрасывает одну часть решений, другой квант эти решения оставляет но выбрасывает те, которые оставил первый?

В таком случае авторы теории предлагают рассмотреть понятие непротиворечивости набора квантов об отношении предпочтения ЛПР. Суть проверки на непротиворечивость сводится к проверке соблюдения аксиом, на которых построена теория, прежде всего, аксиомы о транзитивности. Такая проверка обязательно должна быть включена в вычислительный алгоритм программы как на сервере, так и на устройстве пользователя для избежания получения конфликтующих между собой результатов.

Более подробный разбор данной задачи также планируется начать в аспирантуре (при условии приобретения автором каких-либо знаний в сфере программирования).

§ 3.5. Смежные задачи

Стоит заметить, что рассматриваемый нами аксиоматический подход носит довольно универсальный характер, и сфера его применения не ограничивается рассмотренным выше. Перечислим некоторые задачи, которые могут представлять потенциальный интерес.

1. Нетрудно заметить, что в рамках работы схемы обратной связи мы фактически получаем для ЛПР рекомендацию наиболее соответствующего их его предпочтениям продукта (в нашем случае страхового полиса; на деле же это может быть что угодно), чем также занимаются рекомендательные системы. Естественно было бы попробовать использовать какую-нибудь известную рекомендательную систему в тандеме с нашим подходом для уточнения рекомендации. Естественно, требует рассмотрения вопрос об эффективности такого взаимодействия, в частности, о передачи данных одно компонента цепочки другому.

2. Выше мы рассматривали для компании задачу подбора оптимальных параметров своих продуктов; однако же естественным образом может рассматриваться также задача о принятии решений в целом – о закупках, найме сотрудников и их назначениях и проч. С помощью аксиоматического подхода предпочтения всего руководящего состава могут быть учтены и рассмотрены относительно наилучшим образом.

3. В продолжение предыдущего пункта стоит задуматься о так называемом process mining'e – автоматическом построении моделей бизнес-процессов на основе существующих event log'ов. Аксиоматический подход может быть использован для оценки и улучшения полученных моделей.

4. Интересной представляется идея т.н. немого кванта. Если для ЛПР имеются данные об истории поиска, то из них можно извлечь квант по следующему принципу: предполагаем, что самый просматриваемый продукт предполагается предпочтительным ко всем менее просматриваемым, и так далее по «просматриваемости». На основе немого кванта производим пересчёт решений, устанавливаем приемлемое количество и продолжаем процесс до тех пор, пока не достигнем его. Естественно, требуется более формальное обоснование легитимности такого подхода.

5. Исходной задаче можно придать несколько иную формулировку в духе других областей математики. Как уже было замечено, сама схема обратной связи находит своим прообразом системы с обратной связью из теории динамических систем. В связи с этим встаёт естественный вопрос – нельзя ли нашу схему формально превратить в систему обратной связью? Безусловно, ответ на данный вопрос будет следовать из двух соображений – целесообразность (дадут ли нам какие-то преимущества полученные инструменты для работы с динамическими системами?) и вообще техническая возможность такой переформулировки (можно ли построить динамическую систему, в каком-то смысле эквивалентную описанной нами схеме?). То же самое можно сказать и о переформулировке теоретико-игрового толка.

Часть этих задач планируется к рассмотрению в рамках учёбы в аспирантуре.

Заключение

К основным результатам работы относятся:

1. Мотивированный выбор и исследование инструментов различных математических областей, необходимых для решения прикладных задач актуарной математики;

2. Рассмотрение и модификация одной актуарной модели с проведением численных расчётов;

3. Прослеживание общей техники математического моделирования с прохождением всех её этапов;

4. Разбор применения аксиоматической теории выбора в страховании (и не только) и рассмотрение возникающих при таком подходе технических аспектов (вычислительно-алгоритмических);

5. Предложена схема «обратной связи» для принятия решений, соответствующих предпочтениям сторон;

6. По результатам работы к печати подготовлены статьи ([12], [13]) и представлены доклады на конференциях: L Международная научная конференция аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость» Control Processes and Stability (CPS'19) и IV Stability and Control Processes Conference in memory of Prof. Vladimir Zubov.

Список литературы

1. Официальный сайт Центрального Банка РФ [Электронный ресурс]: URL:https://www.cbr.ru/insurance/reporting_stat/ (дата обращения: 02.03.2021).

2. Фалин Г. И. Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Анкил, 2002. 261 с.

3. Викторова В. С., Степанянц А. С. Модели и методы расчета надежности технических систем. М.: ЛЕНАНД, 2014. 256 с.

4. Дорофеев Б. В., Замураев К. А, Смирнов Н. В. Актуарные расчеты в пенсионном страховании (Конспект лекций), СПб.: Издательский Дом Федоровой Г.В., 2018. 50 с.

5. Bowers N. L., Gerber H. U., Hickman J. C., Jones D. A, Nesbitt C. J. Actuarial Mathematics, 2nd ed. The Society of Actuaries, 1997.

6. Буре В. М., Парилина Е. М. Теория вероятностей и математическая статистика, СПб.: Лань, 2013. 416 с.

7. Малыхин В. И. Социально-экономическая структура общества: Учеб. пособие для вузов, М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. 175 с.

8. Официальный сайт Центрального Банка РФ [Электронный ресурс]: URL:http://www.cbr.ru/statistics/?PrtId=int_rat (дата обращения: 02.03.2021).

9. Ногин В. Д. Сужение множества Парето: аксиоматический подход, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2018. 272 с.

10. Басков О. В. Алгоритм последовательного учета информации об относительной важности критериев в задаче многокритериального выбора // Процессы управления и устойчивость: Труды 41-й международной науч-

ной конференции аспирантов и студентов / под ред. Н. В. Смирнова, Г. Ш. Тамасяна. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2010. С. 553–558.

11. Википедия [Электронный ресурс]: URL:https://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_multiplication_algorithm (дата обращения: 05.03.2021).

12. Sachkov A. V. Actuarial calculations and random interest rates // Процессы управления и устойчивость. 2019. Т. 6. № 1. С. 495–498.

13. Sachkov A. V. Choice Modeling in Insurance // IV Stability and Control Processes Conference in memory of Prof. Vladimir Zubov. 2020.