САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Лачугин Даниил Владимирович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ИССЛЕДОВАНИЯ БАЛОК С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА SD МАТЕРИАЛА

01.03.03 — Механика и математическое моделирование

Выпускная квалификационная работа

Научный руководитель —

кандидат физико-математических наук,  
доцент Г. В. Павилайнен

Санкт-Петербург

2021

Оглавление

[Введение 2](#_Toc74606011)

[1. Постановка задачи 4](#_Toc74606012)

[2. Смещение нейтральной оси 8](#_Toc74606013)

[3. Моменты 11](#_Toc74606014)

[4. Дифференциальные уравнения 13](#_Toc74606015)

[5. Численный расчет 15](#_Toc74606016)

[5.1. Упругий изгиб 15](#_Toc74606017)

[5.2. Упруго-пластический изгиб с одной зоной пластичности 17](#_Toc74606018)

[5.3. Случай с двумя зонами пластичности 20](#_Toc74606019)

[6. Устойчивость вертикальной балки под действием собственного веса 23](#_Toc74606020)

[Заключение 25](#_Toc74606021)

## Введение

Задачи проектирования и строительства требуют создания все более сложных математических моделей конструкций, учитывающих пластические свойства материалов. Основы математической теории пластичности можно найти в работах [1], [2]. В предлагаемой математической модели предлагается учесть зависимость механических характеристик материала от знаков возникающих напряжений и вида напряженного состояния, такие материалы называют разносопротивляющимися или разномодульными [3], в научной литературе иногда используется термин SD-материалы [4], [5].

Построение предполагаемой математической модели изгиба балок заключается в принятии ряда положений, в том числе гипотезы плоских сечений, одноосности нагружения, схемы идеальной пластичности. Для задач изгиба в упругой стадии и при изотропном упруго-пластическом изгибе эти допущения позволяют построить точные решения, удовлетворяющие уравнениям равновесия и совместности деформаций [6]. Некоторые результаты для таких балок получены в [7], [8]. В случае, когда точных решений построить не удается, математические задачи теории пластичности и нелинейной упругости можно рассматривать численно [9], [10] или асимптотическими методами.

Результаты исследований прочности стержневых и балочных конструкций из особых конструкционных материалов открывают новые возможности для проектирования и возведения крупных сооружений при одновременном обеспечении их высокой надежности в условиях эксплуатации. К примеру, конструкционные решения при проектировании буровых платформ для шельфовой добычи углеводородов, увеличение мощности и размеров сооружений в судостроении, повышение параметров рабочих давлений и внешних воздействий, в том числе и ледовой нагрузки, существенно сказывается на стоимости таких конструкций и их эффективности при использовании в неблагоприятных климатических условиях. Особо остро ставится вопрос о критериях длительной механической работоспособности, прочности и надежности при работе в упруго-пластической стадии нагружения.

## Постановка задачи

Рассматриваем упруго-пластический изгиб вертикальной балки, защемленной на нижнем конце. На верхнем конце действует сосредоточенная следящая нагрузка . Материал консоли обладает свойством разнопрочности при растяжении и сжатии. Расчет проводится до момента образования в консоли пластического шарнира в месте жесткой заделки. Для описания эффекта пластической анизотропии материала при растяжении и сжатии вводим безразмерный параметр *d* как отношение предела текучести при сжатии одномерного образца к пределу текучести при растяжении .

*d= (1)*

Далее предполагаем, что  *1*, что характерно для многих видов сталей и металлических сплавов. У вертикальной балки предполагается прямоугольное сечение с размерами на , длина балки . Деформацией сдвига в поперечном сечении при изгибе пренебрегаем.

Для исследования влияния веса балки на процесс упруго-пластического изгиба введем модифицированный параметр, а именно

*=* , (2)

где - удельный вес материала балки.

Допущение об идеальной пластичности эквивалентно допущению о том, что коэффициент Пуассона в пластических областях равен , а в упругих областях он ниже этого значения, чаще всего , следовательно при переходе через линию раздела упругой и пластической области для некоторых составляющих тензора напряжений может нарушаться требование непрерывности, но если рассматривается одноосное нагружение, то имеется одна основная составляющая тензора напряжений, а остальные не влияют на величину изгибающего момента в сечении. Как известно, при поперечном изгибе гипотеза плоских сечений не включает в себя никаких предположений о свойствах материала, из которого изготовлен брус.

Процесс появления и развития пластических зон в вертикальной балке схематически показан на рис. 1.

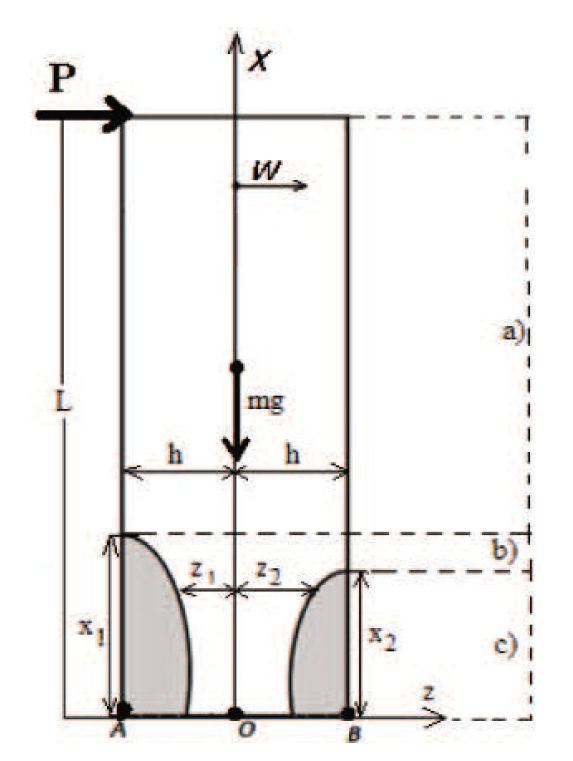


Рис.1 Схема изгиба вертикальной балки силой

В рассматриваемом случае материал балки таков, что пластические области в зоне растягивающих нагрузок формируются ранее, чем в области сжимающих. При упругом изгибе предполагается, что растяжение и сжатие происходит с одинаковым модулем упругости.

На рис.1 области балки, которые находятся в пластическом состоянии, заштрихованы. Из-за нарушения симметрии необходимо сделать некоторые замечания по поводу выбора системы координат. Предположение о наличии пластической анизотропии материала при растяжении и сжатии материала балки приводит к нарушению симметрии при развитии пластических деформаций, следовательно, имеет место смещение нейтральной оси по сравнению со средней геометрической. Поэтому выберем начало координат в центре балки на нейтральной оси. Направление осей указано на рис.1, а для вычисления отклонения нейтральной оси от средней геометрической введем функцию и две новые функции , , которые будут характеризовать расстояния от нейтральной оси до границы раздела упругой и пластической части балки в областях растяжения и сжатия. А также введем длины пластических зон и . В дальнейшем, индекс 1 будет характеризовать величины в области растяжения балки, а индекс 2 - в области сжатия.

Фиксируем три случая различных НДС в сечении балки: упругий случай при (рис.2.а), случай с одной пластической зоной в области растяжения при (рис.2.b) и случай с двумя несимметричными пластическими зонами в области растяжения и в области сжатия при (рис.2.с).

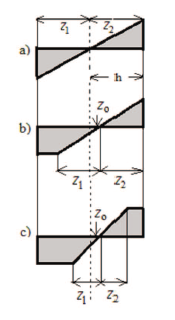


Рис.2 Схема распределения напряжений в сечении вертикальной балки.

Ось балки, напряжение в которой равно нулю, будет называться нейтральной осью. Для обеспечения равновесия в каждом сечении, площади фигур на эпюре напряжений (рис.2) слева и справа от нейтральной линии должны быть равны, следовательно, при учете эффекта SD происходит смещение нейтральной оси от геометрической центральной оси.

Введем следующие обозначения: - общий момент относительно нейтральной оси, при котором образуется первая зона пластичности при растяжении, - общий момент относительно нейтральной оси, при котором образуются вторая зона пластичности. - общий момент относительно нейтральной оси, при котором в нижнем защемленном сечении балки пластические зоны смыкаются, образуя пластический шарнир. , , - аналогичные моменты, только без учета веса. , , , , , - соответствующие этим моментам нагрузки.

## Смещение нейтральной оси

Необходимо узнать, в какую сторону смещается нейтральная ось относительно средней геометрической оси. Для этого докажем следующую теорему: е 1, тогда нейтральная ось смещается вправо относительно средней геометрической оси. Доказательство построим методом от противного. Предположим, что нейтральная ось смещается влево и . Составим систему уравнений (3) для случая, когда имеется одна зона пластичности в области растяжения, и появилась точка пластичности в области сжатия:

(3)

Второе уравнение системы получено из равенства площадей фигур на эпюре напряжений (рис.2) слева и справа от нейтральной линии. Первое и третье уравнения получены из геометрических соображений. Решив систему, получаем:, что противоречит нашему предположению. Это значит, что нейтральная ось смещается вправо.   
 Для нахождения рассмотрим эпюру напряжений в произвольном сечении балки при . Равновесие элемента поперечного сечения означает равенство заштрихованных площадей сверху и снизу нейтральной оси. Запишем это равенство

(4)

Заметим, для любого имеет место соотношение

*(5)*

В случае выполняется

(6)

Далее используем соотношение, которое следует из подобия треугольников . Выразим из (5)

(7)

Теперь можно найти толщину пластического слоя в области растяжения из (5), а именно

(8)

Толщины пластических областей установлены в зависимости от величины . Теперь найдем соотношение из следующего равенства

(9)

Откуда

(10)

Таким образом, нейтральная ось в критическом случае образования пластического шарнира присмещается по закону:

(11)

В таблице 1 приведена зависимость от при .

Таблица 1. Расчет смещения нейтральной оси при различных значениях параметра d

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 1,1 | 1,2 | 1,3 |
|  | 0 | 0,025 | 0,045 | 0,065 |

По данным этой таблицы видно, что смещение нейтральной оси составляет 6,5% от общей толщины балки.

## **Моменты**

Запишем момент в сечении в самом общем виде, предполагая, что в балке имеются пластические зоны и слева, и справа с учетом веса:

(12)

После интегрирования имеем

(13)

Аналогично для случая без учета веса:

(14)

После интегрирования имеем

(15)

Из соотношений (13) и (15) можно найти момент начала образования пластической области в зоне растяжения в задаче с учетом веса и без учета веса соответственно.

При получаем

(16)

(17)

Так же из соотношений (13), (15) и (10) при , найдем общий момент относительно нейтральной оси, при котором образуются вторая зона пластичности:

(18)

(19)

момент, при котором в нижнем защемленном сечении балки пластические зоны смыкаются, образуя пластический шарнир. Это происходит при . Тогда из (13),(15) и (11) получим:

(20)

(21)

По таблице 2 видно, что с учетом веса критический момент увеличивается, но очень незначительно. Следовательно, вес не влияет на такой тип задачи. В дальнейшем мы его рассматривать не будем. Также отметим, что учет веса конструкции дает некоторый запас прочности.

Таблица 2. Значения и при различных

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| d | 1,0 | 1,1 | 1,2 | 1,3 |
| МПа | 1,520 | 1,592 | 1,658 | 1,718 |
| МПа | 1,518 | 1,591 | 1,657 | 1,717 |
|  | 0,10% | 0,09% | 0,09% | 0,08% |

## Дифференциальные уравнения

Рассмотрим упругий случай при (рис.2.а). Здесь смещение нейтральное оси и . Подставляя эти значения для в (15), получим:

(22)

Воспользуемся известным соотношением между кривизной и прогибом , получим дифференциальное уравнение для упругого случая:

(23)

где - осевой момент инерции.

Так как изгибающий момент внешних сил равен

, (24)

то окончательное дифференциальное уравнение примет вид:

(25)

Рассмотрим случай с одной пластической зоной в области растяжения при (рис.2.б). Здесь смещение нейтральной оси находится по формуле (10) и выполняется геометрическое условие . Аналогично, как и в случае с упругим изгибом, получим дифференциальное уравнение:

(26)

В случае с двумя пластическими зонами при (рис.2.в), смещение нейтральное оси находится по формуле ()

Аналогично выразим :

(27)

## Численный расчет

Последовательно рассмотрим все стадии изгиба.

## Упругий изгиб

При балка находится в упругом состоянии. Определим значение . Для этого подставим (17) в (24) при . Получаем, что МН. Стоит отметить, что в случае с упругим изгибом значение не зависит от . Граничные условия защемления нижнего конца балки имеют вид:

. (28)

Соотношение для прогиба (25) после двойного интегрирования с учетом граничных условий имеет вид:

(29)

Это решение совпадает с решением Л.Г. Доннелла для горизонтальных консольных балок. На Рис.3 приведен расчет при 5-ти различных нагрузках. Упругое решение не зависит от пластических свойств материала и в соотношении (29) не участвует.

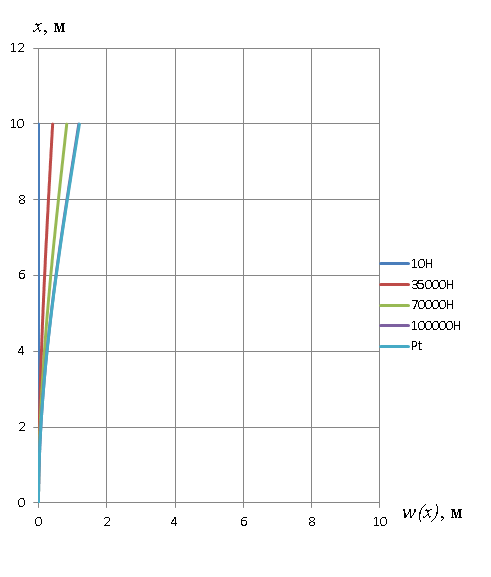


Рис.3 Изменение прогиба по длине балки при различных .

## Упруго-пластический изгиб с одной зоной пластичности

При вбалке присутствует одна зона пластичности в области растяжения при 0.

Определим значение при различных значениях . Для этого подставим (19) в (24) при . В табл.3 представлены результаты расчета и .

Таблица 3. Расчет и при различных d

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| d | 1,0 | 1,1 | 1,2 | 1,3 |
| МПа | 1,013 | 1,109 | 1,198 | 1,278 |
| МН | 0,101 | 0,111 | 0,120 | 0,128 |

Дифференциальное уравнение для данного случая имеет вид:

при

при 0

(30)

Решение (30) представимо в виде:

при 0

при

(31)

где ,, , .

Константы интегрирования , определяются из условий непрерывности функции прогиба и функции угла поворота сечения ( «склейки» решений):

(32)

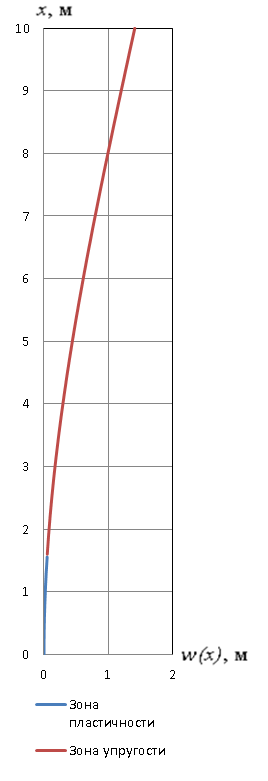
 Значение определяется из (24), при условии и . Получаем, что - длина пластической зоны в области растяжении.

Рис.4 Изменение прогиба по длине балки при .

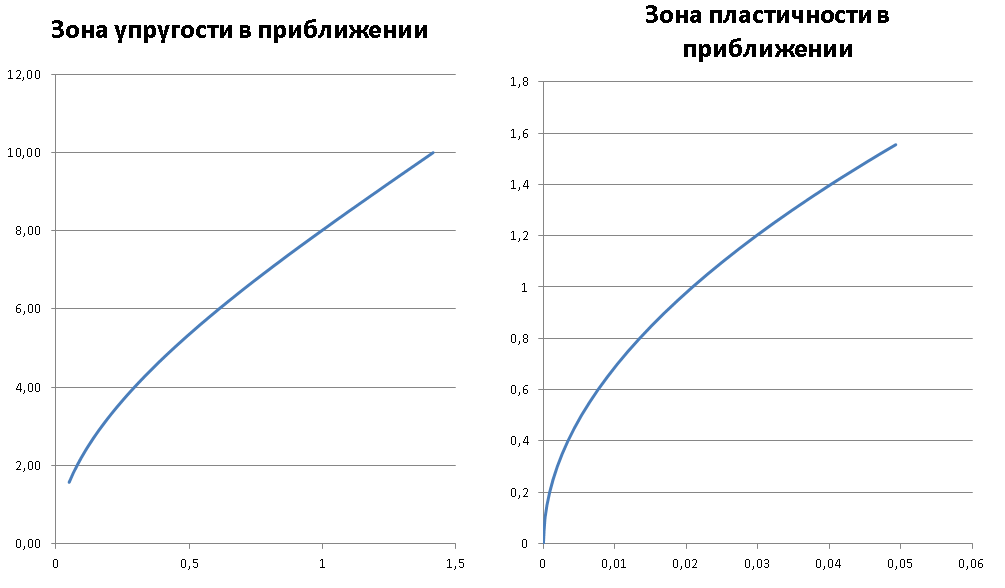


Рис.5 Зона упругости в приближении

Рис.6 Зона пластичности в приближении

На приведенных рисунках можно проанализировать, как ведет себя балка при упругом изгибе и в зоне упруго-пластического изгиба.

Видно, что на левом рисунке изменение кривизны происходит практически по линейному закону, следовательно, кривизна практически постоянна и балка смещается, как единое целое, поворачиваясь вокруг точки . В упруго-пластической части на правом рисунке видно, что кривизна меняется существенно.

## Случай с двумя зонами пластичности

При вбалке присутствуют три участка с принципиально различными НДС.

Определим значение при различных значениях . Для этого подставим () в ) при . В таблице 4 представлены результаты расчета и .

Таблица 4. Расчет и при различных d

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| d | 1,0 | 1,1 | 1,2 | 1,3 |
| МПа | 1,518 | 1,591 | 1,657 | 1,717 |
| МН | 0,152 | 0,159 | 0,166 | 0,172 |

Дифференциальное уравнение для данного случая имеет вид:

0

(33)

Решив дифференциальное уравнение (33), получим:

(34)

,

0

где ,, , , ,, .

Константы интегрирования , , , определяются из условия склейки решений:

(35)

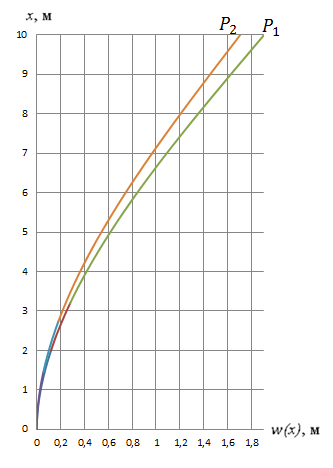


Рис.7 Изменение прогиба по длине балки при и .

На приведенном графике видно, что при увеличении нагрузки происходит рост пластических зон и итогового прогиба.

Таким образом, задача нахождения прогиба при упруго-пластическом изгибе вертикальной балки без учета собственного веса, защемлённой на нижнем конце, решена полностью.

## Устойчивость вертикальной балки под действием собственного веса

Примем систему координат по рис.8. Обозначим силу веса, приходящуюся на

единицу длины, через p. В сечении x сжимающая сила равна Px = px, а поперечная сила

Q = Px= px (36)

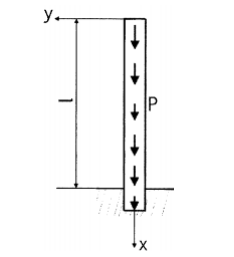


Рис.8 Устойчивость под влиянием собственного веса.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси имеет вид   
  
El= Pw (37)

После дифференцирования уравнение примет вид:

El+ px=0 (38)

M= El=0 при x=0 (39)

=0 при x=L (40)

Решение данной задачи приведено Тимошенко С. П.

pкр= 7,84 (41)

Удельный вес в нашем примере

𝛾=78 × 103 𝐻/м3 (42)

а критический удельный вес

𝛾кр=55 × 105 𝐻/м3 (43)

Введем понятие приведенной нагрузки, понимая под этим силу , сосредоточенную у свободного конца и эквивалентную распределенной нагрузке в задаче устойчивости.

=*px*= 1 × 104 𝐻 (44)– приведенная нагрузка от собственного веса

= 𝛾кр \*2ℎ𝑏𝐿 = 69 × 104𝐻 (45) – критическая приведенная нагрузка

Найдем какую максимальную вертикальную силу, приложенную к свободному концу, сможет выдержать балка прежде, чем потечь.

𝑃𝑚𝑎𝑥 = 𝑆𝜎𝑠 = 30 × 106𝐻 (46)

Видно, что балка потеряет устойчивость раньше, чем появятся пластические

деформации вблизи заделки от вертикальной нагрузки.

Найдем какую полезную нагрузку может нести конструкция.

−=68 × 104𝐻 (47) -таким образом, балка выдержит 68 тонн.

Заключение

Построенная математическая модель позволяет изучить напряженно-деформированное состояние балки прямоугольной формы из сложного по физическим свойствам материала. Метод нахождения кривизны для разных состояний балки можно использовать при изгибе горизонтальных консолей из SD-материалов.

Оценка влияния веса показала незначительное уменьшение критического момента появления пластического шарнира. Таким образом, влиянием дополнительного изгибающего момента можно пренебречь и сильно облегчить решение задачи.

Одновременно остается вопрос о влиянии веса на поперечные напряжения в нижней части балки, т.е. вблизи заделки. Учет этих напряжений может существенно изменить напряженное состояние балки, а значит, и изменить порядок появления и развития пластических областей. Возникает необходимость дополнительного исследования о границах применимости одномерной модели при изгибе.

Список литературы

[1] Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.

[2] Доннелл Л. Г. Балки, пластины и оболочки. М.: Наука, 1982. 567 с

[3] Трещёв А. А. Анизотропные пластины и оболочки из разносопротивляющихся материалов. Москва; Тула: РААСН. ТулГУ, 2007. 160 с.

[4] Ломакин Е. В., Мельников А. М. Пластическое плоское напряженное состояние тел, свойства которых зависят от вида напряженного состояния // Вычислительная механика сплошных сред. 2009. Т. 2, No 2. С. 48–64.

[5] Рыбакина О. Г. Критерий текучести анизотропного материала, обла-

дающего эффектом SD. Исследования по упругости и пластичности //Вестн. Ленингр. ун-та. 1982, No 14. C. 132–142.

[6] Унксов Е. П., Овчинников А. Г. Теория пластических деформаций металлов. М.: Машиностроение, 1983. 598 с.

[7] Kulawinski D., Nagel K., Henkel S., Hubner P., Kuna M., Biermann H. Characterization of stress-strain behavior of a cast TRIP steel under different biaxial planar load rations // Engineering Fracture Mechanics. Vol. 78, 2011. P. 1684–1695.

[8] Ильюшин А.А., Пластичность : Основы общ. мат. теории / Акад. наук СССР. Отд-ние техн. наук. - Москва : Изд-во Акад. наук СССР, 1963. -271 с.

[9] Павилайнен Г. В. К вопросу упруго-пластического деформирования конструкций // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. 1992. Вып. 1. С. 70–75.

[10] Юшин Р.Ю. О возможности учета пластической анизотропии при изгибе круглых пластин // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2010. Вып. 1. С. 134—140.

[11] Bauer S. M., Filippov S. B., Smirnov A. L., Tovstik P. E. Asymptotic methods in mechanics with applications to thin shells and plates // Asymptotic Methods in Mechanics. CRM Proc. & Lecture Notes. 1993. Vol. 3. P. 3–141.

[12] Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 324 с.

[13] Тимошенко С.П., Теория упругости / Пер. с англ. М.И. Рейтмана; Под ред. Г.С. Шапиро. - Москва : Наука, 1975. - 575 с.

[14] Павилайнен Г. В., Бембеева А. И., Канин М. С. Упруго-пластический изгиб разнопрочных балок // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2014. Т. 1(59). Вып. 2. С. 284—291.