Санкт-Петербургский государственный университет

Математика

Кафедра дифференциальных уравнений

Чермных Александр Сергеевич

Кубические нормальные формы, их классификация и фазовые портреты

Выпускная квалификационная работа аспиранта

Научный руководитель:
к. ф.-м. н. доцент Басов В.В.

Рецензент:
к. ф.-м. н. доцент Иванов Б.Ф.

Санкт-Петербург
2021

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Mathematics

Chair of differential equations

Aleksandr Chermnykh

Cubic normal forms, their classification and phase portraits

Postgraduate Thesis

Scientific supervisor:
professor Vladimir Basov

Reviewer:
professor Boris Ivanov

Saint-Petersburg
2021

Аннотация

Рассматриваются автономные двумерные однородные кубические системы, в которых многочлены в правой части имеют линейный общий множитель или являются взаимно простыми. Множество таких систем разбивается на классы линейной эквивалентности, в каждом из которых на основании определенным образом введенных принципов выделяется простейшая система – нормальная форма третьего порядка, задаваемая матрицей коэффициентов своей правой части, которая называется канонической формой (КФ). Каждая КФ имеет свою структуру расположения ненулевых элементов, их определенную нормировку и каноническое множество допустимых значений для ненормированных элементов, относящее КФ в выбранному классу эквивалентности. Помимо классификации для КФ приводятся: a) условия на коэффициенты исходной системы, b) линейные неособые замены, преобразующие правую часть системы при этих условиях в выбранную КФ, c) получаемые значения ненормированных элементов КФ. Предложенная классификация в первую очередь создавалась для получения всех возможных структур обобщенных нормальных форм систем с КФ в невозмущенной части. В работе также приведена топологическая классификация систем с простейшими КФ в правой части с описанием метода ее получения.

Ключевые слова: однородная кубическая система, нормальная форма, каноническая форма.

Abstract

We consider autonomous two-dimensional homogeneous cubic systems in which the polynomials in the right-hand part have a linear common factor or are mutually prime. A set of such systems is divided into classes of linear equivalence, wherein the simplest system being a third-order normal form is distinguished on the basis of properly introduced principles. Such a form is defined by the matrix of its right-hand part coefficients, which is called the canonical form (CF). Each CF has its own arrangement of non-zero elements, their specific normalization and canonical set of permissible values for the unnormalized elements, which relates the CF to the selected class of equivalence. In addition to classification, the CFs are provided with: a) conditions on the coefficients of the initial system, b) non-singular linear substitutions that reduce the right-hand part of the system under these conditions to the selected CF, c) obtained values of CF's unnormalized elements. The proposed classification was primarily created to obtain all possible structures of generalized normal forms for systems with CF in the unperturbed part. We also provide a topological classification of systems with the simplest CFs in the right-hand part with a description of the method for obtaining it.

Keywords: homogeneous cubic system, normal form, canonical form.

Содержание

1. Введение.

1.1. Постановка задачи. 2

1.2. Линейная эквивалентность однородных кубических систем. 4

1.3. Структурные формы. 6

1.4. Нормированные структурные формы и допустимые множества. 7

2. Однородные кубические системы с линейным общим множителем.

2.1. Запись и линейная эквивалентность систем при $l = 1$. 9

2.2. Выделение канонических форм и их допустимых множеств. 10

2.3. Выделение канонических и минимальных множеств для $\mathrm{CF}^{m,1}$. 13

2.4. Три класса линейной эквивалентности систем при $l = 1$. 18

2.5. Сведение систем из первых двух классов к $\mathrm{CF}^{m,1}$ $(m = 2, 3, 4)$. 20

2.6. Сведение систем из третьего класса к $\mathrm{CF}^{m,1}$. 23

2.7. Обобщение результатов для случая $\mathrm{l} = 1$. 31
3. Однородные кубические системы без общего множителя.
3.1. Выделение канонических форм и канонических множеств. 34
3.2. Сведение исходной системы к каждой из $\mathrm{CF}^{\mathrm{m},0}$ при $\mathrm{m} = 2, 3$. 38
4. Топологическая классификация однородных кубических систем с $\mathbf{l} = \mathbf{0}$.
4.1. Описание метода получения топологической классификации. 42
4.2. Фазовые портреты систем с каждой из $\mathrm{CF}^{\mathrm{m},0}$ при $\mathrm{m} = 2, 3$. 46
5. Заключение. 47
Список литературы. 48

1. Введение

1.1. Постановка задачи.

Рассматриваем вещественную двумерную однородную кубическую систему ОДУ
$$\dot{x} = P(x), \tag{1.1}$$
где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} P_1(x) \\ P_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x_1^3 + b_1x_1^2x_2 + c_1x_1x_2^2 + d_1x_2^3 \\ a_2x_1^3 + b_2x_1^2x_2 + c_2x_1x_2^2 + d_2x_2^3 \end{pmatrix}$, $P_1, P_2 \not\equiv 0$.

Пусть вещественная неособая линейная замена
$$x = Ly \quad (\det L \neq 0) \tag{1.2}$$
преобразует (1.1) в систему
$$\dot{y} = \widetilde{P}(y) \qquad (\widetilde{P}_i = \tilde{a}_i y_1^3 + \tilde{b}_i y_1^2 y_2 + \tilde{c}_i y_1 y_2^2 + \tilde{d}_i y_2^3, \quad i = 1, 2). \tag{1.3}$$

В работе [1] была поставлена задача определения и конструктивного построения кубических нормальных форм вида (1.3), которые можно получить из системы (1.1) посредством замен (1.2). Для этого потребовалось осуществить классификацию множества систем (1.1) путем разбиения векторных многочленов $P(x)$ на классы линейной эквивалентности. Основные линейные инварианты были получены [1, раздел 2].

В [1, разделы 1.2-1.4] всесторонне изучены проблемы, возникающие при нормализации возмущенных систем с многочленами P в невозмущенной части, и выяснены условия, при которых они минимизируются. На основании проведенных исследований для каждого класса эквивалентности в [2, раздел 1] были разработаны структурные и нормировочные принципы, позволяющие вполне упорядочить многочлены $\widetilde{P}$, получаемые в результате замены (1.2), и, тем самым, теоретически выделить в каждом классе образующую – самый простой векторный многочлен $\widetilde{P}$, называемый канонической формой (КФ).

Оказалось, что любую КФ можно отождествить с матрицей коэффициентов многочлена $\widetilde{P}$, расположение нулевых элементов в которой фиксировано, а для ненулевых должны быть указаны канонические множества, описывающие их допустимые значения. Систему с КФ в правой части естественно называть кубической нормальной формой.

Наряду с задачей практического нахождения всех КФ в [1,раздел 1.1] были поставлены также четыре дополняющие ее технические вычислительные задачи, позволяющие эффективно использовать разработанную классификацию на практике. Они заключаются в том, чтобы для каждой КФ в явном виде выписать:

a) условия на коэффициенты векторного многочлена $P(x)$;

b) замену (1.2), преобразующую $P(x)$ при указанных условиях в выбранную КФ;

c) получаемые при этом значения элементов КФ из канонического множества;

d) минимальное каноническое множество, в котором отсутствуют те значения элементов, от которых можно избавиться заменой (1.2), сохраняющей структуру КФ.

В [2, p. 2] все поставленные задачи решены в случае, когда многочлены P_1 и P_2 пропорциональны, т. е. имеют общий множитель третьей степени.

В работах [3] и [4] задачи эти решены, когда многочлены P_1 и P_2 имеют общий множитель второй степени.

Основная цель предлагаемой работы заключается в получении аналогичных результатов для случаев, когда P_1 и P_2 обладают линейным общим множителем, и когда они взаимно просты. Эти результаты опубликованы в работах [5] и [6].

Следует иметь в виду, что большое количество символьных вычислений, связанных со всевозможными линейными преобразованиями однородных кубических систем, их нормировкой и выделением общего множителя различных степеней, а также с решением различных алгебраических систем и уравнений, высоких степеней с параметрами невозможно без применения символьной математики. Для этих целей используется аналитический пакет Maple. В нем был написан набор стандартных процедур, используя которые для доказательства практически каждого утверждения были созданы соответствующие программы Maple.

Кроме того, в работе [1, p. 1] можно найти более подробную постановку задачи, которая включает в себя:

1) вывод связующей системы для возмущенных систем, зависящей исключительно от коэффициентом многочлена P, и выделение тех групп коэффициентов P, обнуление которых облегчает решение связующей системы, а значит, позволяет осознанно сформулировать структурные и нормировочные принципы, положенные в основу классификации систем (1.1), и выделить в линейно эквивалентных классах систем простейшие: те, правые части которых образуют канонические формы;

2) описание метода резонансных уравнений, позволяющего для возмущенных систем с какой-либо КФ в невозмущенной части дать конструктивное определение обобщенной нормальной формы с очевидным доказательством ее существования и выписать в явном виде все возможные структуры обобщенных нормальных форм, разумеется только для тех КФ, для которых удается решить связующую систему или хотя бы выписать резонансные уравнения, гарантирующие ее совместность;

3) обсуждение проблем и имеющихся результатов в близких по постановке задачах, когда в системе (1.1) рассматриваются квазиоднородные векторные многочлены $P(x)$ с определенными весами переменных или когда степени многочленов P_1 и P_2 принимают всевозможные значения от единицы до трех.

Также в работе рассматривается метод определения фазового портрета систем (1.1) с многочленами P_1 и P_2, не имеющими общего множителя, и проведена топологическая классификация соответствующих систем с простейшими КФ в правой части. Поведение траекторий системы исследуется на бесконечности с помощью проекции на сферу Пуанкаре (см. [7]) с целью определить топологическую структуру системы в целом.

Остановимся в заключение на структуре предлагаемой работы.

Во введении приведены необходимые для дальнейшего определения и результаты, полученные в работах [1, p. 2] и [2, p. 1].

Раздел 2 целиком посвящен случаю, когда многочлены P_1, P_2 системы (1.1) имеют вещественный общий множитель степени один.

В 2.1–2.4 предложена удобная форма записи системы, множество систем разбивается на три линейно неэквивалентных класса, и приведен полный список канонических форм со своими допустимыми и каноническими множествами.

В 2.5–2.6 последовательно рассматривается каждый из трех классов. Доказываются соответствующие им леммы о сведении к каноническим формам.

В 2.7 собраны в единую теорему все полученные результаты для случая линейного множителя.

В разделе 3 рассматривается случай взаимно простых многочленов P_1, P_2.

В 3.1 приведен список канонических форм с $m \leq 4$, где m – число ненулевых элементов формы, со своими каноническими множествами. К сожалению, получить КФ с $m \geq 5$ не представляется возможным из-за непреодолимых технических трудностей.

В 3.2 в исследован вопрос о том, при каких условиях исходная система сводится к какой-либо из выделенных канонических форм с $m \leq 3$. Для этого исходная система предварительно сводится к системе с одним нулевым коэффициентом и одним нормированным.

Наконец, в разделе 4 рассматривается задача определения фазового портрета системы (1.1) с P_1, P_2 без общего множителя.

В 4.1 кратко излагается способ исследования поведения траекторий системы на бесконечности, и указан метод получения топологической классификации.

В 4.2 получена топологическая классификация систем, соответствующих каноническим формам с $m \leq 3$, а именно: указаны фазовые портреты в круге Пуанкаре для всех значений параметров из канонических множеств.

1.2. Линейная эквивалентность однородных кубических систем.

Рассмотрим вещественную двумерную однородную кубическую систему

$$\dot{x} = P(x) \quad \text{или} \quad \dot{x} = A\, q^{[3]}(x), \tag{1.4}$$

в которой $P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 x_1^3 + b_1 x_1^2 x_2 + c_1 x_1 x_2^2 + d_1 x_2^3 \\ a_2 x_1^3 + b_2 x_1^2 x_2 + c_2 x_1 x_2^2 + d_2 x_2^3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, $x = \operatorname{colon}(x_1, x_2)$, $q^{[3]}(x) = \operatorname{colon}(x_1^3, x_1^2 x_2, x_1 x_2^2, x_2^3)$, причем строки $A_1, A_2 \neq 0$.

Соглашение 1.1. *В дальнейшем для краткости матрицу коэффициентов A будем отождествлять с системой* (1.4) *или говорить, что A порождает систему* (1.4).

Определение 1.1. *Любой однородный многочлен с вещественными коэффициентами, являющийся общим множителем P_1 и P_2, будем обозначать P_0. Общий множитель P_0 максимальной степени l $(l = 1, 2, 3)$ будем обозначать P_0^l. При отсутствии общего множителя будем считать, что $l = 0$.*

Для векторов $r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$ введем функцию $\delta_{rs} = \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{vmatrix} = r_1 s_2 - r_2 s_1$.

Установить наличие или отсутствие общего множителя у любых двух многочленов позволяет функция $R = R(P_1, P_2)$, называемая результантом:

$$R=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 & 0\\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0\\ 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & 0 & 0\\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & 0\\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix} = \delta_{ad}^3+\delta_{ac}^2\delta_{cd}+\delta_{ab}\delta_{bd}^2-2\delta_{ab}\delta_{ad}\delta_{cd}-\delta_{ab}\delta_{bc}\delta_{cd}-\delta_{ac}\delta_{ad}\delta_{bd}.$$

Утверждение 1.1. *Многочлены P_1, P_2 имеют вещественный общий множитель P_0 ненулевой степени тогда и только тогда, когда $R(P_1,P_2)=0$.*

Для упрощения системы (1.4) будем использовать линейные неособые замены

$$\begin{cases} x_1 = r_1y_1+s_1y_2\\ x_2=r_2y_1+s_2y_2\end{cases} \qquad \text{или} \qquad x=Ly, \quad L=\begin{pmatrix} r_1 & s_1\\ r_2 & s_2\end{pmatrix}, \quad \delta=\det L\neq 0. \tag{1.5}$$

Пусть замена (1.5) преобразует систему (1.4) в систему

$$\dot y=\widetilde P(y) \ \text{ или } \ \dot y=\widetilde A\, q^{[3]}(y), \tag{1.6}$$

где $\widetilde P=\begin{pmatrix}\widetilde P_1\\ \widetilde P_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde a_1y_1^3+\tilde b_1y_1^2y_2+\tilde c_1y_1y_2^2+\tilde d_1y_2^3\\ \tilde a_2y_1^3+\tilde b_2y_1^2y_2+\tilde c_2y_1y_2^2+\tilde d_2y_2^3\end{pmatrix}$, $\widetilde A=\begin{pmatrix}\tilde a_1 & \tilde b_1 & \tilde c_1 & \tilde d_1\\ \tilde a_2 & \tilde b_2 & \tilde c_2 & \tilde d_2\end{pmatrix}$.

Для многочленов $\widetilde P_1, \widetilde P_2$ по аналогии с R введем результант $\widetilde R=R(\widetilde P_1,\widetilde P_2)$.

В [1, p. 2.2] для системы (1.6) получены следующие формулы

$$\widetilde P(y)=L^{-1}P(Ly)=L^{-1}Aq^{[3]}(Ly), \qquad \widetilde R=\delta^6R,$$
$$\widetilde A=\delta^{-1}\begin{pmatrix} \delta_{P(r)s} & s_1\delta_{\frac{\partial P(r)}{\partial r_1}s}+s_2\delta_{\frac{\partial P(r)}{\partial r_2}s} & r_1\delta_{\frac{\partial P(s)}{\partial s_1}s}+r_2\delta_{\frac{\partial P(s)}{\partial s_2}s} & \delta_{P(s)s}\\ -\delta_{P(r)r} & -s_1\delta_{\frac{\partial P(r)}{\partial r_1}r}-s_2\delta_{\frac{\partial P(r)}{\partial r_2}r} & -r_1\delta_{\frac{\partial P(s)}{\partial s_1}r}-r_2\delta_{\frac{\partial P(s)}{\partial s_2}r} & -\delta_{P(s)r}\end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Среди замен (1.5), преобразующих (1.4) в (1.6), выделим две специальные замены:

$$\begin{pmatrix} r_1 & 0\\ 0 & s_2\end{pmatrix} \text{ – нормировка,} \qquad \widetilde A=\begin{pmatrix} a_1r_1^2 & b_1r_1s_2 & c_1s_2^2 & d_1s_2^3/r_1\\ a_2r_1^3/s_2 & b_2r_1^2 & c_2r_1s_2 & d_2s_2^2\end{pmatrix}; \tag{1.8}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \text{ – перенумерация,} \qquad \widetilde A=\begin{pmatrix} d_2 & c_2 & b_2 & a_2\\ d_1 & c_1 & b_1 & a_1\end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Замечание 1.1. Нормировка (1.8) имеет следующие особенности:
1) назовем a_2, b_1, c_2, d_1 элементами нечетного зигзага, a_1, b_2, c_1, d_2 – четного, тогда у всех элементов нечетного зигзага можно одновременно изменить знак, а у любого элемента из четного зигзага знак изменить нельзя;
2) любое из отношений a_1/b_2, b_1/c_2, c_1/d_2 на диагоналях изменить нельзя.

Замечание 1.2. Если в системе, полученной после замены $L=(r,s)$, потребуется перенумерация, то лучше в исходной системе сразу сделать замену $L=(s,r)$.

В то же время перенумерация (1.9) позволяет договориться о следующем.

Соглашение 1.2. *В дальнейшем, не уменьшая общности, будем считать, что в системе* (1.4) *при* $l=1,2,3$,

$$a_1^2+a_2^2\neq 0, \quad \textit{если} \quad a_1^2+a_2^2+d_1^2+d_2^2\neq 0. \tag{1.10}$$

1.3. Структурные формы.

Базовым понятием развиваемой теории является понятие структурной формы.

Определение 1.2. *Вещественную матрицу* $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ *с ненулевыми строками будем называть объединенной структурной* m*-формой* ($m = \overline{2,8}$) *и обозначать* USF^m *(united structural form), если какие-либо* m *ее элементов отличны от нуля, а остальные равны нулю. Конечное множество, объединяющее все* USF^m*, будем обозначать* $SUSF^m$ *(set of* USF^m*).*

Очевидно, что объединенные структурные m-формы отличаются одна от другой различным расположением мест для ненулевых элементов.

В дальнейшем для краткости любую USF^m можно будет записывать по строкам, указывая в каждой только ненулевые элементы, напр., $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix} = (a_1, c_1; d_2)$.

Рассмотрим всевозможные расстановки ненулевых элементов в $SUSF^m$ $(m = \overline{2,8})$.

Определение 1.3. *Индексом элемента* a_{ij} $(i = 1, 2;\ j = 1, 2, 3, 4)$ *матрицы* A *будем называть число, стоящее на месте* (i, j) *в матрице* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. *В свою очередь, индексом* k *матрицы* A *будем называть сумму индексов ненулевых элементов* A *и при необходимости писать* $A_{[k]}$. *Аналогично вводятся индексы строк* A_1 *и* A_2.

В [2, 1.1] должным образом введены структурные принципы (СП), позволяющие вполне упорядочить конечное множество $SUSF = \bigcup_{m=2}^{8} SUSF^m$ и, в том числе, все входящие в него пары USF^m, получаемые друг из друга при перенумерации (1.9).

Определение 1.4. *Из двух различных объединенных структурных* m*-форм, получаемых друг из друга перенумерацией, форму, являющуюся согласно* СП *предшествующей, будем называть структурной* m*-формой, при желании добавляя основная, и обозначать* SF^m*, а другую – дополнительной и обозначать* SF_a^m *(additional* SF*).*

Очевидно, что имеется также определенное количество "симметричных" структурных m-форм, т. е. таких SF^m, которые не изменяются в ходе перенумерации (1.9).

Поскольку любая пара, состоящая из основной и дополнительной структурных форм линейно эквивалентна, то "худшая" с точки зрения СП дополнительная форма самостоятельного интереса не представляет, но использовать ее иногда будет удобно.

Соглашение 1.3. *Согласно введенной упорядоченности сопоставим любой основной структурной* m*-форме порядковый номер* i *и будем обозначать ее* SF_i^m*, а дополнительную к ней структурную форму –* $SF_{a,i}^m$*.*

В [2, 1.1] приведен Список 1.1, состоящий из 120 упорядоченных структурных форм, входящих в $SUSF$.

Определение 1.5. *Представителем произвольной* SF_i^m *будем называть любую числовую матрицу, структура нулей которой совпадает со структурой* SF_i^m*.*

Итак, любую SF_i^m можно трактовать как совокупность всех ее представителей.

Важная характеристика SF_i^m связана с определением всех возможных значений максимальной степени общего множителя P_0^l (см. опр. 1.1), который можно выносить в правой части порожденной этой структурной формой системы (1.4) при различных значениях ненулевых коэффициентов. Поэтому множество вещественных ненулевых значений элементов любой SF_i^m разобьем на непустые множества $s_i^{m,l}$ $(0 \le l \le 3)$ следующим образом: $s_i^{m,l}$ содержит те и только те значения элементов SF_i^m, при которых в правой части системы (1.4), порожденной этой формой, можно вынести общий множитель P_0^l.

Определение 1.6. *Для любой SF_i^m, задаваемой матрицей A, запись $SF_i^{m,l}$ означает ту же матрицу A, но значения ее ненулевых элементов принадлежат $s_i^{m,l} \neq \emptyset$.*

Иными словами, $SF_i^{m,l}$ объединяет тех и только тех представителей SF_i^m, чьи элементы принадлежат $s_i^{m,l}$, или, что то же самое, $SF_i^{m,l}$ порождает только такие системы, правые части которых имеют общий множитель максимальной степени l.

Из определения (1.6) и теоремы 2.3 [1, 2.6] вытекает следующее утверждение.

Утверждение 1.2. *SF_i^{m,l_1} линейно не эквивалентна SF_i^{m,l_2} при $l_1 \neq l_2$, т. е. любые два представителя SF_i^{m,l_1} и SF_i^{m,l_2} линейно не эквивалентны.*

Если SF_i^m имеет только одно множество $s_i^{m,l_0} \neq \emptyset$, то, очевидно, $SF_i^{m,l_0} = SF_i^m$.

1.4. Нормированные структурные формы и допустимые множества.

Следующим шагом на пути к определению канонической формы станет введение понятия нормированной структурной формы, основанного на нормировке при помощи замены (1.8) всех представителей $SF_i^{m,l}$ с целью получения на двух, как правило (см. зам. 1.1), должным образом выбранных местах единичных по модулю элементов.

В [2, 1.2] приведены нормировочные принципы (НП) выбора нормируемых элементов матрицы A, позволяющие осуществить нормировку любой из 120 SF_i^m, т. е. однозначно выбрать в ней места для нормируемых элементов и значения, которые должны получить элементы на этих местах после нормировки. При этом нормирующая замена (1.8) определяется однозначно для всех SF, кроме $SF_3^{2,2}$ и $SF_4^{2,2}$, для которых элемент s_2 в замене произволен и может быть выбран, например, единицей (см. зам. 1.1).

Итак, представители любой $SF_i^{m,l}$ (числовые матрицы заданной структуры с элементами из $s_i^{m,l}$) разбиваются на классы эквивалентности относительно нормирующих замен (1.8), а в качестве образующих берутся нормированные представители.

Определение 1.7. *$SF_i^{m,l}$ будем называть нормированной структурной формой и обозначать $NSF_i^{m,l}$ (normalized SF), если она объединяет только своих нормированных в соответствии с НП представителей.*

Соглашение 1.4. *Любую нормированную структурную форму A будем записывать в виде σB, где вынесенный из матрицы A множитель σ равен знаку первого нормированного элемента. Оставшиеся ненормированными ненулевые элементы матрицы B, если таковые имеются, будем должным образом выражать через переменные, называемые в дальнейшем параметрами NSF и функции от них. Также при необходимости будем записывать NSF как функцию от своих параметров.*

Тем самым, параметры NSF, обозначаемые $u, v, w, \dots$, всегда предполагаются отличными от нуля. Например, $NSF_7^{5,1} = NSF_7^{5,1}(\sigma, u, v) = \sigma \begin{pmatrix} u & v & v-u & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, но при этом $v \neq u$, иначе $m \neq 5$.

Соглашение 1.4 позволяет в матрице B, используемой в дальнейшем для нормализации возмущенных систем, получить максимальное количество единиц, а множитель σ, если он окажется отрицательным, заменой времени можно сделать равным единице.

Так, $SF_2^{2,1} = (a_1; c_2)$ заменой (1.8) может быть сведена к $NSF_2^{2,1} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ с $\sigma = \operatorname{sign} a_1$. Здесь нормируемые элементы расположены на разных зигзагах, и согласно замечанию 1.1 на знак элемента из четного зигзага повлиять невозможно, поэтому он выносится в виде множителя σ. А знак нормируемого элемента из нечетного зигзага всегда можно сделать равным σ, что и требуется в НП.

Определение 1.8. *Если все ненулевые элементы $SF_i^{m,l}$ расположены только на одном из зигзагов, из-за чего второй нормированный элемент в матрице B при его наличии может равняться как единице, так и минус единице (будем обозначать его κ), то получаемую NSF будем называть двойственной и обозначать $NSF_{i,\kappa}^{m,l}$.*

Отметим, что для $NSF_i^{m,l}$ по сравнению с $SF_i^{m,l}$ существенно облегчается практическое написание условий, фиксирующих максимальную степень l общего множителя.

Так, $NSF_7^5 = \sigma \begin{pmatrix} u & v & w & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ есть $NSF_7^{5,2}$ при $-v$, $w = u$; $NSF_7^{5,1}$ при $w = v - u$; $NSF_7^{5,0}$, если не выполняются перечисленные выше ограничения на параметры.

Определение 1.9. *Значения параметров, при которых определена произвольная $NSF_i^{m,l}$, будем называть допустимыми. Объединение допустимых значений параметров для каждой из форм будем называть допустимым множеством и обозначать $ps_i^{m,l}$ (permissible set). Допустимое множество будем называть тривиальным и обозначать $tps_i^{m,l}$ (trivial ps), если входящие в него параметры ограничений не имеют.*

1.5. Канонические множества и канонические формы. Итак, рассмотрим произвольную $NSF_i^{m,l}$ матрицу, имеющую m ненулевых элементов с заданным расположением, фиксирующим i – ее порядковый номер в $SUSF^m$ согласно введенным СП. Наконец, l – это степень общего множителя P_0^l, который выносится из правой части системы, порожденной любым представителем $NSF_i^{m,l}$. Согласно утверждению 1.2 l инвариантна относительно линейных неособых замен.

Отметим, что получение нормированных структурных форм – это формальная работа, требующая только нормировки (1.8), т. е. замены, не затрагивающей структуры порождающей эти формы матрицы A.

Теперь же станем упрощать $NSF_i^{m,l}$, сводя их посредством подходящих линейных неособых замен (1.5) при определенных значениях параметров из $ps_i^{m,l}$ к предшествующим структурным формам, т. е. к $SF_j^{n,l}$ с $n < m$ или с $j < i$ при $n = m$.

В связи с этим следует иметь в виду следующие два соображения.

С одной стороны, практически каждая $NSF_i^{m,l}$ может сводиться к предшествующим $SF_j^{n,l}$, т. е. имеет "лишних" представителей, линейно эквивалентных каким-либо представителям предшествующих форм. Значения параметров, допускающие таких представителей, надо удалять из $ps_i^{m,l}$.

С другой стороны, те $NSF_i^{m,l}$, которые при всех допустимых значениях своих параметров линейно эквивалентны каким-либо предшествующим формам, самостоятельного интереса не представляют, поскольку не могут выступать в роли "простейших".

Определение 1.10. *Непустое множество, содержащее те и только те значения параметров из $ps_i^{m,l}$, при которых $NSF_i^{m,l}$ линейно не эквивалентна никакой предшествующей SF, будем называть каноническим и обозначать $cs_i^{m,l}$ (canonical set).*

Определение 1.11. *Любую $NSF_i^{m,l}$ будем называть канонической формой и обо-*

значать $CF_i^{m,l}$ (canonical form), если ее параметры принадлежат $cs_i^{m,l}$.

Таким образом, матрицы $CF_i^{m,l}$ и $NSF_i^{m,l}$ выглядят одинаково, но параметры $CF_i^{m,l}$ принадлежат $cs_i^{m,l}$ – это $ps_i^{m,l}$, из которого удалены те значения, параметров при которых представители $NSF_i^{m,l}$ заменами (1.5) сводятся к предшествующим SF.

Утверждение 1.3. *Любые две канонические формы линейно не эквивалентны.*

Это очевидное утверждение означает, что никакие два представителя различных CF или, что то же самое, никакие две системы (1.4), порожденные соответствующими числовыми матрицами, не могут быть связаны линейной неособой заменой.

В ряде случаев канонические множества параметров удается дополнительно ограничить при помощи линейных замен, преобразующих CF в себя.

Определение 1.12. *Каноническое множество любой $CF_i^{m,l}$ будем называть минимальным и обозначать $mcs_i^{m,l}$ (minimal cs), если найдена линейная неособая замена, преобразующая $CF_i^{m,l}$ в себя и позволяющая ограничить значения элементов $cs_i^{m,l}$, а именно, если это возможно, то хотя бы один из неединичных элементов получен ограниченным сверху и (или) снизу и (или) зафиксирован знак множителя σ.*

Таким образом, если $CF_i^{m,l}$ не содержит параметров или их невозможно ограничить, то автоматически $cs_i^{m,l} = mcs_i^{m,l}$, т. е. является минимальным.

Определение 1.13. *Множество, содержащее те значения параметров из $cs_i^{m,l}$, от которых удается избавиться при помощи линейных неособых замен, переводящих $CF_i^{m,l}$ в себя, будем называть дополнительным и обозначать $acs_i^{m,l}$ (additional cs).*

Тем самым, $mcs_i^{m,l} = cs_i^{m,l} \backslash acs_i^{m,l}$.

Соглашение 1.5. *В дальнейшем: 1) Запись “$\ldots\ \zeta = [\,\varsigma_1 \vee \upsilon_1\,]\ \ldots\ \eta = [\,\varsigma_2 \vee \upsilon_2\,]\ \ldots$” будет означать, что или $\zeta = \varsigma_1,\ \eta = \varsigma_2$, или $\zeta = \upsilon_1,\ \eta = \upsilon_2$; 2) условие, заключенное в круглые скобки и записанное после другого условия, не является требованием, а приводится в качестве напоминания для лучшего восприятия последующих рассуждений; 3) в формулировках результатов отличие от нуля выражений, стоящих в знаменателе, не является предположением, а устанавливается в ходе доказательства.*

2. Однородные кубические системы с линейным общим множителем

2.1. Запись и линейная эквивалентность систем при $\mathbf{l = 1}$.

У системы (1.4) $\dot{x} = P(x)$ при $l = 1$ $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$ согласно соглашению 1.2, иначе $P_0 = x_1x_2$ и $l \geq 2$, поэтому она может быть записана в виде

$$\dot{x} = P_0^1(x)\, G\, q^{[2]}(x), \tag{2.1}$$

где общий множитель $P_0^1 = x_1 + \beta x_2$ $(\beta \in \mathbb{R}^1)$, матрица $G = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & t_1 \\ p_2 & q_2 & t_2 \end{pmatrix}$, $q^{[2]} = \operatorname{colon}(x_1^2,\, x_1x_2,\, x_2^2)$, при этом $p_1^2 + p_2^2 \neq 0$, $t_1^2 + t_2^2 \neq 0$, иначе $l > 1$, а построенный по многочленам $p_iz^2 + q_iz + t_i$ $(i = 1, 2)$ результант $R_2 = \delta_{pt}^2 - \delta_{pq}\delta_{qt} \neq 0$.

Число β и элементы G системы (2.1) однозначно выражаются через элементы A из равенства $\begin{pmatrix} p_1 & q_1 + \beta p_1 & t_1 + \beta t_1 & \beta t_1 \\ p_2 & q_2 + \beta p_2 & t_2 + \beta q_2 & \beta t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ $(a_1^2 + a_2^2 \neq 0)$:

$$\beta = \theta_*, \quad p_i = a_i, \quad q_i = b_i - a_i\theta_*, \quad t_i = c_i - b_i\theta_* + a_i\theta_*^2\,(= d_i\theta_*^{-1}), \tag{2.2}$$

где $\theta_* \in \mathbb{R}^1$ – общий нуль многочленов $P_i^{(1)}(\theta) = a_i\theta^3 - b_i\theta^2 + c_i\theta - d_i = 0 \ \ (i = 1, 2)$.

Вещественный общий нуль многочленов $P_1^{(1)}, P_2^{(1)}$ существует и единственен, так как он имеется у P_1, P_2, а любой нуль P_i, взятый с обратным знаком, будет нулем $P_i^{(1)}$.

Теорема 2.1. *При $l = 1$ замена (1.5) $x = Ly$ преобразует систему (1.4) вида (2.1) с $P_0^1 = \alpha x_1 + \beta x_2$ в систему (1.6) $\dot y = \widetilde P(y)$ вида*

$$\dot y = \widetilde P_0^1(y)\, \tilde G q^{[2]}(y), \tag{2.3}$$

где общий множитель $\widetilde P_0^1(y) = \tilde\alpha y_1 + \tilde\beta y_2$, матрица $\widetilde G = \begin{pmatrix} \tilde p_1 & \tilde q_1 & \tilde t_1 \\ \tilde p_2 & \tilde q_2 & \tilde t_2 \end{pmatrix}$ и результант $\widetilde R_2 = \delta^2_{\tilde p \tilde t} - \delta_{\tilde p \tilde q}\delta_{\tilde q \tilde t}$ вычисляются по следующим формулам:

$$(\tilde\alpha,\, \tilde\beta) = (\alpha,\, \beta)L \neq 0, \quad \widetilde G = L^{-1}GM, \quad M = \begin{pmatrix} r_1^2 & 2r_1s_1 & s_1^2 \\ r_1r_2 & \delta_* & s_1s_2 \\ r_2^2 & 2r_2s_2 & s_2^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \delta_* = r_1s_2 + r_2s_1, \\ \det M = \delta^3; \end{matrix}$$

$$\widetilde R_2 = \delta^2 R_2 \neq 0 \quad \text{\textit{или}} \quad \tilde\alpha = \alpha r_1 + \beta r_2, \quad \tilde\beta = \alpha s_1 + \beta s_2, \tag{2.4}$$

$$\delta\, \widetilde G = \begin{pmatrix} r_1^2\delta_{ps} + r_1r_2\delta_{qs} + r_2^2\delta_{ts} & 2r_1s_1\delta_{ps} + \delta_*\delta_{qs} + 2r_2s_2\delta_{ts} & s_1^2\delta_{ps} + s_1s_2\delta_{qs} + s_2^2\delta_{ts} \\ r_1^2\delta_{rp} + r_1r_2\delta_{rq} + r_2^2\delta_{rt} & 2r_1s_1\delta_{rp} + \delta_*\delta_{rq} + 2r_2s_2\delta_{rt} & s_1^2\delta_{rp} + s_1s_2\delta_{rq} + s_2^2\delta_{rt} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Покажем сначала, что справедлива формула

$$q^{[2]}(Ly) = Mq^{[2]}(y). \tag{2.5}$$

Так, $q^{[2]}(Ly) = \begin{pmatrix} (r_1y_1 + s_1y_2)^2 \\ (r_1y_1 + s_1y_2)(r_2y_1 + s_2y_2) \\ (r_2y_1 + s_2y_2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1^2 & 2r_1s_1 & s_1^2 \\ r_1r_2 & \delta_* & s_1s_2 \\ r_2^2 & 2r_2s_2 & s_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^2 \\ y_1y_2 \\ y_2^2 \end{pmatrix} = Mq^{[2]}(y)$.

Теперь формула (2.3) вытекает из следующей цепочки равенств:

$$\widetilde P(y) \overset{(1.7)}{=} L^{-1}P(Ly) \overset{(2.1)}{=} L^{-1}((\alpha, \beta)\, Ly)\, Gq^{[2]}(Ly) \overset{(2.5)}{=} ((\alpha, \beta)L\, y)\, L^{-1}GMq^{[2]}(y) \overset{(2.4)}{=}$$
$$\overset{(2.4)}{=} (\tilde\alpha, \tilde\beta)\, y\, \tilde G q^{[2]}(y). \qquad \square$$

2.2. Выделение канонических форм и их допустимых множеств. Выделим из списка 1.1 работы [2] структурные формы до $SF_8^{5,1}$ включительно, относящиеся к случаю $l = 1$ (имеется 41 такая форма), нормируем их согласно введенным в [2, р. 1.2] нормировочным принципам (НП) и выясним, какие из полученных нормированных структурных форм являются каноническими формами.

Утверждение 2.1. *Только* $NSF_6^{4,1} = \sigma\begin{pmatrix} u & 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $NSF_{a,15}^{4,1} = \sigma\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & v & u & 0 \end{pmatrix}$, $NSF_{a,20}^{4,1} = \sigma\begin{pmatrix} v & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & u & 0 \end{pmatrix}$ $(uv \neq 1)$, $NSF_{22}^{4,1} = \sigma\begin{pmatrix} u & 0 & 0 & u \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $NSF_{37}^{4,1} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & 0 & u & u \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $NSF_1^{5,1} = \sigma\begin{pmatrix} u & v & v-u & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $NSF_2^{5,1} = \sigma\begin{pmatrix} u & v & 0 & u-v \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $NSF_5^{5,1} = \sigma\begin{pmatrix} u & 0 & v & u+v \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *при всех допустимых значениях параметров линейными заменами (1.5) сводятся к каким-либо предшествующим согласно СП из [2, р. 1.1] структурным формам.*

Доказательство. 1) $NSF^{4,1}_6$ заменой с $s_1=-s_2$, $r_2=0$ сводится к $SF^{4,1}_5$;
2) $NSF^{4,1}_{a,15}$ заменой с $r_1=-2uv^{-1}r_2$, $s_1=0$ сводится к $SF^{3,1}_{a,8}$;
3) $NSF^{4,1}_{a,20}$ $(v\neq u^{-1})$ заменой с $s_1=0$, $r_2=ur_1$ сводится к $SF^{4,1}_{19}$;
4) $NSF^{4,1}_{22}$ заменой с $s_1=-s_2$, $r_2=r_1$ сводится к $SF^{4,1}_{a,20}$;
5) $NSF^{4,1}_{37}$ заменой с $s_1=-s_2$, $r_2=r_1$ при $u=1$ сводится к $SF^{3,1}_{9,\kappa}$, при $u=-1$ сводится к $SF^{3,1}_{a,14,\kappa}$, а при $u\neq\pm1$ заменой с $s_1=-s_2$, $r_1=ur_2$ сводится к $SF^{4,1}_{a,27}$;
6) $NSF^{5,1}_1$, $NSF^{5,1}_2$, $NSF^{5,1}_5$ заменой с $s_1=-s_2$, $r_2=0$ сводятся к $SF^{4,1}_5$.

Непосредственной проверкой установлено, что остальные тридцать три $NSF^{m,1}$ являются каноническими формами (см. определения 1.7, 1.11). $\square$

Замечание 2.1. Здесь и в дальнейшем запись "сводится к какой-либо $SF^{m,1}$" означает, что получена указанная форма или форма, ей предшествующая, в которой какие-то элементы $SF^{m,1}$ оказались равными нулю.

Выпишем имеющиеся $CF^{m,1}$, их допустимые множества ps и канонические множества cs из определений 1.9, 1.10 (записи tps, tcs означают отсутствие ограничений на параметры, входящие в форму). Вид канонических форм будет обоснован позднее в утверждениях 2.3, 2.4. Укажем также разложение каждой формы на строку $(1,\beta)$ и матрицу G, как это сделано в системе (2.1) $\dot{x}=(\alpha,\beta)\,x\,G\,q^{[2]}(x)$, и результант $R_2\neq 0$ матрицы G.

Список 2.1. Все $CF^{m,1}_i$ до $CF^{5,1}_8$ включительно с указанием коэффициента β, матрицы G, результанта R_2, $ps^{m,1}_i$ и $cs^{m,1}_i$ $(\sigma,\kappa=\pm1,\ u,v,w\neq0,\ \alpha=1,\ R_2\neq0)$.

I) 24 формы с $\beta=0$ $(d_1,d_2=0,\ G$ – три первых столбца соответствующей $CF^{m,1}_i)$:

1) $CF^{2,1}_2=\sigma\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$, $R_2=1$, $tps^{2,1}_2$;

$CF^{3,1}_{a,5}=\sigma\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&u&1&0\end{pmatrix}$, $R_2=1$, $tps^{3,1}_{a,5}$;

$CF^{3,1}_{a,8}=\sigma\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&u&0\end{pmatrix}$, $R_2=u^2$, $tps^{3,1}_{a,8}$;

2) $CF^{3,1}_3=\sigma\begin{pmatrix}1&u&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$, $R_2=1$, $tps^{3,1}_3$;

$CF^{3,1}_{a,14,\kappa}=\sigma\begin{pmatrix}0&1&0&0\\\kappa&0&u&0\end{pmatrix}$, $R_2=\kappa u$, $tps^{3,1}_{14,\kappa}$;

$CF^{4,1}_7=\sigma\begin{pmatrix}u&v&0&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}$, $R_2=u(u-v)$, $ps^{4,1}_7=\{v\neq u\}$;

$CF^{4,1}_{a,12}=\sigma\begin{pmatrix}1&1&0&0\\v&0&u&0\end{pmatrix}$, $R_2=u(u+v)$, $ps^{4,1}_{12}=\{v\neq -u\}$;

$CF^{4,1}_{a,24}=\sigma\begin{pmatrix}0&1&0&0\\v&1&u&0\end{pmatrix}$, $R_2=uv$, $tps^{4,1}_{24}$;

3) $CF^{2,1}_9=\sigma\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$, $R_2=1$, $tps^{2,1}_9$;

$CF^{3,1}_6=\sigma\begin{pmatrix}u&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$, $R_2=u^2$, $tps^{3,1}_6$;

$CF^{3,1}_{11,\kappa}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&\kappa&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$, $R_2=\kappa u$, $tps^{3,1}_{11,\kappa}$;

$CF^{3,1}_{17}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$, $R_2=1$, $tps^{3,1}_{17}$;

$CF^{3,1}_{a,19}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&u&0\end{pmatrix}$, $R_2=1$, $tps^{3,1}_{a,19}$;

$CF^{3,1}_{21}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$, $R_2=1$, $tps^{3,1}_{21}$;

$CF^{3,1}_{a,22}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&u&0&0\end{pmatrix}$, $R_2=1$, $tps^{3,1}_{a,22}$;

$CF^{4,1}_5=\sigma\begin{pmatrix}u&v&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$, $R_2=u^2$, $tps^{4,1}_5$;

$CF^{4,1}_{11}=\sigma\begin{pmatrix}u&1&v&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$, $R_2=uv$, $tps^{4,1}_{11}$;

$CF^{4,1}_{a,14}=\sigma\begin{pmatrix}v&0&1&0\\0&u&1&0\end{pmatrix}$, $R_2=v(u^2+v)$, $ps^{4,1}_{14}=\{v\neq -u^2\}$;

$CF^{4,1}_{19}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$, $R_2=1$, $tps^{4,1}_{19}$;

$CF^{4,1}_{a,27}=\sigma\begin{pmatrix}v&0&1&0\\1&u&0&0\end{pmatrix}$, $R_2=u^2v+1$, $ps^{4,1}_{27}=\{v\neq -u^2\}$;

$CF^{4,1}_{a,29}=\sigma\begin{pmatrix}0&1&1&0\\v&0&u&0\end{pmatrix}$, $R_2=v(u+v)$, $ps^{4,1}_{29}=\{v\neq -u\}$; $CF^{4,1}_{a,30}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&v&u&0\end{pmatrix}$, $R_2=1$, $tps^{4,1}_{30}$;

$CF^{4,1}_{a,33}=\sigma\begin{pmatrix}0&1&1&0\\v&u&0&0\end{pmatrix}$, $R_2=v(v-u)$, $ps^{4,1}_{33}=\{v\neq u\}$; $CF^{5,1}_{8}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&w&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}$, $R_2=u(u-v+w)$, $ps^{5,1}_{8}=\{w\neq v-u\}$;

II) 9 форм с $\beta=1$ и своими G ($R_2=u^2$ и $ps=tps$ в первых шести формах):

$CF^{4,1}_{1}=\sigma\begin{pmatrix}u&u&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$, $\sigma\begin{pmatrix}u&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$; $CF^{4,1}_{3}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&-u&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$, $\sigma\begin{pmatrix}u&-u&0\\0&0&1\end{pmatrix}$;

$CF^{4,1}_{13}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&0&u\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$, $\sigma\begin{pmatrix}u&-u&u\\0&1&-1\end{pmatrix}$; $CF^{4,1}_{28}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&0&-u\\1&0&0&1\end{pmatrix}$, $\sigma\begin{pmatrix}0&u&-u\\1&-1&1\end{pmatrix}$;

$CF^{4,1}_{32}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&u&u\\1&0&0&1\end{pmatrix}$, $\sigma\begin{pmatrix}0&0&u\\1&-1&1\end{pmatrix}$; $CF^{4,1}_{36}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&u&u\\1&0&-1&0\end{pmatrix}$, $\sigma\begin{pmatrix}0&0&u\\1&-1&0\end{pmatrix}$;

$CF^{5,1}_{3}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&v-u&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$, $\sigma\begin{pmatrix}u&v-u&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$, $R_2=uv$, $ps^{5,1}_{3}=\{v\neq u\}$;

$CF^{5,1}_{6}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&0&u-v\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$, $\sigma\begin{pmatrix}u&v-u&u-v\\0&1&-1\end{pmatrix}$, $R_2=u^2$, $ps^{5,1}_{6}=\{v\neq u\}$;

$CF^{5,1}_{7}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&v-u&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$, $\sigma\begin{pmatrix}u&v-u&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$, $R_2=u^2-uv+v^2$, $ps^{5,1}_{7}=\{v\neq u\}$;

1) $tcs^{2,1}_2$; $cs^{3,1}_5=\{u\neq 2\}$, $cs^{3,1}_8=\{u>1/4\}$;

2) $tcs^{3,1}_3$, $cs^{3,1}_{14,\kappa}=\{(\kappa,u)\neq(1,1/2)\}$; $cs^{4,1}_7=\{v\neq u,\,2-u^{-1},2u(u+1)^{-1}\}$, $cs^{4,1}_{12}=\{u\neq -v,\,1/2;\ 4v(u-1)>1\}$, $cs^{4,1}_{24}=\{u=1/2,\ v<-1/2\}$;

3) $tcs^{2,1}_9$, $tcs^{2,1}_9$; $tcs^{3,1}_6$, $tcs^{3,1}_{11,\kappa}$, $tcs^{3,1}_{17}$, $tcs^{3,1}_{19}$, $cs^{3,1}_{21}=\{u\neq 2\}$, $tcs^{3,1}_{22}$; $cs^{4,1}_1=\{u\neq\pm1\}$, $cs^{4,1}_3=\{u\neq -1/2,-2\}$; $cs^{4,1}_5=\{u\neq v(v-2)/4;\,(u,v)\neq(1,-2),(-1/9,1)\}$; $cs^{4,1}_{11}=\{v\neq u(2u-1)^{-2}\}$, $cs^{4,1}_{13}=\{u\neq -1/3,\,2/3\}$, $cs^{4,1}_{14}=\{v\neq u,-u^2;\ v\neq u/2$ при $u>-1/2\}$,
$cs^{4,1}_{27}=\{v\neq -u^{-2},\,(u^{3/2}\pm 2^{3/2})u^{-1/2}/2;\,(u,v)\neq 4^{-2/3}\cdot(3,1)\}$,
$cs^{4,1}_{19}=\{u\neq v^2/4,\,(v^3-8)(4v)^{-1}\}$, $cs^{4,1}_{28}=\{u\neq -3,\,-3/4,\,3/2,\,6,\,\vartheta_1\}$,
$cs^{4,1}_{29}=\{u\neq -1/2;\ v\neq -u,\,u^2,\,(1-2u)/8,\,(1-2u)^2/8;\ (u,v)\neq(\vartheta_3,\vartheta_4)\}$,
$cs^{4,1}_{30}=\{u\neq -v^{-1},\,(v^3-8)(4v)^{-1};\ (u,v)\neq(2,3),(3,-3)\}$, $cs^{4,1}_{32}=\{u\neq -3,-3/4,\,3/8,\,6\}$,
$cs^{4,1}_{33}=\{u\neq 1;\ v\neq u,\,(4u+1)/2,\,(6u+1\pm(2u+1)(8u+1)^{1/2})/16\}$,
$cs^{4,1}_{36}=\{u\neq -2,\,-1/8,\,1\pm 3\sqrt{2}/4,\,1/4,\,4\}$; $cs^{5,1}_3=\{v\neq u,\ 2.4_1\}$,
$cs^{5,1}_6=\{v\neq u,\ 2.4_2\}$, $cs^{5,1}_7=\{v\neq u,\ 2.4_3\}$, $cs^{5,1}_8=\{w\neq v-u,\ 2.4_4\}$.

Здесь запись $\{\ldots,\ 2.4_i\}$ означает, что значения параметров не удовлетворяют условиям из пункта i) ниже следующего утверждения 2.4.

Поскольку в список 2.1 входят $CF^{m,1}$ только с $\beta=0$ или с $\beta=\alpha$, выясним при каких условиях формы с такими β могут быть преобразованы друг в друга.

Утверждение 2.2. *Пусть система* (2.1) *с* $P^1_0=\alpha x_1+\beta x_2$ *линейной неособой заменой сводится к системе* (2.3) $\dot y=\widetilde P^1_0(y)\,\tilde G q^{[2]}(y)$, *с* $\widetilde P^1_0=\tilde\alpha x_1+\tilde\beta x_2$, *тогда*
1) *при* $\alpha=1:\tilde\beta=0\Leftrightarrow s_1=-\beta s_2$, 2) *при* $\beta=0:\tilde\beta=0\Leftrightarrow s_1=0$,
3) *при* $\beta=0:\tilde\alpha=\tilde\beta\Leftrightarrow r_1=s_1\neq 0$, 4) *при* $\alpha=\beta:\tilde\beta=0\Leftrightarrow s_2=-s_1\neq 0$.

Доказательство. По теореме 2.1 $\tilde\alpha=\alpha r_1+\beta r_2$, $\tilde\beta=\alpha s_1+\beta s_2$. $\square$

Набор 2.1. Числовые константы, используемые в дальнейшем:

$\vartheta_1=\rho+20\rho^{-1}+5$, $\vartheta_2=((\sqrt{29}+27)\rho^2-(10\sqrt{29}-130)\rho+1000)/600$, $\rho=(4\sqrt{29}+92)^{1/3}$;
$\vartheta_3=((3\sqrt{29}-17)\rho^2+(4\sqrt{29}-24)\rho-16)/24$, $\vartheta_4=((72-13\sqrt{29})\rho^2-(9\sqrt{29}-59)\rho+72)/36$,
$\vartheta_5=(\rho+4\rho^{-1})/6$, $\vartheta_6=2(2\rho^2+9\rho+8)/(\rho^2-18\rho+4)$, $\rho=(20\sqrt{29}+108)^{1/3}$;
$\vartheta_7=(8\rho^2+(3\sqrt{57}-1)\rho+68)/12$, $\vartheta_8=((\sqrt{57}+85)\rho^2+32(\sqrt{57}-1)\rho+640)/96$,

$\vartheta_9=(8\rho^{-1}-\rho-1)/3,\ \ \vartheta_{10}=((11-\sqrt{57})\rho^2+4(\sqrt{57}+5)\rho+32)/96,\ \ \rho=(3\sqrt{57}+1)^{1/3};$
$\vartheta_{11}=((\sqrt{17}-9)\rho^2-4(\sqrt{17}+1)\rho-40)/8,\ \ \vartheta_{12}=-\rho+4\rho^{-1},\ \ \rho=(2\sqrt{17}+2)^{1/3};$
$\vartheta_{13}=(\rho^2-(\sqrt{77}-9)\rho-16)/4,\ \ \vartheta_{14}=-3((\sqrt{77}-9)\rho^2-4\rho+24)/8,$
$\vartheta_{15}=\rho/6+2(3\rho)^{-1},\ \ \vartheta_{16}=((3\sqrt{77}-25)\rho^2-(2\sqrt{77}-6)\rho-8)/24,\ \ \rho=(4\sqrt{77}+36)^{1/3}.$

2.3. Выделение канонических и минимальных множеств для $\mathbf{CF^{m,1}}$.

Утверждение 2.3. *Только следующие формы с $m\le 4$ из списка 2.1 при указанных значениях параметров сводятся к предшествующим структурным формам:*

1) $NSF_5^{3,1}$ *при* $u=2$ *заменой с* $r_1=-r_2,\ s_2=0$ *сводится к* $SF_2^{2,1}$;

2) $NSF_8^{3,1}$ *при* $u\le 1/4$ *заменой с* $s_2=(1+(1-4u)^{1/2})s_1/2,\ r_2=0$ *сводится к* $SF_5^{3,1}$;

3) $NSF_{14,\kappa}^{3,1}$ *при* $\kappa=1,\ u=1/2$ *заменой с* $r_1=2^{1/2}r_2,\ s_2=0$ *сводится к* $SF_3^{3,1}$;

4) $NSF_{21}^{3,1}$ *при* $u=2$ *заменой с* $s_1=0,\ r_2=-r_1$ *сводится к* $SF_6^{3,1}$;

5) $NSF_1^{4,1}$: *a) при* $u=-1$ *заменой с* $r_2=0,\ s_2=-s_1$ *сводится к* $SF_3^{3,1}$;
b) при $u=1$ *заменой с* $r_1=r_2,\ s_2=-s_1$ *сводится к* $SF_{11}^{3,1}$;

6) $NSF_3^{4,1}$: *a) при* $u=-1/2$ *заменой с* $r_2=0,\ s_2=-s_1$ *сводится к* $SF_3^{3,1}$;
b) при $u=-2$ *заменой с* $r_2=0,\ s_2=2s_1$ *сводится к* $SF_1^{4,1}$;

7) $NSF_5^{4,1}$: *a) при* $u=1,\ v=-2$ *заменой с* $r_1=0,\ s_2=s_1$ *сводится к* $SF_{22}^{3,1}$;
b) при $u=v(v-2)/4$ *заменой с* $r_2=0,\ s_2=(1-v/2)s_1$ *сводится к* $SF_1^{4,1}$;
c) при $u=v(2v-3)/9$, *заменой* $r_2=0,\ s_2=(3-2v)s_1/3$ *сводится к* $SF_3^{4,1}$;

8) $NSF_7^{4,1}$ $(v\ne u)$: *a) при* $v=2-u^{-1}$ *заменой с* $r_1=-u^{-1}r_2,\ s_1=0$ *сводится к* $SF_3^{3,1}$;
b) при $v=2u(u+1)^{-1}$ *заменой с* $r_1=0,\ s_1=2(u+1)^{-1}s_2$ *сводится к* $SF_{14,\kappa}^{3,1}$;

9) $NSF_{11}^{4,1}$ *при* $v=u(2u-1)^{-2}$ *заменой с* $s_1=0,\ r_2=(1-2u)r_1$ *сводится к* $SF_5^{4,1}$;

10) $NSF_{12}^{4,1}$ $(v\ne -u)$: *a) при* $u=1/2$ *заменой с* $s_1=-s_2,\ r_2=0$ *сводится к* $SF_{14,\kappa}^{3,1}$;
b) при $4v(u-1)\le 1$ *заменой с* $r_2=(1+(1-4v(u-1))^{1/2})(2v)^{-1}r_1,\ s_2=0$ *сводится к* $SF_7^{4,1}$;

11) $NSF_{13}^{4,1}$: *a) при* $u=2/3$ *заменой с* $r_1=2r_2,\ s_2=-s_1$ *сводится к* $SF_3^{3,1}$;
b) при $u=-1/3$ *заменой с* $r_1=r_2/2,\ s_2=-s_1$ *сводится к* $SF_{11}^{4,1}$;

12) $NSF_{14}^{4,1}$ $(v\ne -u^2)$: *a) при* $v=u/2,\ u>-1/2$ *заменой с* $r_1=(1-(2u+1)^{1/2})r_2/2$, $s_1=(1+(2u+1)^{1/2})s_2/2$ *сводится к* $SF_1^{4,1}$;
b) при $v=u$ *заменой с* $r_2=r_1,\ s_2=0$ *сводится к* $SF_{11}^{4,1}$;
c) при $u=-1/4,\ v=-1/12$ *заменой с* $r_1=0,\ s_2=2s_1$ *сводится к* $SF_{13}^{4,1}$;

13) $NSF_{19}^{4,1}$: *a) при* $u=v^2/4$ *заменой с* $r_1=0,\ s_2=-vs_1/2$ *сводится к* $SF_{19}^{3,1}$;
b) при $u=(v^3-8)(4v)^{-1}$ *заменой с* $s_1=0,\ r_2=-vr_1/2$ *сводится к* $SF_6^{3,1}$;

14) $NSF_{24}^{4,1}$: *a) при* $u\ne 1/2$ *заменой с* $r_2=0,\ s_2=(1-2u)s_1$ *сводится к* $SF_{12}^{4,1}$;
b) при $u=1/2,\ v\ge -1/2$ *заменой с* $r_1=(1+(2v+1)^{1/2})r_2,\ s_2=0$ *сводится к* $SF_7^{4,1}$;

15) $NSF_{27}^{4,1}$ $(v\ne -u^{-2})$: *a) при* $v=u/2\pm(u/2)^{-1/2}$ *заменой с* $r_1=\pm(u/2)^{1/2}r_2,\ s_2=0$ *сводится к* $SF_5^{4,1}$;
b) при $u=3\cdot 4^{-2/3},\ v=4^{-2/3}$ *заменой с* $r_1=2^{1/3}r_2,\ s_1=-3\cdot 2^{-2/3}s_2$ *сводится к* $SF_{13}^{4,1}$;

16) $NSF_{28}^{4,1}$: *a) при* $u=-3$ *заменой с* $s_1=2s_2,\ r_2=-r_1$ *сводится к* $SF_{22}^{3,1}$;
b) при $u=6$ *заменой с* $r_1=2r_2,\ s_2=-s_1$ *сводится к* $SF_5^{4,1}$;
c) при $u=-3/4$ *заменой с* $r_1=r_2/2,\ s_2=-s_1$ *сводится к* $SF_{11}^{4,1}$;
d) при $u=3/2$ *заменой с* $s_1=3s_2/2,\ r_2=-r_1$ *сводится к* $SF_{12}^{4,1}$;
e) при $u=\vartheta_1$ *заменой с* $s_1=\vartheta_2 s_2,\ r_2=-r_1$ *сводится к* $SF_{14}^{4,1}$;

17) $NSF_{29}^{4,1}$ $(v\ne -u)$: *a) при* $v=u^2$ *заменой с* $r_1=ur_2,\ s_2=0$ *сводится к* $SF_{11}^{4,1}$;

b) при $v=(1-2u)^2/8$ *заменой с* $r_1=(u-1/2)r_2,\ s_2=0$ *сводится к* $SF_5^{4,1}$;
c) при $v=(1-2u)/8$ *заменой с* $r_2=0,\ s_2=-2s_1$ *сводится к* $SF_{14}^{4,1}$;
d) при $u=\vartheta_3,\ v=\vartheta_4$ *заменой с* $r_1=\vartheta_5 r_2,\ s_1=\vartheta_6 s_2$ *сводится к* $SF_{13}^{4,1}$;
e) при $u=-1/2$ *заменой с* $s_1=-s_2/2,\ r_2=0$ *сводится к* $SF_{27}^{4,1}$;

18) $NSF_{30}^{4,1}$: *a) при* $u=-v^{-1}$ *заменой с* $r_1=-v^{-1}r_2,\ s_2=0$ *сводится к* $SF_{11}^{4,1}$;
b) при $u=(v^3-8)(4v)^{-1}$ *заменой с* $r_2=-vr_1/2,\ s_2=0$ *сводится к* $SF_5^{4,1}$;
c) при $u=3,\ v=-3$ *заменой с* $r_1=r_2,\ s_1=0$ *сводится к* $SF_{13}^{4,1}$;
d) при $u=2,\ v=3$ *заменой с* $r_1=-r_2,\ s_1=0$ *сводится к* $SF_{28}^{4,1}$;

19) $NSF_{32}^{4,1}$: *a) при* $u=-3$ *заменой с* $s_1=2s_1,\ r_2=-r_1$ *сводится к* $SF_{14}^{3,1}$;
b) при $u=3/8$ *заменой с* $r_2=2r_1,\ s_2=-s_1$ *сводится к* $SF_5^{4,1}$;
c) при $u=6$ *заменой с* $r_1=2r_2,\ s_2=-s_1$ *сводится к* $SF_{11}^{4,1}$;
d) при $u=-3/4$ *заменой с* $r_2=-r_1,\ s_2=2s_1$ *сводится к* $SF_{30}^{4,1}$;

20) $NSF_{33}^{4,1}$ $(v\neq u)$: *a) при* $u=1$ *заменой с* $r_2=0,\ s_2=-s_1$ *сводится к* $SF_{29}^{4,1}$;
b) при $v=(4u+1)/8$ *заменой с* $r_2=0,\ s_2=-2s_1$ *сводится к* $SF_{14}^{4,1}$;
c) при $v=(6u+1\pm(2u+1)(8u+1)^{1/2})/16$ *заменой с* $r_1=-(1\pm(8u+1)^{1/2})r_2/4,\ s_2=0$ *сводится к* $SF_5^{4,1}$;

21) $NSF_{36}^{4,1}$: *a) при* $u=-1/8$ *заменой с* $r_2=2r_1,\ s_2=-s_1$ *сводится к* $SF_5^{4,1}$;
b) при $u=4$ *заменой с* $r_1=2r_2,\ s_2=-s_1$ *сводится к* $SF_{11}^{4,1}$;
c) при $u=-2$ *заменой с* $s_1=4s_2/3,\ r_2=-r_1$ *сводится к* $SF_{12}^{4,1}$;
d) при $u=1\pm3\sqrt{2}/4$ *заменой с* $s_1=(1\pm1/\sqrt{2})s_2,\ r_2=-r_1,$ *сводится к* $SF_{14}^{4,1}$;
e) при $u=1/4$ *заменой с* $r_2=-r_1,\ s_2=2s_1$ *сводится к* $SF_{30}^{4,1}$.

Отметим, что с учетом утверждения 2.2 при сведении $NSF_i^{m,1}$ из списка 2.1_{I} к предшествующим формам из того же 2.1_{I} использовались только замены с $s_1=0$, а при сведении к 2.1_{II} – с $r_1=s_1\neq0$. В свою очередь, при сведении $NSF_i^{m,1}$ из списка 2.1_{II} к предшествующим из 2.1_{I} использовались замены с $s_2=-s_1\neq0$.

Утверждение 2.4. *Только при указанных значениях параметров* $NSF_i^{5,1}$ *из списка* 2.1 *сводятся к предшествующим согласно одному из СП структурным формам:*

1) $NSF_3^{5,1}$ $(u\neq v)$: *a) при* $v=[\,u-3\vee 3u-1\vee u+1,\ u\neq3\,]$ *заменой с* $r_2=-r_1$, $[\,s_1=0\vee s_2=0\vee s_2=(1-u)s_1/2\,]$ *сводится к* $SF_{14}^{4,1}$;
b) при $v=(u-1)^2u^{-1},\ u\neq-1$ *заменой с* $s_1=-s_2,\ r_2=ur_1$ *сводится к* $SF_5^{4,1}$;
c) при $v=2(u-1)$ *заменой с* $r_1=0,\ s_2=-s_1$ *сводится к* $SF_7^{4,1}$;
d) $[\,u=-1, v\neq-4\vee v=2u\,]$ *заменой с* $r_1=[\,(v/2+1)r_2\vee0\,],\ s_2=-s_1$ *сводится к* $SF_{11}^{4,1}$;
e) при $u=\vartheta_7,\ v=\vartheta_8$ *заменой с* $r_1=\vartheta_9 r_2,\ s_1=\vartheta_{10}s_2$ *сводится к* $SF_{13}^{4,1}$;
f) при $v=4u,\ u\neq-1$ *заменой с* $r_1=ur_2,\ s_2=-s_1$ *сводится к* $SF_{19}^{4,1}$;
g) при $v=3(u+1),\ u\neq-5$ *заменой с* $s_1=(u+3)s_2/2,\ r_2=-r_1$ *сводится к* $SF_{27}^{4,1}$;
h) при $v=(2u^2+1\pm(2u+1)(5-4u)^{1/2})(2u+2)^{-1},\ (u,v)\neq(-5,-12)$ *заменой с* $r_2=-r_1$, $s_2=(3\pm(5-4u)^{1/2})s_1/2$ *сводится к* $SF_{29}^{4,1}$;
i) $v=u-1\pm2\sqrt{-u},\ u\neq-1$ *заменой с* $r_2=-r_1,\ s_2=\pm\sqrt{-u}s_1$ *сводится к* $SF_{30}^{4,1}$;
j) при $u=-(352\theta_*^5+396\theta_*^4+839\theta_*^3+1005\theta_*^2-1297\theta_*-105)/46,\ v=-(328\theta_*^5+438\theta_*^4+844\theta_*^3+1098\theta_*^2-1046\theta_*-366)/23$ *заменой с* $r_1=\theta_*r_2,\ s_2=-(4\theta_*^5+39\theta_*^4+49\theta_*^3+111\theta_*^2+31\theta_*-60)s_1/138$ *сводится к* $SF_{28}^{4,1}$, θ_*: $4\theta^6+7\theta^5+13\theta^4+18\theta^3-6\theta^2-9\theta-3$;
k) при $2u=\theta_*^2-2\theta_*+3,\ 2v=-3\theta_*^3+6\theta_*^2-11\theta_*$ *заменой с* $r_1=\theta_*r_2,\ s_1=-(\theta_*^3-\theta_*^2+3\theta_*+3)s_2/2$ *сводится к* $SF_{32}^{4,1}$, θ_*: $\theta^4-\theta^3+2\theta^2+3\theta+3$;
l) $v=2(u+1)^2(u+2)^{-1},\ u\neq-3$ *заменой с* $r_2=-r_1,\ s_2=(u+2)s_1$ *сводится к* $SF_{33}^{4,1}$;
m) при $6u=-2\theta_*^3-\theta_*^2+4\theta_*-15,\ 3v=-4\theta_*^3-3\theta_*^2+8\theta_*-21$ *заменой с* $r_1=\theta_*r_2$, $s_1=-(2\theta_*^3+3\theta_*^2+9)s_2/6$ *сводится к* $SF_{36}^{4,1}$, θ_*: $2\theta^4+3\theta^3-3\theta^2+9\theta+9$;

2) $NSF_6^{5,1}(u\neq v)$: *a) при* $v=2-3u$ *заменой с* $r_1=2r_2,\ s_2=-s_1$ *сводится к* $SF_5^{4,1}$;

b) при $v=(3u-2)/2$ *заменой с* $r_2=0,\ s_2=-s_1$ *сводится к* $SF_7^{4,1}$;
c) при $v=(3u+1)/2$ *заменой с* $r_2=2r_1,\ s_2=-s_1$ *сводится к* $SF_{11}^{4,1}$;
d) при $v=[\,3u-1\vee 1-u\pm 2(u^2-u+1)^{1/2},\ (u,v)\neq(8/3,3)\,]$ *заменой с* $r_2=-r_1,\ [\,s_2=0\vee s_1=(u-2\mp(u^2-u+1)^{1/2})(u-1)^{-1}s_2\,]$ *сводится к* $SF_{14}^{4,1}$;
e) при $v=3u+3,\ u\neq-8/3$ *заменой с* $s_1=3(u+2)s_2/2,\ r_2=-r_1$ *сводится к* $SF_{27}^{4,1}$;
f) при $v=(-u^2-2u\pm(2u+1)(u^2+u+1)^{1/2})(u+1)^{-1},\ (u,v)\neq(-8/3,-5)$ *заменой с* $r_2=-r_1,\ s_2=(u+2\pm(u^2+u+1)^{1/2})s_1/3$ *сводится к* $SF_{29}^{4,1}$;
g) при $v=[\,u-1\vee-3u-1\,]$ *заменой с* $s_1=[\,0\vee 2s_2\,],\ r_2=-r_1$ *сводится к* $SF_{30}^{4,1}$;
h) при $v=(3u^2+4u+2)(2u+2)^{-1},\ u\neq-4/3$ *заменой с* $s_1=(u+2)(2u+2)^{-1}s_2,\ r_2=-r_1$ *сводится к* $SF_{33}^{4,1}$;
i) при $v=[\,(-1\mp\sqrt{3})(3u-1)\vee 1-u\pm(4u^2-3u+3)^{1/2},\ (u,v)\neq((14\pm4\sqrt{10})/9,(4\pm2\sqrt{10})/3)\vee(2\theta_*^3-4\theta_*^2+4\theta_*+1)((\theta_*-2)(2\theta_*-1)\theta_*)^{-1},\ \theta_*\neq-1\,]$ *заменой с* $r_1=[\,(1\pm\sqrt{3})r_2/2\vee-r_2\vee\theta_*r_2\,],\ s_2=\langle\,0\vee-(4u^2-9u+1\pm2u(4u^2-3u+3)^{1/2})(15u-3)^{-1}s_1\vee(2\theta_*^2-2\theta_*-1)(3\theta_*)^{-1}s_1\,]$ *сводится к* $SF_3^{5,1}$, $\theta_*\colon 2(u-1)\theta^3-(5u-7)\theta^2+2(u-2)\theta-1$;
j) при $u=35/3,\ v=12$ *заменой с* $s_1=2s_2,\ r_2=-4r_1$ *сводится к* $SF_{13}^{4,1}$;
k) при $u=-35/3,\ v=-41/4$ *заменой с* $s_1=2s_2,\ r_2=-4r_1$ *сводится к* $SF_{28}^{4,1}$;
l) при $u=-7/12,\ v=3/2$ *заменой с* $r_1=2r_2,\ s_2=-4s_1$ *сводится к* $SF_{32}^{4,1}$;
m) при $u=-5/9,\ v=17/12$ *заменой с* $r_1=2r_2,\ s_2=-4s_1$ *сводится к* $SF_{36}^{4,1}$;

3) $NSF_7^{5,1}$ $(u\neq v)$: *a) при* $v=2u+3$ *заменой с* $r_1=0,\ s_2=-s_1$ *сводится к* $SF_7^{4,1}$;
b) при $u=(v-1)(v-3)(v-2)^{-1}$ *заменой с* $r_2=(2-v)r_1,\ s_2=-s_1$ *сводится к* $SF_5^{4,1}$;
c) при $v=[2u\vee 3-u]$ *заменой с* $r_1=[\,0\vee(u-1)r_2],\ s_2=-s_1$ *сводится к* $SF_{11}^{4,1}$;
d) при $u=\vartheta_{11},\ v=\vartheta_{11}-3$ *заменой с* $r_1=\vartheta_{12}r_2,\ s_1=-(\vartheta_{11}+3)s_2/6$ *сводится к* $SF_{13}^{4,1}$;
e) при $v=[\,u+3\vee 2u+2\pm(u^2+6u+1)^{1/2},\ (u,v)\neq(-6,-9)]$ *заменой с* $r_2=-r_1,\ s_1=[\,0\vee(u+3\pm(u^2+6u+1)^{1/2})s_2/2\,]$ *сводится к* $SF_{14}^{4,1}$;
f) при $v=3(u-1),\ u\neq6$ *заменой с* $s_1=(3-u)s_2/3,\ r_2=-r_1$ *сводится к* $SF_{27}^{4,1}$;
g) при $u=-18\theta_*^4-24\theta_*^3+25\theta_*^2-16\theta_*+4,\ v=-(261\theta_*^4+456\theta_*^3-187\theta_*^2+148\theta_*+23)/5$ *заменой с* $r_1=\theta_*r_2,\ s_2=(9\theta_*^4+39\theta_*^3+37\theta_*^2+2\theta_*+7)s_1/15$ *сводится к* $SF_{28}^{4,1}$, $\theta_*: 9\theta_*^5+21\theta^4+4\theta^3+3\theta^2+3\theta+1$;
h) при $v=(2u^2-2u+5\mp(2u-1)(1+4u)^{1/2})(2u-4)^{-1},\ (u,v)\neq(6,15)$ *заменой с* $r_2=-r_1,\ s_2=(3\pm(1+4u)^{1/2})s_1/2$ *сводится к* $SF_{29}^{4,1}$;
i) при $v=u+1\mp2(u+1)^{1/2}$ *заменой с* $r_2=-r_1,\ s_2=\pm(u+1)^{1/2}s_1$ *сводится к* $SF_{30}^{4,1}$;
j) при $u=\vartheta_{13},\ v=\vartheta_{14}$ *заменой с* $r_1=\vartheta_{15}r_2,\ s_1=\vartheta_{16}s_2$ *сводится к* $SF_{32}^{4,1}$;
k) $v=(2u^2-4u+3)(u-2)^{-1},\ u\neq3$ *заменой с* $r_2=-r_1,\ s_2=-(u-2)s_1$ *сводится к* $SF_{33}^{4,1}$;
l) при $u=-\theta_*^3-\theta_*+2,\ v=-6\theta_*^3-2\theta_*^2-5\theta_*+8$ *заменой с* $r_1=\theta_*r_2,\ s_2=-\theta_*^2s_1$ *сводится к* $SF_{36}^{4,1}$, $\theta_*\colon \theta^4+\theta^3+\theta^2-\theta-1$;
m) при $u=[\,v(3v-10\pm(v^2+12v-12)^{1/2})(4v-8)^{-1}\vee(-4\theta_*^2+2(v-1)\theta_*+2v-7)/3\,]$ *заменой с* $r_1=[\,0\vee(-2\theta_*^2+v\theta_*-2)r_2\,],\ s_2=\langle(v+2\pm(v^2+12v-12)^{1/2})s_1/4\vee\theta_*s_1\,]$, *где* $\theta_*\in\mathbb{R}^1-\forall$ *нуль многочлена* $2\theta^3-(v+2)\theta^2+2(v+1)\theta-3$, *сводится к* $SF_3^{5,1}$;
n) при $u=(\theta_*^2-\theta_*-v+1)(\theta_*-1)^{-1}$ *заменой с* $r_1=\theta_*r_2,\ s_2=((2v-3)\theta_*+v)(\theta_*^2-(v-2)\theta_*-2)^{-1}s_1$ *сводится к* $SF_6^{5,1}$, $\theta_*\colon \theta^4-(2v-3)\theta^3+(v-3)(v+1)\theta^2+(3v^2-6v+4)\theta+v^2$;

4) $NSF_8^{5,1}$ $(w\neq v-u)$: *a) при* $v=-2$ *заменой с* $r_1=0,\ s_1=ws_2$ *сводится к* $SF_{27}^{4,1}$;
b) при $v=[\,(2u-1)/2\vee(2u-1)(3u-1)^{-1}\,],\ w=[\,(u-2)/4\vee-(2u-1)(3u-1)^{-2}\,]$ *заменой с* $r_1=[\,-r_2/2\vee-(3u-1)^{-1}r_2\,],\ s_2=[\,0\vee(3u-1)(u-1)(2u-1)^{-1}s_1\,]$ *сводится к* $SF_3^{4,1}$;
c) $w=v(uv-2u+1)(2u-1)^{-2}$ *заменой с* $s_1=0,\ r_2=(1-2u)v^{-1}r_1$ *сводится к* $SF_5^{4,1}$;
d) при $w=-v(u-1)^{-1}$ *заменой с* $s_1=0,\ r_2=-(u-1)v^{-1}r_1$ *сводится к* $SF_{11}^{4,1}$;
e) при $[\,v=(3u-1)/2,\ w=(3u-2)/4\vee u=(w^{3/2}\pm1)(w^{1/2}\mp2)^{-2}w^{-1/2},\ v=(2w+1)(\mp w^{1/2}+2)^{-1}\,]$ *заменой с* $s_1=[\,-s_2/2\vee\mp w^{1/2}s_2\,],\ r_2=[\,0\vee(-1\pm2w^{1/2})w^{-1/2}(w^{1/2}\mp2)^{-1}r_1\,]$ *сводится к* $SF_{13}^{4,1}$;

f) при $w=v(v-2)(4u-4)^{-1}$ *заменой с* $r_1=0$, $s_1=(2-v)(2u-2)^{-1}s_2$ *сводится к* $SF^{4,1}_{14}$;
g) при $w=v$ *заменой с* $r_1=vr_2$, $s_1=0$ *сводится к* $SF^{4,1}_{19}$;
h) при $u=-((16w+18)\theta_*^2+(4w^2-2w)\theta_*+w^3+14w^2+30w+9)w^{-1}(w+6)^{-2}$, $v=(w\theta_*^2-2w\theta_*+w^2+4w-3)(w+6)^{-1}$ *заменой с* $s_1=\theta_* s_2$, $r_2=(6\theta_*^2+2w\theta_*+2w+3)(w(w+6))^{-1}r_1$ *сводится к* $SF^{4,1}_{28}$, $\theta_*\colon 2\theta^3+(2w+1)\theta+w$;
i) при $w=(v+2)(uv+v-2u)(2u+1)^{-2}$ *заменой с* $r_1=0$, $s_1=-(v+2)(2u+1)^{-1}s_2$ *сводится к* $SF^{4,1}_{29}$;
j) при $w=v^2(4u)^{-1}$ *заменой с* $r_1=0$, $s_1=-v(2u)^{-1}s_2$ *сводится к* $SF^{4,1}_{30}$;
k) при $u=(v^2+2\mp(v+1)\varrho)(3v-6)^{-1}$, $w=-(v+1)(v\pm\varrho)$ *заменой с* $r_1=(v\pm\varrho)r_2$, $s_1=(-v-2\mp 2\varrho)s_2/3$, *где* $\varrho=(v^2+v-2)^{1/2}$, *сводится к* $SF^{4,1}_{32}$;
l) при $w=-(v+1)u^{-1}$ *заменой с* $r_1=0$, $s_1=-(v+1)u^{-1}s_2$ *сводится к* $SF^{4,1}_{33}$;
m) при $v=-(2u^2+4u+1)(3u+1)^{-1}(u+1)^{-1}$, $w=-(5u^2+4u+1)(3u+1)^{-2}(u+1)^{-1}$ *заменой с* $s_1=-(2u+1)(3u+1)^{-1}(u+1)^{-1}s_2$, $r_2=(3u+1)r_1$ *сводится к* $SF^{4,1}_{36}$;
n) при $[\,v=-(w\theta_*^2-\theta_*+u-1)\theta_*^{-1}\vee w=v(2uv-3u+1)(3u-1)^{-2}\vee w=(2v-u-1)/4\,]$ *заменой с* $r_2=[\,\theta_* r_1\vee(1-3u)v^{-1}r_1\vee 0\,]$, $s_2=[\,(u-1)(w\theta_*)^{-1}s_1\vee 0\vee -2s_1\,]$ *сводится к* $SF^{5,1}_3$, $\theta_*\colon w^2\theta^3-w\theta^2-w(u+1)\theta-u+1$;
o) при $w=[\,v-3u/4\vee-((v-1)\theta_*+u-1)\theta_*^{-2}\,]$ *заменой с* $r_2=[\,0\vee\theta_* r_1\,]$, $s_2=[\,-2s_1\vee-\theta_*(v\theta_*+3u-1)(v\theta_*+u-1)^{-1}s_1\,]$ *сводится к* $SF^{5,1}_6$, $\theta_*\colon v^2\theta^3+(v^2+2uv-2v)\theta^2+(6uv-2v-3u^2-2u+1)\theta+5u^2-6u+1$;
p) при $[\,w=v(3uv-3u+1)(3u-1)^{-2}\vee u=(v^2-v+7)/9,\ w=2\vee u=((13v-16w-6)\theta_*^2+(4vw-v^2-2w+2v-3)\theta_*+8w^2-2vw+3w)(3\theta_*)^{-2}\,]$ *заменой с* $r_1=[\,-v(3u-1)^{-1}r_2\vee-r_2\vee\theta_* r_2\,]$, $s_2=[\,0\vee(v-2)s_1/3\vee-(\theta_*^2+(2v-1)\theta_*+w)(3w\theta_*)^{-1}s_1\,]$ *сводится к* $SF^{5,1}_7$, $\theta_*\colon\theta^3+(2v-4w-1)\theta^2+w(v-1)\theta+2w^2$.

Утверждение 2.5. *Только в следующих* $CF^{m,1}$ *из списка* 2.1 *удается ограничить значения параметров в* $cs^{m,1}$, *а именно:*

1) *в* $CF^{3,1}_3$ *при* $u=2$ *замена с* $r_1=-1$, $s_1=0$, $r_2,s_2=1$, *а в* $CF^{3,1}_{14,\kappa}$ *замена с* $r_1,-s_2=1$, s_1, $r_2=0$ *изменяют знак* σ;

2) *в* $CF^{3,1}_5$ *при* $u_*=u<1$ *замена с* $r_1=1$, $s_1=1-u_*$, $r_2=0$, $s_2=1$ *дает* $u=2-u_*$ $(u>1,\ u\neq 2)$;

3) *в* $CF^{4,1}_1$ *при* $\sigma_*=\sigma$, $u_*=u$ *замена с* r_1, $s_2=0$, s_1, $r_2=|u_*|^{-1/2}$ *дает* $\sigma=\sigma_*\operatorname{sign}u_*$, $u=u_*^{-1}$ $(|u|<1)$;

4) *в* $CF^{4,1}_7$ $(v\neq 2-u^{-1})$ *при* $\sigma_*=\sigma$, $u_*=u$ *замена с* $r_1=|v-1|^{1/2}|u_*v-2u_*+1|^{-1/2}$, $s_1=0$, $r_2=(1-u_*)(v-1)^{-1}r_1$, $s_2=(v-1)^{-1}(u_*v-2u_*+1)r_1$ *дает* $\sigma=\sigma_*\operatorname{sign}((v-1)(u_*v-2u_*+1))$, $u=(v-u_*)(u_*v-2u_*+1)^{-1}$ *и тем же* v; *а значит, для* $\forall\, v\neq 1$, *если* $u^*\leq 1$, *то* $u\geq 1$, *так как* $u'(u_*)=-(v-1)^2(u_*v-2u_*+1)^{-2}<0$ *и* $u(1)=1$.

Следствие 2.1. *В силу определения* 1.13 *из* [2] *имеем:* $acs^{3,1}_3=\{\sigma=-1$ *при* $u=2\}$, $acs^{3,1}_5=\{u<1\}$, $acs^{3,1}_{14,\kappa}=\{\sigma=-1\}$, $acs^{4,1}_1=\{|u|>1\}$, $acs^{4,1}_7=\{u<1$ *при* $v\neq 1\}$, *у остальных канонических форм из списка 2.1* $mcs^{m,1}=cs^{m,1}$.

Набор 2.2. Константы, многочлены и замены, используемые в дальнейшем:

1) $\varkappa_1=\tilde p_1^2-4\tilde p_2$, $\varkappa_2=\tilde p_1(1+|\tilde p_1^{-1}|\varkappa_1^{1/2})$;

2) $\varkappa_3=\tilde p_2(\tilde q_1-2)^2-\tilde q_2^2$, $\varkappa_4=\tilde q_2^2+4\tilde p_2$, $\varkappa_5=\tilde q_2(1+|\tilde q_2|^{-1}\varkappa_4^{1/2})$,
$\varkappa_6=\tilde q_2^2+4\tilde p_2(\tilde q_1-1)$, $\varkappa_7=-\tilde q_2(1+|\tilde q_2|^{-1}\varkappa_6^{1/2})(2\tilde p_2)^{-1}$, $\varkappa_8=\tilde q_1-(\varkappa_6+|\tilde q_2|\varkappa_6^{1/2})(2\tilde p_2)^{-1}$;

3_{I}) $\varkappa_9=\tilde t_2^2+\tilde p_1\tilde t_1+\tilde q_1\tilde t_2$, $\varkappa_{10}=\tilde q_1+2\tilde t_2$, $\varkappa_{11}=\tilde q_2\tilde t_1-\tilde p_1\tilde t_1-\tilde q_1\tilde t_2$, $\varkappa_{12}=\tilde q_2\tilde t_1-\tilde q_1\tilde t_2$, $\varkappa_{13}=\tilde p_1\tilde t_1-\tilde t_2^2$, $\varkappa_{14}=2\tilde t_2^2+\tilde q_2\tilde t_1-\tilde p_1\tilde t_1$, $\varkappa_{15}=2\tilde t_2^2+\tilde q_2\tilde t_1$, $\varkappa_{16}=\tilde t_2^2+\tilde q_2\tilde t_1$, $\varkappa_{17}=\tilde q_1^2-4\tilde p_1\tilde t_1$, $\varkappa_{18}=4\tilde p_1\tilde t_1-\tilde q_1^2+2\tilde q_1\tilde t_2-4\tilde q_2\tilde t_1$, $\varkappa_{19}=4\tilde p_1\tilde t_1-\tilde q_1^2-2\tilde q_1\tilde t_2$, $\varkappa_{20}=\tilde q_1\tilde t_2-2\tilde q_2\tilde t_1$,
$\varkappa_{21}^{\pm}=-\tilde q_1\pm\varkappa_{17}^{1/2}$, $\varkappa_{22}^{\pm}=\tilde q_1^2-4\tilde p_1\tilde t_1+\tilde q_1\tilde t_2\pm(\tilde q_1+\tilde t_2)\varkappa_{17}^{1/2}$, $\varkappa_{23}^{\pm}=\varkappa_{10}\pm\varkappa_{17}^{1/2}$,

$\varkappa_{24}^{\pm}=4\tilde p_1\tilde t_1-\tilde q_1^2-2\tilde q_1\tilde t_2+2\tilde q_2\tilde t_1\pm\varkappa_{10}\varkappa_{17}^{1/2}$, $\varkappa_{25}=(2\tilde t_2-\tilde q_1)^2+8\tilde q_2\tilde t_1$,
$\varkappa_{26}^{\pm}=\varkappa_{10}\pm\varkappa_{25}^{1/2}$, $\varkappa_{27}^{\pm}=2\tilde t_2-\tilde q_1\pm\varkappa_{25}^{1/2}$, $\varkappa_{28}^{\pm}=8\tilde p_1\tilde t_1-\tilde q_1^2+2\tilde q_1\tilde t_2-4\tilde q_2\tilde t_1\pm\tilde q_1\varkappa_{25}^{1/2}$,
$\varkappa_{29}^{\pm}=8\tilde p_1\tilde t_1-\tilde q_1^2+4\tilde q_2\tilde t_1+4\tilde t_2^2\pm\varkappa_{10}\varkappa_{25}^{1/2}$, $\varkappa_{30}^{\pm}=4\tilde q_2\tilde t_1-\tilde q_1\tilde t_2+2\tilde t_2^2\pm\tilde t_2\varkappa_{25}^{1/2}$;

$3_{\rm II}$) $\varkappa_{31}=\tilde t_2^2+4\tilde p_1\tilde t_1$, $\varkappa_{32}^{\pm}=\tilde t_2\pm\varkappa_{31}^{1/2}$, $\varkappa_{33}^{\pm}=(\tilde q_2\tilde t_1)^{1/2}\pm2\tilde t_2$, $\varkappa_{34}^{\pm}=(\tilde q_2\tilde t_1)^{1/2}\pm\tilde t_2$,
$\varkappa_{35}^{\pm}=\tilde q_2\tilde t_1\pm(\tilde q_2\tilde t_1)^{1/2}\tilde t_2+\tilde t_2^2$, $\varkappa_{36}=9\theta_*-2\tilde q_1^2+\tilde q_1\tilde t_2+\tilde t_2^2$, $\varkappa_{37}=3\theta_*-\tilde q_1^2-\tilde q_1\tilde t_2-\tilde t_2^2$,
$\varkappa_{38}=9\theta_*^2-3(\tilde q_1^2-2\tilde q_1\tilde t_2-2\tilde t_2^2)\theta_*-\tilde t_2(2\tilde q_1+\tilde t_2)(2\tilde q_1^2+4\tilde q_1\tilde t_2+3\tilde t_2^2)+\tilde q_2\tilde t_1\varkappa_{10}^2$,
$\varkappa_{39}=\theta_*+\tilde q_1\tilde t_2+\tilde t_2^2$, $\varkappa_{40}=\tilde q_1^2+\tilde q_1\tilde t_2-2\tilde t_2^2$, $\varkappa_{41}^{\pm}=(2\tilde q_1+\tilde t_2\pm\varkappa_{40}^{1/2})(\tilde q_1+\tilde t_2)/3$,
$\varkappa_{42}^{\pm}=\varkappa_{41}^{\pm}+\tilde q_1\tilde t_2+\tilde t_2^2$, $\varkappa_{43}^{\pm}=3\varkappa_{41}^{\pm}-\tilde q_1^2-\tilde q_1\tilde t_2-\tilde t_2^2$, $\varkappa_{44}=\tilde q_1^2+3\tilde q_1\tilde t_2+2\tilde t_2^2$,
$\varkappa_{45}^{\pm}=(\tilde q_1+\tilde t_2\pm\varkappa_{44}^{1/2})(2\tilde q_1+3\tilde t_2)$, $\varkappa_{46}^{\pm}=\varkappa_{45}^{\pm}+2\tilde q_1^2+9\tilde t_2(\tilde q_1+\tilde t_2)$, $\varkappa_{47}^{\pm}=\varkappa_{45}^{\pm}+\tilde q_1\tilde t_2+\tilde t_2^2$;
$\varkappa_{48}=\tilde q_1\tilde q_2+\tilde t_2(\tilde q_2-3\tilde p_1)$, $\varkappa_{49}=3\tilde p_1\tilde t_2-\tilde q_2(2\tilde q_1+\tilde t_2)$, $\varkappa_{50}=4\tilde p_1\tilde t_1-\tilde q_1^2+\tilde t_2^2$,
$\varkappa_{51}=\tilde p_1\tilde t_1-\tilde q_1\tilde t_2+\tilde t_2^2$, $\varkappa_{52}=\tilde p_1\tilde t_1+\tilde q_1\tilde t_2-\tilde q_1^2$, $\varkappa_{53}=\tilde q_1\tilde t_2-\tilde q_2\tilde t_1$, $\varkappa_{54}=2\tilde q_1\tilde t_2-4\tilde q_2\tilde t_1-\tilde t_2^2$,
$\varkappa_{55}=\tilde t_1^2\theta_*^4+\tilde t_1(\tilde t_2+\tilde q_1)\theta_*^3+(5\tilde q_1\tilde t_2-2\tilde t_2^2-7\tilde q_2\tilde t_1-2\tilde q_1^2)\theta_*^2+\tilde q_2(\tilde t_2+\tilde q_1)\theta_*+\tilde q_2^2$,
$\varkappa_{56}=4\tilde t_1\theta_*^2+(2\tilde q_1-\tilde t_2)\theta_*+\tilde q_2$, $\varkappa_{57}=\tilde t_1\tilde t_2\theta_*^2+(2\tilde q_1\tilde t_2-3\tilde q_2\tilde t_1-\tilde t_2^2)\theta_*+\tilde q_2\tilde t_2$,
$\varkappa_{58}=2\tilde t_1^2\theta_*^3+\tilde t_1(\tilde q_1-\tilde t_2)\theta_*^2+(2\tilde q_1\tilde t_2-4\tilde q_2\tilde t_1-\tilde t_2^2)\theta_*+\tilde q_2\tilde t_2$,
$\varkappa_{59}=2\tilde t_1^2\theta_*^4+5\tilde t_1(\tilde q_1+\tilde t_2)\theta_*^3+(2\tilde q_1^2+10\tilde q_2\tilde t_1-5\tilde q_1\tilde t_2+2\tilde t_2^2)\theta_*^2-\tilde q_2(\tilde q_1+\tilde t_2)\theta_*-\tilde q_2^2$,
$\varkappa_{60}=3\tilde p_1\tilde q_1+(\tilde q_2-3\tilde p_1)\tilde t_2$, $\varkappa_{61}=\tilde q_1\tilde q_2+(\tilde q_2-3\tilde p_1)\tilde t_2$,
$\varkappa_{62}=\tilde t_1\tilde t_2\theta_*^3+(5\tilde t_1\tilde q_2+2\tilde t_2^2-4\tilde q_1\tilde t_2)\theta_*^2-\tilde q_2(2\tilde q_1+\tilde t_2)\theta_*-\tilde q_2^2$, $\varkappa_{63}=2\tilde t_1\theta_*^2+(\tilde q_1-2\tilde t_2)\theta_*-\tilde q_2$;

$S_1(\theta)=27\theta^3-3(7\tilde q_1+5\tilde t_2)(\tilde q_1-\tilde t_2)\theta^2+(\tilde q_1^2-4\tilde q_1\tilde t_2-3\tilde t_2^2)(2\tilde q_1+\tilde t_2)^2\theta+\tilde t_2(\tilde q_1+\tilde t_2)(\tilde q_1^2+\tilde q_1t_2+\tilde t_2^2)(2\tilde q_1+\tilde t_2)^2$; $S_2(\theta)=\tilde t_1\tilde t_2\theta^3+(5\tilde q_2\tilde t_1-4\tilde q_1\tilde t_2+2\tilde t_2^2)\theta^2-\tilde q_2(2\tilde q_1+\tilde t_2)\theta-\tilde q_2^2$,
$S_3(\theta)=2\tilde t_1^2\theta^3+(\tilde q_1-\tilde t_2)\tilde t_1\theta^2+(2\tilde q_1\tilde t_2-4\tilde q_2\tilde t_1-\tilde t_2^2)\theta+\tilde t_2\tilde q_2$;

$J_0^1=\{r_1=1,\ s_1=-\beta,\ r_2=0,\ s_2=1\}$, $J_1^1=\{r_1=1,\ s_1=0,\ r_2=-\hat q_2(2\hat t_2)^{-1},\ s_2=\hat t_2^{-1}\}$,
$J_2^1=\{r_1=1,\ s_1=0,\ r_2=-\hat p_1\hat q_1^{-1},\ s_2=\hat t_2^{-1}\}$, $J_3^1=\{r_1=1,\ s_1=0,\ r_2=\theta_*,\ s_2=1\}$;

1) $L_2^{2,1}=\{r_1=|\tilde p_1|^{-1/2},\ s_1,r_2=0,\ s_2=\tilde p_1r_1\}$;
$L_5^{3,1}=\{r_1=0,\ s_1=|\tilde p_1|^{-1/2},\ r_2=\tilde p_1s_1,\ s_2=\varkappa_2s_1/2\}$;
$L_8^{3,1}=\{r_1,s_2=0,\ s_1=|\tilde p_1|^{-1/2},\ r_2=\tilde p_2\tilde p_1^{-1}s_1\}$;

2) $L1_3^{3,1}=\{r_1=(\tilde q_1-2)(\tilde q_1\tilde q_2)^{-1}s_2,\ s_1=0,\ r_2=\tilde q_1^{-1}s_2,\ s_2=|\tilde q_1\tilde q_2|^{1/2}|\tilde q_1-2|^{-1/2}\}$,
$L2_3^{3,1}=\{r_1=(4\tilde p_2)^{-1/4},\ s_1=0,\ r_2=\tilde p_2^{1/2}r_1,\ s_2=(4\tilde p_2)^{1/4}\}$;
$L_{14,\kappa}^{3,1}=\{r_1,s_2=0,\ s_1=|\tilde p_2|^{-1/4}|\tilde q_1|^{3/4}\tilde q_1^{-1},\ r_2=|\tilde p_2|^{1/4}|\tilde q_1|^{-3/4}\}$,
$L1_7^{4,1}=\{r_1=|\tilde q_2|^{-1/2},\ s_1=0,\ r_2=\varkappa_5r_1/2,\ s_2=\tilde q_2r_1\}$,
$L2_7^{4,1}=\{r_1=\varkappa_7r_2,\ s_1=0,\ r_2=|\varkappa_7\varkappa_8|^{-1/2},\ s_2=\varkappa_8r_2\}$,
$L_{12}^{4,1}=\{r_1=0,\ s_1=|\tilde q_1-2|^{1/2}|\tilde q_1\tilde q_2|^{-1/2},\ r_2,s_2=\tilde q_2(\tilde q_1-2)^{-1}s_1\}$,
$L_{24}^{4,1}=\{r_1,s_2=0,\ s_1=|\tilde q_2|^{-1/2},\ r_2=\tilde q_2s_1/2\}$,

$3_{\rm I}$) $L_9^{2,1}=\{r_1=-\tilde t_1|\tilde t_1|^{-1/2}\tilde t_2^{-1},\ s_1=0,\ r_2=\tilde t_1^{-1}\tilde t_2r_1,\ s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}\}$,
$L1_6^{3,1}=\{r_1=2\tilde t_1\varkappa_{10}^{-1}|\tilde t_1|^{-1/2},\ s_1=0,\ r_2=-\tilde q_1(2\tilde t_1)^{-1}r_1,\ s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}\}$,
$L2_6^{3,1}=\{r_1=\tilde t_1|\tilde t_1|^{-1/2}\tilde t_2^{-1},\ s_1,r_2=0,\ s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}\}$,
$L1_{11,\kappa}^{3,1}=\{r_1=|\tilde q_2|^{-1/2},\ s_1,r_2=0,\ s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}\}$,
$L2_{11,\kappa}^{3,1}=\{r_1=|\tilde p_1|^{-1/2},\ s_1=0,\ r_2=\tilde t_1^{-1}\tilde t_2r_1,\ s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}\}$;
$L_{17}^{3,1}=\{r_1=-(\tilde p_1\tilde t_2)^{-1/3}|\tilde t_1|^{1/6},\ s_1=0,\ r_2=\tilde t_1^{-1}\tilde t_2r_1,\ s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}\}$;
$L_{19}^{3,1}=\{r_1=0,\ s_1=-2^{2/3}|\tilde t_1|^{5/6}(\tilde q_1^2\tilde t_1\tilde t_2)^{-1/3},\ r_2=|\tilde t_1|^{-1/2},\ s_2=-\tilde q_1(2\tilde t_1)^{-1}s_1\}$;
$L_{21}^{3,1}=\{r_1=\tilde t_1|\tilde t_1|^{-1/2}(\tilde t_2^2(\tilde q_1+\tilde t_2))^{-1/3},\ s_1=0,\ r_2=\tilde t_1^{-1}\tilde t_2r_1,\ s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}\}$;
$L_{22}^{3,1}=\{r_1=0,\ s_1=\tilde t_1(\varkappa_{16}\tilde t_2)^{-1/3}|\tilde t_1|^{-1/2},\ r_2=|\tilde t_1|^{-1/2},\ s_2=\tilde t_1^{-1}\tilde t_2s_1\}$;
$L1_5^{4,1}=\{r_1=4(\varkappa_{26}^{\mp})^{-1}\tilde t_1^{-1}|\tilde t_1|^{-1/2},\ s_1=0,\ r_2=\varkappa_{27}^{\pm}(4\tilde t_1)^{-1}r_1,\ s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}\}$,
$L2_5^{4,1}=\{r_1=\tilde t_1\tilde t_2^{-1}|\tilde t_1|^{-1/2},\ s_1,r_2=0,\ s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}\}$;
$L1_{11}^{4,1}=\{r_1=|\tilde q_2|^{-1/2},\ s_1,r_2=0,\ s_2=\tilde q_1^{-1}\tilde q_2|\tilde q_2|^{-1/2}\}$,
$L2_{11}^{4,1}=\{r_1=|\varkappa_{12}|^{-1/2}|\tilde t_1|^{1/2},\ s_1=0,\ r_2=\tilde t_1^{-1}\tilde t_2r_1,\ s_2=\varkappa_{12}\tilde t_1^{-1}\varkappa_{10}^{-1}r_1\}$;
$L1_{14}^{4,1}=\{r_1=0,\ s_1=2\tilde t_1\varkappa_{10}^{-1}|\tilde t_1|^{-1/2},\ r_2=|\tilde t_1|^{-1/2},\ s_2=-\tilde q_1(2\tilde t_1)^{-1}s_1\}$,
$L2_{14}^{4,1}=\{r_1,s_2=0,\ s_1=\tilde t_1|\tilde t_1|^{-1/2}\tilde t_2^{-1},\ r_2=|\tilde t_1|^{-1/2}\}$;

$L_{19}^{4,1} = \{r_1 = -|\tilde t_1|^{1/6}(\tilde p_1 \tilde t_2)^{-1/3},\ s_1 = 0,\ r_2 = \tilde t_1^{-1}\tilde t_2 r_1,\ s_2 = |\tilde t_1|^{-1/2}\}$;
$L_{27}^{4,1} = \{r_1 = 0,\ s_1 = |\tilde t_1|^{5/6}(\varkappa_{14}\tilde t_1 \tilde t_2)^{-1/3},\ r_2 = |\tilde t_1|^{-1/2},\ s_2 = \tilde t_1^{-1}\tilde t_2 s_1\}$;
$L_{29}^{4,1} = \{r_1 = 0,\ s_1 = \pm\varkappa_{17}^{-1/2}\tilde t_1|\tilde t_1|^{-1/2},\ r_2 = |\tilde t_1|^{-1/2},\ s_2 = \varkappa_{21}^{\pm}(2\tilde t_1)^{-1}s_1\}$;
$L_{30}^{4,1} = \{r_1 = 0,\ s_1 = 2|\tilde t_1|^{5/6}(2\varkappa_{20}\tilde t_1 \tilde q_1)^{-1/3},\ r_2 = |\tilde t_1|^{-1/2},\ s_2 = -\tilde q_1(2\tilde t_1)^{-1}s_1\}$;
$L_{33}^{4,1} = \{r_1 = 0,\ s_1 = \tilde t_1\varkappa_{10}^{-1}|\tilde t_1|^{-1/2},\ r_2 = |\tilde t_1|^{-1/2},\ s_2 = \tilde t_1^{-1}\tilde t_2 s_1\}$;
$L_{8}^{5,1} = \{r_1 = |\tilde q_2|^{-1/2},\ s_1, r_2 = 0,\ s_2 = \tilde q_2|\tilde q_2|^{-1/2}\tilde t_2^{-1}\}$;

3_{II}) $L1_{1}^{4,1} = \{r_1 = s_1,\ s_1 = \varkappa_{31}^{-1/4}|2\tilde t_1(\varkappa_{32}^{\pm})^{-1}|^{1/2},\ r_2 = \varkappa_{32}^{\mp}(2\tilde t_1)^{-1}s_1,\ s_2 = \varkappa_{32}^{\pm}(2\tilde t_1)^{-1}s_1\}$,
$L2_{1}^{4,1} = \{r_1 = s_1,\ s_1 = |\tilde p_1|^{-1/2},\ r_2 = \varkappa_{32}^{\pm}(2\tilde t_1)^{-1}s_1,\ s_2 = 0\}$;
$L1_{3}^{4,1} = \{r_1 = s_1,\ s_1 = |(3\tilde q_1 - \tilde t_2)(\tilde q_1 - \tilde t_2)\tilde t_1^{-1}|^{-1/2},\ r_2 = \tilde q_1\tilde t_1^{-1}s_1,\ s_2 = (\tilde t_2 - 2\tilde q_1)\tilde t_1^{-1}s_1\}$,
$L2_{3}^{4,1} = \{r_1 = s_1,\ s_1 = \sqrt{3}\,|(2\tilde q_1 - 3\tilde t_2)\tilde t_2\tilde t_1^{-1}|^{-1/2},\ r_2 = 0,\ s_2 = -(2\tilde q_1 - 3\tilde t_2)(3\tilde t_1)^{-1}s_1\}$,
$L3_{3}^{4,1} = \{r_1 = s_1,\ s_1 = 4|(2\tilde q_1 - 3\tilde t_2)(2\tilde q_1 + \tilde t_2)\tilde t_1^{-1}|^{-1/2},\ r_2 = -(2\tilde q_1 - 3\tilde t_2)(4\tilde t_1)^{-1}s_1,\ s_2 = 0\}$;
$L1_{13}^{4,1} = \{r_1 = s_1,\ s_1 = 2\,|(2\tilde q_1 - \tilde t_2)\tilde t_2\tilde t_1^{-1}|^{-1/2},\ r_2 = 0,\ s_2 = -(2\tilde q_1 - \tilde t_2)(2\tilde t_1)^{-1}s_1\}$,
$L2_{13}^{4,1} = \{r_1 = s_1,\ s_1 = \pm(\tilde q_2\tilde t_1)^{1/2}\tilde q_2^{-1}s_2,\ r_2 = -(2(\tilde q_2\tilde t_1)^{1/2} \pm \tilde t_2)(\varkappa_{33}^{\pm})^{-1}s_2,$
$s_2 = (\tilde q_2\tilde t_1)^{1/4}\varkappa_{33}^{\pm}(3\varkappa_{35}^{\pm})^{-1/2}|\varkappa_{34}^{\pm}\tilde t_1|^{-1/2}\}$;
$L_{28}^{4,1} = \{r_1 = s_1,\ s_1 = \varkappa_{10}|\varkappa_{39}\varkappa_{36}\tilde t_1^{-1}|^{-1/2},\ r_2 = -(3\theta_* + 2\tilde q_1\tilde t_2 + \tilde t_2^2)(\tilde t_1\varkappa_{10})^{-1}s_1,$
$s_2 = (6\theta_* - \tilde q_1\tilde t_2 - 2\tilde q_1^2)(\tilde t_1\varkappa_{10})^{-1}s_1\}$;
$L_{32}^{4,1} = \{r_1 = s_1, s_1 = |\tilde t_1|^{1/2}|\varkappa_{42}^{\pm}|^{-1/2}, r_2 = -(\tilde q_1 + \tilde t_2)\tilde t_1^{-1}s_1,\ s_2 = (3\varkappa_{41}^{\pm} - \tilde q_1^2 + \tilde t_2^2)(\tilde t_1\varkappa_{10})^{-1}s_1\}$;
$L_{36}^{4,1} = \{r_1 = s_1,\ s_1 = |\tilde t_1|^{1/2}|\varkappa_{46}^{\pm}|^{-1/2}, r_2 = -(2\tilde q_1 + 3\tilde t_2)\tilde t_1^{-1}s_1,$
$s_2 = (\varkappa_{45}^{\pm} + 2\tilde q_1\tilde t_2 + 3\tilde t_2^2)(\tilde t_1\varkappa_{10})^{-1}s_1\}$;
$L1_{3}^{5,1} = \{r_1, s_1 = |\tilde p_1|^{-1/2},\ r_2 = (\tilde q_2 - 3\tilde p_1)\tilde q_1^{-1}s_1,\ s_2 = 0\}$,
$L2_{3}^{5,1} = \{r_1, s_1 = |\tilde q_2|^{-1/2},\ r_2 = 0,\ s_2 = -2\tilde q_2\tilde t_2^{-1}s_1\}$,
$L3_{3}^{5,1} = \{r_1, s_1 = (\tilde q_1 - \tilde t_2)|\varkappa_{50}\tilde p_1|^{-1/2},\ r_2 = -(2\tilde p_1\tilde t_1 - \tilde q_1\tilde t_2 + \tilde t_2^2)(\tilde t_1(\tilde q_1 - \tilde t_2))^{-1}s_1,$
$s_2 = (2\tilde p_1\tilde t_1 + \tilde q_1\tilde t_2 - \tilde q_1^2)(\tilde t_1(\tilde q_1 - \tilde t_2))^{-1}s_1\}$;
$L1_{6}^{5,1} = \{r_1, s_1 = |\tilde q_2|^{-1/2},\ r_2 = 0,\ s_2 = -2\tilde q_2\tilde t_2^{-1}s_1\}$,
$L2_{6}^{5,1} = \{r_1, s_1 = 3\theta_*|\varkappa_{59}\tilde t_1^{-1}|^{-1/2},\ r_2 = -(\tilde t_1\theta_*^2 + (2\tilde q_1 - \tilde t_2)\theta_* + \tilde q_2)(3\tilde t_1\theta_*)^{-1}s_1,\ s_2 = \theta_* s_1\}$;
$L1_{7}^{5,1} = \{r_1, s_1 = |\tilde p_1|^{-1/2},\ r_2 = (\tilde q_2 - 3\tilde p_1)\tilde q_1^{-1}s_1,\ s_2 = 0\}$,
$L2_{7}^{5,1} = \{r_1, s_1 = \sqrt{3}|\varkappa_{63}|^{-1/2},\ r_2 = \theta_* s_1,\ s_2 = -(\tilde t_1\theta_*^2 + (2\tilde q_1 - \tilde t_2)\theta_* + \tilde q_2)(3\tilde t_1\theta_*)^{-1}s_1\}$.

2.4. Три класса линейной эквивалентности систем при $\mathbf{l = 1}$. Система (1.4) $\dot x = A\,q^{[3]}(x)$ при $l = 1$ согласно (2.2) однозначно представима в виде (2.1):

$$\dot x = (x_1 + \beta x_2)\begin{pmatrix} p_1x_1^2 + q_1x_1x_2 + t_1x_2^2 \\ p_2x_1^2 + q_2x_1x_2 + t_2x_2^2 \end{pmatrix} = P_0^1(x)\,G\,q^{[2]}(x), \quad G = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & t_1 \\ p_2 & q_2 & t_2 \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

причем у нее $R_2 = \delta_{pt}^2 - \delta_{pq}\delta_{qt} \neq 0$, так как $l = 1$, а значит, $p_1^2 + p_2^2 \neq 0$ и $t_1^2 + t_2^2 \neq 0$.

По теореме 2.1 любая замена (1.5) $x = Ly$ с $\det L = \delta \neq 0$ преобразует систему (2.6) в систему (1.6) $\dot y = \widetilde A\,q^{[3]}(y)$ вида (2.3), в которой символ ˜ заменен на символ ˆ, т. е. в систему

$$\dot y = (\hat\alpha y_1 + \hat\beta y_2)\begin{pmatrix} \hat p_1y_1^2 + \hat q_1y_1y_2 + \hat t_1y_2^2 \\ \hat p_2y_1^2 + \hat q_2y_1y_2 + \hat t_2y_2^2 \end{pmatrix} = \widehat P_0^1(y)\,\widehat G\,q^{[2]}(y) \tag{2.7}$$

или $\widehat A = \begin{pmatrix} \hat a_1 & \hat b_1 & \hat c_1 & \hat d_1 \\ \hat a_2 & \hat b_2 & \hat c_2 & \hat d_2 \end{pmatrix}$, где согласно (2.4) матрица $\widehat G = \begin{pmatrix} \hat p_1 & \hat q_1 & \hat t_1 \\ \hat p_2 & \hat q_2 & \hat t_2 \end{pmatrix} = L^{-1}GM$, $\widehat R_2 = \delta_{\hat p\hat t}^2 - \delta_{\hat p\hat q}\delta_{\hat q\hat t} = \delta^2R_2 \neq 0$, $\hat\alpha = r_1 + \beta r_2$, $\hat\beta = s_1 + \beta s_2$ $(\hat\alpha^2 + \hat\beta^2 \neq 0)$, матрица $\widehat A$ из (1.7).

Матрица $\widehat A$ упростится, если в замене (1.5) положить $s_1 = -\beta s_2$, получая $\hat\beta = 0$.

В частности, замена J_0^1 преобразует систему (2.6) в систему

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 & \hat{b}_1 & \hat{c}_1 & \hat{d}_1 \\ \hat{a}_2 & \hat{b}_2 & \hat{c}_2 & \hat{d}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{p}_1 & \hat{q}_1 & \hat{t}_1 & 0 \\ \hat{p}_2 & \hat{q}_2 & \hat{t}_2 & 0 \end{pmatrix},\ (\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = (1, 0),\ \widehat{G} = \begin{pmatrix} \hat{p}_1 & \hat{q}_1 & \hat{t}_1 \\ \hat{p}_2 & \hat{q}_2 & \hat{t}_2 \end{pmatrix}, \qquad (2.8)$$

в которой $\hat{p}_1 = p_1 + \beta p_2,\ \hat{q}_1 = q_1 + \beta(q_2 - 2p_1) - 2\beta^2 p_2,\ \hat{t}_1 = t_1 + \beta(t_2 - q_1) - \beta^2 q_2 + \beta^3 p_2,$ $\hat{p}_2 = p_2,\ \hat{q}_2 = q_2 - 2\beta p_2,\ \hat{t}_2 = t_2 - \beta q_2 + \beta^2 p_2\ \ (\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 \neq 0,\ \hat{t}_1^2 + \hat{t}_2^2 \neq 0,\ \widehat{R}_2 = R_2 \neq 0).$

Очевидным достоинством системы (2.8) помимо равенства нулю элементов $\hat{d}_1$ и $\hat{d}_2$, связанного с равенством нулю числа $\hat{\beta}$, является совпадение первых трех столбцов матрицы $\widehat{A}$ с матрицей $\widehat{G}$. Именно такой структурой обладают двадцать четыре CF из первой части списка 2.1. У остальных девяти CF из этого списка $\breve{\alpha} = \breve{\beta}$.

Сделав в (2.8) произвольную замену (1.5) с $s_1 = 0\ \ (r_1, s_2 \neq 0)$, получаем систему

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \hat{p}_1 r_1^2 + \hat{q}_1 r_1 r_2 + \hat{t}_1 r_2^2 & (\hat{q}_1 r_1 + 2\hat{t}_1 r_2) s_2 & \hat{t}_1 s_2^2 & 0 \\ -S_0(r_1^{-1} r_2) r_1^3 s_2^{-1} & \hat{q}_2 r_1^2 - (\hat{q}_1 - 2\hat{t}_2) r_1 r_2 - 2\hat{t}_1 r_2^2 & (\hat{t}_2 r_1 - \hat{t}_1 r_2) s_2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (2.9)$$

где $S_0(\theta) = \hat{t}_1\theta^3 + (\hat{q}_1 - \hat{t}_2)\theta^2 + (\hat{p}_1 - \hat{q}_2)\theta - \hat{p}_2,\ \ \hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2,\ \hat{t}_1^2 + \hat{t}_2^2 \neq 0,\ \ \tilde{a}_1^2 + \tilde{a}_2^2,\ \tilde{c}_1^2 + \tilde{c}_2^2 \neq 0.$

Вид системы (2.9) демонстрирует целесообразность разбиения множества систем (2.8) на три непересекающихся класса:

1) $\hat{t}_1 = 0, \hat{q}_1 = 0$; 2) $\hat{t}_1 = 0, \hat{q}_1 \neq 0$; 3) $\hat{t}_1 \neq 0$.

Выделенные классы линейно неэквивалентны, так как если произвольная замена связывает две системы вида (2.8), то в ней $s_1 = 0$ по утверждению 2.2 п. 2, и тогда инвариантность условий 1)–3) вытекает из вида системы (2.9).

Посмотрим, какую наиболее простую систему (2.9) всегда можно получить в каждом из этих классов, имея в виду, что при $\hat{t}_1 = 0\ \ (\hat{t}_2 \neq 0)$ система (2.9) имеет вид

$$\begin{pmatrix} (\hat{p}_1 r_1 + \hat{q}_1 r_2) r_1 & \hat{q}_1 r_1 s_2 & 0 & 0 \\ (\hat{p}_2 r_1^2 - (\hat{p}_1 - \hat{q}_2) r_1 r_2 - (\hat{q}_1 - \hat{t}_2) r_2^2) r_1 s_2^{-1} & (\hat{q}_2 r_1 + (2\hat{t}_2 - \hat{q}_1) r_2) r_1 & \hat{t}_2 r_1 s_2 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.10)$$

1) $\hat{t}_1 = 0, \hat{q}_1 = 0\ \ (\hat{p}_1 \neq 0,\ \hat{t}_2 \neq 0)$. Тогда система (2.10) примет вид $\begin{pmatrix} \hat{p}_1 r_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ (\hat{p}_2 r_1^2 + (\hat{q}_2 - \hat{p}_1) r_1 r_2 + \hat{t}_2 r_2^2) r_1 s_2^{-1} & (\hat{q}_2 r_1 + 2\hat{t}_2 r_2) r_1 & \hat{t}_2 r_1 s_2 & 0 \end{pmatrix}$ и в ней всегда можно получить $\tilde{b}_2 = 0,\ \tilde{c}_2 = 1$. В частности, замена J_1^1 преобразует систему (2.8) в систему

$$\widetilde{A}_1 = \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{p}_2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} &\tilde{p}_1 = \hat{p}_1\,(\neq 0), \\ &\tilde{p}_2 = (2\hat{p}_1\hat{q}_2 + 4\hat{p}_2\hat{t}_2 - \hat{q}_2^2)/4. \end{aligned} \qquad (2.11)$$

При $\tilde{p}_2 \neq 0$ система $\widetilde{A}_1$ является $SF_{a,8}^{3,1}$.

2) $\hat{t}_1 = 0, \hat{q}_1 \neq 0\ \ (\hat{t}_2 \neq 0)$. Тогда в (2.10) всегда можно получить $\tilde{a}_1 = 0,\ \tilde{c}_2 = 1$. В частности, замена J_2^1 преобразует систему (2.8) в систему

$$\widetilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{q}_1 & 0 & 0 \\ \tilde{p}_2 & \tilde{q}_2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} &\tilde{q}_1 = \hat{q}_1\hat{t}_2^{-1}\,(\neq 0), \quad \tilde{q}_2 = \hat{p}_1 + \hat{q}_2 - 2\hat{p}_1\hat{q}_1^{-1}\hat{t}_2, \\ &\tilde{p}_2 = \hat{q}_1^{-2}\hat{t}_2(\hat{t}_2\hat{p}_1^2 - \hat{q}_2\hat{q}_1\hat{p}_1 + \hat{p}_2\hat{q}_1^2)\,(\neq 0). \end{aligned} \qquad (2.12)$$

При $\tilde{q}_2 \neq 0$ система $\widetilde{A}_2$ является $SF_{a,24}^{4,1}$.

3) $\hat{t}_1 \neq 0$. Тогда в (2.9) можно получить $\tilde{a}_2 = 0$. В частности, замена J_3^1, где $\theta_* \in \mathbb{R}^1$ – нуль $S_0(\theta)$, преобразует (2.8) в систему (2.9)

$$\widetilde{A}_3 = \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 & \tilde{q}_1 & \tilde{t}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{q}_2 & \tilde{t}_2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{array}{l} \tilde{p}_1 = \hat{p}_1 + \hat{q}_1\theta_* + \hat{t}_1\theta_*^2\,(\neq 0), \quad \tilde{q}_1 = \hat{q}_1 + 2\hat{t}_1\theta_*, \quad \tilde{t}_1 = \hat{t}_1\,(\neq 0), \\ \tilde{q}_2 = \hat{q}_2 - (\hat{q}_1 - 2\hat{t}_2)\theta_* - 2\hat{t}_1\theta_*^2, \quad \tilde{t}_2 = \hat{t}_2 - \hat{t}_1\theta_*. \end{array} \tag{2.13}$$

При $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{t}_2 \neq 0$ система $\widetilde{A}_3$ является $SF_8^{5,1}$. В свою очередь, при $\tilde{q}_2 = 0$ – это $SF_5^{4,1}$, при $\tilde{t}_2 = 0$ – это $SF_{11}^{4,1}$, при $\tilde{q}_1 = 0$ – это $SF_{a,14}^{4,1}$.

Ниже для каждой из систем (2.11), (2.12), (2.13) в соответствующей лемме будут найдены условия на коэффициенты и замены (1.5), сводящие выбранную систему при этих условиях ко всем возможным CF из списка 2.1, записываемым в виде

$$\breve{A} = \begin{pmatrix} \breve{a}_1 & \breve{b}_1 & \breve{c}_1 & \breve{d}_1 \\ \breve{a}_2 & \breve{b}_2 & \breve{c}_2 & \breve{d}_2 \end{pmatrix}, \quad (\breve{\alpha}, \breve{\beta}). \tag{2.14}$$

Их элементы вычисляются по тем же формулам, что выписаны для системы (2.7).

Рассуждения каждый раз будут разделены на два этапа.

На этапе I будут рассматриваться произвольные замены (1.5) с $s_1 = 0$, сводящие исходные системы согласно утверждению 2.2, п. 2 к системам (2.14) с $\breve{\beta} = 0$.

Основываясь на полном переборе допустимых значений элементов исходной системы, будут найдены те из них, при которых явно выписанными заменами будут получены CF из первой части списка 2.1 и значения их элементов из cs.

На этапе II непосредственно для каждой CF из второй части списка 2.1, предшествующей исходной системе, будут устанавливаться замена с $r_1 = s_1 \neq 0$, согласно утверждению 2.2, п. 3 гарантирующая равенство $\breve{\alpha} = \breve{\beta}$, и условия для попадания из исходной системы в выбранную CF.

При этом в формулировках последующих утверждений: a) с учетом замечания 1.2 столбцы r и s замены (1.5) будут меняться местами, если получаемые CF окажутся дополнительными; b) ссылкой на соответствующий пункт утверждения 2.3 из множества значений элементов исходной системы будут удаляться те, которые принадлежат допустимым множествам, но не принадлежат каноническим множествам.

2.5. Сведение систем из первых двух классов к $\mathbf{CF^{m,1}}$ $(\mathbf{m = 2, 3, 4})$.

Лемма 2.1. *Любая система* (2.8) *с* $\hat{t}_1 = 0$, $\hat{q}_1 = 0$ *линейно эквивалентна какой-либо* $CF_i^{m,1}$ *из списка* 2.1_1. *Ниже для каждой из трех таких* $CF_i^{m,1}$ *приведены: a) условия на коэффициенты* $\tilde{p}_1 (\neq 0), \tilde{p}_2$ *системы* (2.11), *полученной из* (2.8) *заменой* J_1^1, *b) замена* (1.5), *преобразующая правую часть* (2.11) *при указанных условиях в выбранную форму, c) получаемые при этом значения* σ *и параметров из* $cs_i^{m,1}$:

$CF_2^{2,1}$: *a)* $\tilde{p}_2 = 0$, *b)* $L_2^{2,1}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{p}_1$;

$CF_5^{3,1}$: *a)* $\tilde{p}_2 \neq 0$, $\varkappa_1 \geq 0$, *b)* $L_5^{3,1}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{p}_1$, $u = \varkappa_2\tilde{p}_1^{-1}$;

$CF_8^{3,1}$: *a)* $\tilde{p}_2 \neq 0$, $\varkappa_1 < 0$, *b)* $L_8^{3,1}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{p}_1$, $u = \tilde{p}_2\tilde{p}_1^{-2}$.

Доказательство. В случае 1), когда в (2.8) $\hat{t}_1 = 0$, $\hat{q}_1 = 0$ $(\hat{p}_1 \neq 0, \hat{t}_2 \neq 0)$, из системы (2.11) заменой (1.5) с $s_1 = 0$ получаем систему (2.14) вида

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_1 r_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ (\tilde{p}_2 r_1^2 - \tilde{p}_1 r_1 r_2 + r_2^2) r_1 s_2^{-1} & 2r_1 r_2 & r_1 s_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\tilde{p}_1 \neq 0). \tag{2.15}$$

1) $\breve{b}_2 = 0 \Leftrightarrow r_2 = 0$. Тогда система (2.15) принимает вид $\begin{pmatrix} \tilde{p}_1 r_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{p}_2 r_1^3 s_2^{-1} & 0 & r_1 s_2 & 0 \end{pmatrix}$.

1_1) $\breve{a}_2 = 0 \Leftrightarrow \tilde{p}_2 = 0$. Тогда при $r_1 = |\tilde{p}_1|^{-1/2}$, $s_2 = \tilde{p}_1 r_1$ – это $CF_2^{2,1}$ с $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{p}_1$.

1_2) $\breve{a}_2 \neq 0 \Leftrightarrow \tilde{p}_2 \neq 0$. Тогда при $r_1 = |\tilde{p}_1|^{-1/2}$, $s_2 = \tilde{p}_2 \tilde{p}_1^{-1} r_1$ полученная система – это $NSF_{a,8}^{3,1}$ с $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{p}_1$, $u = \tilde{p}_2 \tilde{p}_1^{-2}$.

2) $\breve{a}_2 = 0 \Leftrightarrow \{\varkappa_1 = \tilde{p}_1^2 - 4\tilde{p}_2 \geq 0,\ 2r_2 = \varkappa_2 r_1\}$ ($r_2 \neq 0$, так как $\varkappa_2 \neq 0$). Тогда система (2.15) принимает вид $\begin{pmatrix} \tilde{p}_1 r_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varkappa_2 r_1^2 & r_1 s_2 & 0 \end{pmatrix}$. При $r_1 = |\tilde{p}_1|^{-1/2}$, $s_2 = \tilde{p}_1 r_1$ – это $CF_{a,5}^{3,1}$ с $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{p}_1$, $u = \varkappa_2 \tilde{p}_1^{-1}$ $(= 1 + |\tilde{p}_1|^{-1} \varkappa_1^{1/2})$ при условии, что $u \neq 2$ (см. утверждение 2.3, п. 1) $\Leftrightarrow |\tilde{p}_1| \neq \varkappa_1^{1/2} \Leftrightarrow \tilde{p}_2 \neq 0$.

Поскольку $SF_{a,5}^{3,1}$ предшествует $SF_{a,8}^{3,1}$, в 1_2) попадаем, если $\varkappa_1 = \tilde{p}_1^2 - 4\tilde{p}_2 < 0$, т. е. минуем 2). Тогда $NSF_{a,8}^{3,1} = CF_{a,8}^{3,1}$, так как $u = \tilde{p}_2 \tilde{p}_1^{-2} > 1/4$. (см. утверждение 2.3, п. 2).

II. Система (2.11) предшествует всем девяти CF из второй части списка 2.1. $\square$

Лемма 2.2. *Любая система (2.8) с $\hat{t}_1 = 0$, $\hat{q}_1 \neq 0$ линейно эквивалентна какой-либо $CF_i^{m,1}$ из списка 2.1_2. Ниже для каждой из пяти таких $CF_i^{m,1}$ приведены: a) условия на коэффициенты $\tilde{q}_1(\neq 0)$, $\tilde{p}_2(\neq 0)$, $\tilde{q}_2$ системы (2.12), полученной из (2.8) заменой J_2^1, b) замена (1.5), преобразующая правую часть (2.12) при указанных условиях в выбранную форму, c) получаемые при этом значения σ и параметров из $cs_i^{m,1}$:*

$CF_3^{3,1}$: 1) *a)* $\tilde{q}_1 \neq 2$, $\varkappa_3 = 0$, *b)* $L1_3^{3,1}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}((\tilde{q}_1 - 2)\tilde{q}_1 \tilde{q}_2)$, $u = \tilde{q}_1$;
2) *a)* $\tilde{p}_2 > 0$, $\tilde{q}_1 = 2$, $\tilde{q}_2 = 0$, *b)* $L2_3^{3,1}$, *c)* $\sigma = 1$, $u = 2$;

$CF_{14,\kappa}^{3,1}$: *a)* $\tilde{p}_2 < 0$, *если* $\tilde{q}_1 = 2$, $\tilde{q}_2 = 0$, *b)* $L_{14,\kappa}^{3,1}$ *c)* $\kappa = \operatorname{sign}(\tilde{p}_2 \tilde{q}_1)$, $u = \tilde{q}_1^{-1}$;

$CF_7^{4,1}$: 1) *a)* $\tilde{q}_1 = 2$, $\varkappa_4 \geq 0$, $\tilde{q}_2 \neq 0$, *b)* $L1_7^{4,1}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{q}_2$, $u = \varkappa_5 \tilde{q}_2^{-1}$, $v = 2$;
2) *a)* $\tilde{q}_1 \neq 2$, $\tilde{q}_2 \neq 0$, $\varkappa_6 \geq 0$, $\varkappa_8 \neq 0$, *b)* $L2_7^{4,1}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}(\varkappa_7 \varkappa_8)$, $u = \varkappa_8^{-1} \tilde{q}_1$, $v = \tilde{q}_1$;

$CF_{12}^{4,1}$: *a)* $\tilde{q}_1 \neq 2$, $\tilde{q}_2 \neq 0$, $4\varkappa_3(1 - \tilde{q}_1) > \tilde{q}_1^2 \tilde{q}_2^2$, *b)* $L_{12}^{4,1}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}(\tilde{q}_1 \tilde{q}_2 (\tilde{q}_1 - 2))$, $u = \tilde{q}_1^{-1}$, $v = \varkappa_3 \tilde{q}_1^{-1} \tilde{q}_2^{-2}$;

$CF_{24}^{4,1}$: *a)* $\tilde{q}_1 = 2$, $\varkappa_4 < 0$, $\tilde{q}_2 \neq 0$, *b)* $L_{24}^{4,1}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{q}_2$, $u = 1/2$, $v = 2\tilde{p}_2 \tilde{q}_2^{-2}$.

Доказательство. I. В случае 2), когда в (2.8) $\hat{t}_1 = 0$, $\hat{q}_1 \neq 0$ ($\hat{t}_2 \neq 0$), из системы (2.12) заменой (1.5) с $s_1 = 0$ ($r_1, s_2 \neq 0$) получаем систему (2.14) вида

$$\begin{pmatrix} \tilde{q}_1 r_1 r_2 & \tilde{q}_1 r_1 s_2 & 0 & 0 \\ (\tilde{p}_2 r_1^2 + \tilde{q}_2 r_1 r_2 - (\tilde{q}_1 - 1) r_2^2) r_1 s_2^{-1} & \tilde{q}_2 r_1^2 - (\tilde{q}_1 - 2) r_1 r_2 & r_1 s_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\tilde{p}_2,\ \tilde{q}_1 \neq 0). \tag{2.16}$$

1) $\breve{a}_1 = 0 \Leftrightarrow r_2 = 0$. Тогда (2.16) принимает вид $\begin{pmatrix} 0 & \tilde{q}_1 r_1 s_2 & 0 & 0 \\ \tilde{p}_2 r_1^3 s_2^{-1} & \tilde{q}_2 r_1^2 & r_1 s_2 & 0 \end{pmatrix}$.

1_1) $\breve{b}_2 = 0 \Leftrightarrow \tilde{q}_2 = 0$. Тогда при $r_1 = |\tilde{p}_2|^{-1/4} |\tilde{q}_1|^{3/4} \tilde{q}_1^{-1}$, $s_2 = |\tilde{p}_2|^{1/4} |\tilde{q}_1|^{-3/4}$ – это $NSF_{a,14,\kappa}^{3,1}$ с $\kappa = \operatorname{sign}(\tilde{p}_2 \tilde{q}_1)$, $u = \tilde{q}_1^{-1}$.

1_2) $\breve{b}_2 \neq 0 \Leftrightarrow \tilde{q}_2 \neq 0$. Тогда при $r_1 = |\tilde{q}_2|^{-1/2}$, $s_2 = \tilde{q}_1^{-1} \tilde{q}_2 r_1$ – это $NSF_{a,24}^{4,1}$ с $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{q}_2$, $u = \tilde{q}_1^{-1}$, $v = \tilde{p}_2 \tilde{q}_1 \tilde{q}_2^{-2}$. И системы, которым она предшествует, не интересны.

2) $\breve{a}_1 \neq 0 \Leftrightarrow r_2 \neq 0$.

2_1) $\tilde{q}_1 = 2$. Тогда система (2.16) принимает вид:

$$\begin{pmatrix} 2 r_1 r_2 & 2 r_1 s_2 & 0 & 0 \\ (\tilde{p}_2 r_1^2 + \tilde{q}_2 r_1 r_2 - r_2^2) r_1 s_2^{-1} & \tilde{q}_2 r_1^2 & r_1 s_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

$2_1^1)$ $\breve{b}_2 = 0 \Leftrightarrow \tilde{q}_2 = 0$. Тогда система (2.17) имеет вид $\begin{pmatrix} 2r_1r_2 & 2r_1s_2 & 0 & 0 \\ (\tilde{p}_2r_1^2 - r_2^2)r_1s_2^{-1} & 0 & r_1s_2 & 0 \end{pmatrix}$.

$2_1^{1a})$ $\breve{a}_2 = 0 \Leftrightarrow \{\tilde{p}_2 > 0,\ r_2 = \tilde{p}_2^{1/2}r_1\}$. При $r_1 = s_2^{-1}$, $s_2 = (4\tilde{p}_2)^{1/4}$ – это $CF_3^{3,1}$ с $\sigma = 1$, $u = 2$.

Поскольку $SF_3^{3,1}$ предшествует $SF_{14,\kappa}^{3,1}$, в 1_1) попадаем при $\tilde{q}_1 = 2$, если $\tilde{p}_2 < 0$. Тогда $NSF_{a,14,\kappa}^{3,1} = CF_{a,14,\kappa}^{3,1}$, так как $\kappa = \mathrm{sign}(\tilde{p}_2\tilde{q}_1) = -1$ при $u = \tilde{q}_1^{-1} = 1/2$ (см. утверждение 2.3, п. 3).

$2_1^{1b})$ $\tilde{p}_2 < 0$. Тогда случай $\breve{a}_2 \neq 0$ с попаданием в $SF_{a,12}^{4,1}$ можно не рассматривать, так как при $r_2 = 0$ всегда попадаем в 1_1) с $SF_{a,14,\kappa}^{3,1}$.

$2_1^2)$ $\breve{b}_2 \neq 0 \Leftrightarrow \tilde{q}_2 \neq 0$. Если при этом и $\breve{a}_2 \neq 0$, то получаем $SF_{a,10}^{5,1}$.

$2_1^{2a})$ $\breve{a}_2 = 0 \Leftrightarrow \{\varkappa_4 = \tilde{q}_2^2 + 4\tilde{p}_2 \geq 0,\ 2r_2 = \varkappa_5 r_1\}$ ($\varkappa_5 = \tilde{q}_2(1 + |\tilde{q}_2|^{-1}\varkappa_4^{1/2}) \neq 0$). Тогда (2.17) имеет вид $\begin{pmatrix} \varkappa_5 r_1^2 & 2r_1s_2 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{q}_2r_1^2 & r_1s_2 & 0 \end{pmatrix}$. При $r_1 = |\tilde{q}_2|^{-1/2}$, $s_2 = \tilde{q}_2r_1$ – это $CF_7^{4,1}$ с $\sigma = \mathrm{sign}\tilde{q}_2$, $v = 2$, $u = \varkappa_5\tilde{q}_2^{-1}$, так как $2 - u^{-1}, 2u(u+1)^{-1} \neq 2 = v$ (см. утверждение 2.3, п. 8).

$2_2)$ $\tilde{q}_1 \neq 2$ в системе (2.16).

$2_2^1)$ $\breve{b}_2 = 0 \Leftrightarrow r_2 = \tilde{q}_2(\tilde{q}_1 - 2)^{-1}r_1$. Тогда система (2.16) принимает вид:

$$\begin{pmatrix} \tilde{q}_1\tilde{q}_2(\tilde{q}_1 - 2)^{-1}r_1^2 & \tilde{q}_1r_1s_2 & 0 & 0 \\ \varkappa_3(\tilde{q}_1 - 2)^{-2}r_1^3s_2^{-1} & 0 & r_1s_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\tilde{p}_2,\ \tilde{q}_1 \neq 0). \tag{2.18}$$

$2_2^{1a})$ $\breve{a}_2 = 0 \Leftrightarrow \varkappa_3 = \tilde{p}_2(\tilde{q}_1 - 2)^2 - \tilde{q}_2^2 = 0$ ($\tilde{q}_2 \neq 0$). Тогда при $r_1 = |\tilde{q}_1 - 2|^{1/2}|\tilde{q}_1\tilde{q}_2|^{-1/2}$, $s_2 = \tilde{q}_1\tilde{q}_2(\tilde{q}_1 - 2)^{-1}r_1$ система (2.18) – это $CF_3^{3,1}$ с $\sigma = \mathrm{sign}(\tilde{q}_1\tilde{q}_2(\tilde{q}_1 - 2))$, $u = \tilde{q}_1$.

$2_2^{1b})$ $\breve{a}_2 \neq 0 \Leftrightarrow \varkappa_3 \neq 0$, $\breve{a}_1 \neq 0 \Leftrightarrow \tilde{q}_2 \neq 0$. При $r_1 = |\tilde{q}_1 - 2|^{1/2}|\tilde{q}_1\tilde{q}_2|^{-1/2}$, $s_2 = \tilde{q}_2(\tilde{q}_1 - 2)^{-1}r_1$ система (2.18) – это $CF_{a,12}^{4,1}$ с $\sigma = \mathrm{sign}(\tilde{q}_1\tilde{q}_2(\tilde{q}_1 - 2))$, $u = \tilde{q}_1^{-1}(\neq 1/2)$, $v = \varkappa_3\tilde{q}_1^{-1}\tilde{q}_2^{-2}$, если по утверждению 2.3, п. 10 $4v(u-1) > 1 \Leftrightarrow 4\varkappa_3(1 - \tilde{q}_1) > \tilde{q}_1^2\tilde{q}_2^2$.

$2_2^2)$ $\breve{b}_2 \neq 0$. Если при этом и $\breve{a}_2 \neq 0$, то получаем $SF_{a,10}^{5,1}$.

$2_2^{2a})$ $\breve{a}_2 = 0 \Leftrightarrow \{\varkappa_6 = \tilde{q}_2^2 + 4\tilde{p}_2(\tilde{q}_1 - 1) \geq 0,\ \varkappa_7 = -\tilde{q}_2(1 + |\tilde{q}_2|^{-1}\varkappa_6^{1/2})(2\tilde{p}_2)^{-1} \neq 0,$ $r_1 = \varkappa_7 r_2\}$, $\varkappa_7 \neq 0 \Leftrightarrow \tilde{q}_2 \neq 0$. Тогда система (2.16) имеет вид $\varkappa_7\begin{pmatrix} \tilde{q}_1r_2^2 & \tilde{q}_1r_2s_2 & 0 & 0 \\ 0 & \varkappa_8r_2^2 & r_2s_2 & 0 \end{pmatrix}$. Теперь $\breve{b}_2 \neq 0 \Leftrightarrow \varkappa_8 = (2\tilde{p}_2\tilde{q}_1 - \varkappa_6 - |\tilde{q}_2|\varkappa_6^{1/2})(2\tilde{p}_2)^{-1} \neq 0 \Leftrightarrow \tilde{q}_2^2 \neq \tilde{p}_2(\tilde{q}_1 - 2)^2 \Leftrightarrow \varkappa_3 \neq 0$. При $s_2 = \varkappa_8r_2$, $r_2 = |\varkappa_7\varkappa_8|^{-1/2}$ – это $NSF_7^{4,1}$ с $\sigma = \mathrm{sign}(\varkappa_7\varkappa_8)$, $u = \varkappa_8^{-1}\tilde{q}_1$, $v = \tilde{q}_1$ ($v - u = -\tilde{q}_1\varkappa_8^{-1}(\tilde{q}_2^2 + \varkappa_6 + 2|\tilde{q}_2|\varkappa_6^{1/2})(4\tilde{p}_2)^{-1} \neq 0$). Согласно утверждению 2.3, п. 8 $NSF_7^{4,1} = CF_7^{4,1}$, если $v \neq (2u-1)u^{-1} \Leftrightarrow 2\tilde{p}_2\tilde{q}_1(1 - \tilde{q}_1) + \varkappa_6 + |\tilde{q}_2|\varkappa_6^{1/2} \neq 0 \Leftrightarrow \tilde{q}_2^2 \neq \tilde{p}_2(\tilde{q}_1 - 2)^2 \Leftrightarrow \varkappa_8 \neq 0$, что верно, и если $v \neq 2u(u+1)^{-1} \Leftrightarrow \tilde{q}_1(\tilde{q}_2^2 + |\tilde{q}_2|\varkappa_6^{1/2}) \neq 0 \Leftrightarrow \tilde{q}_2 \neq 0$.

Вернемся к $NSF_{a,24}^{4,1}$ из 1_2), когда $\tilde{q}_2 \neq 0$. Согласно 2_2^1) при $\tilde{q}_1 \neq 2$ можно перейти к $NSF_3^{3,1}$ или $NSF_{a,12}^{4,1}$. А при $\tilde{q}_1 = 2$ и $\varkappa_4 = \tilde{q}_2^2 + 4\tilde{p}_2 \geq 0$ согласно 2_1^{2a}) можно перейти к $NSF_7^{4,1}$. Поэтому $NSF_{a,24}^{4,1} = CF_{a,24}^{4,1}$ при $\tilde{q}_1 = 2$ и $\varkappa_4 < 0$, так как тогда $u = \tilde{q}_1^{-1} = 1/2$ и $v = 2\tilde{p}_2\tilde{q}_2^{-2} < -1/2$ (см. утверждение 2.3, п. 14).

II. Итак, система (2.12) сводится к $SF_{24}^{4,1}$ при $\tilde{q}_2 \neq 0$ и к $SF_{14}^{3,1}$ при $\tilde{q}_2 = 0$ (или предшествующим). Поэтому ее имеет смысл сводить только к $CF_1^{4,1}, CF_3^{4,1}, CF_{13}^{4,1}$ из списка 2.1_{II} при $\tilde{q}_2 \neq 0$, причем по утверждению 2.2, п. 3 заменой (1.5) с $r_1 = s_1 \neq 0$.

$CF_1^{4,1}$. Система уравнений $\breve{c}_1, \breve{d}_1, \breve{a}_2, \breve{b}_2 = 0$ совместна только при условиях $\tilde{q}_2 = 0$, $\tilde{p}_2 = s_2^2 s_1^{-2}$, $\tilde{q}_1 = 2$, что превращает (2.12) в $SF_3^{3,1}$, предшествующую $CF_1^{4,1}$.

$CF_3^{4,1}$. Система уравнений $\breve{b}_1, \breve{d}_1, \breve{a}_2, \breve{b}_2 = 0$ только при условиях $\tilde{p}_2 = 4\tilde{q}_2^2$, $\tilde{q}_1 = 3/2$ заменой с $r_1 = s_1$, $s_1 = (6|\tilde{q}_2|)^{-1/2}$, $r_2 = -2\tilde{q}_2 s_1$, $s_2 = 4\tilde{q}_2 s_1$ сводится к $NSF_3^{4,1}$ с $u = -1/2$, которая, в свою очередь, по утверждению 2.3, п. 6 сводится к $SF_3^{3,1}$.

$CF_{13}^{4,1}$. Система уравнений $\breve{b}_1, \breve{c}_1, \breve{a}_2, \breve{c}_2 = 0$ только при условиях $\tilde{p}_2 = 4\tilde{q}_2^2/9$, $\tilde{q}_1 = 1/2$ заменой с $r_1 = s_1$, $s_1 = |q_2|^{-1/2}$, $r_2 = -4q_2 s_1/3$, $s_2 = 2q_2 s_1/3$ сводится к $NSF_{13}^{4,1}$ с $u = 2/3$, которая согласно утверждению 2.3, п. 11 сводится к $SF_3^{3,1}$.

В итоге, замены, сводящие (2.12) к $CF_1^{4,1}$, $CF_3^{4,1}$, $CF_{13}^{4,1}$ отсутствуют. $\square$

2.6. Сведение систем из третьего класса к $\mathbf{CF^{m,1}}$.

Договоримся, что приводимые ниже условия на коэффициенты исходной системы, имеющие вид $\xi_1^{\pm} = 0$, $\xi_2^{\mp} \neq 0$, означают, что $\xi_1^+ = 0$, $\xi_2^- \neq 0$ или $\xi_1^- = 0$, $\xi_2^+ \neq 0$, и выбор их первого или второго верхнего знака влечет за собой такой же выбор в приведенных далее коэффициентах замены и получаемых значениях параметров канонической формы.

Лемма 2.3. *Любая система* (2.8) *с* $\hat{t}_1 \neq 0$ *линейно эквивалентна какой-либо канонической форме из списков* $2.1_3, 2.1_{\text{II}}$. *Ниже для каждой из двадцати пяти таких* $CF_i^{m,1}$ *приведены: a) условия на коэффициенты* $\tilde{p}_1\,(\neq 0)$, $\tilde{t}_1\,(\neq 0)$, $\tilde{q}_1$, $\tilde{q}_2$, $\tilde{t}_2$ $(\tilde{q}_2^2 + \tilde{t}_2^2 \neq 0)$ *системы* (2.13), *полученной из* (2.8) *заменой* J_3^1, *b) замена* (1.5), *преобразующая правую часть* (2.13) *при указанных условиях в выбранную форму, c) получаемые при этом значения* σ *и параметров из* $cs_i^{m,1}$:

$CF_9^{2,1}$: *a)* $\varkappa_{10} = 0,\ \varkappa_{13} = 0,\ \varkappa_{15} = 0$, *b)* $L_9^{2,1}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{t}_1$;

$CF_{22}^{3,1}$: *a)* $\varkappa_{10} = 0,\ \varkappa_{13} = 0,\ \varkappa_{15} \neq 0$, *b)* $L_{22}^{3,1}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{t}_1$, $u = \varkappa_{15}(\varkappa_{16}\tilde{t}_2)^{-2/3}$;

$CF_{17}^{3,1}$: *a)* $\varkappa_{10} = 0,\ \varkappa_{15} = 0,\ \varkappa_{13} \neq 0$, *b)* $L_{17}^{3,1}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{t}_1$, $u = \varkappa_{13}(\tilde{p}_1\tilde{t}_1\tilde{t}_2)^{-2/3}$;

$CF_{11,\kappa}^{3,1}$: 1) *a)* $\tilde{q}_1 = 0,\ \tilde{t}_2 = 0$, *b)* $L1_{11,\kappa}^{3,1}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{q}_2$, $\kappa = \operatorname{sign}(\tilde{t}_1\tilde{q}_2)$, $u = \tilde{p}_1\tilde{q}_2^{-1}$;
2) *a)* $\varkappa_{10} = 0,\ \tilde{t}_2 \neq 0,\ \varkappa_{14} = 0$, *b)* $L2_{11,\kappa}^{3,1}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{p}_1$, $\kappa = \operatorname{sign}(\tilde{p}_1\tilde{t}_1)$, $u = \varkappa_{13}(\tilde{p}_1\tilde{t}_1)^{-1}$;

$CF_{27}^{4,1}$: *a)* $\varkappa_{10} = 0,\ \tilde{t}_2 \neq 0,\ \varkappa_{13} \neq 0,\ \varkappa_{14} \neq 0,\ \varkappa_{15} \neq 0,\ 2.3_{15}$, *b)* $L_{27}^{4,1}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{t}_1$, $u = \varkappa_{15}(\varkappa_{14}\tilde{t}_2)^{-2/3}$, $v = \varkappa_{13}(\varkappa_{14}\tilde{t}_2)^{-2/3}$;

$CF_{21}^{3,1}$: *a)* $\varkappa_{10} \neq 0,\ \tilde{q}_1 \neq 0,\ \varkappa_{12} = 0,\ \varkappa_9 = 0$, *b)* $L_{21}^{3,1}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{t}_1$, $u = \varkappa_{10}(\tilde{q}_1 + \tilde{t}_2)^{-1/3}\tilde{t}_2^{-2/3}$;

$CF_{19}^{4,1}$: *a)* $\varkappa_{10} \neq 0,\ \tilde{q}_1 \neq 0,\ \varkappa_{12} = 0,\ \varkappa_9 \neq 0,\ \varkappa_{17} \neq 0,\ \varkappa_{19} \neq 0$, *b)* $L_{19}^{4,1}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{t}_1$, $u = \varkappa_9(\tilde{p}_1\tilde{t}_1\tilde{t}_2)^{-2/3}$, $v = -(\tilde{q}_1 + 2\tilde{t}_2)(\tilde{p}_1\tilde{t}_1\tilde{t}_2)^{-1/3}$;

$CF_{33}^{4,1}$: *a)* $\varkappa_{10} \neq 0,\ \varkappa_{12} \neq 0,\ \varkappa_9 = 0,\ 2.3_{20}$, *b)* $L_{33}^{4,1}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{t}_1$, $u = \varkappa_{12}\varkappa_{10}^{-2}$, $v = \varkappa_{16}\tilde{t}_2\varkappa_{10}^{-3}$;

$CF_{11}^{4,1}$: 1) *a)* $\tilde{t}_2 = 0,\ \tilde{q}_1 \neq 0,\ 2.3_9$, *b)* $L1_{11}^{4,1}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{q}_2$, $u = \tilde{p}_1\tilde{q}_2^{-1}$, $v = \tilde{q}_1^{-2}\tilde{q}_2\tilde{t}_1$;
2) *a)* $\varkappa_{10} \neq 0$, $\tilde{t}_2 \neq 0$, $\varkappa_{11} = 0$, 2.3_9, *b)* $L2_{11}^{4,1}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}(\varkappa_{12}\tilde{t}_1)$, $u = \varkappa_{16}\varkappa_{12}^{-1}$, $v = \varkappa_{12}\varkappa_{10}^{-2}$;

$CF_{19}^{3,1}$: *a)* $\varkappa_{10} \neq 0$, $\varkappa_{12}, \varkappa_{17} = 0$, *b)* $L_{19}^{3,1}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\,\tilde{t}_1$, $u = -\varkappa_{10}(2\tilde{q}_1^2\tilde{t}_2)^{-1/3}$;

$CF_6^{3,1}$: 1) *a)* $\varkappa_{12} = 0,\ \varkappa_{19} = 0$, *b)* $L1_6^{3,1}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{t}_1$, $u = 2\tilde{q}_1\tilde{t}_2\varkappa_{10}^{-2}$;
2) *a)* $\tilde{q}_1 = 0,\ \tilde{q}_2 = 0$, *b)* $L2_6^{3,1}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{t}_1$, $u = \tilde{p}_1\tilde{t}_1\tilde{t}_2^{-2}$;

$CF_{30}^{4,1}$: *a)* $\varkappa_{10} \neq 0,\ \varkappa_{12} \neq 0,\ \varkappa_{17} = 0,\ 2.3_{18}$, *b)* $L_{30}^{4,1}$, *c)* $u = \varkappa_{10}(2\varkappa_{20}\tilde{q}_1)^{-1/3}$, $v = 4\varkappa_{12}(2\varkappa_{20}\tilde{q}_1)^{-2/3}$, $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{t}_1$;

$CF_{14}^{4,1}$: 1) *a)* $\varkappa_{10} \neq 0,\ \tilde{q}_1 \neq 0,\ \varkappa_{12} \neq 0,\ \varkappa_{18} = 0,\ 2.3_{12}$, *b)* $L1_{14}^{4,1}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{t}_1$, $u = 4\varkappa_{12}\varkappa_{10}^{-2}$, $v = -2\varkappa_{20}\varkappa_{10}^{-2}$;
2) *a)* $\tilde{q}_1 = 0,\ \tilde{q}_2 \neq 0,\ \tilde{t}_2 \neq 0,\ 2.3_{12}$, *b)* $L2_{14}^{4,1}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{t}_1$, $u = \tilde{q}_2\tilde{t}_1\tilde{t}_2^{-2}$, $v = \tilde{p}_1\tilde{t}_1\tilde{t}_2^{-2}$;

$CF_{29}^{4,1}$: *a)* $\varkappa_{17}>0,\ \varkappa_{24}^{\pm}=0,\ \varkappa_{23}^{\mp}\neq 0,\ 2.3_{17}$, *b)* $L_{29}^{4,1}$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1,\ u=\pm\varkappa_{23}^{\mp}\varkappa_{17}^{-1/2}/2$, $v=\pm\varkappa_{21}^{\pm}\varkappa_{22}^{\mp}\varkappa_{17}^{-3/2}/4$;

$CF_{5}^{4,1}$: 1) *a)* $\tilde q_2\neq 0,\ \varkappa_{25}\geq 0,\ \varkappa_{28}^{\pm}=0,\ 2.3_7$, *b)* $L1_5^{4,1}$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1,\ u=4\varkappa_{30}^{\pm}(\varkappa_{26}^{\mp})^{-2}$, $v=2\varkappa_{26}^{\pm}(\varkappa_{26}^{\mp})^{-1}$;
2) *a) при* $\tilde q_1\neq 0,\ \tilde q_2=0,\ 2.3_7$, *b)* $L2_5^{4,1}$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1,\ u=\tilde p_1\tilde t_1\tilde t_2^{-2},\ v=\tilde q_1\tilde t_2^{-1}$;

$CF_{8}^{5,1}$: *a)* $\tilde q_1\neq 0,\ \tilde q_2\neq 0,\ \tilde t_2\neq 0,\ 2.4_4$, *b) нормировка* $L_8^{5,1}$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde q_2,\ u=\tilde p_1\tilde q_2^{-1}$, $v=\tilde q_1\tilde t_2^{-1},\ w=\tilde q_2\tilde t_1\tilde t_2^{-2}$;

$CF_{1}^{4,1}$: 1) *a)* $\tilde q_1=0,\ \tilde q_2=2\tilde p_1,\ \tilde t_2\neq 0,\ \varkappa_{31}>0,\ 2.3_5$, *b)* $L1_1^{4,1}$, *c)* $\sigma=\pm\operatorname{sign}(\varkappa_{32}^{\pm}\tilde t_1)$, $u=-\varkappa_{32}^{\mp}(\varkappa_{32}^{\pm})^{-1}$;
2) *a)* $\tilde q_2=0,\ \tilde t_2\neq 0,\ \varkappa_{31}\geq 0,\ \tilde q_1=\varkappa_{32}^{\mp},\ 2.3_5$, *b)* $L2_1^{4,1}$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde p_1,\ u=\varkappa_{32}^{\pm}\tilde t_2(2\tilde p_1\tilde t_1)^{-1}$;

$CF_{3}^{4,1}$: 1) *a)* $\tilde p_1=\tilde q_1(\tilde q_1-\tilde t_2)\tilde t_1^{-1},\ \tilde q_2=\tilde q_1(3\tilde q_1-2\tilde t_2)\tilde t_1^{-1},\ \tilde t_2\neq 3\tilde q_1,\ \tilde q_2^2+\tilde t_2^2\neq 0,\ 2.3_6$, *b)* $L1_3^{4,1}$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}(\tilde t_1(3\tilde q_1-\tilde t_2)(\tilde q_1-\tilde t_2)),\ u=\tilde q_1(\tilde q_1-\tilde t_2)^{-1}$;
2) *a)* $\tilde p_1=\tilde q_1(2\tilde q_1-3\tilde t_2)(9\tilde t_1)^{-1},\ \tilde q_2=0,\ \tilde t_2\neq 0,\ 2.3_6$, *b)* $L2_3^{4,1}$, *c)* $\sigma=-\operatorname{sign}(\tilde t_1\tilde t_2(2\tilde q_1-3\tilde t_2))$, $u=-\tilde q_1(3\tilde t_2)^{-1}$;
3) *a)* $\tilde p_1=(2\tilde q_1-3\tilde t_2)(2\tilde q_1+\tilde t_2)(16\tilde t_1)^{-1},\ \tilde q_2=\tilde t_2(2\tilde q_1-3\tilde t_2)(8\tilde t_1)^{-1},\ \tilde t_2\neq 0, 2.3_6$, *b)* $L3_3^{4,1}$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}((2\tilde q_1-3\tilde t_2)(2\tilde q_1+\tilde t_2)\tilde t_1),\ u=-2\tilde t_2(2\tilde q_1+\tilde t_2)^{-1}$;

$CF_{13}^{4,1}$: 1) *a)* $\tilde p_1=(4\tilde q_1^2-\tilde t_2^2)(12\tilde t_1)^{-1},\ \tilde t_2\neq 0,\ \tilde q_2=(2\tilde q_1-\tilde t_2)\tilde t_2(4\tilde t_1)^{-1},\ 2.3_{11}$, *b)* $L1_{13}^{4,1}$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}((2\tilde q_1-\tilde t_2)\tilde t_2\tilde t_1),\ u=(2\tilde q_1+\tilde t_2)(3\tilde t_2)^{-1}$;
2) *a)* $\tilde t_2\neq 0,\ \tilde q_2\tilde t_1>0,\ \tilde p_1=(\tilde q_2\tilde t_1)^{1/2}\varkappa_{34}^{\mp}\varkappa_{35}^{\pm}(\varkappa_{33}^{\pm})^{-2}\tilde t_1^{-1}$, *если* $\varkappa_{33}^{\pm}\neq 0,\ \tilde q_1=\pm(2\tilde q_2\tilde t_1+\tilde t_2^2)(\varkappa_{33}^{\pm})^{-1},\ \varkappa_{34}^{\pm}\neq 0,\ 2.3_{11}$, *b)* $L2_{13}^{4,1}$, *c)* $\sigma=-\operatorname{sign}(\varkappa_{34}^{\pm}\tilde t_1),\ u=-\varkappa_{34}^{\mp}\varkappa_{33}^{\pm}(3\varkappa_{35}^{\pm})^{-1}$;

$CF_{28}^{4,1}$: *a)* $\tilde q_1\neq 0,-\tilde t_2,-2\tilde t_2,\ \tilde q_2\neq 0,\ \tilde t_2\neq 0,\ \tilde p_1=\theta_*\tilde t_1^{-1},\ \varkappa_{38}=0,\ \varkappa_{36},\varkappa_{37},\varkappa_{39}\neq 0,\ \theta_*$: $S_1(\theta),\ 2.3_{16}$, *b)* $L_{28}^{4,1}$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}(\varkappa_{36}\varkappa_{39}\tilde t_1),\ u=-\varkappa_{37}\varkappa_{39}^{-1}$;

$CF_{32}^{4,1}$: *a)* $\tilde q_1\neq 0,-\tilde t_2,-2\tilde t_2,\ \tilde q_2\neq 0,\ \tilde t_2\neq 0,\ \varkappa_{40}\geq 0,\ \varkappa_{41}^{\pm}\neq 0,\ \tilde p_1=\varkappa_{41}^{\pm}\tilde t_1^{-1},\ \tilde q_2=((\tilde q_1+\tilde t_2)^2-3\varkappa_{41}^{\pm})\tilde t_1^{-1},\ \varkappa_{42}^{\pm}\neq 0,\ \varkappa_{43}^{\pm}\neq 0,\ 2.3_{19}$, *b)* $L_{32}^{4,1}$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}(\varkappa_{42}^{\pm}\tilde t_1),\ u=3\varkappa_{43}^{\pm}\varkappa_{10}^{-2}$;

$CF_{36}^{4,1}$: *a)* $\tilde q_1\neq 0,-\tilde t_2,-3\tilde t_2/2,-2\tilde t_2,\ \tilde q_2\neq 0,\ \tilde t_2\neq 0,\ \varkappa_{44}\geq 0,\ \varkappa_{45}^{\pm}\neq 0,\ \tilde p_1=\varkappa_{45}^{\pm}\tilde t_1^{-1}$, $\tilde q_2=-(3\varkappa_{45}^{\pm}+2\tilde q_1\tilde t_2+3\tilde t_2^2)\tilde t_1^{-1},\ \varkappa_{46}^{\pm}\neq 0,\ \varkappa_{47}^{\pm}\neq 0,\ 2.3_{21}$, *b)* $L_{36}^{4,1}$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}(\varkappa_{46}^{\pm}\tilde t_1),\ u=\varkappa_{47}^{\pm}\varkappa_{10}^{-2}$;

$CF_{3}^{5,1}$: 1) *a)* $\tilde q_2\neq 0,3\tilde p_1,\ \tilde t_1=\tilde q_1(2\tilde p_1\tilde q_1+\tilde t_2\tilde q_2-3\tilde t_2\tilde p_1)(\tilde q_2-3\tilde p_1)^{-2},\ \tilde t_2\neq 0,\ \varkappa_{48}\neq 0,-\tilde q_1\tilde q_2,\ 2.4_1$, *b)* $L1_3^{5,1}$, *c)* $\sigma=-\operatorname{sign}\tilde p_1,\ u=-\varkappa_{48}(\tilde p_1\tilde q_1)^{-1},\ v=-(\tilde q_1\tilde q_2+\varkappa_{48})(\tilde p_1\tilde q_1)^{-1}$;
2) *a)* $\tilde q_2\neq 0,\ \tilde t_1=-\tilde t_2(\tilde p_1\tilde t_2-2\tilde q_1\tilde q_2+\tilde q_2\tilde t_2)(2\tilde q_2)^{-2},\ \tilde q_1\neq 0,\ \tilde t_2\neq 0,\ \varkappa_{49}\neq 0,\tilde p_1\tilde t_2,\ 2.4_1$, *b)* $L2_3^{5,1}$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde q_2,\ u=\tilde p_1\tilde q_2^{-1},\ v=\varkappa_{49}(\tilde q_2\tilde t_2)^{-1}$;
3) *a)* $\tilde q_1\neq 0,\tilde t_2,\ \tilde q_2=(\tilde t_2\tilde q_1^3-(\tilde p_1\tilde t_1+2\tilde t_2^2)\tilde q_1^2-\tilde t_2(2\tilde p_1\tilde t_1-\tilde t_2^2)\tilde q_1+\tilde p_1\tilde t_1(4\tilde p_1\tilde t_1+3\tilde t_2^2))\tilde t_1^{-1}(\tilde q_1-\tilde t_2)^{-2}\neq 0$, $\tilde t_2\neq 0,\ \varkappa_{50}\neq 0,\ \varkappa_{51}\neq 0,\ \varkappa_{52}\neq 0,\ 2.4_1$, *b)* $L3_3^{5,1}$, *c)* $\sigma=-\operatorname{sign}(\varkappa_{50}\tilde p_1),\ u=-\varkappa_{51}(\tilde p_1\tilde t_1)^{-1}$, $v=-(\tilde q_1-\tilde t_2)^2(\tilde p_1\tilde t_1)^{-1}$;

$CF_{6}^{5,1}$: 1) *a)* $\tilde q_1\neq 0,\ \tilde t_2\neq 0,\ \tilde p_1=4\varkappa_{53}\tilde q_2\tilde t_2^{-2}/3,\ \varkappa_{54}\neq 0,\ 4\varkappa_{53}\neq 3\varkappa_{54},\ 2.4_2$, *b)* $L1_6^{5,1}$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde q_2,\ u=4\varkappa_{53}(3\tilde t_2^2)^{-1},\ v=\varkappa_{54}\tilde t_2^{-2}$;
2) *a)* $\tilde q_1\neq 0,\ \tilde q_2\neq 0,\ \tilde t_2\neq 0,\ \tilde p_1=-\varkappa_{55}(9\tilde t_1\theta_*^2)^{-1},\ \varkappa_{56}\neq 0,\ \varkappa_{57}\neq 0,\ \varkappa_{58}\neq 0,\ \varkappa_{59}\neq 0$, $\varkappa_{57}\neq\varkappa_{58},\ \theta_*$: $S_2(\theta),\ 2.4_2$, *b)* $L2_6^{5,1}$, *c)* $\sigma=-\operatorname{sign}(\varkappa_{59}\tilde t_1),\ u=3\varkappa_{57}\theta_*\varkappa_{59}^{-1},\ v=3\varkappa_{58}\theta_*\varkappa_{59}^{-1}$;

$CF_{7}^{5,1}$: 1) *a)* $\tilde q_2\neq 0,3\tilde p_1,\ \tilde t_2\neq 0,\ \tilde t_1=\varkappa_{60}\tilde q_1(\tilde q_2-3\tilde p_1)^{-2},\ \varkappa_{61}\neq 0,-\tilde q_1\tilde q_2,\ 2.4_3$, *b)* $L1_7^{5,1}$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde p_1,\ u=\varkappa_{61}(\tilde p_1\tilde q_1)^{-1},\ v=(\varkappa_{61}+\tilde q_1\tilde q_2)(\tilde p_1\tilde q_1)^{-1}$;
2) *a)* $\tilde q_1\neq 0,\ \tilde q_2\neq 0,\ \tilde t_2\neq 0,\ \tilde p_1=-\varkappa_{55}(9\tilde t_1\theta_*^2)^{-1},\ \varkappa_{56}\neq 0,\ \varkappa_{59}\neq 0,3\varkappa_{62},\ \varkappa_{62}\neq 0,\ \varkappa_{63}\neq 0$, θ_*: $S_3(\theta),\ 2.4_3$, *b)* $L2_7^{5,1}$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\varkappa_{63},\ u=\varkappa_{59}(3\varkappa_{63}\tilde t_1\theta_*^2)^{-1},\ v=\varkappa_{62}(\varkappa_{63}\tilde t_1\theta_*^2)^{-1}$.

Здесь запись 2.3_i *означает, что элементы системы* (2.13) *таковы, что значения параметров, входящих в ее каноническую форму, не удовлетворяют условиям из пункта i) утверждения* 2.3. *Запись* 2.4_j *понимается аналогично.*

Доказательство. I. В случае 3), когда в (2.8) $\hat t_1\neq 0$, из системы (2.13) заменой (1.5) с $s_1=0$ ($r_1, s_2\neq 0$) получаем систему (2.14) с $\tilde t_1, \tilde p_1\neq 0$ ($\breve a_1^2+\breve a_2^2, \breve c_1\neq 0$) вида

$$\begin{pmatrix} \tilde p_1 r_1^2+\tilde q_1 r_1 r_2+\tilde t_1 r_2^2 & (\tilde q_1 r_1+2\tilde t_1 r_2)s_2 & \tilde t_1 s_2^2 & 0\\ ((\tilde q_2-\tilde p_1)r_1^2+(\tilde t_2-\tilde q_1)r_1r_2-\tilde t_1 r_2^2)r_2 s_2^{-1} & \tilde q_2 r_1^2-(\tilde q_1-2\tilde t_2)r_1r_2-2\tilde t_1 r_2^2 & (\tilde t_2 r_1-\tilde t_1 r_2)s_2 & 0\end{pmatrix} \tag{2.19}$$

1) $\breve c_2=0\Leftrightarrow r_2=\tilde t_1^{-1}\tilde t_2 r_1$. Тогда система (2.19) принимает вид:

$$\begin{pmatrix} \varkappa_9\tilde t_1^{-1}r_1^2 & \varkappa_{10}r_1s_2 & \tilde t_1 s_2^2 & 0\\ \varkappa_{11}\tilde t_2\tilde t_1^{-2}r_1^3 s_2^{-1} & \varkappa_{12}\tilde t_1^{-1}r_1^2 & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

1_1) $\breve b_1=0\Leftrightarrow\varkappa_{10}=0\Leftrightarrow\tilde q_1=-2\tilde t_2$. Тогда система (2.20) принимает вид:

$$\begin{pmatrix} \varkappa_{13}\tilde t_1^{-1}r_1^2 & 0 & \tilde t_1 s_2^2 & 0\\ \varkappa_{14}\tilde t_2\tilde t_1^{-2}r_1^3 s_2^{-1} & \varkappa_{15}\tilde t_1^{-1}r_1^2 & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

1_1^1) $\breve a_1=0\Leftrightarrow\varkappa_{13}=0\Leftrightarrow\tilde p_1=\tilde t_1^{-1}\tilde t_2^2$ ($\breve a_2\neq 0$). Тогда система (2.21) имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \tilde t_1 s_2^2 & 0\\ \varkappa_{16}\tilde t_2\tilde t_1^{-2}r_1^3 s_2^{-1} & \varkappa_{15}\tilde t_1^{-1}r_1^2 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

1_1^{1a}) $\breve b_2=0\Leftrightarrow\varkappa_{15}=0\Leftrightarrow\tilde q_2=-2\tilde t_2^2\tilde t_1^{-1}$. При $r_1=-\tilde t_1|\tilde t_1|^{-1/2}\tilde t_2^{-1}$, $s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}$ – это $CF_9^{2,1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1$.

1_1^{1b}) $\breve b_2\neq 0\Leftrightarrow\varkappa_{15}\neq 0\Leftrightarrow\tilde q_2\neq -2\tilde t_2^2\tilde t_1^{-1}$. При $r_1=\tilde t_1(\varkappa_{16}\tilde t_2)^{-1/3}|\tilde t_1|^{-1/2}$, $s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}$ – это $CF_{a,22}^{3,1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1$, $u=\varkappa_{15}(\varkappa_{16}\tilde t_2)^{-2/3}$.

1_1^2) $\breve b_2=0\Leftrightarrow\varkappa_{15}=0\Leftrightarrow\tilde q_2=-2\tilde t_2^2\tilde t_1^{-1}$ ($\breve a_2\neq 0$). Тогда система (2.21) имеет вид $\begin{pmatrix} \varkappa_{13}\tilde t_1^{-1}r_1^2 & 0 & \tilde t_1 s_2^2 & 0\\ -\tilde p_1\tilde t_2\tilde t_1^{-1}r_1^3 s_2^{-1} & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ и $\breve a_1\neq 0\Leftrightarrow\varkappa_{13}\neq 0\Leftrightarrow\tilde p_1\neq\tilde t_1^{-1}\tilde t_2^2$. При $s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}$, $r_1=-(\tilde p_1\tilde t_2)^{-1/3}|\tilde t_1|^{1/6}$ – это $CF_{17}^{3,1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1$, $u=\varkappa_{13}(\tilde p_1\tilde t_1\tilde t_2)^{-2/3}$.

1_1^3) $\breve a_2=0\Leftrightarrow\{\tilde t_2=0$ или $\tilde t_2\neq 0,\ \varkappa_{14}=0\Leftrightarrow\tilde q_2=(\tilde p_1\tilde t_1-2\tilde t_2^2)\tilde t_1^{-1}\}$ ($\breve a_1,\breve b_2\neq 0$).

1_1^{3a}) $\tilde t_2=0$. Тогда система (2.21) $=\begin{pmatrix} \tilde p_1 r_1^2 & 0 & \tilde t_1 s_2^2 & 0\\ 0 & \tilde q_2 r_1^2 & 0 & 0\end{pmatrix}$ ($\tilde q_2\neq 0$). При $r_1=|\tilde q_2|^{-1/2}$, $s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}$ – это $CF_{11,\kappa}^{3,1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde q_2$, $\kappa=\operatorname{sign}(\tilde t_1\tilde q_2)$, $u=\tilde p_1\tilde q_2^{-1}$.

1_1^{3b}) $\tilde t_2\neq 0$, $\varkappa_{14}=0\Leftrightarrow\tilde q_2=(\tilde p_1\tilde t_1-2\tilde t_2^2)\tilde t_1^{-1}$. Тогда система (2.21) имеет вид $\begin{pmatrix} \varkappa_{13}\tilde t_1^{-1}r_1^2 & 0 & \tilde t_1 s_2^2 & 0\\ 0 & \tilde p_1 r_1^2 & 0 & 0\end{pmatrix}$ ($\varkappa_{13}=\tilde p_1\tilde t_1-\tilde t_2^2\neq 0$). При $r_1=|\tilde p_1|^{-1/2}$, $s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}$ – это $CF_{11,\kappa}^{3,1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde p_1$, $\kappa=\operatorname{sign}(\tilde p_1\tilde t_1)$, $u=\varkappa_{13}(\tilde p_1\tilde t_1)^{-1}$.

1_1^4) $\breve a_1\neq 0\Leftrightarrow\varkappa_{13}\neq 0$, $\breve a_2\neq 0\Leftrightarrow\varkappa_{14}\tilde t_2\neq 0$, $\breve b_2\neq 0\Leftrightarrow\varkappa_{15}\neq 0$. Тогда система (2.21) при $r_1=|\tilde t_1|^{5/6}(\varkappa_{14}\tilde t_1\tilde t_2)^{-1/3}$, $s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}$ – это $NSF_{a,27}^{4,1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1$, $u=\varkappa_{15}(\varkappa_{14}\tilde t_2)^{-2/3}$, $v=\varkappa_{13}(\varkappa_{14}\tilde t_2)^{-2/3}$. Теперь $NSF_{a,27}^{4,1}=CF_{a,27}^{4,1}$, если не выполняются условия утверждения 2.3, п. 15.

1_2) $\breve b_1\neq 0\Leftrightarrow\tilde q_1\neq -2\tilde t_2$.

1_2^1) $\breve b_2=0\Leftrightarrow\varkappa_{12}=0\Leftrightarrow\tilde q_2=\tilde q_1\tilde t_2\tilde t_1^{-1}$ ($\breve a_2\neq 0$). Тогда система (2.20) принимает вид:

$$\begin{pmatrix} \varkappa_9\tilde t_1^{-1}r_1^2 & \varkappa_{10}r_1s_2 & \tilde t_1 s_2^2 & 0\\ -\tilde p_1\tilde t_2\tilde t_1^{-1}r_1^3 s_2^{-1} & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad(\tilde p_1,\tilde t_1,\tilde t_2\neq 0). \tag{2.22}$$

1_2^{1a}) $\breve{a}_1 = 0 \Leftrightarrow \varkappa_9 = 0 \Leftrightarrow \tilde{p}_1 = -(\tilde{q}_1+\tilde{t}_2)\tilde{t}_2\tilde{t}_1^{-1}\ (\neq 0)$. Тогда система (2.22) имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & \varkappa_{10}r_1s_2 & \tilde{t}_1s_2^2 & 0 \\ (\tilde{q}_1+\tilde{t}_2)\tilde{t}_2^2\tilde{t}_1^{-2}r_1^3s_2^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. При $r_1 = \tilde{t}_1|\tilde{t}_1|^{-1/2}(\tilde{t}_2^2(\tilde{q}_1+\tilde{t}_2))^{-1/3}$, $s_2 = |\tilde{t}_1|^{-1/2}$ – это $NSF_{21}^{3,1}$ с $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{t}_1$, $u = \varkappa_{10}(\tilde{q}_1+\tilde{t}_2)^{-1/3}\tilde{t}_2^{-2/3}$.

$NSF_{21}^{3,1} = CF_{21}^{3,1}$ при $\tilde{q}_1 \neq 0$ согласно утверждению 2.3, п. 4, так как $\tilde{q}_1 = 0 \Leftrightarrow u = 2$.

1_2^{1b}) $\breve{a}_1 \neq 0 \Leftrightarrow \varkappa_9 \neq 0$. Тогда при $r_1 = -|\tilde{t}_1|^{1/6}(\tilde{p}_1\tilde{t}_2)^{-1/3}$, $s_2 = |\tilde{t}_1|^{-1/2}$ система (2.22) – это $NSF_{19}^{4,1}$ с $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{t}_1$, $u = \varkappa_9(\tilde{p}_1\tilde{t}_1\tilde{t}_2)^{-2/3}$, $v = -\varkappa_{10}(\tilde{p}_1\tilde{t}_1\tilde{t}_2)^{-1/3}$.

Теперь $NSF_{19}^{4,1} = CF_{19}^{4,1}$ при $\varkappa_{17} \neq 0$ и $\varkappa_{19}\tilde{q}_1 \neq 0$ согласно утверждению 2.3, п. 13, так как $\varkappa_{17} = 4\tilde{p}_1\tilde{t}_1 - \tilde{q}_1^2 = 0 \Leftrightarrow 4u = v^2$, а $4uv = v^3 - 8 \Leftrightarrow \varkappa_{19}\tilde{q}_1 = 0$.

1_2^2) $\breve{a}_1 = 0 \Leftrightarrow \varkappa_9 = 0 \Leftrightarrow \tilde{p}_1 = -(\tilde{q}_1+\tilde{t}_2)\tilde{t}_2\tilde{t}_1^{-1}$ $(\breve{a}_2 \neq 0)$. Тогда система (2.20) имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & \varkappa_{10}r_1s_2 & \tilde{t}_1s_2^2 & 0 \\ \varkappa_{16}\tilde{t}_2\tilde{t}_1^{-2}r_1^3s_2^{-1} & \varkappa_{12}\tilde{t}_1^{-1}r_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Если $\breve{b}_2 \neq 0 \Leftrightarrow \varkappa_{12} \neq 0 \Leftrightarrow \tilde{q}_2 \neq \tilde{q}_1\tilde{t}_2\tilde{t}_1^{-1}$, то при $r_1 = \tilde{t}_1\varkappa_{10}^{-1}|\tilde{t}_1|^{-1/2}$, $s_2 = |\tilde{t}_1|^{-1/2}$ получаем $NSF_{a,33}^{4,1}$ с $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{t}_1$, $u = \varkappa_{12}\varkappa_{10}^{-2}$, $v = \varkappa_{16}\tilde{t}_2\varkappa_{10}^{-3}$. И $NSF_{a,33}^{4,1} = CF_{a,33}^{4,1}$, если не выполняются условия утверждения 2.3, п. 20.

1_2^3) $\breve{a}_2 = 0 \Leftrightarrow \{\tilde{t}_2 = 0$ или $\tilde{t}_2 \neq 0,\ \varkappa_{11} = 0 \Leftrightarrow \varkappa_{12} - \tilde{p}_1\tilde{t}_1 = 0\}$ $(\breve{a}_1, \breve{b}_2 \neq 0)$.

1_2^{3a}) $\tilde{t}_2 = 0$ $(\tilde{q}_2 \neq 0)$. Тогда (2.20) $= \begin{pmatrix} \tilde{p}_1r_1^2 & \tilde{q}_1r_1s_2 & \tilde{t}_1s_2^2 & 0 \\ 0 & \tilde{q}_2r_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\breve{b}_1 \neq 0 \Leftrightarrow \tilde{q}_1 \neq 0$. При $r_1 = |\tilde{q}_2|^{-1/2}$, $s_2 = \tilde{q}_1^{-1}\tilde{q}_2|\tilde{q}_2|^{-1/2}$ – это $NSF_{11}^{4,1}$ с $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{q}_2$, $u = \tilde{p}_1\tilde{q}_2^{-1}$, $v = \tilde{q}_1^{-2}\tilde{q}_2\tilde{t}_1$.

1_2^{3b}) $\tilde{t}_2 \neq 0,\ \varkappa_{11} = 0 \Leftrightarrow \tilde{p}_1 = \varkappa_{12}\tilde{t}_1^{-1}$. Тогда (2.20) $= \begin{pmatrix} \varkappa_{16}\tilde{t}_1^{-1}r_1^2 & \varkappa_{10}r_1s_2 & \tilde{t}_1s_2^2 & 0 \\ 0 & \varkappa_{12}\tilde{t}_1^{-1}r_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(\varkappa_{12} = \tilde{q}_2\tilde{t}_1 - \tilde{q}_1\tilde{t}_2 \neq 0,\ \varkappa_{16} = \tilde{t}_2^2 + \tilde{q}_2\tilde{t}_1 \neq 0)$. При $r_1 = |\varkappa_{12}|^{-1/2}|\tilde{t}_1|^{1/2}$, $s_2 = \varkappa_{12}\tilde{t}_1^{-1}\varkappa_{10}^{-1}r_1$ система (2.20) – это $NSF_{11}^{4,1}$ с $\sigma = \operatorname{sign}(\tilde{t}_1\varkappa_{12})$, $u = \varkappa_{16}\varkappa_{12}^{-1}$, $v = \varkappa_{12}\varkappa_{10}^{-2}$.

В обоих случаях $NSF_{11}^{4,1} = CF_{11}^{4,1}$ при невыполнении условий утверждения 2.3, п. 9.

1_2^4) $\breve{a}_1, \breve{a}_2, \breve{b}_1, \breve{b}_2 \neq 0$. Тогда система (2.20) – это не представляющая интереса $SF_{a,20}^{5,1}$.

2) $\breve{c}_2 \neq 0,\ \breve{b}_1 = 0 \Leftrightarrow r_2 = -\tilde{q}_1(2\tilde{t}_1)^{-1}r_1$. Тогда система (2.19) примет вид:

$$\begin{pmatrix} -\varkappa_{17}(4\tilde{t}_1)^{-1}r_1^2 & 0 & \tilde{t}_1s_2^2 & 0 \\ \varkappa_{18}\tilde{q}_1(8\tilde{t}_1^2)^{-1}r_1^3s_2^{-1} & \varkappa_{12}\tilde{t}_1^{-1}r_1^2 & \varkappa_{10}r_1s_2/2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\tilde{p}_1, \tilde{t}_1 \neq 0), \quad \varkappa_{10} = \tilde{q}_1 + 2\tilde{t}_2 \neq 0. \qquad (2.23)$$

2_1) $\breve{b}_2 = 0 \Leftrightarrow \varkappa_{12} = 0 \Leftrightarrow \tilde{q}_2 = \tilde{q}_1\tilde{t}_2\tilde{t}_1^{-1}$. Тогда система (2.23) примет вид:

$$\begin{pmatrix} -\varkappa_{17}(4\tilde{t}_1)^{-1}r_1^2 & 0 & \tilde{t}_1s_2^2 & 0 \\ \varkappa_{19}\tilde{q}_1(8\tilde{t}_1^2)^{-1}r_1^3s_2^{-1} & 0 & \varkappa_{10}r_1s_2/2 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.24)$$

2_1^1) $\breve{a}_1 = 0 \Leftrightarrow \varkappa_{17} = 0 \Leftrightarrow \tilde{p}_1 = \tilde{q}_1^2(4\tilde{t}_1)^{-1}$ $(\breve{a}_2 \neq 0)$. Тогда система (2.24) имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \tilde{t}_1s_2^2 & 0 \\ -\tilde{q}_1^2\tilde{t}_2(4\tilde{t}_1^2)^{-1}r_1^3s_2^{-1} & 0 & \varkappa_{10}r_1s_2/2 & 0 \end{pmatrix}$ $(\tilde{q}_1, \tilde{t}_2 \neq 0)$. При $r_1 = -2^{2/3}|\tilde{t}_1|^{5/6}(\tilde{q}_1^2\tilde{t}_1\tilde{t}_2)^{-1/3}$, $s_2 = |\tilde{t}_1|^{-1/2}$ – это $CF_{a,19}^{3,1}$ с $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{t}_1$, $u = -\varkappa_{10}(2\tilde{q}_1^2\tilde{t}_2)^{-1/3}$.

2_1^2) $\breve{a}_2 = 0 \Leftrightarrow \{\tilde{q}_1 = 0$ или $\varkappa_{19} = 0 \Leftrightarrow \tilde{p}_1 = \tilde{q}_1(\tilde{q}_1 + 2\tilde{t}_2)(4\tilde{t}_1)^{-1}$ $(\tilde{q}_1 \neq 0)\}$ $(\breve{a}_1, \breve{c}_2 \neq 0)$.

2_1^{2a}) $\tilde{q}_1 = 0$. Тогда (2.24) $= \begin{pmatrix} \tilde{p}_1r_1^2 & 0 & \tilde{t}_1s_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{t}_2r_1s_2 & 0 \end{pmatrix}$ и $\varkappa_{10} \neq 0 \Leftrightarrow \tilde{t}_2 \neq 0$, $\varkappa_{12} = 0 \Leftrightarrow \tilde{q}_2 = 0$. При $r_1 = \tilde{t}_1|\tilde{t}_1|^{-1/2}\tilde{t}_2^{-1}$, $s_2 = |\tilde{t}_1|^{-1/2}$ – это $CF_6^{3,1}$ с $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{t}_1$, $u = \tilde{p}_1\tilde{t}_1\tilde{t}_2^{-2}$.

2_1^{2b}) $\varkappa_{19}=0 \Leftrightarrow \tilde p_1=\tilde q_1\varkappa_{10}(4\tilde t_1)^{-1}$. Тогда (2.24) $=\begin{pmatrix}\tilde q_1\tilde t_2(2\tilde t_1)^{-1}r_1^2 & 0 & \tilde t_1 s_2^2 & 0\\ 0 & 0 & \varkappa_{10}r_1s_2/2 & 0\end{pmatrix}$ $(\tilde q_1,\tilde t_2,\varkappa_{10}\neq 0)$. При $r_1=2\tilde t_1\varkappa_{10}^{-1}s_2$, $s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}$ – это $CF_6^{3,1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1$, $u=2\tilde q_1\tilde t_2\varkappa_{10}^{-2}$.

2_1^3) $\breve c_2\neq 0 \Leftrightarrow \varkappa_{10}\neq 0$, $\breve a_1\neq 0\Leftrightarrow \varkappa_{17}\neq 0$, $\breve a_2\neq 0\Leftrightarrow \tilde q_1\varkappa_{19}\neq 0$. Тогда система (2.24) при $s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}$, $r_1=2\tilde t_1(q_1\varkappa_{19})^{-1/3}s_2$, $r_2=-\tilde q_1(\tilde q_1\varkappa_{19})^{-1/3}s_2$ – это $NSF_{a,20}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}v_* & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & u_* & 0\end{pmatrix}$ с $\sigma=\operatorname{sign}t_1$, $u_*=\varkappa_{10}(\tilde q_1\varkappa_{19})^{-1/3}$, $v_*=-\varkappa_{17}(\tilde q_1\varkappa_{19})^{-2/3}$ $(v_*\neq u_*^{-1})$. Но $NSF_{a,20}^{4,1}$ при $v_*\neq -u_*^2$ заменой (1.5) с $r_1=(1-u_*v_*)^{-1/3}$, $s_1=0$, $r_2=u_*r_1$, $s_2=1$ сводится к $CF_{19}^{4,1}$ с $u=(u_*^2+v_*)(1-u_*v_*)^{-2/3}$, $v=2u_*(1-u_*v_*)^{-1/3}$, а при $v_*=-u_*^2$ $(u_*\neq -1)$ – сводится к $CF_{21}^{3,1}$ с $u=2u_*(1+u_*^3)^{-1/3}$. Поскольку $v_*=-u_*^2\Leftrightarrow\varkappa_9=0$, условия сведения $NSF_{a,20}^{4,1}$ к $CF_{19}^{4,1}$ совпадают с уже приведенными в 1_2^{1b}), а к $CF_{21}^{3,1}$ – такие же, как в 1_2^{1a}).

2_2) $\breve a_1=0\Leftrightarrow\varkappa_{17}=0\Leftrightarrow\tilde p_1=\tilde q_1^2(4\tilde t_1)^{-1}$ $(\breve a_2\neq 0)$. Тогда система (2.23) имеет вид $\begin{pmatrix}0 & 0 & \tilde t_1s_2^2 & 0\\ \varkappa_{20}\tilde q_1(4\tilde t_1^2)^{-1}r_1^3s_2^{-1} & \varkappa_{12}\tilde t_1^{-1}r_1^2 & \varkappa_{10}r_1s_2/2 & 0\end{pmatrix}$ $(\tilde q_1,\varkappa_{20}\neq 0)$. Теперь $\breve c_2\neq 0\Leftrightarrow\varkappa_{10}\neq 0$, $\breve b_2\neq 0\Leftrightarrow\varkappa_{12}\neq 0$. Тогда при $r_1=2|\tilde t_1|^{5/6}(2\varkappa_{20}\tilde t_1\tilde q_1)^{-1/3}$, $s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}$ – это $NSF_{a,30}^{4,1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1$, $u=\varkappa_{10}(2\varkappa_{20}\tilde q_1)^{-1/3}$, $v=4\varkappa_{12}(2\varkappa_{20}\tilde q_1)^{-2/3}$. Теперь $NSF_{a,30}^{4,1}=CF_{a,30}^{4,1}$, если не выполняются условия утверждения 2.3, п. 18.

2_3) $\breve a_2=0\Leftrightarrow\{\tilde q_1=0$ или $\tilde q_1\neq 0,\ \varkappa_{18}=0\Leftrightarrow\tilde p_1=\tilde q_1(\tilde q_1-2\tilde t_2)(4\tilde t_1)^{-1}+\tilde q_2\}$ $(\breve a_1\neq 0)$.

2_3^1) $\tilde q_1=0$. Тогда система (2.23) $=\begin{pmatrix}\tilde p_1r_1^2 & 0 & \tilde t_1s_2^2 & 0\\ 0 & \tilde q_2r_1^2 & \tilde t_2r_1s_2 & 0\end{pmatrix}$. Теперь $\breve b_2\neq 0\Leftrightarrow\tilde q_2\neq 0$, $\breve c_2\neq 0\Leftrightarrow\tilde t_2\neq 0$. Тогда при $r_1=\tilde t_1|\tilde t_1|^{-1/2}\tilde t_2^{-1}$, $s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}$ – это $NSF_{a,14}^{4,1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1$, $u=\tilde q_2\tilde t_1\tilde t_2^{-2}$, $v=\tilde p_1\tilde t_1\tilde t_2^{-2}$. И $NSF_{a,14}^{4,1}=CF_{a,14}^{4,1}$ при невыполнении утверждения 2.3, п. 12.

2_3^2) $\tilde q_1\neq 0$, $\varkappa_{18}=0\Leftrightarrow\tilde p_1=\tilde q_1(\tilde q_1-2\tilde t_2)(4\tilde t_1)^{-1}+\tilde q_2$. Тогда система (2.23) имеет вид $\begin{pmatrix}-\varkappa_{20}(2\tilde t_1)^{-1}r_1^2 & 0 & \tilde t_1s_2^2 & 0\\ 0 & \varkappa_{12}\tilde t_1^{-1}r_1^2 & \varkappa_{10}r_1s_2/2 & 0\end{pmatrix}$. Теперь $\breve b_2\neq 0\Leftrightarrow\varkappa_{12}\neq 0$, $\breve c_2\neq 0\Leftrightarrow\varkappa_{10}\neq 0$. Тогда при $r_1=2\tilde t_1\varkappa_{10}^{-1}|\tilde t_1|^{-1/2}$, $s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}$ – это $NSF_{a,14}^{4,1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1$, $u=4\varkappa_{12}\varkappa_{10}^{-2}$, $v=-2\varkappa_{20}\varkappa_{10}^{-2}$. И $NSF_{a,14}^{4,1}=CF_{a,14}^{4,1}$, если не выполняются условия утверждения 2.3, п. 12.

2_4) $\breve a_1,\breve a_2,\breve b_2,\breve c_2\neq 0$. Тогда система (2.23) – это не представляющая интереса $SF_{a,16}^{5,1}$.

3) $\breve a_1=0\Leftrightarrow\{\varkappa_{17}=\tilde q_1^2-4\tilde p_1\tilde t_1\geq 0,\ r_2=\varkappa_{21}^{\pm}(2\tilde t_1)^{-1}r_1\}$ $(\breve a_2\neq 0)$. Тогда система (2.19) примет вид:

$$\begin{pmatrix}0 & \pm\varkappa_{17}^{1/2}r_1s_2 & \tilde t_1s_2^2 & 0\\ \varkappa_{21}^{\pm}(-\varkappa_{20}\pm\tilde t_2\varkappa_{17}^{1/2})(4\tilde t_1^2)^{-1}r_1^3s_2^{-1} & \varkappa_{24}^{\pm}(2\tilde t_1)^{-1}r_1^2 & \varkappa_{23}^{\mp}r_1s_2/2 & 0\end{pmatrix}. \tag{2.25}$$

3_1) $\breve b_2=0\Leftrightarrow\varkappa_{24}^{\pm}=0\Leftrightarrow\tilde q_2=(\tilde q_1^2-4\tilde p_1\tilde t_1+2\tilde q_1\tilde t_2\mp(\tilde q_1+2\tilde t_2)\varkappa_{17}^{1/2})(2\tilde t_1)^{-1}$. Тогда система (2.25) имеет вид $\begin{pmatrix}0 & \pm\varkappa_{17}^{1/2}r_1s_2 & \tilde t_1s_2^2 & 0\\ \varkappa_{21}^{\pm}\varkappa_{22}^{\mp}(4\tilde t_1^2)^{-1}r_1^3s_2^{-1} & 0 & \varkappa_{23}^{\mp}r_1s_2/2 & 0\end{pmatrix}$ $(\varkappa_{21}^{\pm},\varkappa_{22}^{\mp}\neq 0)$. Теперь $\breve b_1\neq 0\Leftrightarrow\varkappa_{17}\neq 0$, $\breve c_2\neq 0\Leftrightarrow\varkappa_{23}^{\mp}\neq 0$. При $r_1=\pm\varkappa_{17}^{-1/2}\tilde t_1|\tilde t_1|^{-1/2}$, $s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}$ – это $NSF_{a,29}^{4,1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1$, $u=\pm\varkappa_{23}^{\mp}\varkappa_{17}^{-1/2}/2$, $v=\pm\varkappa_{21}^{\pm}\varkappa_{22}^{\mp}\varkappa_{17}^{-3/2}/4$. И $NSF_{a,29}^{4,1}=CF_{a,29}^{4,1}$, если не выполняются условия утверждения 2.3, п. 17.

3_2) $\breve b_1,\breve b_2,\breve c_2,\breve a_2\neq 0$. Тогда система (2.25) – это $SF_{a,23}^{5,1}$.

4) Случай $\breve{b}_2 = 0$ удобно рассматривать отдельно для $\tilde{q}_2 = 0$ и $\tilde{q}_2 \neq 0$.

4_1) $\tilde{q}_2 = 0$. Тогда $\breve{b}_2 = 0 \Leftrightarrow \{r_2 = 0 \text{ или } r_2 = (2\tilde{t}_2 - \tilde{q}_1)(2\tilde{t}_1)^{-1} r_1 \neq 0\}$.

4_1^1) $r_2 = 0$. Тогда система (2.19) принимает вид $\begin{pmatrix} \tilde{p}_1 r_1^2 & \tilde{q}_1 r_1 s_2 & \tilde{t}_1 s_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{t}_2 r_1 s_2 & 0 \end{pmatrix}$. Теперь $\breve{b}_1 \neq 0 \Leftrightarrow \tilde{q}_1 \neq 0$. При $r_1 = \tilde{t}_1 \tilde{t}_2^{-1} |\tilde{t}_1|^{-1/2}$, $s_2 = |\tilde{t}_1|^{-1/2}$ – это $NSF_5^{4,1}$ с $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{t}_1$, $u = \tilde{p}_1 \tilde{t}_1 \tilde{t}_2^{-2}$, $v = \tilde{q}_1 \tilde{t}_2^{-1}$. И $NSF_5^{4,1} = CF_5^{4,1}$ если не выполняются условия утверждения 2.3, п.7.

4_1^2) $r_2 = -(\tilde{q}_1 - 2\tilde{t}_2)(2\tilde{t}_1)^{-1} r_1 \neq 0$. Тогда система (2.19) принимает вид
$$\begin{pmatrix} (4\tilde{p}_1 \tilde{t}_1 - \tilde{q}_1^2 + 4\tilde{t}_2^2)(4\tilde{t}_1)^{-1} r_1^2 & 2\tilde{t}_2 r_1 s_2 & \tilde{t}_1 s_2^2 & 0 \\ (4\tilde{p}_1 \tilde{t}_1 - \tilde{q}_1^2 + 2\tilde{q}_1 \tilde{t}_2)(\tilde{q}_1 - 2\tilde{t}_2)(8\tilde{t}_1^2)^{-1} r_1^3 s_2^{-1} & 0 & \tilde{q}_1 r_1 s_2/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь, если $\breve{a}_2 = 0 \Leftrightarrow \tilde{p}_1 = \tilde{q}_1(\tilde{q}_1 - 2\tilde{t}_2)(4\tilde{t}_1)^{-1}$ $(\tilde{q}_1 \neq 0, 2\tilde{t}_2)$, получаем систему $\begin{pmatrix} -\tilde{t}_2(\tilde{q}_1 - 2\tilde{t}_2)(2\tilde{t}_1)^{-1} r_1^2 & 2\tilde{t}_2 r_1 s_2 & \tilde{t}_1 s_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{q}_1 r_1 s_2/2 & 0 \end{pmatrix}$ $(\tilde{t}_2 \neq 0)$. При $r_1 = 2\tilde{q}_1^{-1} \tilde{t}_1 |\tilde{t}_1|^{-1/2}$, $s_2 = |\tilde{t}_1|^{-1/2}$ – это $NSF_5^{4,1}$ с $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{t}_1$, $u = -2(\tilde{q}_1 - 2\tilde{t}_2)\tilde{q}_1^{-2} \tilde{t}_2$, $v = 4\tilde{q}_1^{-1} \tilde{t}_2$. В результате снова получена $NSF_5^{4,1}$, но с дополнительным ограничением $\tilde{q}_1 \neq 2\tilde{t}_2$ на элементы (2.19).

4_2) $\tilde{q}_2 \neq 0$. Тогда $\breve{b}_2 = 0 \Leftrightarrow \{\varkappa_{25} = (2\tilde{t}_2 - \tilde{q}_1)^2 + 8\tilde{q}_2 \tilde{t}_1 \geq 0,\ r_2 = \varkappa_{27}^{\pm}(4\tilde{t}_1)^{-1} r_1\}$, причем $\varkappa_{27}^{+} \varkappa_{27}^{-} \neq 0$, и система (2.19) принимает вид:
$$\begin{pmatrix} \varkappa_{29}^{\pm}(8\tilde{t}_1)^{-1} r_1^2 & \varkappa_{26}^{\pm} r_1 s_2/2 & \tilde{t}_1 s_2^2 & 0 \\ -\varkappa_{27}^{\pm} \varkappa_{28}^{\pm}(32\tilde{t}_1^2)^{-1} r_1^3 s_2^{-1} & 0 & \varkappa_{26}^{\mp} r_1 s_2/4 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.26}$$

4_2^1) $\breve{a}_2 = 0 \Leftrightarrow \tilde{p}_1 = (\tilde{q}_1^2 - 2\tilde{q}_1 \tilde{t}_2 + 4\tilde{t}_1 \tilde{q}_2 \mp \tilde{q}_1 \varkappa_{25}^{1/2})(8\tilde{t}_1)^{-1} \Leftrightarrow \varkappa_{28}^{\pm} = 0$. Тогда система (2.26) $= \begin{pmatrix} \varkappa_{30}^{\pm}(4\tilde{t}_1)^{-1} r_1^2 & \varkappa_{26}^{\pm} r_1 s_2/2 & \tilde{t}_1 s_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \varkappa_{26}^{\mp} r_1 s_2/4 & 0 \end{pmatrix}$ $(\varkappa_{30}^{\pm}, \varkappa_{26}^{\mp} \neq 0)$. При $s_2 = |\tilde{t}_1|^{-1/2}$, $r_1 = 4(\varkappa_{26}^{\mp})^{-1} \tilde{t}_1^{-1} |\tilde{t}_1|^{-1/2}$ – это $NSF_5^{4,1}$ с $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{t}_1$, $u = 4\varkappa_{30}^{\pm}(\varkappa_{26}^{\mp})^{-2}$, $v = 2\varkappa_{26}^{\pm}(\varkappa_{26}^{\mp})^{-1}$. И $NSF_5^{4,1} = CF_5^{4,1}$ если не выполняются условия утверждения 2.3, п.7.

4_2^2) $\breve{a}_2, \breve{a}_1, \breve{b}_1, \breve{c}_2 \neq 0$. Тогда система (2.26) – это не представляющая интереса $SF_{14}^{5,1}$.

5) $\breve{a}_2 = 0$. Тогда при $r_2 = 0$ система (2.19) имеет вид $\begin{pmatrix} \tilde{p}_1 r_1^2 & \tilde{q}_1 r_1 s_2 & \tilde{t}_1 s_2^2 & 0 \\ 0 & \tilde{q}_2 r_1^2 & \tilde{t}_2 r_1 s_2 & 0 \end{pmatrix}$. Поэтому при $\tilde{q}_1 \neq 0$, $\tilde{q}_2 \neq 0$, $\tilde{t}_2 \neq 0$ и $r_1 = |\tilde{q}_2|^{-1/2}$, $s_2 = \tilde{q}_2 |\tilde{q}_2|^{-1/2} \tilde{t}_2^{-1}$ – это $NSF_8^{5,1}$ с $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{q}_2$, $u = \tilde{p}_1 \tilde{q}_2^{-1}$, $v = \tilde{q}_1 \tilde{t}_2^{-1}$, $w = \tilde{q}_2 \tilde{t}_1 \tilde{t}_2^{-2}$.

II. Будем сводить систему (2.13) $(\tilde{p}_1, \tilde{t}_1 \neq 0)$ заменой (1.5) с $r_1 = s_1 \neq 0$ к каждой из шести $NSF^{4,1}$ вида (2.14) из второй части списка 2.1.

$NSF_1^{4,1}$. Система уравнений $\breve{c}_1, \breve{d}_1, \breve{a}_2, \breve{b}_2 = 0$ совместна в двух случаях.

1) $\tilde{q}_1 = 0$, $\tilde{q}_2 = 2\tilde{p}_1$, $\tilde{p}_1 = -\tilde{t}_1 r_2 s_2 s_1^{-2}$, $\tilde{t}_2 = \tilde{t}_1(r_2 + s_2)s_1^{-1}$, $\tilde{t}_2 \neq 0$, иначе (2.13) – это $SF^{3,1}$. Два последних условия разрешимы относительно $r_2, s_2 : r_2 = \varkappa_{32}^{\mp}(2\tilde{t}_1)^{-1} s_1$, $s_2 = \varkappa_{32}^{\pm}(2\tilde{t}_1)^{-1} s_1$ с $\varkappa_{32}^{\pm} = t_2 \pm \varkappa_{31}^{1/2}$ $(\varkappa_{32}^{-} \varkappa_{32}^{+} \neq 0)$, причем $\varkappa_{31} = \tilde{t}_2^2 + 4\tilde{p}_1 \tilde{t}_1 > 0$, иначе $\delta = 0$. Тогда система (2.14) имеет вид $\dfrac{\pm \varkappa_{31}^{1/2}}{2\tilde{t}_1} s_1^2 \begin{pmatrix} -\varkappa_{32}^{\mp} & -\varkappa_{32}^{\mp} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varkappa_{32}^{\pm} & \varkappa_{32}^{\pm} \end{pmatrix}$. При $s_1 = \varkappa_{31}^{-1/4} |2\tilde{t}_1(\varkappa_{32}^{\pm})^{-1}|^{1/2}$ – это $NSF_1^{4,1}$ с $\sigma = \pm \operatorname{sign}(\varkappa_{32}^{\pm} \tilde{t}_1)$, $u = -\varkappa_{32}^{\mp}(\varkappa_{32}^{\pm})^{-1}$.

2) $\tilde{q}_2 = 0$, $\tilde{t}_2 \neq 0$, иначе (2.13) – это $SF^{3,1}$. При $\varkappa_{31} \geq 0$, $\tilde{q}_1 = \varkappa_{32}^{\mp}$, $s_2 = 0$, $r_2 = \varkappa_{32}^{\pm}(2\tilde{t}_1)^{-1} s_1$ $(\varkappa_{32}^{-} \varkappa_{32}^{+} \neq 0)$ система (2.14) $= s_1^2 \begin{pmatrix} \varkappa_{32}^{\pm} \tilde{t}_2 (2\tilde{t}_1)^{-1} & \varkappa_{32}^{\pm} \tilde{t}_2 (2\tilde{t}_1)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{p}_1 & \tilde{p}_1 \end{pmatrix}$. При $s_1 = |\tilde{p}_1|^{-1/2}$ – это $NSF_1^{4,1}$ с $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{p}_1$, $u = \varkappa_{32}^{\pm} \tilde{t}_2 (2\tilde{p}_1 \tilde{t}_1)^{-1}$.

$NSF_3^{4,1}$. Система уравнений $\breve{b}_1, \breve{d}_1, \breve{a}_2, \breve{b}_2 = 0$ совместна в трех случаях.

1) $\tilde{p}_1 = \tilde{q}_1(\tilde{q}_1 - \tilde{t}_2)\tilde{t}_1^{-1}\ (\neq 0)$ $\tilde{q}_2 = \tilde{q}_1(3\tilde{q}_1 - 2\tilde{t}_2)\tilde{t}_1^{-1}$, $s_2 = (\tilde{t}_2 - 2\tilde{q}_1)\tilde{t}_1^{-1}s_1$, $r_2 = \tilde{q}_1\tilde{t}_1^{-1}s_1$, причем $3\tilde{q}_1 - \tilde{t}_2 \neq 0$, иначе $\delta = 0$ и $\tilde{q}_2^2 + \tilde{t}_2^2 \neq 0$, иначе (2.13) – это $SF^{3,1}$. Тогда система (2.14) имеет вид $\dfrac{3\tilde{q}_1 - \tilde{t}_2}{\tilde{t}_1} s_1^2 \begin{pmatrix} \tilde{q}_1 & 0 & -\tilde{q}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{q}_1 - \tilde{t}_2 & \tilde{q}_1 - \tilde{t}_2 \end{pmatrix}$. При $s_1 = |\tilde{t}_1^{-1}(3\tilde{q}_1 - \tilde{t}_2)(\tilde{q}_1 - \tilde{t}_2)|^{-1/2}$ – это $NSF_3^{4,1}$ с $\sigma = \mathrm{sign}(\tilde{t}_1(3\tilde{q}_1 - \tilde{t}_2)(\tilde{q}_1 - \tilde{t}_2))$, $u = \tilde{q}_1(\tilde{q}_1 - \tilde{t}_2)^{-1}$.

2) $\tilde{p}_1 = \tilde{q}_1(2\tilde{q}_1 - 3\tilde{t}_2)(9\tilde{t}_1)^{-1}(\neq 0)$, $\tilde{q}_2 = 0$, $r_2 = 0$, $s_2 = -(2\tilde{q}_1 - 3\tilde{t}_2)(3\tilde{t}_1)^{-1}s_1$, причем $\tilde{t}_2 \neq 0$, иначе (2.13) – $SF^{3,1}$. Тогда система (2.14) $= \dfrac{2\tilde{q}_1 - 3\tilde{t}_2}{9\tilde{t}_1} s_1^2 \begin{pmatrix} \tilde{q}_1 & 0 & -\tilde{q}_1 & 0 \\ 0 & 0 & -3\tilde{t}_2 & -3\tilde{t}_2 \end{pmatrix}$. При $s_1 = \sqrt{3}\,|(2\tilde{q}_1 - 3\tilde{t}_2)\tilde{t}_2\tilde{t}_1^{-1}|^{-1/2}$ – это $NSF_3^{4,1}$ с $\sigma = -\mathrm{sign}(\tilde{t}_1\tilde{t}_2(2\tilde{q}_1 - 3\tilde{t}_2))$, $u = -\tilde{q}_1(3\tilde{t}_2)^{-1}$.

3) $\tilde{p}_1 = (2\tilde{q}_1 - 3\tilde{t}_2)(2\tilde{q}_1 + \tilde{t}_2)(16\tilde{t}_1)^{-1}(\neq 0)$, $\tilde{q}_2 = (2\tilde{q}_1 - 3\tilde{t}_2)\tilde{t}_2(8\tilde{t}_1)^{-1}$, $s_2 = 0$, $r_2 = -(2\tilde{q}_1 - 3\tilde{t}_2)(4\tilde{t}_1)^{-1}s_1$, причем $\tilde{t}_2 \neq 0$, иначе $\tilde{q}_2 = 0$ и (2.13) – это $SF^{3,1}$. Тогда система (2.14) имеет вид $\dfrac{2\tilde{q}_1 - 3\tilde{t}_2}{16\tilde{t}_1} s_1^2 \begin{pmatrix} -2\tilde{t}_2 & 0 & 2\tilde{t}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\tilde{q}_1 + \tilde{t}_2 & 2\tilde{q}_1 + \tilde{t}_2 \end{pmatrix}$. При $s_1 = 4|\tilde{t}_1^{-1}(2\tilde{q}_1 - 3\tilde{t}_2)(2\tilde{q}_1 + \tilde{t}_2)|^{-1/2}$ – это $NSF_3^{4,1}$ с $\sigma = \mathrm{sign}(\tilde{t}_1(2\tilde{q}_1 - 3\tilde{t}_2)(2\tilde{q}_1 + \tilde{t}_2))$, $u = -2\tilde{t}_2(2\tilde{q}_1 + \tilde{t}_2)^{-1}$.

$NSF_{13}^{4,1}$. Система уравнений $\breve{b}_1, \breve{c}_1, \breve{a}_2, \breve{c}_2 = 0$ совместна в трех случаях.

1) $\tilde{p}_1 = (4\tilde{q}_1^2 - \tilde{t}_2^2)(12\tilde{t}_1)^{-1}(\neq 0)$, $\tilde{t}_2 \neq 0$, $\tilde{q}_2 = (2\tilde{q}_1 - \tilde{t}_2)\tilde{t}_2(4\tilde{t}_1)^{-1}$ $(\tilde{q}_2 \neq 0)$, $r_2 = 0$, $s_2 = -(2\tilde{q}_1 - \tilde{t}_2)(2\tilde{t}_1)^{-1}s_1$, тогда система (2.14) $= \dfrac{2\tilde{q}_1 - \tilde{t}_2}{12\tilde{t}_1} s_1^2 \begin{pmatrix} 2\tilde{q}_1 + \tilde{t}_2 & 0 & 0 & 2\tilde{q}_1 + \tilde{t}_2 \\ 0 & 3\tilde{t}_2 & 0 & -3\tilde{t}_2 \end{pmatrix}$. При $s_1 = 2\,|(2\tilde{q}_1 - \tilde{t}_2)\tilde{t}_2\tilde{t}_1^{-1}|^{-1/2}$ – это $NSF_{13}^{4,1}$ с $\sigma = \mathrm{sign}((2\tilde{q}_1 - \tilde{t}_2)\tilde{t}_2\tilde{t}_1)$, $u = (2\tilde{q}_1 + \tilde{t}_2)(3\tilde{t}_2)^{-1}$.

2) $s_1 = -\tilde{t}_2\tilde{q}_2^{-1}(2r_2 + s_2)(r_2 + 2s_2)^{-1}s_2\ (\neq 0)$, $\tilde{p}_1 = \tilde{q}_2(r_2 + s_2)(r_2^2 + r_2s_2 + s_2^2)(2r_2 + s_2)^{-1}s_2^{-2}$, $\tilde{q}_1 = \tilde{t}_2(3r_2^2 + 4r_2s_2 + 2s_2^2)((r_2 + 2s_2)s_2)^{-1}$, $\tilde{t}_1 = \tilde{t}_2^2\tilde{q}_2^{-1}(2r_2 + s_2)^2(r_2 + 2s_2)^{-2}$.

В последнем равенстве $\tilde{t}_2 \neq 0$, $\tilde{q}_2\tilde{t}_1 > 0$ и оно разрешимо относительно r_2 хотя бы одним из двух способов: $r_2 = -(2(\tilde{q}_2\tilde{t}_1)^{1/2} \pm \tilde{t}_2)(\varkappa_{33}^{\pm})^{-1}s_2$, так как $(\varkappa_{33}^{-})^2 + (\varkappa_{33}^{+})^2 \neq 0$. Тогда $s_1 = \pm(\tilde{q}_2\tilde{t}_1)^{1/2}\tilde{q}_2^{-1}s_2$, $\tilde{p}_1 = (\tilde{q}_2\tilde{t}_1)^{1/2}\varkappa_{34}^{\mp}\varkappa_{35}^{\pm}(\varkappa_{33}^{\pm})^{-2}\tilde{t}_1^{-1}$, $\tilde{q}_1 = \pm(2\tilde{q}_2\tilde{t}_1 + \tilde{t}_2^2)(\varkappa_{33}^{\pm})^{-1}$, где $\varkappa_{34}^{\pm} \neq 0$, иначе $\delta = 0$. Поэтому (2.14) $= \dfrac{\varkappa_{34}^{\pm}\tilde{t}_1\,s_2^2}{(\tilde{q}_2\tilde{t}_1)^{1/2}(\varkappa_{33}^{\pm})^2} \begin{pmatrix} \varkappa_{34}^{\mp}\varkappa_{33}^{\pm} & 0 & 0 & \varkappa_{34}^{\mp}\varkappa_{33}^{\pm} \\ 0 & -3\varkappa_{35}^{\pm} & 0 & 3\varkappa_{35}^{\pm} \end{pmatrix}$ с $\varkappa_{33}^{\pm} = (\tilde{q}_2\tilde{t}_1)^{1/2} \pm 2\tilde{t}_2$, $\varkappa_{34}^{\pm} = (\tilde{q}_2\tilde{t}_1)^{1/2} \pm \tilde{t}_2$, $\varkappa_{35}^{\pm} = \tilde{q}_2\tilde{t}_1 \pm (\tilde{q}_2\tilde{t}_1)^{1/2}\tilde{t}_2 + \tilde{t}_2^2 > 0$. При $s_2 = (\tilde{q}_2\tilde{t}_1)^{1/4}\varkappa_{33}^{\pm}(3\varkappa_{35}^{\pm})^{-1/2}|\varkappa_{34}^{\pm}\tilde{t}_1|^{-1/2}$ – это $NSF_{13}^{4,1}$ с $\sigma = -\mathrm{sign}(\varkappa_{34}^{\pm}\tilde{t}_1)$, $u = -\varkappa_{34}^{\mp}\varkappa_{33}^{\pm}(3\varkappa_{35}^{\pm})^{-1}$.

3) $r_2 = -2s_2$, $\tilde{t}_2 = 0$, $\tilde{p}_1 = \tilde{q}_2$, $\tilde{q}_1 = 2\tilde{q}_2s_1s_2^{-1}$, $\tilde{t}_1 = \tilde{q}_2s_1^2s_2^{-2}$, т. е. (2.13) – это $SF_{11}^{4,1}$.

К остальным шести $NSF^{m,1}$ из списка 2.1_{II} систему (2.13) имеет смысл сводить только при условиях $\tilde{q}_1 \neq 0$, $\tilde{q}_2 \neq 0$, $\tilde{t}_2 \neq 0$, иначе (2.13) им предшествует.

$NSF_{28}^{4,1}$. 1) $\varkappa_{10} = \tilde{q}_1 + 2\tilde{t}_2 \neq 0$. Система уравнений $\breve{a}_1, \breve{c}_1, \breve{b}_2, \breve{c}_2 = 0$ однозначно разрешима относительно $\tilde{p}_2, \tilde{q}_2, r_2, s_2$. Имеем: $\tilde{p}_2 = S_1(\tilde{p}_1\tilde{t}_1)\,\tilde{t}_1^{-2}\varkappa_{10}^{-3}$, $\tilde{q}_2 = -(9(\tilde{p}_1\tilde{t}_1)^2 - 3(\tilde{q}_1^2 - 2\tilde{q}_1\tilde{t}_2 - 2\tilde{t}_2^2)\tilde{p}_1\tilde{t}_1 - \tilde{t}_2(\tilde{t}_2 + 2\tilde{q}_1)(2\tilde{q}_1^2 + 4\tilde{q}_1\tilde{t}_2 + 3\tilde{t}_2^2))\tilde{t}_1^{-1}\varkappa_{10}^{-2}$, $r_2 = -(3\tilde{p}_1\tilde{t}_1 + 2\tilde{q}_1\tilde{t}_2 + \tilde{t}_2^2)(\tilde{t}_1\varkappa_{10})^{-1}s_1$, $s_2 = (6\tilde{p}_1\tilde{t}_1 - \tilde{q}_1\tilde{t}_2 - 2\tilde{q}_1^2)(\tilde{t}_1\varkappa_{10})^{-1}s_1$.

Условие $\tilde{p}_2 = 0$ достигается, когда $S_1(\theta)$ имеет вещественный нуль $\theta_* \neq 0 \Leftrightarrow \tilde{q}_1 \neq -\tilde{t}_2$, так как при $\tilde{q}_1 = -\tilde{t}_2$ многочлен $S_1(\theta) = (27\theta^2 - 12\tilde{t}_2^2\theta + 2\tilde{t}_2^4)\theta$ и ненулевых корней не имеет. Поэтому $\forall\,\theta_*$ положим $\tilde{p}_1 = \theta_*\tilde{t}_1^{-1}$. Заменим также $\tilde{p}_1\tilde{t}_1$ на θ_* в $\tilde{q}_2, r_2, s_2$. Тогда система (2.14) $= \dfrac{\varkappa_{36}s_1^2}{\tilde{t}_1\varkappa_{10}^2} \begin{pmatrix} 0 & -\varkappa_{37} & 0 & \varkappa_{37} \\ \varkappa_{39} & 0 & 0 & \varkappa_{39} \end{pmatrix}$ с $\varkappa_{36} = 9\theta_* - 2\tilde{q}_1^2 + \tilde{q}_1\tilde{t}_2 + \tilde{t}_2^2 \neq 0 \Leftrightarrow r_2 \neq s_2$, $\varkappa_{37} = 3\theta_* - \tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_1\tilde{t}_2 - \tilde{t}_2^2 \neq 0$, $\varkappa_{39} = \theta_* + \tilde{q}_1\tilde{t}_2 + \tilde{t}_2^2 \neq 0$, иначе $R_2 = 0$. При $s_1 = \varkappa_{10}|\varkappa_{39}\varkappa_{36}\tilde{t}_1^{-1}|^{-1/2}$ – это $NSF_{28}^{4,1}$ с $\sigma = \mathrm{sign}(\varkappa_{39}\varkappa_{36}\tilde{t}_1)$, $u = -\varkappa_{39}^{-1}\varkappa_{37}$ $(u \neq -3)$.

2) $\tilde q_1=-2\tilde t_2$. Система уравнений $\breve a_1,\breve c_1,\breve b_2,\breve c_2=0$ однозначно разрешима относительно $\tilde p_1,\tilde p_2,\tilde q_2,s_2$. Имеем: $\tilde p_1=\tilde t_2^2\tilde t_1^{-1}$, $\tilde p_2=-((r_2\tilde t_1)^3-4s_1\tilde t_2(r_2\tilde t_1)^2+5(s_1\tilde t_2)^2r_2\tilde t_1-3(s_1\tilde t_2)^3)\tilde t_1^{-2}s_1^{-3}$, $\tilde q_2=-((r_2\tilde t_1)^2-2s_1\tilde t_2r_2\tilde t_1+3(s_1\tilde t_2)^2)\tilde t_1^{-1}s_1^{-2}$, $s_2=-(2r_2\tilde t_1-3s_1\tilde t_2)\tilde t_1^{-1}$.

Пусть x_0 – вещественный корень уравнения $x^3-4x^2+5x-3=0$, тогда $\tilde p_2=0\Leftrightarrow r_2=x_0\tilde t_2\tilde t_1^{-1}s_1$. Но и без этого условия система (2.14) $=\dfrac{(\tilde t_2s_1-\tilde t_1r_2)^2}{\tilde t_1}\begin{pmatrix}0&-3&0&3\\1&0&0&1\end{pmatrix}$ и в получаемой $NSF_{28}^{4,1}$ будет $u=-3$, при котором она сводится к $SF_{22}^{3,1}$.

$NSF_{32}^{4,1}$. Система уравнений $\breve a_1,\breve b_1,\breve b_2,\breve c_2=0$ однозначно разрешима относительно $\tilde p_2$, $\tilde q_2,r_2,s_2$ при $\varkappa_{10}=\tilde q_1+2\tilde t_2\neq0$. Имеем: $\tilde p_2=S_*(\tilde p_1\tilde t_1)\,\tilde t_1^{-2}\varkappa_{10}^{-1}$, $\tilde q_2=((\tilde q_1+\tilde t_2)^2-3\tilde p_1\tilde t_1)\tilde t_1^{-1}$, $r_2=-(\tilde q_1+\tilde t_2)\tilde t_1^{-1}s_1$, $s_2=(3\tilde p_1\tilde t_1-\tilde q_1^2+\tilde t_2^2)(\tilde t_1\varkappa_{10})^{-1}s_1$, где $S_*(\theta)=3\theta^2-2(2\tilde q_1+\tilde t_2)(\tilde q_1+\tilde t_2)\theta+(\tilde q_1^2+\tilde q_1t_2+\tilde t_2^2)(\tilde q_1+\tilde t_2)^2$.

Условие $\tilde p_2=0$ достигается, когда $S_*(\theta)$ имеет вещественный нуль $\theta_*\neq0\Leftrightarrow\tilde q_1\neq-\tilde t_2$, $\varkappa_{40}=\tilde q_1^2+\tilde q_1\tilde t_2-2\tilde t_2^2\geq0$. Тогда $\theta_*=\varkappa_{41}^{\pm}=(2\tilde q_1+\tilde t_2\pm\varkappa_{40}^{1/2})(\tilde q_1+\tilde t_2)/3\neq0$, $\tilde p_1=\varkappa_{41}^{\pm}\tilde t_1^{-1}$, в $\tilde q_2,s_2$ заменим $\tilde p_1\tilde t_1$ на $\varkappa_{41}^{\pm}$, и система (2.14) $=\dfrac{\varkappa_{42}^{\pm}s_1^2}{\tilde t_1}\begin{pmatrix}0&0&3\varkappa_{43}^{\pm}\varkappa_{10}^{-2}&3\varkappa_{43}^{\pm}\varkappa_{10}^{-2}\\1&0&0&1\end{pmatrix}$ с $\varkappa_{42}^{\pm}=\varkappa_{41}^{\pm}+\tilde q_1\tilde t_2+\tilde t_2^2\neq0\;\Leftrightarrow\;r_2\neq s_2$, $\varkappa_{43}^{\pm}=3\varkappa_{41}^{\pm}-\tilde q_1^2-\tilde q_1\tilde t_2-\tilde t_2^2\neq0$, иначе $R_2=0$. При $s_1=|\tilde t_1|^{1/2}|\varkappa_{42}^{\pm}|^{-1/2}$ – это $NSF_{32}^{4,1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}(\varkappa_{42}^{\pm}\tilde t_1)$, $u=3\varkappa_{43}^{\pm}\varkappa_{10}^{-2}$.

$NSF_{36}^{4,1}$. Система уравнений $\breve a_1,\breve b_1,\breve b_2,\breve d_2=0$ однозначно разрешима относительно $\tilde p_2,\tilde q_2,r_2,s_2$ при $\varkappa_{10}=\tilde q_1+2\tilde t_2\neq0$. Имеем: $\tilde q_2=-(3\tilde p_1\tilde t_1+2\tilde q_1\tilde t_2+3\tilde t_2^2)\tilde t_1^{-1}$, $r_2=-(2\tilde q_1+3\tilde t_2)\tilde t_1^{-1}s_1$, $s_2=(\tilde p_1\tilde t_1+2\tilde q_1\tilde t_2+3\tilde t_2^2)(\tilde t_1\varkappa_{10})^{-1}s_1$, $\tilde p_2=S_*(\tilde p_1\tilde t_1)\,\tilde t_1^{-2}\varkappa_{10}^{-1}$, где $S_*(\theta)=\theta^2-2(\tilde q_1+\tilde t_2)(2\tilde q_1+3\tilde t_2)\theta-\tilde t_2(\tilde q_1+\tilde t_2)(2\tilde q_1+3\tilde t_2)^2$.

Условие $\tilde p_2=0$ достигается, когда $S_*(\theta)$ имеет вещественный нуль $\theta_*\neq0\Leftrightarrow\tilde q_1\neq-\tilde t_2$, $\tilde q_1\neq-3\tilde t_2/2$, $\varkappa_{44}=\tilde q_1^2+3\tilde q_1\tilde t_2+2\tilde t_2^2\geq0$. Тогда $\theta_*=\varkappa_{45}^{\pm}=(\tilde q_1+\tilde t_2\pm\varkappa_{44}^{1/2})(2\tilde q_1+3\tilde t_2)\neq0$, $\tilde p_1=\varkappa_{45}^{\pm}\tilde t_1^{-1}$, в $\tilde q_2,s_2$ вместо $\tilde p_1\tilde t_1$ стоит $\varkappa_{45}^{\pm}$ и система (2.14) имеет вид $\dfrac{\varkappa_{46}^{\pm}s_1^2}{\tilde t_1\varkappa_{10}^2}\begin{pmatrix}0&0&\varkappa_{47}^{\pm}&\varkappa_{47}^{\pm}\\\varkappa_{10}^2&0&-\varkappa_{10}^2&0\end{pmatrix}$ с $\varkappa_{46}^{\pm}=\varkappa_{45}^{\pm}+2\tilde q_1^2+9\tilde t_2(\tilde q_1+\tilde t_2)\neq0\Leftrightarrow r_2\neq s_2$, $\varkappa_{47}^{\pm}=\varkappa_{45}^{\pm}+\tilde q_1\tilde t_2+\tilde t_2^2\neq0$, иначе $R_2=0$. При $s_1=|\tilde t_1|^{1/2}|\varkappa_{46}^{\pm}|^{-1/2}$ – это $NSF_{36}^{4,1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}(\varkappa_{46}^{\pm}\tilde t_1)$, $u=\varkappa_{47}^{\pm}\varkappa_{10}^{-2}$.

$NSF_{3}^{5,1}$. Система уравнений $\breve d_1,\breve a_2,\breve c_2=0$ совместна в трех случаях.

1) $s_2=0$, $r_2=(\tilde q_2-3\tilde p_1)\tilde q_1^{-1}s_1$, $\tilde q_2\neq3\tilde p_1$, иначе $r_2=s_2$, $\tilde t_1=\tilde q_1(2\tilde p_1\tilde q_1+\tilde t_2\tilde q_2-3\tilde t_2\tilde p_1)(\tilde q_2-3\tilde p_1)^{-2}\neq0$. Тогда система (2.14) $=s_1^2\begin{pmatrix}\varkappa_{48}\tilde q_1^{-1}&(\tilde q_1\tilde q_2+\varkappa_{48})\tilde q_1^{-1}&\tilde q_2&0\\0&-\tilde p_1&0&\tilde p_1\end{pmatrix}$ с $\varkappa_{48}=\tilde q_1\tilde q_2+\tilde t_2(\tilde q_2-3\tilde p_1)$, при этом $\varkappa_{48}\neq0$ и $\tilde q_1\tilde q_2+\varkappa_{48}\neq0$, иначе $R_2=0$. При $s_1=|\tilde p_1|^{-1/2}$ – это $NSF_3^{5,1}$ с $\sigma=-\operatorname{sign}\tilde p_1$, $u=-\varkappa_{48}(\tilde p_1\tilde q_1)^{-1}$, $v=-(\tilde q_1\tilde q_2+\varkappa_{48})(\tilde p_1\tilde q_1)^{-1}$ ($\breve c_1=-\tilde q_2\tilde p_1^{-1}\neq0$).

2) $r_2=0$, $s_2=-2\tilde q_2\tilde t_2^{-1}s_1$, $\tilde t_1=-\tilde t_2(\tilde p_1\tilde t_2-2\tilde q_1\tilde q_2+\tilde q_2\tilde t_2)(2\tilde q_2)^{-2}\neq0$. Тогда система (2.14) имеет вид $s_1^2\begin{pmatrix}\tilde p_1&\varkappa_{49}\tilde t_2^{-1}&(\varkappa_{49}-\tilde p_1\tilde t_2)\tilde t_2^{-1}&0\\0&\tilde q_2&0&-\tilde q_2\end{pmatrix}$ с $\varkappa_{49}=3\tilde p_1\tilde t_2-\tilde q_2(2\tilde q_1+\tilde t_2)\neq0$, иначе $R_2=0$. При $s_1=|\tilde q_2|^{-1/2}$ – это $NSF_3^{5,1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde q_2$, $u=\tilde p_1\tilde q_2^{-1}$, $v=\varkappa_{49}(\tilde q_2\tilde t_2)^{-1}$, $\breve c_1=v-u=(\varkappa_{49}-\tilde p_1\tilde t_2)(\tilde q_2\tilde t_2)^{-1}\neq0\Leftrightarrow\varkappa_{49}-\tilde p_1\tilde t_2\neq0$.

3) $\tilde p_1=(\tilde t_1r_2-\tilde t_2s_1)(r_2+s_2)s_1^{-2}/2\quad(r_2+s_2\neq0)$, $\tilde q_1=-(\tilde t_1(r_2+s_2)-\tilde t_2s_1)s_1^{-1}$, $\tilde q_2=(\tilde t_1(r_2-s_2)r_2-\tilde t_2(r_2+s_2)s_1)s_1^{-2}/2$, поэтому $-\tilde t_1(r_2+s_2)s_1^{-1}=\tilde q_1-\tilde t_2\neq0$. Два первых равенства разрешимы относительно r_2,s_2 : $r_2=-(2\tilde p_1\tilde t_1-\tilde q_1\tilde t_2+\tilde t_2^2)(\tilde t_1(\tilde q_1-\tilde t_2))^{-1}s_1$, $s_2=(2\tilde p_1\tilde t_1+\tilde q_1\tilde t_2-\tilde q_1^2)(\tilde t_1(\tilde q_1-\tilde t_2))^{-1}s_1$. Тогда $\tilde q_2=(\tilde t_2\tilde q_1^3-(\tilde p_1\tilde t_1+2\tilde t_2^2)\tilde q_1^2-\tilde t_2(2\tilde p_1\tilde t_1-\tilde t_2^2)\tilde q_1+$

$\tilde p_1\tilde t_1(4\tilde p_1\tilde t_1+3\tilde t_2^2))\tilde t_1^{-1}(\tilde q_1-\tilde t_2)^{-2}$, система (2.14) $=\dfrac{\varkappa_{50}s_1^2}{\tilde t_1(\tilde q_1-\tilde t_2)^2}\begin{pmatrix}\varkappa_{51} & (\tilde q_1-\tilde t_2)^2 & -\varkappa_{52} & 0\\ 0 & -\tilde p_1 & 0 & \tilde p_1\end{pmatrix}$ с $\varkappa_{50}=4\tilde p_1\tilde t_1-\tilde q_1^2+\tilde t_2^2\neq 0\Leftrightarrow r_2\neq s_2$, $\varkappa_{52}=\tilde p_1\tilde t_1+\tilde q_1\tilde t_2-\tilde q_1^2$, $\varkappa_{51}=\tilde p_1\tilde t_1-\tilde q_1\tilde t_2+\tilde t_2^2\neq 0$, иначе $R_2=0$. При $s_1=(\tilde q_1-\tilde t_2)|\varkappa_{50}\tilde p_1|^{-1/2}$ – это $NSF_3^{5,1}$ с $\sigma=-\mathrm{sign}(\varkappa_{50}\tilde p_1)$, $u=-\varkappa_{51}(\tilde p_1\tilde t_1)^{-1}$, $v=-(\tilde q_1-\tilde t_2)^2(\tilde p_1\tilde t_1)^{-1}$, $\breve c_1=v-u=\varkappa_{52}(\tilde p_1\tilde t_1)^{-1}\neq 0\Leftrightarrow\varkappa_{52}\neq 0$.

$NSF_6^{5,1}$. Для системы (2.14) будем решать систему уравнений $\breve c_1,\breve a_2,\breve c_2=0$.

Элемент $\breve a_2=0$ в двух случаях.

1) $r_2=0$. Тогда система уравнений $\breve c_1,\breve c_2=0$ однозначно разрешима относительно $\tilde p_1,s_2:\tilde p_1=4\varkappa_{53}\tilde q_2\tilde t_2^{-2}/3\neq 0$ ($\varkappa_{53}=\tilde q_1\tilde t_2-\tilde q_2\tilde t_1\neq 0$), $s_2=-2\tilde q_2\tilde t_2^{-1}s_1$, и (2.14) имеет вид $\dfrac{\tilde q_2}{3\tilde t_2^2}s_1^2\begin{pmatrix}4\varkappa_{53} & 3\varkappa_{54} & 0 & 4\varkappa_{53}-3\varkappa_{54}\\ 0 & 3\tilde t_2^2 & 0 & -3\tilde t_2^2\end{pmatrix}$ с $\varkappa_{54}=2\tilde q_1\tilde t_2-4\tilde q_2\tilde t_1-\tilde t_2^2\neq 0$. При $s_1=|\tilde q_2|^{-1/2}$ – это $NSF_6^{5,1}$ с $\sigma=\mathrm{sign}\,\tilde q_2$, $u=4\varkappa_{53}(3\tilde t_2^2)^{-1}$, $v=\varkappa_{54}\tilde t_2^{-2}$, $\breve d_1\neq 0\Leftrightarrow 4\varkappa_{53}\neq 3\varkappa_{54}$.

2) $\tilde p_1=-(\tilde t_1r_2^2+(\tilde q_1-\tilde t_2)s_1r_2-\tilde q_2s_1^2)s_1^{-2}$. Положим в замене (1.5) $r_2=\eta s_1$, $s_2=\theta s_1$ ($\eta\neq\theta$). Тогда в системе (2.14) $\breve a_2=0$ при $\tilde p_1=-(\tilde t_1\eta^2+(\tilde q_1-\tilde t_2)\eta-\tilde q_2)$. Теперь $\breve c_1=0\Leftrightarrow\eta=-(\tilde t_1\theta^2+(2\tilde q_1-\tilde t_2)\theta+\tilde q_2)(3\tilde t_1\theta)^{-1}$, поэтому $\breve c_2=S_2(\theta)$.

Положим $\theta=\theta_*$, где $\theta_*\in\mathbb{R}^1$ – любой корень уравнения $S_2(\theta)=0$ ($\theta_*\neq 0$), тогда $\tilde p_1=-\varkappa_{55}(9\tilde t_1\theta_*^2)^{-1}\neq 0$, и при $r_2=-(\tilde t_1\theta_*^2+(2\tilde q_1-\tilde t_2)\theta_*+\tilde q_2)(3\tilde t_1\theta_*)^{-1}s_1$, $s_2=\theta_*s_1$, $\varkappa_{56}=4\tilde t_1\theta_*^2+(2\tilde q_1-\tilde t_2)\theta_*+\tilde q_2\neq 0\Leftrightarrow r_2\neq s_2$, имеем: $\breve c_2=0$, $\breve b_2+\breve d_2=S_2(\theta_*)=0$. Поэтому система (2.14) имеет вид $-\dfrac{s_1^2}{9\tilde t_1\theta_*^2}\begin{pmatrix}3\varkappa_{57}\theta_* & 3\varkappa_{58}\theta_* & 0 & 3(\varkappa_{57}-\varkappa_{58})\theta_*\\ 0 & \varkappa_{59} & 0 & -\varkappa_{59}\end{pmatrix}$ с $\varkappa_{57}\neq 0$, $\varkappa_{58}\neq 0$, $\varkappa_{59}\neq 0$. Теперь при $s_1=3\theta_*|\varkappa_{59}\tilde t_1^{-1}|^{-1/2}$ – это $NSF_6^{5,1}$ с $\sigma=-\mathrm{sign}(\varkappa_{59}\tilde t_1)$, $u=3\varkappa_{57}\theta_*\varkappa_{59}^{-1}$, $v=3\varkappa_{58}\theta_*\varkappa_{59}^{-1}$, $\breve d_1\neq 0\Leftrightarrow\varkappa_{57}\neq\varkappa_{58}$.

$NSF_7^{5,1}$. Для системы (2.14) будем решать систему уравнений $\breve d_1,\breve b_2,\breve c_2=0$.

Элемент $\breve d_1=0$ в двух случаях.

1) $s_2=0$. Тогда система уравнений $\breve b_2,\breve c_2=0$ однозначно разрешима относительно $\tilde t_1,r_2:r_2=(\tilde q_2-3\tilde p_1)\tilde q_1^{-1}s_1$, $\tilde t_1=\varkappa_{60}\tilde q_1(\tilde q_2-3\tilde p_1)^{-2}\neq 0$ ($\varkappa_{60}=3\tilde p_1\tilde q_1+(\tilde q_2-3\tilde p_1)\tilde t_2\neq 0$), и система (2.14) принимает вид $s_1^2\begin{pmatrix}\varkappa_{61}\tilde q_1^{-1} & (\varkappa_{61}+\tilde q_1\tilde q_2)\tilde q_1^{-1} & \tilde q_2 & 0\\ \tilde p_1 & 0 & 0 & \tilde p_1\end{pmatrix}$ с $\varkappa_{61}=\tilde q_1\tilde q_2+(\tilde q_2-3\tilde p_1)\tilde t_2\neq 0,\varkappa_{61}+\tilde q_1\tilde q_2\neq 0$. При $s_1=|\tilde p_1|^{-1/2}$ – это $NSF_7^{5,1}$ с $\sigma=\mathrm{sign}\,\tilde p_1$, $u=\varkappa_{61}(\tilde p_1\tilde q_1)^{-1}$, $v=(\varkappa_{61}+\tilde q_1\tilde q_2)(\tilde p_1\tilde q_1)^{-1}$.

2) $\tilde p_1=-(\tilde t_1s_2^2+(\tilde q_1-\tilde t_2)s_1s_2-\tilde q_2s_1^2)s_1^{-2}$. Положим в замене (1.5) $r_2=\theta s_1$, $s_2=\eta s_1$ ($\theta\neq\eta$). Тогда в получаемой системе (2.14) $\breve d_1=0\Leftrightarrow\tilde p_1=-\tilde t_1\eta^2-(\tilde q_1-\tilde t_2)\eta+\tilde q_2$. Теперь $\breve b_2=0\Leftrightarrow\eta=-(\tilde t_1\theta^2+(2\tilde q_1-\tilde t_2)\theta+\tilde q_2)(3\tilde t_1\theta)^{-1}$, поэтому $\breve c_2=S_3(\theta)$.

Положим $\theta=\theta_*$, где $\theta_*\in\mathbb{R}^1$ – любой корень уравнения $S_3(\theta)=0$ ($\theta_*\neq 0$), тогда $\tilde p_1=-\varkappa_{55}(9\tilde t_1\theta_*^2)^{-1}\neq 0$, и при $r_2=\theta_*s_1$, $s_2=-(\tilde t_1\theta_*^2+(2\tilde q_1-\tilde t_2)\theta_*+\tilde q_2)(3\tilde t_1\theta_*)^{-1}s_1$, $\varkappa_{56}=4\tilde t_1\theta_*^2+(2\tilde q_1-\tilde t_2)\theta_*+\tilde q_2\neq 0\Leftrightarrow r_2\neq s_2$ имеем: $\breve c_2=0$, $\breve a_2-\breve d_2=S_3(\theta_*)=0$. Тогда система (2.14) $=s_1^2\begin{pmatrix}\varkappa_{59}(9\tilde t_1\theta_*^2)^{-1} & \varkappa_{62}(3\tilde t_1\theta_*^2)^{-1} & (3\varkappa_{62}-\varkappa_{59})(9\tilde t_1\theta_*^2)^{-1} & 0\\ \varkappa_{63}/3 & 0 & 0 & \varkappa_{63}/3\end{pmatrix}$ с $\varkappa_{59}\neq 0$, $\varkappa_{62}\neq 0$, $\varkappa_{63}=2\tilde t_1\theta_*^2+(\tilde q_1-2\tilde t_2)\theta_*-\tilde q_2\neq 0$, иначе $R_2=0$. При $s_1=\sqrt{3}|\varkappa_{63}|^{-1/2}$ – это $NSF_7^{5,1}$ с $\sigma=\mathrm{sign}\,\varkappa_{63}$, $u=\varkappa_{59}(3\varkappa_{63}\tilde t_1\theta_*^2)^{-1}$, $v=\varkappa_{62}(\varkappa_{63}\tilde t_1\theta_*^2)^{-1}$, $\breve c_1\neq 0\Leftrightarrow\varkappa_{59}\neq 3\varkappa_{62}$.

2.7. Обобщение результатов для случая $\mathbf{l=1}$.

Сформулируем теорему, обобщающую результаты в леммах 2.1, 2.2, 2.3.

Теорема 2.2. *При* $l=1$ *любая система* (1.4), *записанная в виде* (2.6) *согласно*

(2.2), *линейно эквивалентна какой-либо* $CF_i^{m,1}$ *из списка* 2.1. *Ниже для каждой* $CF_i^{m,1}$ *приведены: a) условия на коэффициенты* β, p_i, q_i, t_i $(i=1,2)$ *системы* (2.6) *с* $R_2=\delta_{pt}^2-\delta_{pq}\delta_{qt}\neq 0$, *b) замены* (1.5), *преобразующие* (2.6) *при указанных условиях в выбранную форму, c) получаемые при этом значения* σ *и параметров из* $cs_i^{m,1}$:

$CF_2^{2,1}$: (2.6) *при* $\hat t_1=0,\ \hat q_1=0$ *с* $\hat t_1,\hat q_1$ *из* (2.8), *в* (2.11) $\tilde p_2=0$ *заменами* $J_0^1,\ J_1^1,\ L_2^{2,1}$ *сводится к* $CF_2^{2,1}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde p_1$;

$CF_5^{3,1}$: (2.6) *при* $\hat t_1=0,\ \hat q_1=0$ *с* $\hat t_1,\hat q_1$ *из* (2.8), *в* (2.11) $\tilde p_2\neq 0,\ \varkappa_1\geq 0$ *заменами* $J_0^1,\ J_1^1,\ L_5^{3,1}$ *сводится к* $CF_5^{3,1}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde p_1$, $u=\varkappa_2\tilde p_1^{-1}$;

$CF_8^{3,1}$: (2.6) *при* $\hat t_1=0,\ \hat q_1=0$ *с* $\hat t_1,\hat q_1$ *из* (2.8), *в* (2.11) $\tilde p_2\neq 0,\ \varkappa_1<0$ *заменами* $J_0^1,\ J_1^1,\ L_8^{3,1}$ *сводится к* $CF_8^{3,1}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde p_1$, $u=\tilde p_2\tilde p_1^{-2}$;

$CF_3^{3,1}$: (2.6) *при* $\hat t_1=0,\ \hat q_1\neq 0$ *с* $\hat t_1,\hat q_1$ *из* (2.8), *в* (2.12): 1) $\tilde q_1\neq 2,\ \varkappa_3=0$ *заменами* $J_0^1,\ J_2^1,\ L1_3^{3,1}$ *сводится к* $CF_3^{3,1}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}((\tilde q_1-2)\tilde q_1\tilde q_2)$, $u=\tilde q_1$;
2) $\tilde p_2>0,\ \tilde q_1=2,\ \tilde q_2=0$ *заменами* $J_0^1,\ J_2^1,\ L2_3^{3,1}$ *сводится к* $CF_3^{3,1}$ *с* $\sigma=1$, $u=2$;

$CF_{14,\kappa}^{3,1}$: (2.6) *при* $\hat t_1=0,\ \hat q_1\neq 0$ *с* $\hat t_1,\hat q_1$ *из* (2.8), *в* (2.12) $\tilde p_2<0,$ *если* $\tilde q_1=2,\ \tilde q_2=0$ *заменами* $J_0^1,\ J_2^1,\ L_{14,\kappa}^{3,1}$ *сводится к* $CF_{14,\kappa}^{3,1}$ *с* $\kappa=\operatorname{sign}(\tilde p_2\tilde q_1)$, $u=\tilde q_1^{-1}$;

$CF_7^{4,1}$: (2.6) *при* $\hat t_1=0,\ \hat q_1\neq 0$ *с* $\hat t_1,\hat q_1$ *из* (2.8), *в* (2.12): 1) $\tilde q_1=2,\ \varkappa_4\geq 0,\ \tilde q_2\neq 0$ *заменами* $J_0^1,\ J_2^1,\ L1_7^{4,1}$ *сводится к* $CF_7^{4,1}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde q_2$, $u=\varkappa_5\tilde q_2^{-1}$, $v=2$;
2) $\tilde q_1\neq 2,\ \tilde q_2\neq 0,\ \varkappa_6\geq 0$ *заменами* $J_0^1,\ J_2^1,\ L2_7^{4,1}$ *сводится к* $CF_7^{4,1}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}(\varkappa_7\varkappa_8)$, $u=\varkappa_8^{-1}\tilde q_1$, $v=\tilde q_1$;

$CF_{12}^{4,1}$: (2.6) *при* $\hat t_1=0,\ \hat q_1\neq 0$ *с* $\hat t_1,\hat q_1$ *из* (2.8), *в* (2.12) $\tilde q_1\neq 2, \tilde q_2\neq 0, 4\varkappa_3(1-\tilde q_1)>\tilde q_1^2\tilde q_2^2$, *заменами* $J_0^1,\ J_2^1,\ L_{12}^{4,1}$ *сводится к* $CF_{12}^{4,1}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}(\tilde q_1\tilde q_2(\tilde q_1-2))$, $u=\tilde q_1^{-1}$, $v=\varkappa_3\tilde q_1^{-1}\tilde q_2^{-2}$;

$CF_{24}^{4,1}$: (2.6) *при* $\hat t_1=0,\ \hat q_1\neq 0$ *с* $\hat t_1,\hat q_1$ *из* (2.8), *в* (2.12) $\tilde q_1=2,\ \varkappa_4<0,\ \tilde q_2\neq 0$ *заменами* $J_0^1,\ J_2^1,\ L_{24}^{4,1}$ *сводится к* $CF_{24}^{4,1}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde q_2$, $u=1/2$, $v=2\tilde p_2\tilde q_2^{-2}$;

$CF_9^{2,1}$: (2.6) *при* $\hat t_1\neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13) $\varkappa_{10},\varkappa_{13},\varkappa_{15}=0$ *заменами* $J_0^1,\ J_3^1,\ L_9^{2,1}$ *сводится к* $CF_9^{2,1}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1$;

$CF_{22}^{3,1}$: (2.6) *при* $\hat t_1\neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13) $\varkappa_{10},\varkappa_{13}=0,\ \varkappa_{15}\neq 0$ *заменами* $J_0^1,\ J_3^1,\ L_{22}^{3,1}$ *сводится к* $CF_{22}^{3,1}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1$, $u=\varkappa_{15}(\varkappa_{16}\tilde t_2)^{-2/3}$;

$CF_{17}^{3,1}$: (2.6) *при* $\hat t_1\neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13) $\varkappa_{10},\varkappa_{15}=0,\ \varkappa_{13}\neq 0$ *заменами* $J_0^1,\ J_3^1,\ L_{17}^{3,1}$ *сводится к* $CF_{17}^{3,1}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1$, $u=\varkappa_{13}(\tilde p_1\tilde t_1\tilde t_2)^{-2/3}$;

$CF_{11,\kappa}^{3,1}$: (2.6) *при* $\hat t_1\neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13): 1) $\tilde q_1=0,\ \tilde t_2=0$ *заменами* $J_0^1,\ J_3^1,\ L1_{11,\kappa}^{3,1}$ *сводится к* $CF_{11,\kappa}^{3,1}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde q_2$, $\kappa=\operatorname{sign}(\tilde t_1\tilde q_2)$, $u=\tilde p_1\tilde q_2^{-1}$;
2) $\varkappa_{10}=0,\ \tilde t_2\neq 0,\ \varkappa_{14}=0$ *заменами* $J_0^1,\ J_3^1,\ L2_{11,\kappa}^{3,1}$ *сводится к* $CF_{11,\kappa}^{3,1}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde p_1$, $\kappa=\operatorname{sign}(\tilde p_1\tilde t_1)$, $u=\varkappa_{13}(\tilde p_1\tilde t_1)^{-1}$;

$CF_{27}^{4,1}$: (2.6) *при* $\hat t_1\neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13) $\varkappa_{10}=0,\ \tilde t_2\neq 0,\ \varkappa_{13},\varkappa_{14},\varkappa_{15}\neq 0$, 2.3_{15} *заменами* $J_0^1,\ J_3^1,\ L_{27}^{4,1}$ *сводится к* $CF_{27}^{4,1}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1$, $u=\varkappa_{15}(\varkappa_{14}\tilde t_2)^{-2/3}$, $v=\varkappa_{13}(\varkappa_{14}\tilde t_2)^{-2/3}$;

$CF_{21}^{3,1}$: (2.6) *при* $\hat t_1\neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13) $\varkappa_{10}\neq 0,\ \tilde q_1\neq 0,\ \varkappa_{12}=0,\ \varkappa_9=0$ *заменами* $J_0^1,\ J_3^1,\ L_{21}^{3,1}$ *сводится к* $CF_{21}^{3,1}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1$, $u=\varkappa_{10}(\tilde q_1+\tilde t_2)^{-1/3}\tilde t_2^{-2/3}$;

$CF_{19}^{4,1}$: (2.6) *при* $\hat t_1\neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13) $\varkappa_{10}\neq 0,\ \tilde q_1\neq 0,\ \varkappa_{12}=0,\ \varkappa_9\neq 0,\ \varkappa_{17}\neq 0,\ \varkappa_{19}\neq 0$, 2.3_{13} *заменами* $J_0^1,\ J_3^1,\ L_{19}^{4,1}$ *сводится к* $CF_{19}^{4,1}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1$, $u=\varkappa_9(\tilde p_1\tilde t_1\tilde t_2)^{-2/3}$, $v=-(\tilde q_1+2\tilde t_2)(\tilde p_1\tilde t_1\tilde t_2)^{-1/3}$;

$CF_{33}^{4,1}$: (2.6) *при* $\hat t_1\neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13) $\varkappa_{10}\neq 0,\ \varkappa_{12}\neq 0,\ \varkappa_9=0$, 2.3_{20} *заменами* $J_0^1,\ J_3^1,\ L_{33}^{4,1}$ *сводится к* $CF_{33}^{4,1}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1$, $u=\varkappa_{12}\varkappa_{10}^{-2}$, $v=\varkappa_{16}\tilde t_2\varkappa_{10}^{-3}$;

$CF_{11}^{4,1}$: (2.6) *при* $\hat t_1\neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13): 1) $\tilde t_2=0,\ \tilde q_1\neq 0$, 2.3_9 *заменами*

$J^1_0,\ J^1_3,\ L1^{4,1}_{11}$ *сводится к* $CF^{4,1}_{11}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde q_2$, $u = \tilde p_1 \tilde q_2^{-1}$, $v = \tilde q_1^{-2}\tilde q_2 \tilde t_1$;
2) $\varkappa_{10} \neq 0,\ \tilde t_2 \neq 0,\ \varkappa_{11} = 0$, 2.3_9 *заменами* $J^1_0,\ J^1_3,\ L2^{4,1}_{11}$ *сводится к* $CF^{4,1}_{11}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}(\varkappa_{12}\tilde t_1)$, $u = \varkappa_{16}\varkappa_{12}^{-1}$, $v = \varkappa_{12}\varkappa_{10}^{-2}$;

$CF^{3,1}_{19}$: (2.6) *при* $\hat t_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13) $\varkappa_{10} \neq 0,\ \varkappa_{12}, \varkappa_{17} = 0$ *заменами* $J^1_0,\ J^1_3,\ L^{3,1}_{19}$ *сводится к* $CF^{3,1}_{19}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\ \tilde t_1$, $u = -\varkappa_{10}(2\tilde q_1^2 \tilde t_2)^{-1/3}$;

$CF^{3,1}_{6}$: (2.6) *при* $\hat t_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13): 1) $\varkappa_{12}, \varkappa_{19} = 0$, *заменами* $J^1_0,\ J^1_3,\ L1^{3,1}_{6}$ *сводится к* $CF^{3,1}_{6}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde t_1$, $u = 2\tilde q_1 \tilde t_2 \varkappa_{10}^{-2}$;
2) $\tilde q_1 = 0,\ \tilde q_2 = 0$, *заменами* $J^1_0,\ J^1_3,\ L2^{3,1}_{6}$ *сводится к* $CF^{3,1}_{6}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde t_1$, $u = \tilde p_1 \tilde t_1 \tilde t_2^{-2}$;

$CF^{4,1}_{30}$: (2.6) *при* $\hat t_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13) $\varkappa_{10} \neq 0,\ \varkappa_{12} \neq 0,\ \varkappa_{17} = 0$, 2.3_{18} *заменами* $J^1_0,\ J^1_3,\ L^{4,1}_{30}$ *сводится к* $CF^{4,1}_{30}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde t_1$, $u = \varkappa_{10}(2\varkappa_{20}\tilde q_1)^{-1/3}$, $v = 4\varkappa_{12}(2\varkappa_{20}\tilde q_1)^{-2/3}$;

$CF^{4,1}_{14}$: (2.6) *при* $\hat t_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13): 1) $\varkappa_{10} \neq 0,\ \tilde q_1 \neq 0,\ \varkappa_{12} \neq 0,\ \varkappa_{18} = 0$, 2.3_{12} *заменами* $J^1_0,\ J^1_3,\ L1^{4,1}_{14}$ *сводится к* $CF^{4,1}_{14}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde t_1$, $u = 4\varkappa_{12}\varkappa_{10}^{-2}$, $v = -2\varkappa_{20}\varkappa_{10}^{-2}$;
2) $\tilde q_1 = 0,\ \tilde q_2 \neq 0,\ \tilde t_2 \neq 0$, 2.3_{12} *заменами* $J^1_0,\ J^1_3,\ L2^{4,1}_{14}$ *сводится к* $CF^{4,1}_{14}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde t_1$, $u = \tilde q_2 \tilde t_1 \tilde t_2^{-2}$, $v = \tilde p_1 \tilde t_1 \tilde t_2^{-2}$;

$CF^{4,1}_{29}$: (2.6) *при* $\hat t_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13) $\varkappa_{17} > 0,\ \varkappa^{\pm}_{24} = 0,\ \varkappa^{\mp}_{23} \neq 0$, 2.3_{17} *заменами* $J^1_0,\ J^1_3,\ L^{4,1}_{29}$ *сводится к* $CF^{4,1}_{29}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde t_1$, $u = \pm\varkappa^{\mp}_{23}\varkappa_{17}^{-1/2}/2$, $v = \pm\varkappa^{\pm}_{21}\varkappa^{\mp}_{22}\varkappa_{17}^{-3/2}/4$;

$CF^{4,1}_{5}$: (2.6) *при* $\hat t_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13): 1) $\tilde q_2 \neq 0,\ \varkappa_{25} \geq 0,\ \varkappa^{\pm}_{28} = 0$, 2.3_7 *заменами* $J^1_0,\ J^1_3,\ L1^{4,1}_{5}$ *сводится к* $CF^{4,1}_{5}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde t_1$, $u = 4\varkappa^{\pm}_{30}(\varkappa^{\mp}_{26})^{-2}$, $v = 2\varkappa^{\pm}_{26}(\varkappa^{\mp}_{26})^{-1}$;
2) $\tilde q_1 \neq 0, \tilde q_2 = 0$, 2.3_7 *заменами* $J^1_0,\ J^1_3,\ L2^{4,1}_{5}$ *сводится к* $CF^{4,1}_{5}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde t_1$, $u = \tilde p_1 \tilde t_1 \tilde t_2^{-2}$, $v = \tilde q_1 \tilde t_2^{-1}$;

$CF^{4,1}_{1}$: (2.6) *при* $\hat t_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13): 1) *при* $\tilde q_1 = 0,\ \tilde q_2 = 2\tilde p_1,\ \tilde t_2 \neq 0,\ \varkappa_{31} > 0$, 2.3_5 *заменами* $J^1_0,\ J^1_3,\ L1^{4,1}_{1}$ *сводится к* $CF^{4,1}_{1}$ $\sigma = \pm\operatorname{sign}(\varkappa^{\pm}_{32}\tilde t_1)$, $u = -\varkappa^{\mp}_{32}(\varkappa^{\pm}_{32})^{-1}$;
2) $\tilde q_2 = 0,\ \tilde t_2 \neq 0,\ \varkappa_{31} \geq 0,\ \tilde q_1 = \varkappa^{\mp}_{32}$, 2.3_5 *заменами* $J^1_0,\ J^1_3,\ L2^{4,1}_{1}$ *сводится к* $CF^{4,1}_{1}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde p_1$, $u = \varkappa^{\pm}_{32}\tilde t_2(2\tilde p_1 \tilde t_1)^{-1}$;

$CF^{4,1}_{3}$: (2.6) *при* $\hat t_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13): 1) $\tilde p_1 = \tilde q_1(\tilde q_1 - \tilde t_2)\tilde t_1^{-1}$, $\tilde q_2 = \tilde q_1(3\tilde q_1 - 2\tilde t_2)\tilde t_1^{-1}$, $\tilde t_2 \neq 3\tilde q_1,\ \tilde q_2^2 + \tilde t_2^2 \neq 0$, 2.3_6 *заменами* $J^1_0,\ J^1_3,\ L1^{4,1}_{3}$ *сводится к* $CF^{4,1}_{3}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}(\tilde t_1(3\tilde q_1 - \tilde t_2)(\tilde q_1 - \tilde t_2))$, $u = \tilde q_1(\tilde q_1 - \tilde t_2)^{-1}$;
2) $\tilde p_1 = \tilde q_1(2\tilde q_1 - 3\tilde t_2)(9\tilde t_1)^{-1}$, $\tilde q_2 = 0$, $\tilde t_2 \neq 0$, 2.3_6 *заменами* $J^1_0,\ J^1_3,\ L2^{4,1}_{3}$ *сводится к* $CF^{4,1}_{3}$ *с* $\sigma = -\operatorname{sign}(\tilde t_1 \tilde t_2(2\tilde q_1 - 3\tilde t_2))$, $u = -\tilde q_1(3\tilde t_2)^{-1}$;
3) $\tilde p_1 = (2\tilde q_1 - 3\tilde t_2)(2\tilde q_1 + \tilde t_2)(16\tilde t_1)^{-1}$, $\tilde q_2 = \tilde t_2(2\tilde q_1 - 3\tilde t_2)(8\tilde t_1)^{-1}$, $\tilde t_2 \neq 0$, 2.3_6 *заменами* $J^1_0,\ J^1_3,\ L3^{4,1}_{3}$ *сводится к* $CF^{4,1}_{3}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}((2\tilde q_1 - 3\tilde t_2)(2\tilde q_1 + \tilde t_2)\tilde t_1)$, $u = -2\tilde t_2(2\tilde q_1 + \tilde t_2)^{-1}$;

$CF^{4,1}_{13}$: (2.6) *при* $\hat t_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13): 1) $\tilde p_1 = (4\tilde q_1^2 - \tilde t_2^2)(12\tilde t_1)^{-1}$, $\tilde t_2 \neq 0$, $\tilde q_2 = (2\tilde q_1 - \tilde t_2)\tilde t_2(4\tilde t_1)^{-1}$, 2.3_{11} *заменами* $J^1_0,\ J^1_3,\ L1^{4,1}_{13}$ *сводится к* $CF^{4,1}_{13}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}((2\tilde q_1 - \tilde t_2)\tilde t_2 \tilde t_1)$, $u = (2\tilde q_1 + \tilde t_2)(3\tilde t_2)^{-1}$;
2) $\tilde t_2 \neq 0,\ \tilde q_2 \tilde t_1 > 0,\ \tilde p_1 = (\tilde q_2 \tilde t_1)^{1/2}\varkappa^{\mp}_{34}\varkappa^{\pm}_{35}(\varkappa^{\pm}_{33})^{-2}\tilde t_1^{-1}$, *если* $\varkappa^{\pm}_{33} \neq 0$, $\tilde q_1 = \pm(2\tilde q_2 \tilde t_1 + \tilde t_2^2)(\varkappa^{\pm}_{33})^{-1}$, $\varkappa^{\pm}_{34} \neq 0$, 2.3_{11} *заменами* $J^1_0,\ J^1_3,\ L2^{4,1}_{13}$ *сводится к* $CF^{4,1}_{13}$ *с* $\sigma = -\operatorname{sign}(\varkappa^{\pm}_{34}\tilde t_1)$, $u = -\varkappa^{\mp}_{34}\varkappa^{\pm}_{33}(3\varkappa^{\pm}_{35})^{-1}$;

$CF^{4,1}_{28}$: (2.6) *при* $\hat t_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13) $\tilde q_1 \neq 0, -\tilde t_2, -2\tilde t_2,\ \tilde q_2 \neq 0,\ \tilde t_2 \neq 0,\ \tilde p_1 = \theta_* \tilde t_1^{-1}$, $\varkappa_{38} = 0$, $\varkappa_{36}, \varkappa_{37}, \varkappa_{39} \neq 0$, *где* $\theta_* \in \mathbb{R}^1$ – *любой нуль* $S_1(\theta)$, 2.3_{16} *заменами* $J^1_0,\ J^1_3,\ L^{4,1}_{28}$ *сводится к* $CF^{4,1}_{28}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}(\varkappa_{36}\varkappa_{39}\tilde t_1)$, $u = -\varkappa_{37}\varkappa_{39}^{-1}$;

$CF^{4,1}_{32}$: (2.6) *при* $\hat t_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13) $\tilde q_1 \neq 0, -\tilde t_2, -2\tilde t_2,\ \tilde q_2 \neq 0,\ \tilde t_2 \neq 0,\ \varkappa_{40} \geq 0$, $\varkappa^{\pm}_{41} \neq 0,\ \tilde p_1 = \varkappa^{\pm}_{41}\tilde t_1^{-1}$, $\tilde q_2 = ((\tilde q_1 + \tilde t_2)^2 - 3\varkappa^{\pm}_{41})\tilde t_1^{-1}$, $\varkappa^{\pm}_{42} \neq 0,\ \varkappa^{\pm}_{43} \neq 0$, 2.3_{19} *заменами* $J^1_0,\ J^1_3,\ L^{4,1}_{32}$ *сводится к* $CF^{4,1}_{32}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}(\varkappa^{\pm}_{42}\tilde t_1)$, $u = 3\varkappa^{\pm}_{43}\varkappa_{10}^{-2}$;

$CF^{4,1}_{36}$: (2.6) *при* $\hat t_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13) $\tilde q_1 \neq 0, -\tilde t_2, -3\tilde t_2/2, -2\tilde t_2,\ \tilde q_2 \neq 0,\ \tilde t_2 \neq 0$, $\varkappa_{44} \geq 0,\ \varkappa^{\pm}_{45} \neq 0,\ \tilde p_1 = \varkappa^{\pm}_{45}\tilde t_1^{-1}$, $\tilde q_2 = -(3\varkappa^{\pm}_{45} + 2\tilde q_1 \tilde t_2 + 3\tilde t_2^2)\tilde t_1^{-1}$, $\varkappa^{\pm}_{46} \neq 0,\ \varkappa^{\pm}_{47} \neq 0$, 2.3_{21} *заменами* $J^1_0,\ J^1_3,\ L^{4,1}_{36}$ *сводится к* $CF^{4,1}_{36}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}(\varkappa^{\pm}_{46}\tilde t_1)$, $u = \varkappa^{\pm}_{47}\varkappa_{10}^{-2}$.

$CF_3^{5,1}$: (2.6) *при* $\hat{t}_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13)*:* 1) $\tilde{q}_2 \neq 0, 3\tilde{p}_1$, $\tilde{t}_1 = \tilde{q}_1(2\tilde{p}_1\tilde{q}_1 + \tilde{t}_2\tilde{q}_2 - 3\tilde{t}_2\tilde{p}_1)(\tilde{q}_2 - 3\tilde{p}_1)^{-2}$, $\tilde{t}_2 \neq 0$, $\varkappa_{48} \neq 0, -\tilde{q}_1\tilde{q}_2$, 2.4_1 *заменами* J_0^1, J_3^1, $L1_3^{5,1}$ *сводится к* $CF_3^{5,1}$ *с* $\sigma = -\operatorname{sign}\tilde{p}_1$, $u = -\varkappa_{48}(\tilde{p}_1\tilde{q}_1)^{-1}$, $v = -(\tilde{q}_1\tilde{q}_2 + \varkappa_{48})(\tilde{p}_1\tilde{q}_1)^{-1}$;
2) $\tilde{q}_2 \neq 0$, $\tilde{t}_1 = -\tilde{t}_2(\tilde{p}_1\tilde{t}_2 - 2\tilde{q}_1\tilde{q}_2 + \tilde{q}_2\tilde{t}_2)(2\tilde{q}_2)^{-2}$, $\tilde{q}_1 \neq 0$, $\tilde{t}_2 \neq 0$, $\varkappa_{49} \neq 0, \tilde{p}_1\tilde{t}_2$, 2.4_1 *заменами* J_0^1, J_3^1, $L2_3^{5,1}$ *сводится к* $CF_3^{5,1}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{q}_2$, $u = \tilde{p}_1\tilde{q}_2^{-1}$, $v = \varkappa_{49}(\tilde{q}_2\tilde{t}_2)^{-1}$;
3) $\tilde{q}_1 \neq 0, \tilde{t}_2$, $\tilde{q}_2 = (\tilde{t}_2\tilde{q}_1^3 - (\tilde{p}_1\tilde{t}_1 + 2\tilde{t}_2^2)\tilde{q}_1^2 - \tilde{t}_2(2\tilde{p}_1\tilde{t}_1 - \tilde{t}_2^2)\tilde{q}_1 + \tilde{p}_1\tilde{t}_1(4\tilde{p}_1\tilde{t}_1 + 3\tilde{t}_2^2))\tilde{t}_1^{-1}(\tilde{q}_1 - \tilde{t}_2)^{-2} \neq 0$, $\tilde{t}_2 \neq 0$, $\varkappa_{50} \neq 0$, $\varkappa_{51} \neq 0$, $\varkappa_{52} \neq 0$, 2.4_1 *заменами* J_0^1, J_3^1, $L3_3^{5,1}$ *сводится к* $CF_3^{5,1}$ *с* $\sigma = -\operatorname{sign}(\varkappa_{50}\tilde{p}_1)$, $u = -\varkappa_{51}(\tilde{p}_1\tilde{t}_1)^{-1}$, $v = -(\tilde{q}_1 - \tilde{t}_2)^2(\tilde{p}_1\tilde{t}_1)^{-1}$;

$CF_6^{5,1}$: (2.6) *при* $\hat{t}_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13)*:* 1) $\tilde{q}_1 \neq 0$, $\tilde{t}_2 \neq 0$, $\tilde{p}_1 = 4\varkappa_{53}\tilde{q}_2\tilde{t}_2^{-1}/3$, $\varkappa_{54} \neq 0$, $4\varkappa_{53} \neq 3\varkappa_{54}$, 2.4_2 *заменами* J_0^1, J_3^1, $L1_6^{5,1}$ *сводится к* $CF_6^{5,1}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{q}_2$, $u = 4\varkappa_{53}(3\tilde{t}_2^2)^{-1}$, $v = \varkappa_{54}\tilde{t}_2^{-2}$;
2) $\tilde{q}_1 \neq 0$, $\tilde{q}_2 \neq 0$, $\tilde{t}_2 \neq 0$, $\tilde{p}_1 = -\varkappa_{55}(9\tilde{t}_1\theta_*^2)^{-1}$, $\varkappa_{56} \neq 0$, $\varkappa_{57} \neq 0, \varkappa_{58}$, $\varkappa_{58} \neq 0$, $\varkappa_{59} \neq 0$, *где* $\theta_* \in \mathbb{R}^1$ *– любой нуль* $S_2(\theta)$, 2.4_2 *заменами* J_0^1, J_3^1, $L2_6^{5,1}$ *сводится к* $CF_6^{5,1}$ *с* $\sigma = -\operatorname{sign}(\varkappa_{59}\tilde{t}_1)$, $u = 3\varkappa_{57}\theta_*\varkappa_{59}^{-1}$, $v = 3\varkappa_{58}\theta_*\varkappa_{59}^{-1}$;

$CF_7^{5,1}$: (2.6) *при* $\hat{t}_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13)*:* 1) $\tilde{q}_2 \neq 0, 3\tilde{p}_1$, $\tilde{t}_1 = \varkappa_{60}\tilde{q}_1(\tilde{q}_2 - 3\tilde{p}_1)^{-2}$, $\tilde{t}_2 \neq 0$, $\varkappa_{61} \neq 0, -\tilde{q}_1\tilde{q}_2$, 2.4_3 *заменами* J_0^1, J_3^1, $L1_7^{5,1}$ *сводится к* $CF_7^{5,1}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{p}_1$, $u = \varkappa_{61}(\tilde{p}_1\tilde{q}_1)^{-1}$, $v = (\varkappa_{61} + \tilde{q}_1\tilde{q}_2)(\tilde{p}_1\tilde{q}_1)^{-1}$;
2) $\tilde{q}_1 \neq 0$, $\tilde{q}_2 \neq 0$, $\tilde{t}_2 \neq 0$, $\tilde{p}_1 = -\varkappa_{55}(9\tilde{t}_1\theta_*^2)^{-1}$, $\varkappa_{56} \neq 0$, $\varkappa_{59} \neq 0, 3\varkappa_{62}$, $\varkappa_{62} \neq 0$, $\varkappa_{63} \neq 0$, *где* $\theta_* \in \mathbb{R}^1$ *– любой нуль* $S_3(\theta)$, 2.4_3 *заменами* J_0^1, J_3^1, $L2_7^{5,1}$ *сводится к* $CF_7^{5,1}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\varkappa_{63}$, $u = \varkappa_{59}(3\varkappa_{63}\tilde{t}_1\theta_*^2)^{-1}$, $v = \varkappa_{62}(\varkappa_{63}\tilde{t}_1\theta_*^2)^{-1}$;

$CF_8^{5,1}$: (2.6) *при* $\hat{t}_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13) $\tilde{q}_1 \neq 0$, $\tilde{q}_2 \neq 0$, $\tilde{t}_2 \neq 0$, 2.4_4 *заменами* J_0^1, J_3^1, $L_8^{5,1}$ *сводится к* $CF_8^{5,1}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{q}_2$, $u = \tilde{p}_1\tilde{q}_2^{-1}$, $v = \tilde{q}_1\tilde{t}_2^{-1}$, $w = \tilde{q}_2\tilde{t}_1\tilde{t}_2^{-2}$.

Здесь запись 2.3_i *означает, что элементы системы* (2.13) *таковы, что параметры, полученные для ее* $CF_k^{m,1}$ $(m = 3, 4)$, *не удовлетворяют условиям из пункта i) утверждения* 2.3; *аналогично – запись* 2.4_j *для* $CF_k^{5,1}$; *константы* ϑ, $\varkappa$, *многочлены* $S(\theta)$ *и линейные замены* J, L *приведены в наборах* 2.1 *и* 2.2.

3. Однородные кубические системы без общего множителя.

3.1. Выделение канонических форм и их канонических множеств.

Выделим из списка 1.1 работы [2] структурные формы $SF_i^{m,0}$ с $m = 2, 3, 4$, относящиеся к случаю $l = 0$ (имеются 32 такие формы), нормируем их согласно нормировочным принципам и выясним, какие из полученных нормированных структурных форм являются каноническими формами.

Утверждение 3.1. *Только* $NSF_4^{4,0} = \sigma\begin{pmatrix} u & v & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *и* $NSF_9^{4,0} = \sigma\begin{pmatrix} u & 0 & v & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *при всех ненулевых значениях параметров* u, v *заменами* (1.5) *сводятся к каким-либо предшествующим согласно структурным принципам структурным формам.*

Доказательство. $NSF_4^{4,0}$ и $NSF_9^{4,0}$ заменой с $r_2 = 0$, $s_2 = \theta_* s_1$, в которой $\theta_*\colon\ \theta^3 - \theta^2 + v\theta + u$, сводится к $SF_2^{4,0}$. Проверка показывает, что остальные тридцать $NSF^{m,0}$ $(m = 2, 3, 4)$ являются $CF^{m,0}$. $\square$

Замечание 3.1. Здесь и в дальнейшем 1) запись "сводится к какой-либо $SF^{m,0}$" означает, что получена указанная форма или одна из предшествующих ей форм; 2) запись "θ_*: полином от θ" означает, что θ_* — любой вещественный нуль полинома.

Выпишем все канонические формы, их канонические множества и результанты R, причем вид $cs^{m,0}$ будет обоснован ниже в утверждении 3.2.

Список 3.1. Тридцать $CF_i^{m,0}$, $cs^{m,0}$, их R $(m=2,3,4;\ \sigma,\kappa=\pm1;\ R,u,v\neq0)$.

$$CF^{2,0}_{1,\kappa}=\sigma\begin{pmatrix}\kappa&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}_2,\quad CF^{2,0}_{10,\kappa}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&0&\kappa\\1&0&0&0\end{pmatrix}_8;\quad CF^{3,0}_{1}=\sigma\begin{pmatrix}u&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}_4;$$

$$CF^{3,0}_{2,\kappa}=\sigma\begin{pmatrix}\kappa&0&u&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}_5,\quad CF^{3,0}_{4}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}_6,\quad CF^{3,0}_{9}=\sigma\begin{pmatrix}1&0&0&u\\0&0&1&0\end{pmatrix}_7,$$

$$CF^{3,0}_{15}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}_8,\quad CF^{3,0}_{20}=\sigma\begin{pmatrix}1&0&0&u\\1&0&0&0\end{pmatrix}_9,\quad CF^{3,0}_{23,\kappa}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&0&\kappa\\1&0&0&0\end{pmatrix}_{10},$$

$$CF^{3,0}_{24}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&1&u\\1&0&0&0\end{pmatrix}_{11},\quad CF^{4,0}_{1}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}_6;\quad CF^{4,0}_{2}=\sigma\begin{pmatrix}u&1&v&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}_7,$$

$$CF^{4,0}_{3}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&v&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}_7,\quad CF^{4,0}_{6}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&0&v\\0&0&1&1\end{pmatrix}_8,\quad CF^{4,0}_{8,\kappa}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&v&0\\0&1&0&\kappa\end{pmatrix}_8,$$

$$CF^{4,0}_{10}=\sigma\begin{pmatrix}1&u&0&v\\0&0&1&0\end{pmatrix}_9,\quad CF^{4,0}_{13}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&0&1\\0&1&0&v\end{pmatrix}_9,\quad CF^{4,0}_{16}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&1&v\\0&0&1&0\end{pmatrix}_{10},$$

$$CF^{4,0}_{17}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}_{10},\quad CF^{4,0}_{21}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&0&v\\1&0&0&1\end{pmatrix}_{10},\quad CF^{4,0}_{22}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&0&v\\0&1&1&0\end{pmatrix}_{10},$$

$$CF^{4,0}_{25}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&v&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}_{11},CF^{4,0}_{26}=\sigma\begin{pmatrix}1&u&0&v\\1&0&0&0\end{pmatrix}_{11},\quad CF^{4,0}_{28}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&0&v\\1&0&0&1\end{pmatrix}_{11},$$

$$CF^{4,0}_{31}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&1&v\\1&0&0&0\end{pmatrix}_{12},\quad CF^{4,0}_{32}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&u&v\\1&0&0&1\end{pmatrix}_{12},\quad CF^{4,0}_{34,\kappa}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&0&v\\1&0&\kappa&0\end{pmatrix}_{12},$$

$$CF^{4,0}_{35}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&1&v\\1&0&0&0\end{pmatrix}_{13},\quad CF^{4,0}_{36}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&1&u\\1&0&v&0\end{pmatrix}_{13},\quad CF^{4,0}_{37}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&u&v\\1&1&0&0\end{pmatrix}_{14};$$

$tcs^{2,0}_{1,\kappa}$, $R=\kappa$; $tcs^{2,0}_{10,\kappa}$, $R=-\kappa$; $tcs^{3,0}_{1}$, $R=u^3$; $cs^{3,0}_{2,\kappa}=\{u\neq3/2$ при $\kappa=-1\}$, $R=1$;
$tcs^{3,0}_{4}$, $R=u^3$; $tcs^{3,0}_{9}$, $R=-u$; $tcs^{3,0}_{15}$, $R=u$; $tcs^{3,0}_{20,}$, $R=-u^3$; $tcs^{3,0}_{23,\kappa}$, $R=-\kappa$;
$tcs^{3,0}_{24}$, $R=-u^3$; $cs^{4,0}_{1}=\{v\neq u;\ (u,v)\neq(1/9,1),(1/3,1),(-1/9,-1)\}$, $R=u^2(u-v)$;
$cs^{4,0}_{2}=\{v\neq(3u)^{-1},\ 1+2(9u)^{-1},\ (12u+1\pm(1-8u)^{1/2})(8u)^{-1}\}$, $R=u^3$;
$cs^{4,0}_{3}=\{v\neq-u,\ 3/2\pm(-2u)^{-1/2}\}$, $R=u^2(u+v)$;
$cs^{4,0}_{6}=\{v\neq u,\ (9u+2)u^{-2}/27\}$, $R=u^2(u-v)$;
$cs^{4,0}_{8,\kappa}=\{v\neq u\kappa;\ (\kappa,u,v)\neq(1,-1/3,-3);\ v\neq\kappa(3u-2)(2u-1)^{-1}$ при $\kappa(1-2u)>0\}$, $R=u\kappa(u\kappa-v)^2$;
$cs^{4,0}_{10}=\{u\neq1;\ v\neq(2u-1)^2(2-u)/27,\ u^2(3-2u)/27;\ (u,v)\neq(2/3,4/729)\}$, $R=-v$;
$cs^{4,0}_{13}=\{v\neq-u^{-2/3};\ u\neq2/3$ при $3((\theta_*^2-4v)/2\theta_*)^2+12v\leq0,\ \theta_*:\ \theta^3+3v\theta-3\}$, $R=u(u^2v^3+1)$;
$cs^{4,0}_{16}=\{(u,v)\neq(1/3,-2/3);\ v\neq(1-9u\pm(1-3u)(1-12u)^{1/2})u^{-2}/27\}$, $R=-u^2v$;
$cs^{4,0}_{17}=\{(u,v)\neq(1/3,-6^{1/3});\ v\neq2^{1/3}(2-3u)u^{-1/3}/2\}$, $R=u$;
$cs^{4,0}_{21}=\{v\neq u;\ v\neq u^{-2}$ при $u>0\}$, $R=(u-v)^3$;
$cs^{4,0}_{22}=\{(u,v)\neq(1/3,1/6);\ v\neq u,(2u-1)(3u-2)^{-3},-16u^2(u-1)^{-1}(3u+1)^{-3}\}$, $R=uv(v-u)$;
$cs^{4,0}_{25}=\{(u,v)\neq(1/3,3^{2/3}),(5/9,3^{1/3}),((\theta_*^3+1)\theta_*^{-3}/2,(\theta_*^3-3)(2\theta_*)^{-1}),\ \theta_*\colon\ \theta^9-\theta^6+15\theta^3+9\}$, $R=u$;
$cs^{4,0}_{26}=\{(u,v)\neq(9/8,-27/32),(-18,216)\}$, $R=-v^3$;
$cs^{4,0}_{28}=\{v\neq-u;\ (u,v)\neq(3(2\pm\sqrt2)^{2/3}/2,\mp2^{-1/2}(2\pm\sqrt2)^{1/3}),(3\cdot2^{-1/3}(\pm\sqrt5-1)^{1/3},(28\pm12\sqrt5)^{1/3}/2),(3^{2/3},-3^{1/3})\}$, $R=-u^3-v^3$;
$cs^{4,0}_{31}=\{(u,v)\neq(-2^{1/3}/6,-2^{1/3}/3),(2^{1/3}/3,2^{1/3}/3)\}$, $R=-v^3$;
$cs^{4,0}_{32}=\{(u,v)\neq(3,-1)\}$, $R=u^3-v^3$;
$cs^{4,0}_{34,\kappa}=\{v\neq u\kappa;\ (u,v)\neq(-\kappa,1/3),((\sqrt5+3\kappa)/2,-(3+\sqrt5\kappa)/18),(2\kappa+\sqrt3,-(2+$

$\sqrt{3}\varkappa)/3)$; $(v,\varkappa) \neq (u/9,1)$; $(u,v,\varkappa) \neq (1,-1/9,-1)$; $v \neq -(2u-\varkappa)(u-2\varkappa)/9$ при $u > \varkappa/2$; $u \neq \varkappa$ при $v > 0$; $(u,\varkappa) \neq (-1,1)$ при $v \geq -1/9$; $(u,\varkappa) \neq (1,-1)$ при $v \in (-\infty,-1) \cup (0,+\infty)\}$, $R = -v(u\varkappa - v)^2$;
$cs^{4,0}_{35} = \{(u,v) \neq (2 \cdot (3/5)^{1/3}, 2 \cdot 75^{-1/3}/3), (3^{1/6}(\sqrt{3} \pm 1)/2, 3^{-1/6}(\pm 3 - \sqrt{3})/6);\ v \neq (3u)^{-1}\}$, $R = -v^3$;
$cs^{4,0}_{36} = \{v \neq -u^2;\ (u,v) \neq ((2/81)^{1/3}, -(3/2)^{1/3}), (-2^{-5/3}, 2^{-4/3}), ((8/3 \pm 2\sqrt{2})^{1/3}/3, (3 \pm 3\sqrt{2})^{1/3}), (2^{2/3}, -2^{1/3}), (-2\theta_*^4, (1-3\theta_*^3)\theta_*^{-1}),\ \theta_* :\ 54\theta^9 - 18\theta^6 + 1\}$, $R = -u(u^2+v)$;
$cs^{4,0}_{37} = \{v \neq u;\ (u,v) \neq (1/9,-1/81);\ v \neq u^2$ при $u > 0$; $v \neq -u^2, u(4u \mp (3u-1)(-u)^{1/2})(9u+1)^{-1}$ при $u < 0\}$, $R = v^2(u-v)$.

Утверждение 3.2. *Только при указанных значениях параметров приведенные ниже $NSF^{m,0}_i$ сводятся к предшествующим согласно СП структурным формам:*

1) $NSF^{3,0}_{2,\varkappa}$ *при* $u = 3/2$, $\varkappa = -1$ *заменой с* $r_2 = 0$, $s_2 = \sqrt{2}s_1$ *сводится к* $SF^{3,0}_1$;

2) $NSF^{4,0}_1$: *a) при* $u = 1/9$, $v = 1$ *заменой с* $r_1 = -3r_2$, $s_1 = 0$ *сводится к* $SF^{3,0}_1$; *b) при* $u = 1/3$, $v = 1$ *заменой с* $r_2 = 0$, $s_2 = -s_1$ *сводится к* $SF^{3,0}_9$; *c) при* $u = -1/9$, $v = -1$ *заменой с* $r_1 = 3r_2$, $s_1 = -3s_2$ *сводится к* $SF^{3,0}_{23}$;

3) $NSF^{4,0}_2$: *a) при* $v = (12u + 1 \pm (1-8u)^{1/2})(8u)^{-1}$ *заменой с* $r_2 = 0$, $s_2 = (-1 \pm (1-8u)^{1/2})s_1/2$ *сводится к* $SF^{3,0}_1$; *b) при* $v = 1 + 2(9u)^{-1}$ *заменой с* $r_2 = 0$, $s_2 = -3us_1$ *сводится к* $SF^{3,0}_2$; *c) при* $v = (3u)^{-1}$ *заменой с* $r_2 = 0$, $s_2 = -3us_1$ *сводится к* $SF^{3,0}_4$;

4) $NSF^{4,0}_3$ *при* $v = 3/2 \pm (-2u)^{-1/2}$ *заменой с* $r_1 = \pm(-2u)^{-1/2}r_2$, $s_2 = 0$ *сводится к* $SF^{4,0}_1$;

5) $NSF^{4,0}_6$ *при* $v = (9u+2)u^{-2}/27$ *заменой с* $r_2 = 0$, $s_2 = 3us_1$ *сводится к* $SF^{4,0}_1$;

6) $NSF^{4,0}_{8,\varkappa}$: *a) при* $\varkappa = 1$, $u = -1/3$, $v = -3$ *заменой с* $r_1 = -\sqrt{3}r_2$, $s_1 = \sqrt{3}s_2$ *сводится к* $SF^{2,0}_{10}$; *b) при* $v = \varkappa(3u-2)(2u-1)^{-1}$, $\varkappa(1-2u) > 0$ *заменой с* $r_2 = (\varkappa(1-2u))^{1/2}r_1$, $s_2 = -(\varkappa(1-2u))^{1/2}s_1$ *сводится к* $SF^{4,0}_1$;

7) $NSF^{4,0}_{10}$: *a) при* $v = (2u-1)^2(2-u)/27$ *заменой с* $r_1 = (1-2u)r_2/3$, $s_2 = 0$ *сводится к* $SF^{4,0}_1$; *b) при* $v = u^2(3-2u)/27$ *заменой с* $r_2 = 0$, $s_2 = -3u^{-1}s_1$ *сводится к* $SF^{4,0}_3$; *c) при* $u = 2/3$, $v = 4/729$ *заменой с* $r_2 = -9r_1$, $s_2 = 9s_1/2$ *сводится к* $SF^{4,0}_3$; *d) при* $u = 1$ *заменой с* $r_2 = 0$, $s_2 = -3s_1$ *сводится к* $SF^{4,0}_6$;

8) $NSF^{4,0}_{13}$ *при* $u = 2/3$, $3((\theta_*^2 - 4v)/2\theta_*)^2 + 12v \leq 0$, $\theta_* :\ \theta^3 + 3v\theta - 3$ *заменой с* $r_1 = -(\theta_*^2 - 4v)/4\theta_* + (-3((\theta_*^2 - 4v)/2\theta_*)^2 - 12v)^{1/2}/2$, $s_1 = \theta_* s_2$ *сводится к* $SF^{4,0}_1$;

9) $NSF^{4,0}_{16}$: *a) при* $u = 1/3$, $v = -2/3$ *заменой с* $r_1 = 2r_2$, $s_1 = -s_2$ *сводится к* $SF^{3,0}_{15}$; *b) при* $u \leq 1/12$, $v = (1 - 9u \pm (1-3u)(1-12u)^{1/2})u^{-2}/27$ *заменой с* $r_1 = (1 \pm (1-12u)^{1/2})(6u)^{-1}r_2$, $s_2 = 0$ *сводится к* $SF^{4,0}_1$;

10) $NSF^{4,0}_{17}$: *a) при* $u = 1/3$, $v = -6^{1/3}$ *заменой с* $r_1 = -(60 + 36\sqrt{3})^{1/3}r_2/2$, $s_1 = ((9\sqrt{3} - 15)/2)^{1/3}s_2$ *сводится к* $SF^{4,0}_8$; *b) при* $v = 2^{1/3}(2-3u)u^{-1/3}/2$ *заменой с* $r_2 = (u/2)^{1/3}r_1$, $s_2 = -(4u)^{1/3}s_1$ *сводится к* $SF^{4,0}_{16}$;

11) $NSF^{4,0}_{21}$ *при* $u > 0$, $v = u^{-2}$ *заменой с* $r_2 = -u^{1/2}r_1$, $s_2 = u^{1/2}s_2$ *сводится к* $SF^{4,0}_8$;

12) $NSF^{4,0}_{22}$: *a) при* $u = 1/3$, $v = 1/6$ *заменой с* $r_2 = 0$, $s_2 = -2s_1$ *сводится к* $SF^{4,0}_8$; *b) при* $v = (2u-1)(3u-2)^{-3}$ *заменой с* $r_2 = (3u-2)r_1$, $s_2 = u(3u-2)(1-2u)^{-1}s_1$ *сводится к* $SF^{4,0}_{16}$; *c) при* $v = -16u^2(u-1)^{-1}(3u+1)^{-3}$ *заменой с* $r_2 = (u-1)(3u+1)(4u)^{-1}r_1$, $s_2 = -(3u+1)s_1/2$ *сводится к* $SF^{4,0}_{17}$;

13) $NSF^{4,0}_{25}$: *a) при* $u = 1/3$, $v = 3^{2/3}$ *заменой с* $r_1 = -3^{1/3}r_2$, $s_2 = 0$ *сводится к* $SF^{4,0}_2$; *b) при* $u = 5/9$, $v = 3^{1/3}$ *заменой с* $r_1 = 3^{2/3}r_2$, $s_1 = -3^{2/3}s_2/2$ *сводится к* $SF^{4,0}_3$; *c) при* $u = (\theta_*^3 + 1)\theta_*^{-3}/2$, $v = (\theta_*^3 - 3)(2\theta_*)^{-1}$, θ_*: $\theta^9 - \theta^6 + 15\theta^3 + 9$ *заменой с* $r_1 = \theta_* r_2$, $s_2 = -(\theta_*^3 + 1)(2\theta_*)^{-1}s_1$ *сводится к* $SF^{4,0}_{10}$;

14) $NSF^{4,0}_{26}$: *a) при* $u=9/8$, $v=-27/32$ *заменой с* $r_1=3r_2/2$, $s_1=-3s_2/4$ *сводится к* $SF^{4,0}_{10}$; *b) при* $u=-18$, $v=216$ *заменой с* $r_1=3r_2$, $s_1=-6s_2$ *сводится к* $SF^{4,0}_{25}$;

15) $NSF^{4,0}_{28}$: *a) при* $u=3(2\pm\sqrt{2})^{2/3}/2$, $v=\mp 2^{-1/2}(2\pm\sqrt{2})^{1/3}$ *заменой с* $r_1=(2\pm\sqrt{2})^{1/3}r_2$, $s_2=-(2\pm\sqrt{2})^{2/3}s_1$ *сводится к* $SF^{4,0}_{3}$; *b) при* $u=3\cdot 2^{-1/3}(\pm\sqrt{5}-1)^{1/3}$, $v=(28\pm 12\sqrt{5})^{1/3}/2$ *заменой с* $r_1=-(28\pm 12\sqrt{5})^{1/3}r_2/2$, $s_1=2^{-1/3}(3\mp\sqrt{5})^{1/3}s_2$, *сводится к* $SF^{4,0}_{13}$; *c) при* $u=3^{2/3}$, $v=-3^{1/3}$ *заменой с* $r_1=-3^{1/3}r_2$, $s_1=0$ *сводится к* $SF^{4,0}_{25}$;

16) $NSF^{4,0}_{31}$: *a) при* $u=-2^{1/3}/6$, $v=-2^{1/3}/3$ *заменой с* $r_2=2^{2/3}r_1$, $s_1=-2^{1/3}s_2$ *сводится к* $SF^{4,0}_{10}$; *b) при* $u,v=2^{1/3}/3$ *заменой с* $r_1=2^{1/3}r_2$, $s_2=-2^{2/3}s_1$ *сводится к* $SF^{4,0}_{25}$;

17) $NSF^{4,0}_{32}$ *при* $u=3$, $v=-1$ *заменой с* $r_1=r_2$, $s_1=-s_2$ *сводится к* $SF^{4,0}_{6}$;

18) $NSF^{4,0}_{34,\kappa}$: *a) при* $u=-\kappa$, $v=1/3$ *заменой с* $r_1=(6\sqrt{3}-9\kappa)^{1/2}r_2/3$, $s_1=-(6\sqrt{3}-9\kappa)^{1/2}(2+\sqrt{3}\kappa)s_2/3$ *сводится к* $SF^{3,0}_{15}$; *b) при* $u>\kappa/2$, $v=-(2u-\kappa)(u-2\kappa)/9$ *заменой с* $r_1=(6u-3\kappa)^{1/2}r_2/3$, $s_1=-(6u-3\kappa)^{1/2}s_2/3$ *сводится к* $SF^{4,0}_{1}$; *c) при* $u=(\sqrt{5}+3\kappa)/2$, $v=-(3+\sqrt{5}\kappa)/18$ *заменой с* $r_1=(6\sqrt{5}-6\kappa)^{1/2}(3+\sqrt{5}\kappa)r_2/12$, $s_1=-(6\sqrt{5}-6\kappa)^{1/2}s_2/6$ *сводится к* $SF^{4,0}_{3}$; *d) при* $u=\kappa$, $v>0$ *заменой с* $r_1=v^{1/4}r_2$, $s_1=-v^{1/4}s_2$ *сводится к* $SF^{4,0}_{8}$; *e) при* $u=1$, $v=-1/9$, $\kappa=-1$ *заменой с* $s_1=\sqrt{3}(1+\sqrt{2})s_2/3$, $r_2=-\sqrt{3}(1+\sqrt{2})r_1$ *сводится к* $SF^{4,0}_{8}$; *f) при* $u=2\kappa+\sqrt{3}$, $v=-(2+\sqrt{3}\kappa)/3$ *заменой с* $r_1=(6\sqrt{3}+9\kappa)^{1/2}r_2/3$, $s_2=-(2\sqrt{3}+3\kappa)^{1/2}s_1$ *сводится к* $SF^{4,0}_{16}$; *g) при* $v=u/9$, $\kappa=1$ *заменой с* $r_2=\sqrt{3}r_1$, $s_2=-\sqrt{3}s_1$ *сводится к* $SF^{4,0}_{21}$; *h) при* $u=-1$, $v\geq -1/9$, $\kappa=1$ *заменой с* $r_1=(6v+2+2\ell)^{1/2}r_2/2$, $s_2=-(6v+2+2\ell)^{1/2}(3v-1+\ell)(8v)^{-1}s_1$ *сводится к* $SF^{4,0}_{32}$, $\ell=((v+1)(9v+1))^{1/2}$; *i) при* $u=1$, $v\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$, $\kappa=-1$ *заменой с* $r_1=(-6v-2+2\ell)^{1/2}r_2/2$, $s_2=-(-6v-2+2\ell)^{1/2}(-3v+1+\ell)(8v)^{-1}s_1$ *сводится к* $SF^{4,0}_{32}$, $\ell=((v+1)(9v+1))^{1/2}$;

19) $NSF^{4,0}_{35}$: *a) при* $u=2\cdot(3/5)^{1/3}$, $v=2\cdot 75^{-1/3}/3$ *заменой с* $r_1=-15^{-1/3}(5+2\sqrt{5})^{1/3}r_2$, $s_1=15^{-1/3}(2\sqrt{5}-5)^{1/3}s_2$ *сводится к* $SF^{4,0}_{1}$; *b) при* $u=3^{1/6}(\sqrt{3}\pm 1)/2$, $v=3^{-1/6}(\pm 3-\sqrt{3})/6$ *заменой с* $r_1=\mp 3^{-1/6}r_2$, $s_1=-3^{1/3}(3\mp\sqrt{3})s_2/6$ *сводится к* $SF^{4,0}_{10}$; *c) при* $v=(3u)^{-1}$ *заменой с* $s_1=0$, $r_2=-ur_1$ *сводится к* $SF^{4,0}_{21}$;

20) $NSF^{4,0}_{36}$: *a) при* $u=-2\theta_*^4$, $v=(1-3\theta_*^3)\theta_*^{-1}$ *заменой с* $r_1=\theta_* r_2$, $s_1=2\theta_*(3\theta_*^3-1)s_2$, $\theta_*: 54\theta^9-18\theta^6+1$ *сводится к* $SF^{4,0}_{3}$; *b) при* $u=(2/81)^{1/3}$, $v=-(3/2)^{1/3}$ *заменой с* $r_1=3^{-1/3}(4\pm 2\sqrt{5})^{1/3}r_2$, $s_1=3^{-1/3}(4\mp 2\sqrt{5})^{1/3}s_2$ *сводится к* $SF^{4,0}_{8}$; *c) при* $u=-2^{-5/3}$, $v=2^{-4/3}$ *заменой с* $s_1=-2^{1/3}s_2$, $r_2=2^{2/3}r_1$ *сводится к* $SF^{4,0}_{10}$; *d) при* $u=(8/3\pm 2\sqrt{2})^{1/3}/3$, $v=(3\pm 3\sqrt{2})^{1/3}$ *заменой с* $r_1=(36\mp 18\sqrt{2})^{1/3}r_2/3$, $s_1=(-1\mp 2\sqrt{2}/3)^{1/3}s_2$ *сводится к* $SF^{4,0}_{13}$; *e) при* $u=2^{2/3}$, $v=-2^{1/3}$ *заменой с* $r_1=2^{2/3}r_2$, $s_2=-2^{-1/3}s_1$ *сводится к* $SF^{4,0}_{25}$;

21) $NSF^{4,0}_{37}$: *a) при* $u=1/9$, $v=-1/81$ *заменой с* $r_1=(-1+\sqrt{5})r_2/6$, $s_1=(-1-\sqrt{5})s_2/6$ *сводится к* $SF^{4,0}_{1}$; *b) при* $v=u^2$, $u>0$ *заменой с* $r_1=-u^{1/2}r_2$, $s_1=u^{1/2}s_2$ *сводится к* $SF^{4,0}_{8}$; *c) при* $v=u(4u\mp(3u-1)(-u)^{1/2})(9u+1)^{-1}$, $u<0$ *заменой с* $r_1=\pm(-u)^{1/2}r_2$, $s_1=2u(\pm(-u)^{1/2}-3u)^{-1}s_2$ *сводится к* $SF^{4,0}_{28}$; *d) при* $v=-u^2$, $u<0$ *заменой с* $r_1=(-u)^{1/2}r_2$, $s_1=-(-u)^{1/2}s_2$ *сводится к* $SF^{4,0}_{34}$.

Теперь найдем линейные замены (1.5), которые, сохраняя исследуемую $CF^{m,0}_i$ ($m=2,3,4$), меняют в ней значения параметров с целью максимально ограничить их возможные значения.

Утверждение 3.3. *Только в следующих случаях в* $CF^{m,0}_i$ *заменой* (1.5) *удается изменить значение* σ *с* -1 *на* $+1$ *при сохранении значений остальных параметров:*
$CF^{2,0}_{1,\kappa}$ *с* $\kappa=-1$, *замена с* $r_1,s_2=0$, $s_1,r_2=1$;
$CF^{2,0}_{10,\kappa}$, *замена с* $-r_1,s_2=-1$, $s_1,r_2=0$;

$CF_{15}^{3,0}$ *с* $u = -1/3$, *замена с* $r_1, -s_2 = 3^{-1/2}$, $s_1 = 2^{1/3}3^{-1/6}$, $r_2 = 2^{2/3}3^{-5/6}$;
$CF_{23,\kappa}^{3,0}$, *замена с* $r_1, -s_2 = 1$, $s_1, r_2 = 0$;
$CF_3^{4,0}$ *с* $u = -2/9$, $v = 3$, *замена с* $-r_1, s_2 = 5^{-1/2}$, $s_1 = -6 \cdot 5^{-1/2}$, $r_2 = -2 \cdot 5^{-1/2}/3$;
$CF_{34,\kappa}^{4,0}$ *с* $u = -\kappa$, $v = -1$, *замена с* $r_1, s_2 = 0$, $s_1, r_2 = 1$;
$CF_{35}^{4,0}$ *с* $u = -(3/2)^{1/3}$, $v = 2^{1/3}3^{-4/3}$, *замена с* $r_1, s_2 = 1$, $s_1 = -(2/3)^{1/3}$, $r_2 = 12^{1/3}$.

Утверждение 3.4. *В следующих четырех* $CF_i^{m,0}$ *заменой* (1.5) *удается изменить значение параметров* u, v :

1) $CF_1^{4,0}$ *с* $\sigma = \sigma_*$, $u = u_*$, $v = v_*$ *заменой с* $r_1, s_2 = 0$, $s_1 = |u_*|^{1/2}u_*^{-1}$, $s_2 = |u_*|^{1/2}v_*^{-1}$ *сводится к себе с* $\sigma = \sigma_* \operatorname{sign} u_*$, $u = u_*v_*^{-2}$, $v = v_*^{-1}$; *в частности, при* $|v_*| > 1$ *можно получить* $|v| < 1$;

2) $CF_{8,\kappa}^{4,0}$ *с* $\kappa = \kappa_*$, $\sigma = \sigma_*$, $u = u_*$, $v = v_*$ *заменой с* $r_1, s_2 = 0$, $s_1 = |u_*|^{-1/2}$, $r_2 = |v_*|^{-1/2}$ *сводится к себе с* $\kappa = \operatorname{sign}(u_*v_*)$, $\sigma = \sigma_* \operatorname{sign} v_*$, $u = \kappa_*v_*^{-1}$, $v = \kappa_*u_*^{-1}$; *в частности, при* $|u_*|, |v_*| > 1$ *можно получить* $|u|, |v| < 1$;

3) $CF_{21}^{4,0}$ *с* $\sigma = \sigma_*$, $u = u_*$, $v = v_*$ *заменой с* $r_1, s_2 = 0$, $s_1 = |u_*|^{-1/2}$, $r_2 = u_*|u_*|^{-7/6}|v_*|^{-1/3}$ *сводится к себе с* $\sigma = \sigma_* \operatorname{sign} u_*$, $u = u_*^{-1/3}v_*^{-2/3}$, $v = v_*^{1/3}u_*^{-4/3}$; *в частности, при* $|u_*| > 1$, $1 < |v_*| < u_*^4$ *можно получить* $|u|, |v| < 1$;

4) $CF_{34,\kappa}^{4,0}$ *с* $u = u_*$, $v = v_*$, $\kappa = \kappa_*$ *заменой с* $r_1, s_2 = 0$, $s_1 = v|uv|^{-3/4}$, $r_2 = |uv|^{-1/4}$ *сводится к себе с* $\kappa = \operatorname{sign}(u_*v_*)$, $u = u_*^{-1}\kappa\kappa_*$, $v = v_*u_*^{-2}$ *и тем же* σ; *в частности, при* $|u_*| > 1$ *можно получить* $|u| < 1$.

3.2. Сведение исходной системы к каждой из $\mathbf{CF^{m,0}}$ при $\mathbf{m = 2, 3}$.

Набор 3.1. Константы и линейные неособые замены, используемые ниже:

$\psi_1 = 3\tilde{a}_1^2 + 4\tilde{b}_1$, $\psi_2 = 27\tilde{d}_2^2 - 4\tilde{b}_1^3$, $\psi_3 = 3\tilde{a}_1 + (36\tilde{c}_1)^{1/3}$, $\psi_4 = \tilde{d}_1 + 2^{2/3}\tilde{d}_2^{4/3}$, $\psi_5 = (-3\tilde{c}_1\tilde{a}_1^{-1})^{1/2}$;

$L_1 = \{r_1 = 0,\ s_1 = 3^{3/2}d_1,\ r_2 = 3^{1/2},\ s_2 = -3^{1/2}c_1\}$, $L_2 = \{r_1 = 3^{1/2},\ s_1 = -3^{1/2}b_2,\ r_2 = 0,\ s_2 = 3^{3/2}a_2\}$, $L_3 = \{r_1 = \zeta,\ s_1 = (-b_2\zeta^2 + (b_1 - 2c_2)\zeta + 2c_1 - 3d_2)\zeta/3,\ r_2 = 1,\ s_2 = ((2b_2 - 3a_1)\zeta^2 + (c_2 - 2b_1)\zeta - c_1)/3\}$, где ζ — любое вещественное отличное от нуля число, не являющееся нулем многочлена $Q = (a_1 - b_2)\zeta^2 + (b_1 - c_2)\zeta + c_1 - d_2$;

$L_{1;1}^{2,0} = \{r_1 = (3\tilde{a}_1 - (3\psi_1)^{1/2})r_2/6,\ s_1 = (3\tilde{a}_1 + (3\psi_1)^{1/2})s_2/6,\ r_2 = 3\sqrt{2}\psi_1^{-1/2}|3\tilde{a}_1 - (3\psi_1)^{1/2}|^{-1/2},\ s_2 = 3\sqrt{2}\psi_1^{-1/2}|3\tilde{a}_1 + (3\psi_1)^{1/2}|^{-1/2}\}$,

$L_{10;1}^{2,0} = \{r_1 = |\tilde{d}_1|^{-1/8},\ s_1, r_2 = 0,\ s_2 = r_1^3\}$,

$L_{10;2}^{2,0} = \{r_1 = (9\tilde{d}_2 + (3\psi_2)^{1/2})(6\tilde{b}_1)^{-1}r_2,\ s_1 = (9\tilde{d}_2 - (3\psi_2)^{1/2})(6\tilde{b}_1)^{-1}s_2,\ s_2 = \psi_2(9\tilde{d}_2 + (3\psi_2)^{1/2})\tilde{b}_1^{-3}r_2^3/18,\ r_2 = 2^{1/4}\psi_2^{-1/2}|9\tilde{d}_2 + (3\psi_2)^{1/2}|^{-1/4}|3\tilde{b}_1|^{7/8}\}$,

$L_{1;1}^{3,0} = \{r_1 = \eta_*r_2,\ s_1 = \theta_*s_2,\ r_2 = (\tilde{a}_1 - \eta_*)(\eta_* - \theta_*)^{-1}(\eta_* + \theta_* - \tilde{a}_1)^{-1}|\tilde{a}_1 - \eta_*|^{-1/2}/3,\ s_2 = (\eta_* - \theta_*)^{-1}|\tilde{a}_1 - \eta_*|^{-1/2}\}$,

$L_{2;1}^{3,0} = \{r_1 = \eta_*r_2,\ s_1 = \theta_*s_2,\ r_2 = \sqrt{2}(\eta_* - \theta_*)^{-1}|\tilde{a}_1 - 3\eta_* - \theta_*|^{-1/2},\ s_2 = (\eta_* - \theta_*)^{-1}|\tilde{a}_1 - \eta_*|^{-1/2}$,

$L_{4;1}^{3,0} = \{r_1, s_2 = 0,\ s_1 = |\tilde{a}_1|^{-1/2},\ r_2 = \tilde{a}_1^{-1}|\tilde{a}_1|^{-1/2}\}$, $L_{4;2}^{3,0} = \{r_1 = -3\tilde{d}_1r_2\tilde{c}_1^{-1},\ s_1 = 0,\ r_2 = -s_2,\ s_2 = \sqrt{3}|\tilde{c}_1|^{-1/2}\}$, $L_{4;3}^{3,0} = \{r_1 = \eta_*r_2,\ s_1 = \theta_*s_2,\ r_2 = (\eta_* + \theta_* - \tilde{a}_1)(\tilde{a}_1 - \eta_*)^{-1}s_2,\ s_2 = (\eta_* - \theta_*)^{-1}|\tilde{a}_1 - \eta_*|^{-1/2}\}$,

$L_{9;1}^{3,0} = \{r_1, s_2 = 0,\ s_1 = \tilde{d}_2|\tilde{d}_2|^{-1/2}\tilde{b}_1^{-1},\ r_2 = |\tilde{d}_2|^{-1/2}\}$, $L_{9;2}^{3,0} = \{r_1 = \eta_*r_2,\ s_1 = \theta_*s_2,\ r_2 = \sqrt{3}(\eta_* - \theta_*)|\tilde{a}_1 + 2\eta_*|^{-1/2},\ s_2 = -(\tilde{a}_1 + 2\eta_*)(\tilde{a}_1 - \eta_*)^{-1}r_2/3\}$, $L_{9;3}^{3,0} = \{r_1 = -\theta_*r_2/2,\ s_1 = \theta_*s_2,\ r_2 = 6^{1/3}\tilde{c}_1^{-1/3}|\psi_3|^{-1/2},\ s_2 = 2\psi_3(\psi_3 - 9\tilde{a}_1)^{-1}/3\}$,

$L_{15;1}^{3,0} = \{r_1, s_2 = 0,\ s_1 = \tilde{c}_1^{1/3}|\tilde{c}_1|^{-1/2},\ r_2 = |\tilde{c}_1|^{-1/2}\}$, $L_{15;2}^{3,0} = \{r_1 = 0,\ s_1 = -\tilde{c}_1\tilde{c}_2^{-1}s_2,$

$r_2 = |\tilde c_1|^{-1/2}$, $s_2 = -3^{1/3}\tilde c_2(3\tilde c_1^2 + \tilde c_2^3)^{-1/3}|\tilde c_1|^{-1/2}\}$, $L^{3,0}_{15;3} = \{r_1 = |\tilde c_1|^{1/2}\tilde c_2^{-1}$, $s_1 = 0$, $r_2 = \tilde c_2\tilde c_1^{-1}r_1$, $s_2 = -3^{1/3}|\tilde c_1|^{1/2}\tilde c_1^{-1}\}$, $L^{3,0}_{15;4} = \{r_1 = \eta_* r_2$, $s_1 = \theta_* s_2$, $r_2 = |\tilde a_1 - \eta_*|^{-1/2}(\eta_* - \theta_*)^{-1}$, $s_2 = (3\tilde a_1 - 3\eta_*)^{1/3}(\eta_* + 3\theta_* - \tilde a_1)^{-1/3}r_2\}$, $L^{3,0}_{15;5} = \{r_1 = \pm(-\tilde c_2/3)^{1/2}r_2$, $s_1 = \pm 3^{1/2}(\tilde b_1 + \tilde c_2)(-\tilde c_2)^{-1/2}s_2/6$, $r_2 = 2(-3\tilde c_2)^{1/4}(\tilde b_1 + 3\tilde c_2)^{-1}$, $s_2 = -2^{4/3}(-3\tilde c_2)^{7/12}(\tilde b_1 - \tilde c_2)^{-1/3}(\tilde b_1 + 3\tilde c_2)\}$, $L^{3,0}_{15;6} = \{r_1 = -(4\tilde d_2)^{1/3}r_2$, $s_1 = (\tilde d_2/2)^{1/3}s_2$, $r_2 = 2^{1/3}\tilde d_2^{-1/3}|\tilde a_1 + (4\tilde d_2)^{1/3}|^{-1/2}/3$, $s_2 = 6^{1/3}(\tilde a_1 + (4\tilde d_2)^{1/3})^{1/3}((4\tilde d_2)^{1/3} - 2\tilde a_1)^{-1/3}r_2\}$,

$L^{3,0}_{20;1} = \{r_1 = \eta_* r_2$, $s_1 = \theta_* s_2$, $r_2 = |\tilde a_1|^{-1/2}(\eta_* - \theta_*)^{-1}$, $s_2 = (\eta_* - \tilde a_1)\tilde a_1^{-1}r_2\}$, $L^{3,0}_{20;2} = \{r_1 = |\tilde a_1|^{-1/2}$, $s_1, r_2 = 0$, $s_2 = |\tilde a_1|^{-1/2}\tilde a_1^{-1}\}$, $L^{3,0}_{20;3} = \{r_1, s_2 = 0$, $s_1 = \tilde d_1|\tilde d_2|^{-1/2}\tilde d_2^{-1}$, $r_2 = |\tilde d_2|^{-1/2}\}$, $L^{3,0}_{20;4} = \{r_1 = (4\tilde d_2)^{1/3}r_2/2$, $r_2 = 2^{1/3}|\tilde a_1|^{-1/2}\tilde d_2^{-1/3}/3$, $s_1 = -(4\tilde d_2)^{1/3}s_2$, $s_2 = (1 - 2^{1/3}\tilde a_1\tilde d_2^{-1/3})\tilde a_1^{-1}|\tilde a_1|^{-1/2}/3\}$, $L^{3,0}_{20;5} = \{r_1 = -\theta_* r_2/2$, $s_1 = \theta_* s_2$, $r_2 = 36|(\tilde b_1\theta_*^2 - 4\tilde d_1)\theta_*|^{1/2}$, $s_2 = 972\tilde b_1(\tilde b_1\theta_*^2 - 4\tilde d_1)\theta_*^2 r_2\}$, $L^{3,0}_{20;6} = \{r_1 = 0$, $s_1 = -\tilde d_1^{1/3}\tilde a_1^{-1/3}$, $r_2 = \tilde d_1^{-1/3}|\tilde a_1|^{-1/6}$, $s_2 = -r_2\}$,

$L^{3,0}_{23;1} = \{r_1, s_2 = 0$, $s_1 = \tilde d_1|\tilde d_1|^{-9/8}$, $r_2 = |\tilde d_1|^{-3/8}\}$, $L^{3,0}_{23;2} = \{r_1 = |\tilde d_1|^{-1/8}$, $s_1, r_2 = 0$, $s_2 = |\tilde d_1|^{-3/8}\}$, $L^{3,0}_{23;3} = \{r_1 = 2^{5/8}|\tilde d_2|^{1/2}|\psi_4|^{-1/2}/3$, $s_1 = (\tilde d_2/2)^{1/3}s_2$, $r_2 = -r_1 s_2(2s_1)^{-1}$, $s_2 = -2^{5/24}|\tilde d_2|^{3/2}\psi_4\tilde d_2^{-4/3}|\psi_4|^{-3/2}/3\}$, $L^{3,0}_{23;4} = \{r_1 = 0$, $s_1 = \tilde d_1 r_2^3$, $r_2 = 2^{1/8}|2\tilde d_1^3 - \tilde d_2^4|^{1/8}$, $s_2 = \tilde d_2\tilde d_1^{-1}s_1\}$, $L^{3,0}_{23;5} = \{r_1 = \eta_* r_2$, $s_1 = \theta_* s_2$, $r_2 = 2^{1/8}(\eta_* - \theta_*)^{-1}|\tilde a_1 + 2\theta_*|^{-1/8}|\tilde a_1 - \eta_*|^{-3/8}$, $s_2 = (\eta_* - \tilde a_1)(\eta_* - \theta_*)^2 r_2^3\}$, $L^{3,0}_{23;6} = \{r_1 = -2(\tilde c_1/18)^{1/3}r_2$, $r_2 = \sqrt{6}|\tilde c_1|^{-1/4}|(9\tilde a_1 + 18^{2/3}\tilde c_1^{1/3})^3(18^{1/3}\tilde a_1\tilde c_1^{2/3} - 2\tilde c_1)|^{-1/8}$, $s_1 = -(\tilde c_1/18)^{1/3}s_2$, $s_2 = -\tilde c_1^{2/3}(9\cdot 18^{-2/3}\tilde a_1 + \tilde c_1)r_2^3/9\}$, $L^{3,0}_{23;7} = \{r_1 = \mp(-\tilde d_1)^{1/4}r_2$, $s_1 = \pm(-\tilde d_1)^{1/4}s_2$, $s_2 = 4(\pm\tilde d_1 + (-\tilde d_1)^{1/4}\tilde d_2)(-\tilde d_1)^{-1/4}r_2^3$, $r_2 = (-2\tilde d_1)^{1/8}|2\tilde d_1 \pm (-\tilde d_1)^{1/4}\tilde d_2|^{-1/8}|\tilde d_1 \pm (-\tilde d_1)^{1/4}\tilde d_2|^{-3/8}/2\}$, $L^{3,0}_{23;8} = \{r_1 = -(4\tilde d_2)^{1/3}r_2$, $s_1 = (\tilde d_2/2)^{1/3}s_2$, $r_2 = 2^{11/24}\tilde d_2^{-1/3}|\tilde a_1 + (4\tilde d_2)^{1/3}|^{-1/2}/3$, $s_2 = -9\cdot 2^{-2/3}\tilde d_2^{2/3}(\tilde a_1 + (4\tilde d_2)^{1/3})r_2^3\}$, $L^{3,0}_{23;9} = \{r_1 = \pm(-\tilde c_2/3)^{1/2}r_2$, $s_1 = \mp\tilde b_1(-3\tilde c_2)^{-1/2}s_2$, $r_2 = 3^{3/4}|\tilde c_2|^{3/8}|\tilde b_1 + \tilde c_2|^{-1/8}(\tilde b_1 - \tilde c_2)^{-1}$, $s_2 = \mp(\tilde b_1 - \tilde c_2)^2(-3\tilde c_2)^{-1/2}r_2^3/3\}$, $L^{3,0}_{23;10} = \{r_1 = \pm(-3\tilde d_1\tilde c_2)^{1/2}\tilde c_2^{-1}r_2$, $s_1 = 0$, $r_2 = 3^{1/4}|\tilde c_2|^{1/2}|\tilde d_1|^{-1/4}|2\tilde c_2^2 - 9\tilde d_1|^{-3/8}$, $s_2 = \mp\tilde d_1(2\tilde c_2^2 - 9\tilde d_1)(-3\tilde d_1\tilde c_2)^{-1/2}\tilde c_2^{-1}r_2^3\}$,

$L^{3,0}_{24;1} = \{r_1 = 0$, $s_1 = \tilde d_1\tilde d_2^{-1}s_2$, $r_2 = -3^{-1/6}|\tilde d_2|^{-1/2}$, $s_2 = |3\tilde d_2|^{-1/2}\}$, $L^{3,0}_{24;2} = \{r_1 = \tilde c_1^{1/3}|\tilde c_1|^{-1/2}$, $s_1, r_2 = 0$, $s_2 = |\tilde c_1|^{-1/2}\}$, $L^{3,0}_{24;3} = \{r_1 = \tilde a_1 r_2$, $s_1 = |3\tilde a_1|^{-1/2}$, $r_2 = 3^{-1/6}\tilde a_1^{1/3}|\tilde a_1|^{-1/2}(\tilde d_1 - 2\tilde a_1^4)^{-1/3}$, $s_2 = 0\}$, $L^{3,0}_{24;4} = \{r_2 = 2(4\tilde d_2)^{-1/3}r_1$, $r_1 = (2/3)^{7/6}\tilde d_2^{1/3}|\tilde d_2|^{1/6}(2^{1/3}\tilde d_1 + 3\tilde d_2^{4/3})^{1/3}|2^{1/3}\tilde d_1 + 3\tilde d_2^{4/3}|^{-1/2}(\tilde d_2^{4/3} - 2^{1/3}\tilde d_1)^{-1/3}$, $s_1 = -(4\tilde d_2)^{1/3}s_2$, $s_2 = (2/3)^{3/2}|\tilde d_2|^{1/6}|2^{1/3}\tilde d_1 + 3\tilde d_2^{4/3}|^{-1/2}\}$, $L^{3,0}_{24;5} = \{r_1 = \eta_* r_2$, $s_1 = \theta_* s_2$, $s_2 = |3\tilde a_1|^{-1/2}(\eta_* - \theta_*)^{-1}\}$, $r_2 = 3^{-1/6}\tilde a_1^{1/3}|\tilde a_1|^{-1/2}(\eta_* - \theta_*)^{-1}(\eta_* - \tilde a_1)^{-1/3}$, $L^{3,0}_{24;6} = \{r_1 = \mp(-\tilde c_1(3\tilde a_1)^{-1})^{1/2}r_2$, $s_1 = \pm(-\tilde c_1(3\tilde a_1)^{-1})^{1/2}s_2$, $s_2 = |\tilde c_1|^{-1/2}/2$, $r_2 = \mp 3^{2/3}\tilde a_1^{1/3}|\tilde c_1|^{-1/2}(\psi_5 \pm 3\tilde a_1)^{-1/3}/2\}$.

Естественно сначала упростить исходную систему (1.4) перед поиском замен, сводящих ее в выделенные канонические формы. Для этого множество систем (1.4) с $R \neq 0$ разобьем на три непересекающихся класса:

1] $d_1 \neq 0$, 2] $d_1 = 0$, $a_2 \neq 0$; 3] $d_1 = a_2 = 0$.

Лемма 3.4. *Любая система* (1.4) *из класса* k] *заменой* L_k *сводится к системе*

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde a_1 & \tilde b_1 & \tilde c_1 & \tilde d_1 \\ 1 & 0 & \tilde c_2 & \tilde d_2 \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

в которой

$$1]:\ \tilde b_1=-9c_1d_2+9c_2d_1,\ \tilde c_1=9b_1c_1d_1+27b_2d_1^2-3c_1^3+9c_1^2d_2-18c_1c_2d_1,$$
$$\tilde d_1=c_1(27a_1d_1^2-9b_1c_1d_1-27b_2d_1^2+2c_1^3-3c_1^2d_2+9c_1c_2d_1)+81a_2d_1^3,$$
$$\tilde a_1=c_1+3d_2,\ \tilde c_2=9b_1d_1-3c_1^2,\ \tilde d_2=27a_1d_1^2-9b_1c_1d_1+2c_1^3\ \ \textit{при}\ \ d_1\neq 0;$$
$$2]:\ \tilde b_1=-9a_1b_2+9b_1a_2, \tilde c_1=9a_1b_2^2-18b_1a_2b_2+27c_1a_2^2+9a_2b_2c_2-3b_2^3,$$
$$\tilde a_1=3a_1+b_2,\ \tilde d_1=b_2(27a_2^2d_2-3a_1b_2^2+9b_1a_2b_2-27c_1a_2^2-9a_2b_2c_2+2b_2^3),$$
$$\tilde c_2=9a_2c_2-3b_2^2,\ \tilde d_2=27a_2^2d_2-9a_2b_2c_2+2b_2^3\ \ \textit{при}\ \ d_1=0,\ a_2\neq 0;$$
$$3]:\ 3\tilde a_1=(3a_1+b_2)r_1^2+(2b_1+2c_2)r_1+c_1+3d_2,$$
$$\tilde b_1=-a_1b_2r_1^4-2a_1c_2r_1^3+(-3a_1d_2-b_1c_2+b_2c_1)r_1^2-2b_1d_2r_1-c_1d_2,$$
$$9\tilde c_1=(3a_1b_2^2-b_2^3)r_1^6+3b_2c_2(3a_1-b_2)r_1^5+((-3a_1+3b_2)b_1^2+3a_1b_1c_2+3b_2^2c_1+$$
$$+(-15a_1c_1+9a_1d_2-3c_2^2)b_2+9a_1^2c_1+6a_1c_2^2)r_1^4+(-2b_1^3+3b_1^2c_2+$$
$$+(3a_1c_1+9a_1d_2-6b_2d_2+3c_2^2)b_1-6a_1c_1c_2+9a_1c_2d_2+3c_2b_2d_2-2c_2^3)r_1^3+$$
$$+((-3c_1+6d_2)b_1^2+3b_1c_2d_2+(3c_1^2-15c_1d_2+9d_2^2)b_2+(9a_1d_2+3c_2^2)c_1-3c_2^2d_2)r_1^2-$$
$$-3b_1c_1(c_1-3d_2)r_1-c_1^2(c_1-3d_2),$$
$$81\tilde d_1=(-r_1^2b_2+r_1(b_1-2c_2)+2c_1-3d_2)((3a_1-2b_2)r_1^2+r_1(2b_1-c_2)+c_1)$$
$$(b_2^2r_1^4+b_2r_1^3(b_1+c_2)+((-7c_1+9d_2)b_2+9a_1(c_1-d_2)-2b_1^2+5b_1c_2-2c_2^2)r_1^2+$$
$$+c_1r_1(b_1+c_2)+c_1^2),$$
$$3\tilde c_2=-b_2^2r_1^4+(-b_1^2+b_1c_2+(c_1+3d_2)b_2+3a_1(c_1-3d_2)-c_2^2)r_1^2+$$
$$+(2b_1b_2-c_2(3a_1+b_2))r_1^3+((-c_1-3d_2)b_1+2c_1c_2)r_1-c_1^2,$$
$$27\tilde d_2=2b_2^3r_1^6+(-6b_1b_2^2+(3(3a_1+b_2))b_2c_2)r_1^5+(6b_1^2b_2-3c_2(2b_2+3a_1)b_1+$$
$$+(-3c_1+18d_2)b_2^2+(-9a_1c_1-27a_1d_2-3c_2^2)b_2+27a_1^2d_2+18a_1c_2^2)r_1^4+$$
$$+(-2b_1^3+3b_1^2c_2+((6c_1-36d_2)b_2+9a_1c_1+27a_1d_2+3c_2^2)b_1-$$
$$-36((-6c_1-9d_2)b_2+36a_1c_1-27a_1d_2+2c_2^2)c_2)r_1^3+((-3c_1+18d_2)b_1^2-$$
$$-3(2c_1+3d_2)c_2b_1-3c_1(c_1+3d_2)b_2+18a_1c_1^2+(-27a_1d_2+6c_2^2)c_1+27a_1d_2^2)r_1^2+$$
$$+3c_1((c_1+3d_2)b_1-2c_1c_2)r_1+2c_1^3\ \ \textit{при}\ \ d_1=a_2=0.$$

Теорема 3.1. *Для любой* $CF_i^{m,0}$ $(m=2,3)$ *из списка* 3.1 *указаны:* a) *условия на коэффициенты системы* (3.1), b) *замена* $L_i^{m,0}$, *преобразующая* (3.1) *при указанных условиях в* $CF_i^{m,0}$, c) *получаемые в результате значения параметров из* $cs_i^{m,0}$:

$CF_{1,\kappa}^{2,0}$: a) $\tilde c_1=0,\ \tilde d_1=\tilde b_1^2/9,\ \tilde c_2=\tilde b_1,\ \tilde d_2=-\tilde a_1\tilde b_1/3,\ \psi_1>0$, b) $L_1^{2;1}$, c) $\kappa=-\operatorname{sign}\tilde b_1$, $\sigma=\operatorname{sign}(3\tilde a_1+(3\psi_1)^{1/2})$;

$CF_{10,\kappa}^{2,0}$: 1) a) $\tilde a_1=0,\ \tilde b_1=0,\ \tilde c_1=0,\ \tilde c_2=0,\ \tilde d_2=0$, b) $L_{10;1}^{2,0}$, c) $\kappa=\operatorname{sign}\tilde d_1,\ \sigma=1$; 2) a) $\tilde a_1=0,\ \tilde c_1=-3\tilde d_2,\ \tilde d_1=(27\tilde d_2^2-\tilde b_1^3)(9\tilde b_1)^{-1},\ \tilde c_2=-\tilde b_1,\ \psi_2>0$, b) $L_{10;2}^{2,0}$, c) $\sigma=1$, $\kappa=\operatorname{sign}\tilde b_1$;

$CF_1^{3,0}$: a) $\psi_1\geq 0,\ 3\eta_*^2(\tilde a_1-\eta_*)^2-4\tilde c_1\eta_*\geq 0,\ \tilde d_1=\theta_*\eta_*(2\theta_*\eta_*+\eta_*\tilde a_1+2\theta_*^2-\eta_*^2-2\theta_*\tilde a_1),\ \tilde c_2=3(\tilde a_1-\eta_*)(\theta_*-\eta_*)-3\theta_*^2,\ \tilde d_2=2\theta_*^3+(\tilde a_1-\eta_*)(\eta_*^2+\eta_*\theta_*-2\theta_*^2)$, *где* θ_*: $3\eta_*\theta^2-3\eta_*(\tilde a_1-\eta_*)\theta+\tilde c_1=0,\ \eta_*=(3\tilde a_1\pm(3\psi_1)^{1/2})/6$, b) $L_{1;1}^{3,0}$, c) $\sigma=\operatorname{sign}(\tilde a_1-\eta_*)$, $u=(3\eta_*+2\theta_*-2\tilde a_1)(\tilde a_1-\eta_*)(\eta_*+\theta_*-\tilde a_1)^{-2}/9$;

$CF_{2,\kappa}^{3,0}$: a) $\psi_1\geq 0,\ (6\eta_*-3\tilde a_1)^2-12(3\tilde a_1\eta_*-3\eta_*^2+2\tilde c_2)\geq 0,\ \tilde a_1\neq\eta_*+\theta_*,\ \tilde c_1=3\eta_*(\eta_*+\theta_*)(\tilde a_1-\eta_*-\theta_*)/2,\ \tilde d_1=\theta_*\eta_*(\eta_*^2+4\eta_*\theta_*+\theta_*^2-\tilde a_1(\eta_*+\theta_*))/2,\ d_2=((2\eta_*+\theta_*)(\eta_*-\theta_*)\tilde a_1+(\eta_*+\theta_*)(\theta_*^2+3\eta_*\theta_*-2\eta_*^2))/2$, *где* θ_*: $3\theta^2+(6\eta_*-3\tilde a_1)\theta+3\tilde a_1\eta_*-3\eta_*^2+2\tilde c_2,\ \eta_*=(3\tilde a_1\pm(3\psi_1)^{1/2})/6$, b) $L_{2;1}^{3,0}$, c) $\kappa=-\sigma\operatorname{sign}(\tilde a_1-3\eta_*-\theta_*),\ \sigma=\operatorname{sign}(\tilde a_1-\eta_*),\ u=3(\tilde a_1-\eta_*-\theta_*)(\tilde a_1-\eta_*)^{-1}/2$;

$CF_4^{3,0}$: 1) a) $\tilde b_1=0,\ \tilde c_1=0,\ \tilde d_1=0,\ \tilde c_2=0$, b) $L_{4;1}^{3,0}$, c) $\sigma=\operatorname{sign}\tilde a_1,\ u=\tilde d_2\tilde a_1^{-3}$; 2) a) $\tilde a_1=(\tilde c_1^4-81\tilde d_1^3)(27\tilde d_1^2\tilde c_1)^{-1},\ \tilde b_1=\tilde c_1^2\tilde d_1^{-2}/3,\ \tilde c_2,\tilde d_2=0$, b) $L_{4;2}^{3,0}$, c) $\sigma=\operatorname{sign}\tilde c_1,\ u=$

$-81\tilde d_1^3\tilde c_1^{-4}$;
3) a) $\tilde a_1\neq\eta_*+\theta_*$, $\tilde b_1=3\eta_*^2-3\tilde a_1\eta_*$, $\tilde d_1=\eta_*^4+(\theta_*-\tilde a_1)\eta_*^3-\theta_*^2\eta_*^2$, $\tilde d_2=\eta_*\theta_*(\eta_*+\theta_*)$, *где* η_*: $3\eta^3-3\tilde a_1\eta^2-\tilde c_2\eta+\tilde c_1$, $\theta_*=-\tilde c_2\eta_*^{-1}/3$, b) $L^{3,0}_{4;3}$, c) $\sigma=\operatorname{sign}(\tilde a_1-\eta_*)$, $u=\eta_*(\eta_*+\theta_*-\tilde a_1)^2(\tilde a_1-\eta_*)^{-3}$;

$CF^{3,0}_{9}$: 1) a) $\tilde a_1=0$, $\tilde c_1=0$, $\tilde d_1=0$, $\tilde c_2=0$, b) $L^{3,0}_{9;1}$, c $\sigma=\operatorname{sign}\tilde d_2$, $u=\tilde d_2^2\tilde b_1^{-3}$;
2) a) $\tilde c_1=\eta_*\theta_*(\tilde a_1-4\eta_*)+2\eta_*^2(\tilde a_1-\eta_*)$, $\tilde d_1=(\eta_*(\tilde a_1+2\eta_*)\theta_*^2-\eta_*^2(2\tilde a_1-5\eta_*)\theta_*-2\eta_*^3(\tilde a_1-\eta_*))/3$, $\tilde d_2=((\tilde a_1+2\eta_*)\theta_*^2+\eta_*(\tilde a_1+2\eta_*)\theta_*-2\eta_*^2(\tilde a_1-\eta_*))/3$, *где* η_*: $3\eta^3-(3\tilde a_1^2+2\tilde b_1+\tilde c_2)\eta-\tilde a_1(\tilde b_1-\tilde c_2)$, $\theta_*=-(\eta_*^2-\tilde a_1\eta_*+\tilde c_2)(\tilde a_1+2\eta_*)^{-1}$, b) $L^{3,0}_{9;2}$, c) $\sigma=\operatorname{sign}(\tilde a_1+2\eta_*)$, $u=(\tilde a_1+2\eta_*)^2(2\tilde a_1-2\eta_*-3\theta_*)(\tilde a_1-\eta_*)^{-3}/27$;
3) a) $\tilde b_1=0$, $\tilde d_1=\tilde a_1\tilde c_1/3$, $\tilde c_2=3\theta_*(\theta_*-2\tilde a_1)/4$, $\tilde d_2=\tilde c_1/3$, *где* $\theta_*=-(4\tilde c_1/3)^{1/3}$, b) $L^{3,0}_{9;3}$, c) $\sigma=\operatorname{sign}\psi_3$, $u=16\psi_3^3(9\tilde a_1-\psi_3)^{-3}/27$;

$CF^{3,0}_{15}$: 1) a) $\tilde a_1=0$, $\tilde b_1=0$, $\tilde d_1=0$, $\tilde c_2=0$, b) $L^{3,0}_{15;1}$, c) $\sigma=\operatorname{sign}\tilde c_1$, $u=\tilde d_2\tilde c_1^{-1}$;
2) a) $\tilde a_1=\tilde c_2^2\tilde c_1^{-1}$, $\tilde b_1=2\tilde c_2$, $\tilde d_1=0$, $\tilde d_2=2\tilde c_1/3$, b) $L^{3,0}_{15;2}$, c) $\sigma=\operatorname{sign}\tilde c_1$, $u=2/3$;
3) a) $\tilde a_1=(\tilde c_1^2+\tilde c_2^3)(\tilde c_1\tilde c_2)^{-1}$, $\tilde b_1=-\tilde c_2$, $\tilde d_1=-\tilde c_1^2\tilde c_2^{-1}/3$, $\tilde d_2=-\tilde c_1/3$, b) $L^{3,0}_{15;3}$, c) $\sigma=\operatorname{sign}\tilde c_1$, $u=(3\tilde c_1^2+2\tilde c_2^3)\tilde c_2^{-3}/3$;
4) a) $(3\tilde a_1^2+2\tilde b_1+2\tilde c_2)^2+12\tilde a_1^2(\tilde b_1-2\tilde c_2)\geq 0$, $\tilde c_1=(\tilde a_1-\eta_*)\theta_*^2+(\tilde a_1-4\eta_*)\eta_*\theta_*+(\tilde a_1-\eta_*)\eta_*^2$, $\tilde d_1=-((\tilde a_1-4\eta_*)(\eta_*+\theta_*)\eta_*\theta_*+(\tilde a_1-\eta_*)\eta_*^3)/3$, $\tilde d_2=((2\tilde a_1+\eta_*)\theta_*^2-(\tilde a_1-4\eta_*)\eta_*\theta_*-(\tilde a_1-\eta_*)\eta_*^2)/3$, *где* η_*: $3\tilde a_1\eta^2-(3\tilde a_1^2+2\tilde b_1+2\tilde c_2)\eta-\tilde a_1(\tilde b_1-2\tilde c_2)$, $\theta_*=-(\tilde b_1+\tilde c_2)(3\tilde a_1)^{-1}$, b) $L^{3,0}_{15;4}$, c) $\sigma=\operatorname{sign}(\tilde a_1-\eta_*)$, $u=(2\tilde a_1+\eta_*)(\tilde a_1-\eta_*)^{-1}/3$;
5) a) $\tilde a_1=\mp 2(-\tilde c_2/3)^{1/2}$, $\tilde c_1=\mp 3^{1/2}(\tilde b_1-\tilde c_2)^2(-\tilde c_2)^{-1/2}/12$, $\tilde d_1=(\tilde b_1^2+\tilde c_2^2)/18$, $\tilde d_2=\mp 3^{1/2}(\tilde b_1^2+6\tilde b_1\tilde c_2+\tilde c_2^2)(-\tilde c_2)^{-1/2}/36$, b) $L^{3,0}_{15;5}$, c) $\sigma=\mp 1$, $u=1/3$;
6) a) $\tilde b_1=0$, $\tilde c_1=3\tilde d_2^{2/3}(2^{-2/3}\tilde a_1-\tilde d_2^{1/3})$, $\tilde d_1=\tilde a_1\tilde d_2$, $\tilde c_2=-3\cdot 2^{-1/3}\tilde a_1\tilde d_2^{1/3}$, b) $L^{3,0}_{15;6}$, c) $\sigma=\operatorname{sign}(\tilde a_1+(4\tilde d_2)^{1/3})$, $u=(2\tilde a_1-(4\tilde d_2)^{1/3})(\tilde a_1+(4\tilde d_2)^{1/3})^{-1}/3$;

$CF^{3,0}_{20}$: 1) a) $\tilde b_1\neq 0$, $\tilde c_1=3(\tilde a_1-\eta_*)\theta_*^2-3\eta_*^2\theta_*$, $\tilde d_1=(\eta_*-\tilde a_1)\theta_*^3+\eta_*^2\theta_*^2+\eta_*^3\theta_*$, $\tilde d_2=\eta_*\theta_*(\eta_*+\theta_*)$, *где* $\eta_*=\tilde a_1\tilde c_2(\tilde b_1+\tilde c_2)^{-1}$, $\theta_*=-(\tilde b_1+\tilde c_2)\tilde a_1^{-1}/3$, b) $L^{3,0}_{20;1}$, c) $\sigma=\operatorname{sign}\tilde a_1$, $u=\tilde b_1^3\tilde a_1^{-2}(\tilde b_1+\tilde c_2)^{-2}/3$;
2) a) $\tilde b_1=0$, $\tilde c_1=0$, $\tilde c_2=0$, $\tilde d_2=0$, $\tilde d_1\neq 0$, b) $L^{3,0}_{20;2}$, c) $\sigma=\operatorname{sign}\tilde a_1$, $u=\tilde d_1\tilde a_1^{-4}$;
3) a) $\tilde a_1=0$, $\tilde b_1=0$, $\tilde c_1=0$, $\tilde c_2=0$, $\tilde d_1\neq 0$, $\tilde d_1\neq 0$, b) $L^{3,0}_{20;3}$, c) $\sigma=\operatorname{sign}\tilde d_2$, $u=\tilde d_1^3\tilde d_2^{-4}$;
4) a) $\tilde d_2\neq 2\tilde a_1^3$, $\tilde b_1=3(\tilde d_2/2)^{1/3}(2\tilde a_1-(4\tilde d_2)^{1/3})$, $\tilde c_1=3(\tilde a_1(4\tilde d_2)^{2/3}-3\tilde d_2)$, $\tilde d_1=\tilde d_2(8\tilde a_1-3(4\tilde d_2)^{1/3})/2$, $\tilde c_2=3(4\tilde d_2)^{2/3}/2$, b) $L^{3,0}_{20;4}$, c) $u=(2^{1/3}\tilde a_1-\tilde d_2^{1/3})^3(\tilde d_2/2)^{1/3}\tilde a_1^{-4}$, $\sigma=\operatorname{sign}\tilde a_1$;
5) a) $\tilde a_1=-(3\theta_*^2+2\tilde b_1)(6\theta_*)^{-1}$, $\tilde c_1=(\tilde b_1\theta_*^2-6\tilde d_1)\theta_*^{-1}$, $\tilde c_2=-4(\tilde b_1\theta_*^2-3\tilde d_1)\theta_*^{-2}$, $\tilde d_2=2(\tilde b_1\theta_*^2-3\tilde d_1)(3\theta_*)^{-1}$, $\tilde b_1\theta_*^2\neq 3\tilde d_1, 4\tilde d_1$; $4\tilde b_1^2+18\tilde d_1\geq 0$, *где* θ_* : $3\theta^4+8\tilde b_1\theta^2-24\tilde d_1$, b) $L^{3,0}_{20;5}$, c) $\sigma=\operatorname{sign}(\tilde b_1\theta_*^2-4\tilde d_1)\theta_*$, $u=-2^{11}3^{20}(\tilde b_1\theta_*-3\tilde d_1)\theta_*^6\tilde b_1^3(\tilde b_1\theta_*^2-4\tilde d_1)^4$;
6) a) $\tilde b_1=3\tilde a_1^{2/3}\tilde d_1^{1/3}$, $\tilde c_1=3\tilde a_1^{1/3}\tilde d_1^{2/3}$, $\tilde c_2=0$, $\tilde d_2=0$, b) $L^{3,0}_{20;6}$, c) $\sigma=\operatorname{sign}\tilde a_1$, $u=\tilde d_1^{1/3}\tilde a_1^{-4/3}$;

$CF^{3,0}_{23,\kappa}$: 1) a) $\tilde a_1=0$, $\tilde b_1=0$, $\tilde c_1=0$, $\tilde c_2\neq 0$, $\tilde d_2=0$, b) $L^{3,0}_{23;1}$, c) $\sigma=1$, $\kappa=\operatorname{sign}\tilde d_1$, $u=\tilde d_1\tilde c_2|\tilde d_1|^{-3/2}$;
2) a) $\tilde a_1=0$, $\tilde b_1\neq 0$, $\tilde c_1=0$, $\tilde c_2=0$, $\tilde d_2=0$, b) $L^{3,0}_{23;2}$, c) $\sigma=1$, $\kappa=\operatorname{sign}\tilde d_1$, $u=\tilde b_1|\tilde d_1|^{-1/2}$;
3) a) $\tilde a_1=-2^{2/3}(2^{1/3}\tilde d_1+3\tilde d_2^{4/3})\tilde d_2^{-1}$, $\tilde a_1\neq 0$, $\tilde b_1=3\cdot 2^{2/3}(\tilde d_1+2\tilde d_2^{4/3})\tilde d_2^{-2/3}$, $\tilde c_1=3(2^{4/3}\tilde d_1+5\tilde d_2^{4/3})\tilde d_2^{-1/3}$, $\tilde c_2=-3(3\cdot 2^{1/3}\tilde d_1+7\tilde d_2^{4/3})(2\tilde d_2)^{-2/3}$, b) $L^{3,0}_{23;3}$, c) $\sigma=1$, $\kappa=-1$, $u=3\cdot 2^{-5/6}(2^{1/3}\tilde d_1+3\tilde d_2^{4/3})\psi_4^{-1}$;
4) a) $\tilde a_1=-\tilde d_2^3\tilde d_1^{-2}$, $\tilde b_1=3\tilde d_2^2\tilde d_1^{-1}$, $\tilde c_1=-3\tilde d_2$, $\tilde c_2=-3\tilde d_2^2\tilde d_1^{-1}/2$, $\tilde d_2\neq 0$, b) $L^{3,0}_{23;4}$, c) $\sigma=1$, $\kappa=\operatorname{sign}(2\tilde d_1^3-\tilde d_2^4)$, $u=3\tilde d_2^2|4\tilde d_1^3-2\tilde d_2^4|^{-1/2}$;
5) a) $\tilde d_1=(\eta_*-\tilde a_1)\theta_*^3+(\eta_*-\tilde a_1)\eta_*\theta_*^2+(2\eta_*+\tilde a_1)\eta_*^2\theta_*/2+\tilde a_1\eta_*^3/2$, $\tilde c_2=3\tilde a_1(\theta_*-\eta_*)/2-3\eta_*\theta_*$, $\tilde d_2=(\eta_*-\tilde a_1)\theta_*^2+(2\eta_*+\tilde a_1)\eta_*\theta_*/2+\tilde a_1\eta_*^2/2$, *где* $\eta_*=(3\tilde a_1\theta_*+\tilde b_1)(3\theta_*)^{-1}$, θ_* : $(9\tilde a_1^2+6\tilde b_1)\theta^3+(9\tilde a_1^3+9\tilde a_1\tilde b_1+6\tilde c_1)\theta^2+(6\tilde a_1^2\tilde b_1+2\tilde b_1^2)$, b) $L^{3,0}_{23;5}$, c) $\sigma=1$, $\kappa=\operatorname{sign}(\eta_*-\tilde a_1)(\tilde a_1+2\theta_*)$, $u=3\tilde a_1(\tilde a_1-\eta_*)|\tilde a_1-\eta_*|^{-3/2}|2\tilde a_1+4\theta_*|^{-1/2}$;

6) a) $\tilde a_1\neq 0$, $\tilde b_1=18^{1/3}(18^{1/3}\tilde a_1\tilde c_1^{1/3}+2\tilde c_1^{2/3})/6$, $\tilde d_1=\tilde c_1(7\cdot 18^{2/3}\tilde c_1^{1/3}-27\tilde a_1)/162$, $\tilde c_2=18^{2/3}\tilde c_1^{1/3}(9\tilde a_1-2\cdot 18^{2/3}\tilde c_1^{1/3})/108$, $\tilde d_2=(18^{1/3}\tilde a_1\tilde c_1^{2/3}-3\tilde c_1)/9$, b) $L^{3,0}_{23;6}$, c) $\sigma=1$, $\kappa=-\operatorname{sign}(9\tilde a_1+18^{2/3}\tilde c_1^{1/3})(18^{1/3}\tilde a_1\tilde c_1^{2/3}-2\tilde c_1)$, $u=3\cdot 18^{2/3}\tilde a_1\tilde c_1^{4/3}(9\tilde a_1+18^{2/3}\tilde c_1^{1/3})|\tilde c_1|^{-1}|(9\tilde a_1+18^{2/3}\tilde c_1^{1/3})^3(18^{1/3}\tilde a_1\tilde c_1^{2/3}-2\tilde c_1)|^{-1/2}/2$;
7) a) $\tilde a_1=-\tilde d_2(-\tilde d_1)^{-1/2}$, $\tilde b_1=3(\tilde d_1\pm(-\tilde d_1)^{1/4}\tilde d_2))(-\tilde d_1)^{-1/2}$, $\tilde c_1=0$, $\tilde c_2=-\tilde b_1$, $\tilde d_1<0$, b) $L^{3,0}_{23;7}$, c) $\sigma=1$, $\kappa=-\operatorname{sign}(\tilde d_1\pm(-\tilde d_1)^{1/4}\tilde d_2)(2\tilde d_1\pm(-\tilde d_1)^{1/4}\tilde d_2)$, $u=3(-\tilde d_1)^{1/4}(\pm\tilde d_1+(-\tilde d_1)^{1/4}\tilde d_2)\tilde d_2|\tilde d_1\pm(-\tilde d_1)^{1/4}\tilde d_2|^{-3/2}|4\tilde d_1\pm 2(-\tilde d_1)^{1/4}\tilde d_2|^{-1/2}$;
8) a) $\tilde a_1\neq 0$, $\tilde b_1=-3\cdot 2^{-1/3}\tilde d_2^{1/3}(\tilde a_1+(4\tilde d_2)^{1/3})$, $\tilde c_1=-3\tilde d_2^{2/3}(2^{1/3}\tilde a_1+\tilde d_2^{1/3})$, $\tilde c_2=3\cdot 2^{2/3}\tilde d_2^{1/3}(3\tilde a_1+2^{5/3}\tilde d_2^{1/3})/4$, $\tilde d_1=-\tilde d_2(\tilde a_1+3(4\tilde d_2)^{1/3})/2$, b) $L^{3,0}_{23;8}$, c) $\sigma=1$, $\kappa=-1$, $u=3\cdot 2^{-1/2}\tilde a_1(\tilde a_1+(4\tilde d_2)^{1/3})^{-1}$;
9) a) $\tilde a_1=\pm 2(-\tilde c_2/3)^{1/2}$, $\tilde c_1=\pm(\tilde b_1^2-\tilde c_2^2)(-3\tilde c_2)^{-1/2}$, $\tilde d_1=-(\tilde b_1^3+\tilde b_1^2\tilde c_2-2\tilde b_1\tilde c_2^2-\tilde c_2^3)(9\tilde c_2)^{-1}$, $\tilde c_2<0$, $\tilde d_2=\mp(\tilde b_1^2-2\tilde b_1\tilde c_2-\tilde c_2^2)(-3\tilde c_2)^{-1/2}/3$, b) $L^{3,0}_{23;9}$, c) $\sigma=1$, $\kappa=-\operatorname{sign}\tilde c_2(\tilde b_1+\tilde c_2)$, $u=-3|\tilde c_2|^{3/2}\tilde c_2^{-1}|\tilde b_1+\tilde c_2|^{-1/2}$;
10) a) $\tilde a_1=\mp 2\tilde c_2^2(-3\tilde d_1\tilde c_2)^{-1/2}/3$, $\tilde c_1=-3\tilde d_2$, $\tilde d_2=\pm\tilde d_1\tilde c_2(-3\tilde d_1\tilde c_2)^{-1/2}$, $\tilde d_1\tilde c_2<0$, b) $L^{3,0}_{23;10}$, c) $\sigma=1$, $\kappa=-\operatorname{sign}(2\tilde c_2^2-9\tilde d_1)$, $u=-3\tilde d_1\tilde c_2(2\tilde c_2^2-9\tilde d_1)|2\tilde c_2^2-9\tilde d_1|^{-3/2}|\tilde d_1|^{-1}$;

$CF^{3,0}_{24}$: 1) a) $\tilde d_2\neq 0$, $\tilde a_1=-\tilde d_2^3\tilde d_1^{-2}$, $\tilde b_1=3\tilde d_2^2\tilde d_1^{-1}$, $\tilde c_1=-3\tilde d_2$, $\tilde c_2=-3\tilde d_2^2\tilde d_1^{-1}$, b) $L^{3,0}_{24;1}$, c) $\sigma=-\operatorname{sign}\tilde d_2$, $u=9^{-2/3}(\tilde d_1^3-2\tilde d_2^4)\tilde d_2^{-4}$;
2) a) $\tilde a_1=0$, $\tilde b_1=0$, $\tilde d_1\neq 0$, $\tilde c_2=0$, $\tilde d_2=0$, b) $L^{3,0}_{24;2}$, c) $\sigma=\operatorname{sign}\tilde c_1$, $u=\tilde d_1\tilde c_1^{-4/3}$;
3) a) $\tilde b_1=0$, $\tilde c_1=-3\tilde a_1^3$, $\tilde c_2=-3\tilde a_1^2$, $\tilde d_2=2\tilde a_1^3$, b) $L^{3,0}_{24;3}$, c) $\sigma=\operatorname{sign}\tilde a_1$, $u=(\tilde d_1-2\tilde a_1^4)^{1/3}(3\tilde a_1)^{-4/3}$;
4) a) $\tilde a_1=(2\tilde d_1+3\cdot 4^{1/3}\tilde d_2^{4/3})(8\tilde d_2)^{-1}$, $\tilde b_1=3\cdot 2^{-5/3}(2^{1/3}\tilde d_1-\tilde d_2^{4/3})\tilde d_2^{-2/3}$, $\tilde c_1=24(2^{1/3}\tilde d_1-5\tilde d_2^{4/3})\tilde d_2^{-1/3}$, $\tilde c_2=-3\cdot 2^{-8/3}(3\cdot 2^{1/3}\tilde d_1+\tilde d_2^{4/3})\tilde d_2^{-2/3}$, $\tilde d_1\neq 2^{-1/3}\tilde d_2^{4/3}$, b) $L^{3,0}_{24;4}$, c) $\sigma=\operatorname{sign}\tilde d_2(2^{1/3}\tilde d_1+3\tilde d_2^{4/3})$, $u=-2\cdot 3^{-4/3}(2^{1/3}\tilde d_1-\tilde d_2^{4/3})^{4/3}(2^{1/3}\tilde d_1+3\tilde d_2^{4/3})^{-4/3}$;
5) a) $\tilde c_1=3(\tilde a_1-\eta_*)(\eta_*+\theta_*)\theta_*-3\tilde a_1\eta_*^2$, $\tilde d_1=(\eta_*-\tilde a_1)(\eta_*^2+\eta_*\theta_*+\theta_*^2)\theta_*+2\tilde a_1\eta_*^3$, $\tilde d_2=(\eta_*-\tilde a_1)(\eta_*+\theta_*)\theta_*+2\tilde a_1\eta_*^2$, *где* $\eta_*=-(\tilde b_1+\tilde c_2)(3\tilde a_1)^{-1}$, $\theta_*=-\tilde a_1\tilde b_1(3\tilde a_1^2+\tilde b_1+\tilde c_2)^{-1}$, b) $L^{3,0}_{24;5}$, c) $\sigma=\operatorname{sign}\tilde a_1$, $u=3^{-4/3}(\eta_*-\tilde a_1)^{1/3}(2\tilde a_1+\theta_*)^{-2/3}\tilde a_1^{-4/3}$;
6) a) $\tilde b_1=\tilde c_1\tilde a_1^{-1}\mp\psi_5\tilde a_1$, $\tilde d_1=\tilde c_1(\pm 3\psi_5\tilde a_1^2-\tilde c_1)\tilde a_1^{-2}/9$, $\tilde c_2=\pm 2\psi_5\tilde a_1-\tilde c_1\tilde a_1^{-1}$, $\tilde d_2=-2\tilde c_1/3$, $\tilde a_1\tilde c_1<0$, b) $L^{3,0}_{24;6}$, c) $CF^{3,0}_{24}$ *с* $\sigma=-\operatorname{sign}\tilde c_1$, $u=-3^{-5/3}(2\psi_5\tilde a_1^2-\tilde c_1)(\psi_5+3\tilde a_1)^{1/3}\tilde a_1^{-7/3}\psi_5^{-1}$;

В результате для любой системы (1.4) с $R\neq 0$, используя лемму 3.4 и теорему 3.1, можно установить эквивалентна ли она какой-либо $CF_i^{m,0}$ $(m=2,3)$ из списка 3.1 и в случае положительного ответа указать композицию замен, сводящую ее к линейно эквивалентной $CF_i^{m,0}$, а также конкретные значения параметров из $cs_i^{m,0}$.

4. Топологическая классификация однородных кубических систем с $\mathbf{l=0}$.

4.1. Описание метода получения топологической классификации.

В качестве дополнения к проведенной классификации систем (1.4) предлагается провести топологическую классификацию систем, соответствующих каноническим формам из списка 3.1 с двумя и тремя ненулевыми элементами ($m=2,\ 3$).

Рассмотрим систему (1.4) с взаимно простыми многочленами в правой части, т. е. с $l=0$:
$$\dot x_1=P_1(x_1,x_2),\quad \dot x_2=P_2(x_1,x_2)\qquad (R(P_1,P_2)\neq 0), \tag{4.1}$$

Определять фазовый портрет системы (4.1) будем с помощью проекции плоскости на сферу Пуанкаре, т. е. на сферу единичного радиуса, касающуюся плоскости x_1, x_2 в нуле (подробнее см. [7, § 13]). Каждой точке плоскости сопоставляются две точки сферы, лежащие на прямой, проходящей через данную точку и центр сферы (точке M соответствуют $M_1,\ M_2$ на рис. 1). Будем отождествлять диаметрально противоположные точки сферы. Ортогональная проекция нижней полусферы на плоскость x_1, x_2 дает удобную для рассмотрения модель системы (4.1) в единичном круге, который будем называть кругом Пуанкаре.

Преобразование

$$x_1 = 1/z,\ x_2 = y/z \tag{4.2}$$

позволяет исследовать систему в окрестности экватора. Переменные y, z соответствуют прямоугольным координатам в плоскости γ (см. рис. 1), касающейся сферы и перпендикулярной оси x_1. При этом ось y параллельна оси x_2. Преобразование (4.2) является проекцией точек сферы, относительно ее центра, на плоскость γ. Заметим, что (4.2) не определено для точек экватора, соответствующим концам оси x_2, для их изучения нужно положить $x_1 = y/z,\ x_2 = 1/z$.

Замена (4.2) приводит систему (4.1) к виду

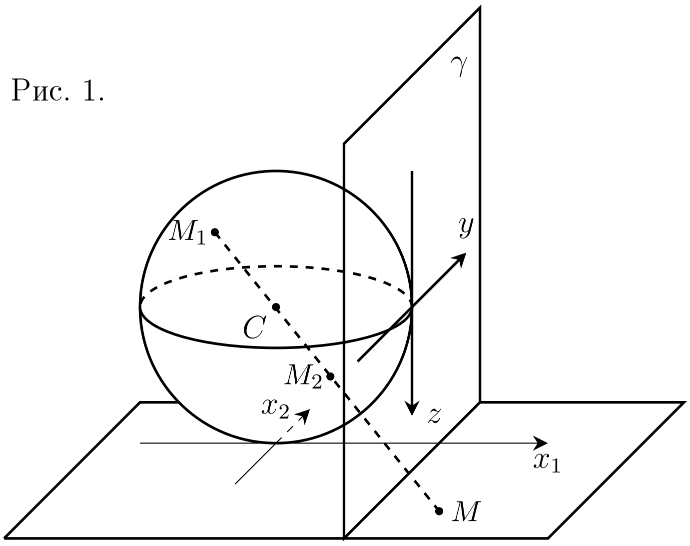
$$\dot{y} = (P_2(1,y) - yP_1(1,y))z^{-2}, \quad \dot{z} = -P_1(1,y)z^{-1}. \tag{4.3}$$

Вводя новый параметр времени $d\tau = dt/z^2$, получаем систему (4.3) в виде

$$dy/d\tau = P_2(1,y) - yP_1(1,y), \quad dz/d\tau = -zP_1(1,y), \tag{4.4}$$

где правые части определены на экваторе при $z = 0$. Особые точки на экваторе находятся из уравнения $P_2(1,y) - yP_1(1,y) = 0$. Последующие утверждения позволят установить вид фазового портрета систем (4.1) и (4.4).

Рис. 1.



Утверждение 4.1. *Вещественные линейные множители однородного многочлена $F(x_1,x_2) = x_1P_2(x_1,x_2) - x_2P_1(x_1,x_2)$ являются интегралами системы.*

Доказательство. Пусть линейный множитель можно представить в виде $x_2 - kx_1 = 0$, иначе случай $x_1 - kx_2 = 0$ рассматривается аналогично. Тогда $F(x_1,kx_1) = x_1P_2(x_1,kx_1) - kx_1P_1(x_1,kx_1) = x_1^4(P_2(1,k) - kP_1(1,k)) \equiv 0$. В свою очередь, производная в силу системы $\dot{x}_2 - k\dot{x}_1 = P_2(x_1,kx_1) - kP_1(x_1,kx_1) = x_1^3(P_2(1,k) - kP_1(1,k)) \equiv 0$. $\square$

Следствие 4.1. *Открытые лучи из нуля вдоль направлений, соответствующих вещественным множителям $F(x_1,x_2)$, являются траекториями системы. Далее будем называть их инвариантными лучами.*

Замечание 4.1. Вещественные линейные множители многочлена $F(x_1, x_2)$ являются направлениями, вдоль которых траектории могут стремиться к состоянию равновесия в нуле (см. [7, § 20]).

Замечание 4.2. Особые точки на экваторе и инвариантные лучи соответствуют корням одного и того же однородного полинома $F(x_1, x_2)$. Каждой паре диаметрально противоположных особых точек соответствует стремящаяся к ним пара инвариантных лучей, и наоборот.

Утверждение 4.2. *Особые точки на экваторе являются узлами, седлами или седло-узлами.*

Доказательство. Пусть $(y_0, 0)$ – особая точка, тогда $P_2(1, y_0) - y_0 P_1(1, y_0) = 0$. Матрица линейной части системы (4.4) в точке $(y_0, 0)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dfrac{d}{dy}(F(1,y))(y_0) & 0 \\ 0 & -P_1(1, y_0) \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Заметим, что если $P_1(1, y_0) = 0$, тогда и $P_2(1, y_0) = 0$, но многочлены P_1 и P_2 взаимно просты. Поэтому $P_1(1, y_0) \neq 0$, и у матрицы есть хотя бы одно ненулевое собственное число (см. [7, §21]). $\square$

Утверждение 4.3. *Указание типа особых точек на экваторе в секторе, образованном двумя последовательными инвариантными лучами, определяет предельные множества траекторий в данном секторе.*

Доказательство. Так как внутри сектора нет инвариантных лучей, произвольная траектория $\varphi(t)$ в секторе пересекает все лучи из нуля. В силу однородности любую траекторию можно представить в виде $\lambda\varphi(t)$ $(\lambda > 0)$, поэтому предельные множества совпадают для всех траекторий в секторе. Особые точки экватора локально во внутренности сектора имеют характер или узла, или седла. Два седла определяют эллиптический сектор в нуле, два узла – гиперболический, узел и седло – параболический (рис. 2). $\square$

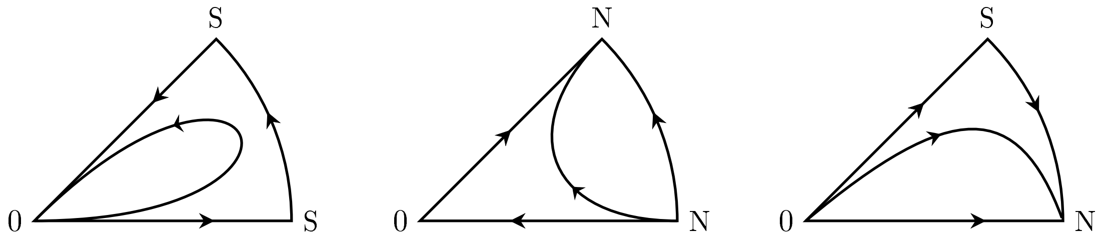


Рис. 2.

Утверждение 4.4. *Пусть y_0 – корень $F(1, y)$ первой кратности. Особая точка $(y_0, 0)$ на экваторе в системе (4.4) является узлом, если функция*

$$\frac{P_2(1, y) - yP_1(1, y)}{P_1(1, y)}$$

меняет знак, проходя через эту точку при возрастании y, с плюса на минус, и седлом, если с минуса на плюс.

Доказательство. Как показано в утверждении 4.2, $P_1(1, y_0) \neq 0$, поэтому существует окрестность точки y_0, в которой $P_1(1, y) \neq 0$ и у многочлена $P_2(1, y) - yP_1(1, y)$ нет корней отличных от y_0. Числитель указанной функции сменит знак при прохождении точки y_0 как корня первой кратности, а знак знаменателя фиксирован. Осталось лишь заметить, что знак знаменателя $P_1(1,y)$ в данной окрестности указывает направление траекторий на соответствующих инвариантных лучах в системе (4.4): при $P_1(1,y)>0$ траектории стремятся к $(y_0,0)$ при $\tau\to+\infty$, а в случае $P_1(1,y)<0$ – при $\tau\to-\infty$. Числитель положителен или отрицателен, когда траектория на экваторе в соответствующей точке направлена вдоль оси y или против нее. Вычисление итогового знака дроби для седловой и узловой особых точек доказывает утверждение. □

Утверждение 4.5. *Пусть у многочлена $F(x_1,x_2)=x_1P_2(x_1,x_2)-x_2P_1(x_1,x_2)$ нет вещественных корней, и*

$$I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{P_1(1,y)}{P_2(1,y)-P_1(1,y)y}\,dy.$$

тогда соответствующая система является глобальным центром, если $I=0$, или фокусом при $I\neq 0$.

Доказательство. Проведем полярную замену $x_1=r\cos\theta,\ x_2=r\sin\theta$ в системе (4.1). Так как у многочлена F нет вещественных корней, $\dot\theta\neq 0$. Поэтому после упрощений получаем уравнение

$$\frac{dr}{d\theta}=rS(\theta)=r\frac{P_1(\cos\theta,\sin\theta)\cos\theta+P_2(\cos\theta,\sin\theta)\sin\theta}{P_2(\cos\theta,\sin\theta)\cos\theta-P_1(\cos\theta,\sin\theta)\sin\theta}.$$

Обозначим за $\varphi(\theta,x)$ решение задачи Коши $\varphi(0,x)=x,\ (x\neq 0)$. Траектории системы не имеют предельных направлений ни в нуле, ни на бесконечности, то есть определены на всей оси θ. Подставляя φ в уравнение и решая его, получаем

$$\frac{d\varphi}{d\theta}=\varphi(\theta,x)S(\theta),\ \ \varphi(\theta,x)=c(x)e^{\int\limits_0^\theta S(\theta)\,d\theta},$$
$$\varphi(0,x)=x\ \Rightarrow\ c(x)=x\ \Rightarrow\ \varphi(\theta,x)=x\,e^{\int\limits_0^\theta S(\theta)\,d\theta}.$$

Теперь выпишем необходимое условие замкнутости траектории:

$$\varphi(2\pi,x)-\varphi(0,x)=0\Leftrightarrow x(e^{\int\limits_0^{2\pi} S(\theta)\,d\theta}-1)=0\Leftrightarrow\int\limits_0^{2\pi}S(\theta)\,d\theta=0;$$
$$\int\limits_0^{2\pi}S(\theta)\,d\theta=\int\limits_0^{2\pi}\frac{P_1(\cos\theta,\sin\theta)\cos\theta+P_2(\cos\theta,\sin\theta)\sin\theta}{P_2(\cos\theta,\sin\theta)\cos\theta-P_1(\cos\theta,\sin\theta)\sin\theta}\,d\theta=$$
$$=2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{P_1(1,\operatorname{tg}\theta)+P_2(1,\operatorname{tg}\theta)\operatorname{tg}\theta}{P_2(1,\operatorname{tg}\theta)-P_1(1,\operatorname{tg}\theta)\operatorname{tg}\theta}\,d\theta\overset{y=\operatorname{tg}\theta}{=}2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{P_1(1,y)+P_2(1,y)y}{(1+y^2)(P_2(1,y)-P_1(1,y)y)}\,dy=$$
$$=2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{1+y^2}\,dy+2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{P_1(1,y)}{P_2(1,y)-P_1(1,y)y}\,dy=2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{P_1(1,y)}{P_2(1,y)-P_1(1,y)y}\,dy.$$

Полученное условие не зависит от выбора начальных данных, поэтому $I=0$ означает замкнутость всех траекторий системы, помимо особой точки в нуле, а $I\neq 0$ – отсутствие замкнутых траекторий. □

В итоге, для определения фазового портрета какой-либо системы (4.1) с канонической формой в правой части предпринимаются следующие действия.

1. В первую очередь, проводятся замены $x_1=1/z,\ x_2=y/z$ и $x_1=y/z,\ x_2=1/z$.

2. Изучаются корни многочленов $P_2(1,y)-P_1(1,y)y$ и $P_1(y,1)-P_2(y,1)y$, чтобы определить все вещественные линейные множители $F(x_1,x_2)=x_1P_2(x_1,x_2)-x_2P_1(x_1,x_2)$.

3. Если вещественных корней нет, с помощью утверждения 4.5 устанавливается, является система глобальным центром или фокусом.

4. В случае их наличия, если корни выписываются в радикалах без комплекснозначных выражений, то независимо от их кратности тип особых точек определяется из матрицы (4.5).

5. Если выражения для корней не позволяют определить знак собственных чисел матрицы (4.5), то тип соответствующих особых точек устанавливается с помощью утверждения 4.4 путем построения ряда Штурма для многочлена $P_2(1,y)-P_1(1,y)$. При этом, случаи наличия у него кратных корней разбираются отдельно по пункту 4.

4.2. Фазовые портреты систем с каждой из $\mathbf{CF^{m,0}}$ при $\mathbf{m=2,3}$.

В силу утверждения 4.3 фазовый портрет системы (4.1) будем отождествлять с последовательностью типов особых точек на экваторе в верхней полуплоскости $x_2\geq 0$ при обходе против часовой стрелки: N – узел, S – седло, NS – седло-узел, SN – узел-седло. При отсутствии особых точек обозначим фокус и центр за F и C соответственно.

Два фазовых портрета будем называть тождественными, если между ними существует гомеоморфизм, переводящий траектории в траектории.

Теорема 4.1. *Системы* (4.1)*, соответствующие каноническим формам с* $m=2,3$ *из списка 3.1 имеют следующие фазовые портреты в круге Пуанкаре при указанных значениях параметров. В скобках указаны тождественные им портреты на рисунках ниже.*

$CF^{2,0}_{1,\kappa}=\sigma\begin{pmatrix}\kappa&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$: (1) N S N S; $\quad CF^{2,0}_{10,\kappa}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&0&\kappa\\1&0&0&0\end{pmatrix}$: (6) N N при $\kappa=1$, (12) C при $\kappa=-1$;

$CF^{3,0}_{1}=\sigma\begin{pmatrix}u&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$: (6) N N при $u<-1/4$, (4) N NS N при $u=-1/4$, (2) N N S N при $-1/4<u<0$, (1) N S N S при $u>0$;

$CF^{3,0}_{2,\kappa}=\sigma\begin{pmatrix}\kappa&0&u&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$: (1) N S N S при $\kappa=1,\ u<1$, (7) N S при $\kappa=1,\ u\geq 1$, (6) N N при $\kappa=-1,\ u\leq 1$, (2) N N S N при $\kappa=-1,\ u>1$;

$CF^{3,0}_{4}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$: (6) N N при $u<0$, (1) N S N S при $0<u<4/27$, (5) N SN S при $u=4/27$, (7) N S при $u>4/27$;

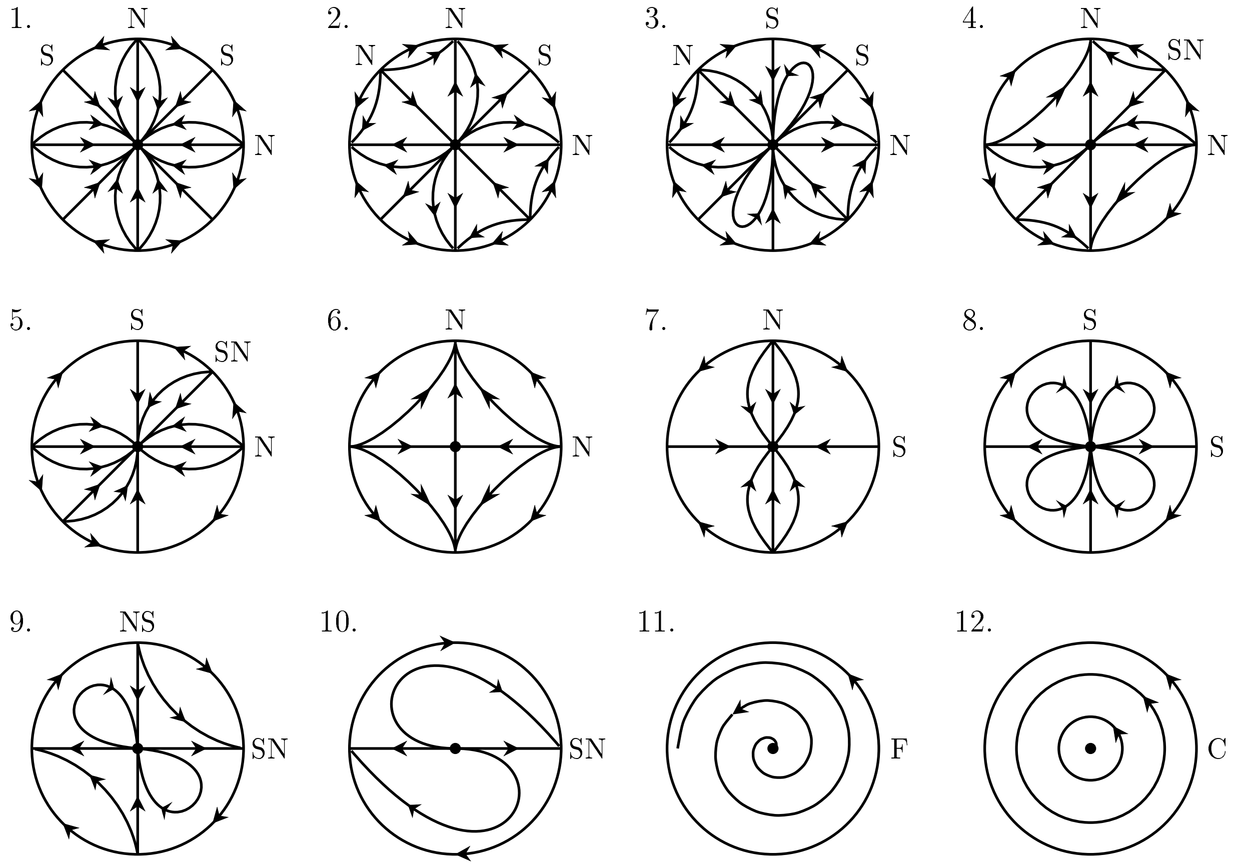
$CF^{3,0}_{9}=\sigma\begin{pmatrix}1&0&0&u\\0&0&1&0\end{pmatrix}$: (7) N S при $u<0$, (2) N S N N при $0<u<4/27$, (4) N SN N при $u=4/27$, (6) N N при $u>4/27$;

$CF^{3,0}_{15}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$: (6) N N при $u<0$, (7) S N при $0<u<1$, (10) SN при $u=1$, (7) N S при $u>1$;

$CF^{3,0}_{20}=\sigma\begin{pmatrix}1&0&0&u\\1&0&0&0\end{pmatrix}$: (11) F при $u<-27/256$, (10) NS при $u=-27/256$, (7) N S при $-27/256<u<0$, (6) N N при $u>0$;

$CF^{3,0}_{23,\kappa}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&0&\kappa\\1&0&0&0\end{pmatrix}$: (6) N N при $\kappa=1$, (12) C при $\kappa=-1,\ u<2$, (9) NS SN при $\kappa=-1,\ u=2$, (3) N S S N при $\kappa=-1,\ u>2$;

$CF^{3,0}_{24}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&1&u\\1&0&0&0\end{pmatrix}$: (11) F при $u<-3/4^{4/3}$, (10) NS при $u=-3/4^{4/3}$, (7) N S при $\kappa=-1,\ -3/4^{4/3}<u<0$, (6) N N при $u>0$.



5. Заключение.

Таким образом, полностью решены все поставленные в [1] задачи классификации для случая $l = 1$: в списке 2.1 представлены все канонические формы со своими каноническими множествами значений параметров, в теореме 2.2 для каждой из канонических форм даны условия на коэффициенты исходной системы, замены, сводящие систему в соответствующую форму, получаемые значения коэффициентов формы.

Для систем (1.1) с $l = 0$ задача решена частично: в списке 3.1 представлены канонические формы с $m \leq 4$ со своими каноническими множествами значений параметров, в лемме 3.4 и теореме 3.1 для канонических форм с $m \leq 3$ содержатся условия на коэффициенты исходной системы, замены, сводящие систему в соответствующую форму, получаемые значения коэффициентов формы. Для канонических форм с $m \leq 3$ также получена топологическая классификация в круге Пуанкаре для всех возможных значений параметров.

В завершение, отметим работы по топологической классификации однородных полиномиальных систем с использованием проекции на сферу Пуанкаре.

В работе [8] множество систем (4.1) разбито на десять линейно неэквивалентных классов с явно выписанными образующими, после чего для представителей каждого из классов при $l = 0$ найдены все возможные фазовые портреты в круге Пуанкаре. Также в ней приведен общий список всех фазовых портретов однородных кубических систем.

В [9] проведена классификация и получены фазовые портреты в круге Пуанкаре двумерных квадратично-кубических однородных систем, не имеющих общего множителя.

Список литературы

[1] *В. В. Басов,* Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы – I // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3 (61). Вып. 2. С. 181–195. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.201

[2] *В. В. Басов,* Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы – II // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3 (61). Вып. 3. С. 355-371. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.302

[3] *Басов В. В., Чермных А. С.* Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы – III // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 2. С. 179-192. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.201

[4] *Басов В. В., Чермных А. С.* Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы – IV // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 3. С. 370-386. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.302

[5] *Басов В. В., Чермных А. С.* Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы – V // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 4. С. 556-571. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.403

[6] *Басов В. В., Чермных А. С.* Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы – VI // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 3. С. 377-391. https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.302

[7] *А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер,* Качественная теория динамических систем второго порядка // Изд. “Наука”, Москва, 1966.

[8] *Cima A., Llibre J.* Algebraic and topological classification of the homogeneous cubic vector fields in the plane // J. Math. Anal. Appl. 1990. V. 147, № 2. P. 420–448.

[9] *Андреева И.А., Андреев А. Ф.* Фазовые портреты одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре // Lambert Academic Publishing. 2017.