

Санкт-Петербургский государственный университет  
Механика и математическое моделирование  
Теоретическая механика

Намазов Маил Елдар оглы

« Изгиб горизонтальных балок и консолей при учете пластической  
анизотропии »

Выпускная квалификационная работа

Научный руководитель:  
Доцент, к.ф.-м.н., Павилайнен Галина Вольдемаровна

Санкт-Петербург

2021

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Математическая модель изгиба горизонтальной SD балки при чистом изгибе</b>	<b>4</b>
2.1	Постановка задачи . . . . .	4
2.2	Исследования НДС свободно опертой и консольной SD балок . .	5
2.3	Основные соотношения . . . . .	10
2.3.1	Упругий случай . . . . .	11
2.3.2	Пластический слой в зоне растяжения . . . . .	12
2.3.3	Две зоны пластичности . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Расчет упруго-пластического изгиба для стали А40ХМ.</b>	<b>14</b>
3.1	Упругий случай . . . . .	14
3.2	Пластический слой в зоне растяжения . . . . .	17
3.3	Две зоны пластичности . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Расчеты в пакете ANSYS</b>	<b>22</b>
<b>5</b>	<b>Заключение</b>	<b>23</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>25</b>

# 1 Введение

Задачи проектирования и строительства требуют создания все более сложных математических моделей конструкций, учитывающих пластические свойства материалов. Основы математической теории пластичности определены в работах [1] [2]. Современные модели можно разделить на три группы. Первую группу составляют модели, в основу которых положена зависимость механических характеристик материала от знаков возникающих напряжений или развивающихся деформаций, их называют разносопротивляющимися или разномодульными [3]. Вторая группа моделей определяет напряженно - деформированное состояние материалов за пределами упругого деформирования в зависимости от вида напряженного состояния [4]. Если при этом пределы текучести при растяжении или сжатии различаются, то такие материалы принято называть материалами с эффектом SD (strength-different) [5], в буквальном переводе — разнокрепкими.

Отечественные и зарубежные экспериментальные исследования [6] [7] показывают, что абсолютная разница в пределах текучести у материалов эффектом SD при растяжении и сжатии в разных направлениях может достигать 25–30%.

Введем новый параметр  $d$  как отношение предела текучести при сжатии одномерного образца  $\sigma_s$  к пределу текучести при растяжении  $\sigma_e$ .

Построение предполагаемой математической модели изгиба SD-балок заключается в принятии ряда положений, в том числе гипотезы плоских сечений, одноосности нагружения, схемы идеальной пластичности [8]. Для задач изгиба в упругой стадии и при изотропном упруго-пластическом изгибе эти допущения позволяют построить точные решения, удовлетворяющие уравнениям равновесия и совместности деформаций [9]. В случае, когда точных

решений построить не удастся, математические задачи теории пластичности и нелинейной упругости можно рассматривать численно [10] или асимптотическими методами [11].

## 2 Математическая модель изгиба горизонтальной SD балки при чистом изгибе

### 2.1 Постановка задачи

В данной работе рассматриваются задачи об изгибе свободно опертой и консольной балок постоянного прямоугольного сечения в случае чистого изгиба моментом.

При таких постановках задачи для изотропных, равнопрочных балок рассмотрены Л. М. Качановым [12]. В нашем случае считаем, что материал балок обладает эффектом SD, а именно: при упругом деформировании растяжение или сжатие происходит с одинаковым модулем упругости, переход в пластическое состояние происходит при различных уровнях напряжений растяжения или сжатия, при пластическом деформировании материал считаем пластически анизотропным.

## 2.2 Исследования НДС свободно опертой и консольной SD балок

Рассмотрим призматические балки прямоугольного сечения толщиной  $2h$ , шириной  $b$  и длиной  $L$ , нагруженные на торцах моментом  $M$ , который вызывает изгиб бруса в плоскости  $xoz$ .

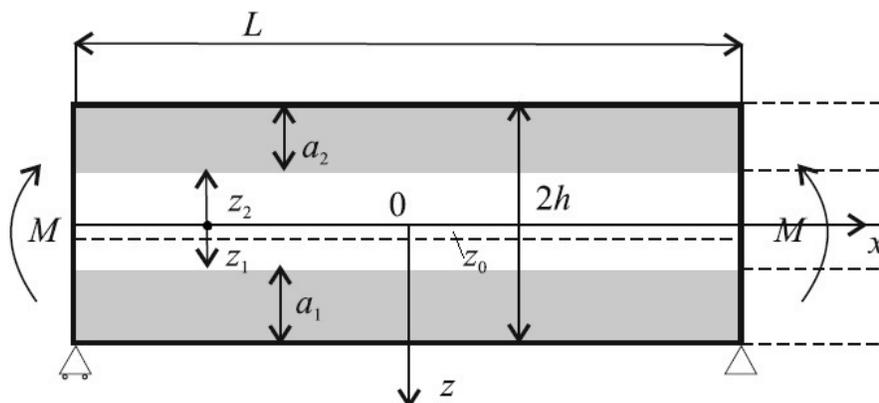


Рис. 1: Схема изгиба свободно опертой балки постоянным моментом

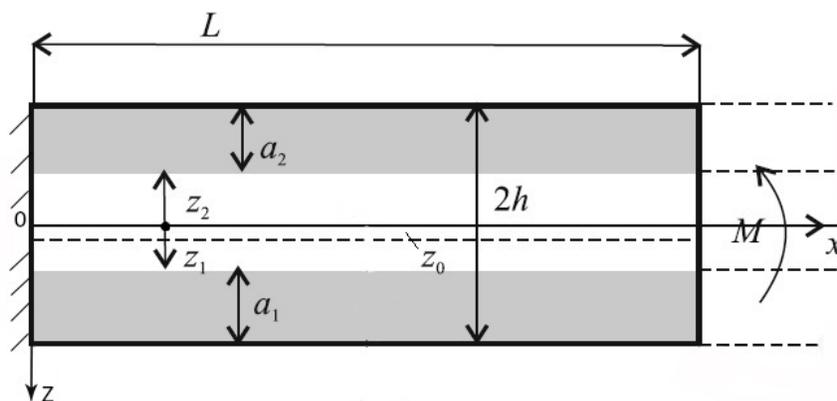


Рис. 2: Схема изгиба консольной балки постоянным моментом

На Рис.1 и на Рис.2 области балок, которые находятся в пластическом состоянии, заштрихованы. Предположение об эффекте SD балки приводит к нарушению симметрии при развитии пластических деформаций, следовательно имеет место смещение нейтральной оси по сравнению со средней геометрической. Поэтому введем смещение  $z_0$  и величины  $z_1$ ,  $z_2$ , которые будут

характеризовать расстояния от нейтральной оси до границы раздела упругой и пластической частей балки в областях растяжения и сжатия. Продольное напряжение при чистом изгибе не зависит от  $x$ , поэтому линии раздела пластических и упругого состояний являются прямыми. В дальнейшем будем считать, что предел текучести при растяжении меньше предела текучести при сжатии, т. е.  $d \geq 1$ .

Условие чистого изгиба дает нам возможность выписать компоненту продольного напряжения  $\sigma_x$  в упругой стадии согласно закону Гука, остальными компонентами напряжений мы можем пренебречь [11]:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x, \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (1)$$

В пластической стадии деформирования следуем теории идеальной пластичности без упрочнения ( $\sigma_e = \text{const}$ ,  $\sigma_s = \text{const}$ ) и используем условие пластической несжимаемости  $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$ . Введем обозначения:  $M_t$  — значение изгибающего момента  $M$  при появлении пластических деформаций на нижней плоскости балки в области растяжения;  $M_*$  — значение изгибающего момента при появлении пластичности на верхней плоскости балки в области сжатия;  $M_k$  — критическое значение изгибающего момента, при котором балка целиком переходит в пластическое состояние и перестает сопротивляться изгибу. Введем еще  $M_0$  как критический момент при  $d = 1$ .

Процесс появления и развития пластичности при чистом изгибе происходит следующим образом: при росте изгибающего момента до значения  $M_t$  ( $M \leq M_t$ ) балка деформируется упруго и распределение напряжения  $\sigma_x$  по толщине происходит по линейному закону (рис.3).

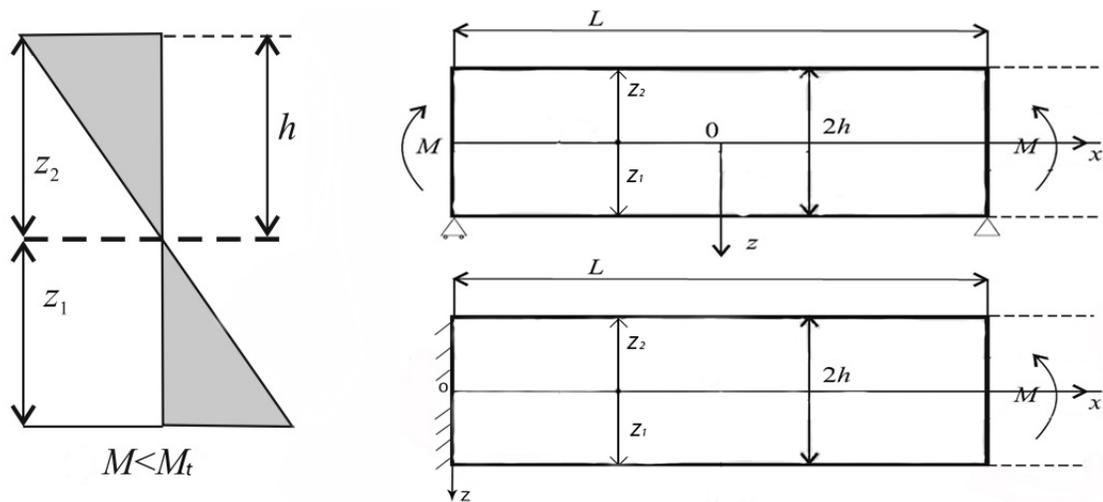


Рис. 3: Эпюры напряжения балки при упругом деформировании

Затем появляется пластический слой на нижней поверхности и с ростом значения изгибающего момента до значения  $M_*$  ( $M_t \leq M \leq M_*$ ) этот слой увеличивается по толщине (рис. 4)

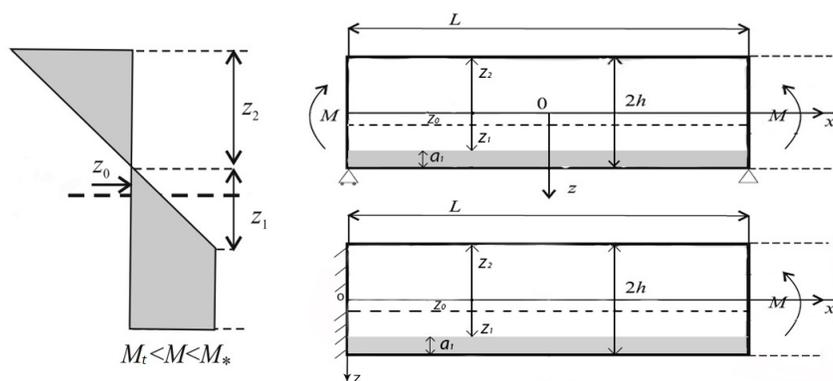


Рис. 4: Эпюры напряжения балки с одной зоной пластичности

Далее появляется пластический слой на верхней поверхности и он увеличивается по толщине с ростом значения изгибающего момента  $M$  до значения критического момента  $M_k$  ( $M_* \leq M \leq M_k$ ) (рис.5)

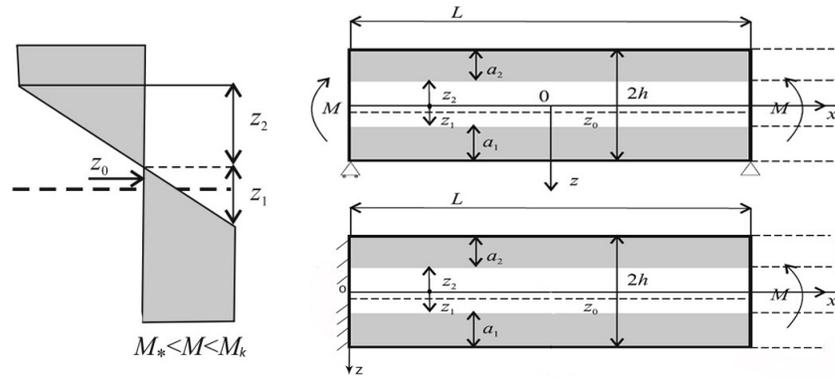


Рис. 5: Эпюра напряжения балки с двумя зонами пластичности

Рассмотрим эпюру напряжения  $\sigma_x$  в произвольном сечении  $x$  бруса  $M_* \leq M \leq M_k$  (рис.5). Равновесие элемента поперечного сечения означает равенство заштрихованных площадей сверху и снизу нейтральной оси. Запишем это равенство:

$$(2h - a_2 - z_1 - z_2)\sigma_e + 0.5z_1\sigma_e = a_2\sigma_s + 0.5z_2\sigma_s \quad (2)$$

Здесь через  $a_2$  обозначена толщина пластического слоя в области сжатия. Введем еще аналогичную величину  $a_1$  для описания толщины пластического слоя в области растяжения. Получим

$$z_1 + a_1 + z_2 + a_2 = 2h \quad (3)$$

Далее используем соотношение, которое следует из подобия треугольников,  $d = z_2/z_1$ . Выразим  $a_2$  из (2):

$$a_2 = \frac{2h}{1+d} - \frac{z_1(1+d)}{2} \quad (4)$$

Теперь можно найти толщину пластического слоя  $a_1$  в области растяжения

из (3),

$$a_1 = \frac{2hd}{1+d} - \frac{z_1(1+d)}{2} \quad (5)$$

Толщина пластических областей установлена в зависимости от величины  $z_1$ . Теперь найдем смещение  $z_0$  из очевидного равенства

$$h - (a_2 + z_2) = z_0,$$

следовательно

$$z_0 = \frac{h(d-1)}{d+1} - \frac{z_1(1+d)}{2} \quad (6)$$

## 2.3 Основные соотношения

Видим, что смещение  $z_0$  зависит линейно от толщины упругого слоя в области растяжения  $z_1$ . Воспользуемся условием непрерывности напряжения  $\sigma_x$  на границе упругой и пластических областей при растяжении и сжатии:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = Ez_1\kappa = \sigma_e, \quad \sigma_x = E\varepsilon_x = Ez_2\kappa = \sigma_s, \quad (7)$$

где  $\kappa$  — кривизна нейтральной оси балки, и выразим  $z_1$  и  $z_2$ :

$$z_1 = \frac{\sigma_e}{E\kappa}, \quad z_2 = \frac{\sigma_s}{E\kappa} \quad (8)$$

Запишем момент в любом сечении  $x$ :

$$M = b \left( \int_{-h+z_0}^{-z_2} (-\sigma_s)z dz + \int_{-z_2}^{z_1} E\varepsilon_x z dz + \int_{z_1}^{h+z_0} (-\sigma_e)z dz \right) \quad (9)$$

Подставим в (9) соотношения (7) и (8). После преобразований имеем

$$M = b \left( \sigma_e \left( \frac{(h+z_0)^2}{2} - \frac{z_1^2}{2} \right) + \sigma_s \left( \frac{(h-z_0)^2}{2} - \frac{z_2^2}{2} \right) + E\kappa \left( \frac{z_1^3}{3} - \frac{z_2^3}{3} \right) \right) \quad (10)$$

Таким образом, мы определили внутренний изгибающий момент, который зависит от переменных  $Z_0, Z_1, Z_2$ . Приравнивая внутренний изгибающий момент внешнему постоянному моменту  $M$ , получаем уравнение равновесия, при решении которого определяется функция прогиба.

### 2.3.1 Упругий случай

Из соотношения (10) можно найти момент начала образования пластической области в зоне растяжения. При  $z_1=z_2=h$ ,  $Eh\kappa = \sigma_e$  имеем

$$M_t = \frac{2}{3}bh^2\sigma_e \quad (11)$$

Переходим к построению дифференциального уравнения для нахождения функции прогиба балки. Введем в рассмотрение кривизну  $\kappa_0 = \sigma_e / (Eh)$ . Запишем зависимость кривизны от изгибающего момента для упругого случая

$$\frac{\kappa}{\kappa_0} = \frac{3M}{2M_0}, \quad \text{при } 0 \leq M \leq M_t \quad (12)$$

Далее, используя известное в линейной теории соотношение между кривизной и прогибом с учетом правила знаков и дважды интегрируя, получаем зависимость прогиба от продольной координаты:

$$W(x) = \frac{3M}{2Ebh^3} \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2, \quad \text{при } 0 \leq M \leq M_t \quad (13)$$

Коэффициенты  $C_1, C_2$  находятся из граничных условий.

### 2.3.2 Пластический слой в зоне растяжения

Найдем промежуточный момент  $M_*$ , при котором возникает пластичность в зоне сжатия, а в зоне растяжения она уже есть. Это происходит при

$$z_2 = h - z_0, \quad z_0 = \frac{h(1-d)^2}{(1+d)^2}, \quad z_1 = \frac{4h}{(1+d)^2} \quad (14)$$

Момент

$$M_* = \frac{3d-1}{d+1} M_t \quad (15)$$

В диапазоне  $M_t \leq M \leq M_*$  зависимость  $z_0$  от  $z_1$  перестает быть линейной и имеет вид

$$z_0 = (\sqrt{h} - \sqrt{z_1})^2 \quad (16)$$

Запишем зависимость кривизны от изгибающего момента для случая с пластичностью только в зоне растяжения

$$\frac{\varkappa}{\varkappa_0} = \left( \frac{3}{2} - \frac{3M}{4M_0} \right)^{-2}, \quad \text{при } M_t \leq M \leq M_* \quad (17)$$

Аналогично дважды интегрируя, получаем зависимость прогиба от продольной координаты:

$$W(x) = \frac{x^2}{2} \frac{\sigma_e}{Eh} \left( \frac{3}{2} - \frac{3M}{4M_0} \right)^{-2} + C_1 x + C_2, \quad \text{при } M_t \leq M \leq M_* \quad (18)$$

Коэффициенты  $C_1, C_2$  находятся из граничных условий.

### 2.3.3 Две зоны пластичности

Определим критический момент, когда вся пластина становится пластической. Это происходит при  $z_1 = z_2 = 0$ . Тогда из (6) имеем  $z_0 = h(d-1)/(d+1)$  и критический момент

$$M_k = \frac{2bh^2\sigma_e}{d+1} \quad (19)$$

Запишем зависимость кривизны от изгибающего момента для случая с двумя зонами пластичности

$$\frac{\varkappa}{\varkappa_0} = (1+d)^{3/2} \left( \frac{48d}{d+1} - \frac{24M}{M_0} \right)^{-1/2}, \quad \text{при } M_* \leq M \leq M_k \quad (20)$$

Аналогично дважды интегрируя, получаем зависимость прогиба от продольной координаты:

$$W(x) = (1+d)^{3/2} \left( \frac{48d}{d+1} - \frac{24M}{M_0} \right)^{-1/2} \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2, \quad \text{при } M_* \leq M \leq M_k \quad (21)$$

Коэффициенты  $C_1, C_2$  находятся из граничных условий.

### 3 Расчет упруго-пластического изгиба для стали А40ХМ.

Расчеты проводились для стали А40ХМ с техническим пределом текучести  $\sigma_e=760$  МПа, модулем Юнга  $E=212$  ГПа, коэффициентом разнесопротивляемости  $d=1.2$  и размерами  $b=1$ м,  $h=0.1$ м,  $L=10$ м.

Момент образования пластической области в зоне растяжения  $M_t = 5066667$  Н\*м. Промежуточный момент, при котором возникает пластичность в зоне сжатия, а в зоне растяжения она уже есть  $M_* = 5987879$  Н\*м. Критический момент, когда вся пластина становится пластической  $M_k = 8290909$  Н\*м.

#### 3.1 Упругий случай

Выпишем уравнение прогиба для упругого случая

$$W(x) = \frac{3M}{2Ebh^3} \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2, \quad \text{при } 0 \leq M \leq M_t \quad (22)$$

Для свободно опертой балки, используя условия свободного опирания и симметрии задачи, получаем

$$W(x) = \frac{3M}{2Ebh^3} \left( -\frac{x^2}{2} + \frac{L^2}{8} \right), \quad \text{при } 0 \leq M \leq M_t \quad (23)$$

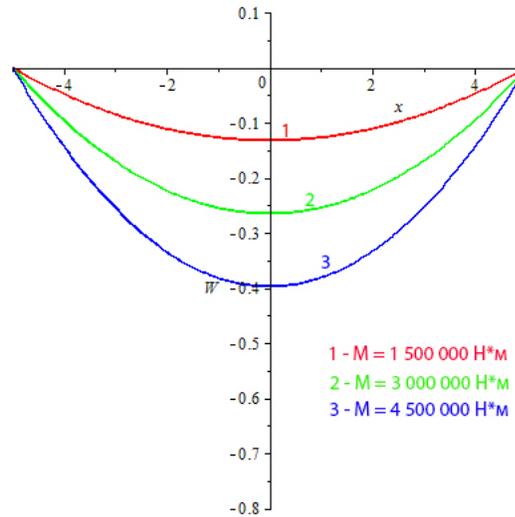


Рис. 6: Прогиб упругой свободно опертой балки

$M$ (Н*м)	1 500 000	3 000 000	4 500 000
$W_{max}(M)$	0.133	0.265	0.398

Для консольной балки используя условия жесткой заделки, получим

$$W(x) = \frac{3M}{2Ebh^3} \left( \frac{x^2}{2} \right), \quad \text{при } 0 \leq M \leq M_t \quad (24)$$

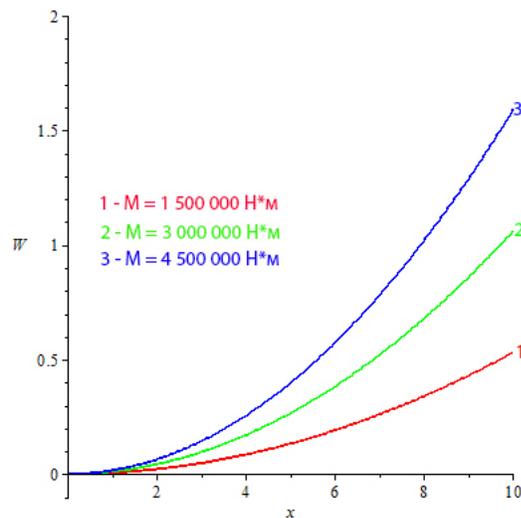


Рис. 7: Прогиб упругой консольной балки

$M (H^*_M)$	1 500 000	3 000 000	4 500 000
$W_{max}(M)$	0.53	1.06	1.59

Результаты расчета согласуются с результатами монографии С.П. Тимошенко [13]

## 3.2 Пластический слой в зоне растяжения

Выпишем уравнение прогиба для случая с одной зоной пластичности

$$W(x) = \frac{\sigma_e}{Eh} \left( \frac{3}{2} - \frac{3M}{4M_0} \right)^{-2} \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2, \quad \text{при } M_t \leq M \leq M_* \quad (25)$$

Для свободно опертой балки, используя граничные условия, получаем

$$W(x) = \frac{\sigma_e}{Eh} \left( \frac{3}{2} - \frac{3M}{4M_0} \right)^{-2} \left( -\frac{x^2}{2} + \frac{L^2}{8} \right), \quad \text{при } M_t \leq M \leq M_* \quad (26)$$

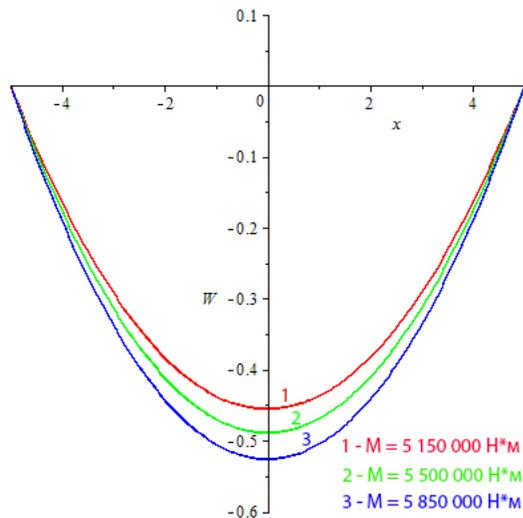


Рис. 8: Прогиб свободно опертой балки с одной пластической зоной

M (Н*М)	5 150 000	5 500 000	5 850 000
$W_{max}(M)$	0.455	0.489	0.526

Для консольной балки, используя граничные условия, получаем

$$W(x) = \frac{\sigma_e}{Eh} \left( \frac{3}{2} - \frac{3M}{4M_0} \right)^{-2} \left( \frac{x^2}{2} \right), \quad \text{при } M_t \leq M \leq M_* \quad (27)$$

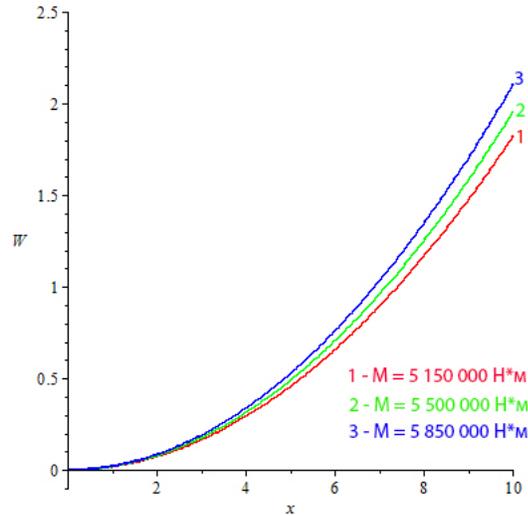


Рис. 9: Прогиб свободно опертой балки с одной пластической зоной

$M$ (Н*м)	5 150 000	5 500 000	5 850 000
$W_{max}(M)$	1.822	1.956	2.105

Отметим, что в упругом и в случае одной пластической зоны результаты расчетов не зависят от коэффициента разнсопротивляемости  $d$ .

### 3.3 Две зоны пластичности

Выпишем уравнение прогиба для случая двумя зонами пластичности

$$W(x) = (1+d)^{3/2} \left( \frac{48d}{d+1} - \frac{24M}{M_0} \right)^{-1/2} \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2, \quad \text{при } M_* \leq M \leq M_k \quad (28)$$

Для свободно опертой балки, используя граничные условия, получаем

$$W(x) = \sqrt{\frac{K}{M_k - M}} \left( -\frac{x^2}{2} + \frac{L^2}{8} \right), \quad \text{где } K = \frac{b\sigma_e^3(1+d)^3}{24E^2} \quad (29)$$

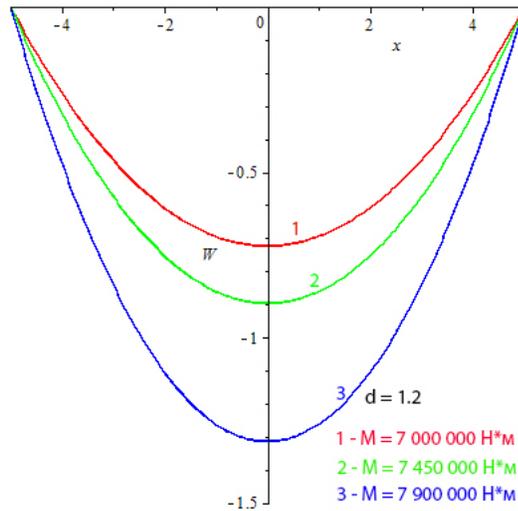


Рис. 10: Зависимость прогиба свободно опертой балки с двумя пластическими зонами от продольной координаты при различных  $M$

d	1.2		
$M$ (Н*м)	7 000 000	7 450 000	7 900 000
$W_{max}(M)$	0.724	0.897	1.316

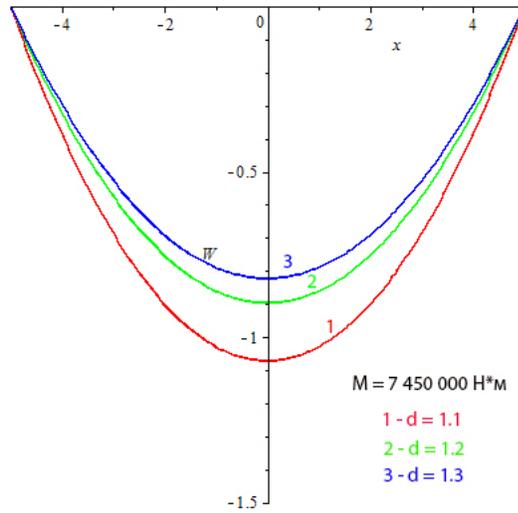


Рис. 11: Зависимость прогиба свободно опертой балки с двумя пластическими зонами от продольной координаты при различных  $d$

$M$ ( $H^*m$ )	7 450 000		
$d$	1.1	1.2	1.3
$W_{max}(m)$	1.07	0.897	0.823

Для консольной балки, используя граничные условия, получаем

$$W(x) = \sqrt{\frac{K}{M_k - M}} \left(\frac{x^2}{2}\right), \quad \text{где } K = \frac{b\sigma_e^3(1+d)^3}{24E^2} \quad (30)$$

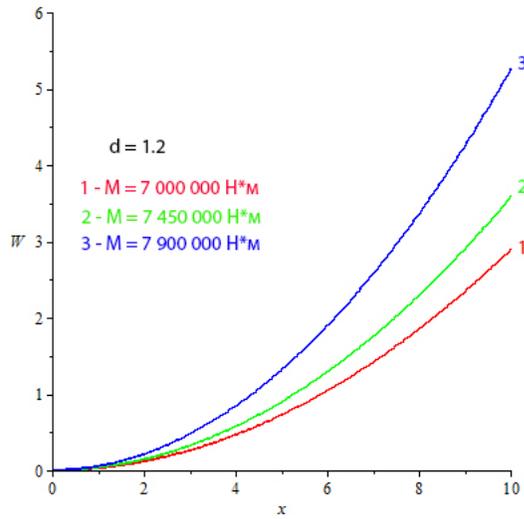


Рис. 12: Зависимость прогиба консольной балки с двумя пластическими зонами от продольной координаты при различных  $M$

d	1.2		
$M$ ( $H^*m$ )	7 000 000	7 450 000	7 900 000
$W_{max}$ ( $m$ )	2.896	3.589	5.264

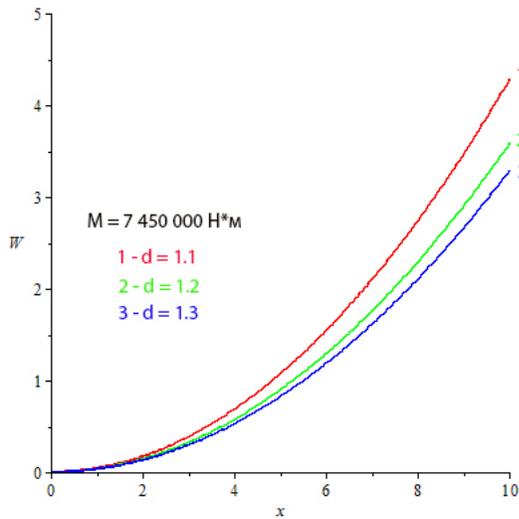


Рис. 13: Зависимость прогиба консольной балки с двумя пластическими зонами от продольной координаты при различных  $d$

$M$ ( $H^*m$ )	7 450 000		
d	1.1	1.2	1.3
$W_{max}$ ( $m$ )	4.29	3.589	3.293

## 4 Расчеты в пакете ANSYS

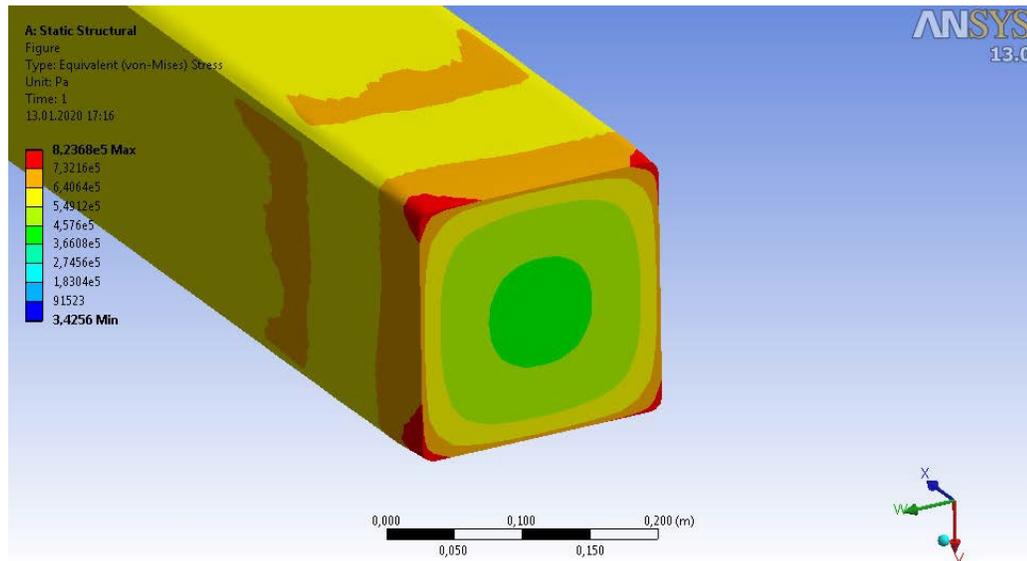


Рис. 14: Напряжения в заделке консоли при  $M=M_{кр}$

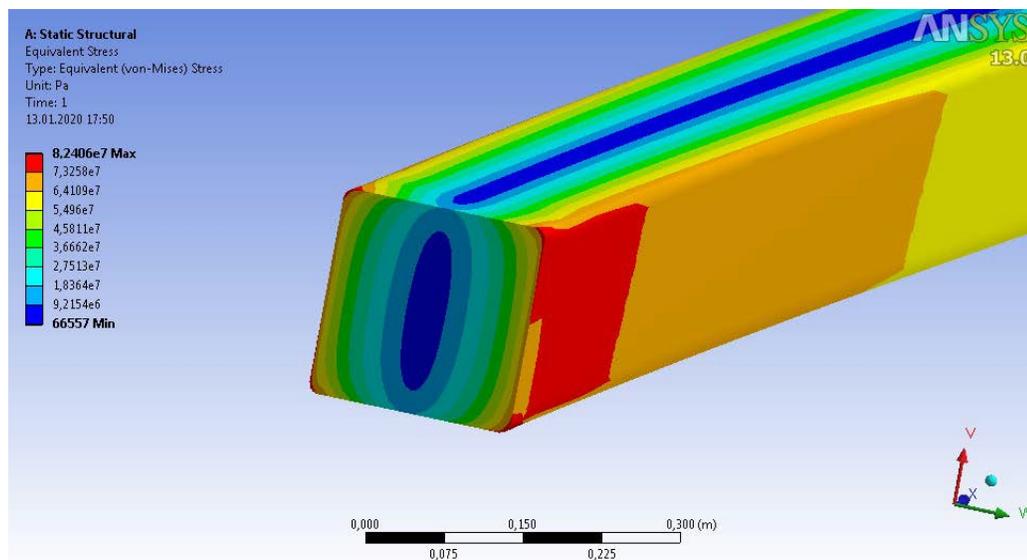


Рис. 15: Напряжения в случае  $M < M_{кр}$

## 5 Заключение

В данной работе построена математическая модель упруго-пластического изгиба горизонтальной балки прямоугольного поперечного сечения, находящейся под действием постоянного изгибающего момента. Используются два варианта закрепления балки — свободное опирание и консоль. Материал балки предполагается пластически анизотропным, обладающим эффектом SD, когда пределы текучести при растяжении и сжатии материала балки различны.

На основе построенной модели решены две задачи упруго-пластического изгиба: чистый изгиб свободно опертой балки и изгиб консольной балки, а также проведено сравнение теоретического расчета и численного моделирования МКЭ.

Основываясь на классической теории изгиба балок и теории идеальной пластичности, задача решается аналитически. Получено дифференциальное уравнение для нахождения кривизны балки. В результате интегрирования получены точные решения для прогиба горизонтальной балки и определены значения изгибающего момента, вызывающего различные случаи НДС балки, в частности определены границы деформирования в упругой стадии, деформирование при образовании слоя пластичности при растяжении и образование двух слоев пластичности при растяжении и сжатии. Теоретические результаты подтверждены расчетом для материала с эффектом SD (сталь А 40ХМ).

Проведено исследование нарушения симметрии в развитии пластичности как следствия воздействия эффекта SD и сделаны численные оценки отклонения нейтральной оси балки от геометрической средней.

Результаты исследований дают новые критерии для возведения вертолет-

ных площадок буровых платформ для шельфовой добычи углеводородов, увеличение их мощности и размеров.

## Список литературы

- [1] Хилл Р. *Математическая теория пластичности*. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
- [2] Доннелл Л. Г. *Балки, пластины и оболочки*. М.: Наука, 1982. 567 с
- [3] Трещёв А. А. *Анизотропные пластины и оболочки из разносопротивляющихся материалов*. Москва; Тула: РААСН. ТулГУ, 2007. 160 с.
- [4] Ломакин Е. В., Мельников А. М. *Пластическое плоское напряженное состояние тел, свойства которых зависят от вида напряженного состояния // Вычислительная механика сплошных сред*. 2009. Т. 2, № 2. С. 48–64.
- [5] Рыбакина О. Г. *Критерий текучести анизотропного материала, обладающего эффектом SD. Исследования по упругости и пластичности // Вестн. Ленингр. ун-та*. 1982, № 14. С. 132–142.
- [6] Унксов Е. П., Овчинников А. Г. *Теория пластических деформаций металлов*. М.: Машиностроение, 1983. 598 с.
- [7] Kulawinski D., Nagel K., Henkel S., Hubner P., Kuna M., Biermann H. *Characterization of stress-strain behavior of a cast TRIP steel under different biaxial planar load ratios // Engineering Fracture Mechanics*. Vol. 78, 2011. P. 1684–1695.
- [8] Ильюшин А.А., *Пластичность : Основы общ. мат. теории / Акад. наук СССР. Отд-ние техн. наук. - Москва : Изд-во Акад. наук СССР, 1963. - 271 с.*

- [9] Павилайнен Г. В. *К вопросу упруго-пластического деформирования конструкций* // *Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1.* 1992. Вып. 1. С. 70–75.
- [10] Юшин Р.Ю. *О возможности учета пластической анизотропии при изгибе круглых пластин* // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1.* 2010. Вып. 1. С. 134–140.
- [11] Bauer S. M., Filippov S. B., Smirnov A. L., Tovstik P. E. *Asymptotic methods in mechanics with applications to thin shells and plates* // *Asymptotic Methods in Mechanics. CRM Proc. & Lecture Notes.* 1993. Vol. 3. P. 3–141.
- [12] Качанов Л. М. *Основы теории пластичности.* М.: Гостехиздат, 1956. 324 с.
- [13] Тимошенко С.П., *Теория упругости* / Пер. с англ. М.И. Рейтмана; Под ред. Г.С. Шапиро. - Москва : Наука, 1975. - 575 с.
- [14] Павилайнен Г. В., Бембеева А. И., Канин М. С. *Упруго-пластический изгиб разнопрочных балок* // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1.* 2014. Т. 1(59). Вып. 2. С. 284–291.