

Санкт-Петербургский государственный университет

***ЖДАНОВА Анастасия Юрьевна***

**Выпускная квалификационная работа**

***Стохастические методы оптимизации для задач динамики пучка  
заряженных частиц***

Уровень образования:

Направление *09.06.01 «Информатика и вычислительная техника»*

Основная образовательная программа *МК.3021.2017 «Системный  
анализ, информатика и управление»*

Научный руководитель:  
заведующий кафедрой КМиМС  
факультета ПМ-ПУ СПбГУ,  
д.ф.-м.н., профессор  
Андрианов Сергей Николаевич.

Рецензент:  
ведущий научный сотрудник,  
«Объединенный институт ядерных исследований», г. Дубна, М.О.,  
кандидат технических наук, старший научный сотрудник  
Юдин Иван Павлович

Санкт-Петербург

2021

# Содержание

|   |    |
|---|----|
| Введение .....  | 3  |
| Постановка задачи .....   | 5  |
| Обзор литературы .....  | 6  |
| Глава 1. Математическая модель оптимизации динамики интенсивных пучков заряженных частиц .....          | 14 |
| 1.1. Динамические уравнения пучка заряженных частиц .....   | 14 |
| 1.2. Критерий качества управлений .....   | 23 |
| Глава 2. Численное моделирование динамики интенсивных пучков заряженных частиц и сравнение методов..... | 26 |
| 2.1. Метод роя частиц.....  | 26 |
| 2.2. Генетический алгоритм глобальной оптимизации.....  | 33 |
| 2.3. Генетический алгоритм многокритериальной оптимизации .....   | 44 |
| Выводы .....  | 55 |
| Заключение .....  | 57 |
| Список литературы.....  | 58 |

## Введение

Всё чаще квантовые и математические методы в современном мире применяются к различным областям знаний, в частности к медицине [15, 57]. Важную роль на текущий момент завоевывает квантовая физика при лечении доброкачественных и злокачественных опухолей. Каждый случай является при лечении уникальным, и при обобщении для решения круга данных задач, необходимо учитывать различные факторы.

Применение пучков заряженных частиц в медицине для удаления опухолей имеет огромное значение и практическое применение. Однако для получения качественного результата на выходе необходимо подобрать наиболее подходящий алгоритм для оптимизации динамики частиц пучка [5, 43, 76, 82]. Качество оптимизации пучка можно оценивать по многим параметрам, и чаще всего из-за сложности физического процесса и количества вовлеченных в него частиц, нельзя выбрать только один конкретный параметр, который бы полностью характеризовал «качество» динамики пучка заряженных частиц. Исходя из этих соображений были выбраны такие характеристики динамики пучка, как однородность пучка по фазам входящих в пучок частиц, по энергиям этих частиц, а также по доле частиц, дошедших до конца ускорителя и находящихся в режиме ускорения [36, 45].

В качестве математической модели для описания динамики пучка был выбрана хорошо зарекомендовавшая себя математическая модель интенсивного пучка в поле бегущей волны в рамках линейного волноводного ускорителя [8, 62, 63].

В связи с тем, что у нас присутствуют несколько критериев оптимизации не представляется возможным применение классических методов оптимизации одного критерия качества динамики, поэтому имеет смысл применить стохастические методы оптимизации для задач динамики пучка заряженных частиц. Подобные методы доказали свою эффективность в ряде подобных задач, где присутствуют несколько разнородных критериев оптимизации [34, 46, 52]. В частности, в данной работе будут рассмотрены

метод роя частиц и генетические алгоритмы глобальной и многокритериальной оптимизации. Стохастические методы наиболее подходят к применению для текущих задач, т.к. размерность задач достаточно велика, поэтому найти аналитически градиент критерия качества не представляется возможным. К тому же критерий качества обладает множеством локальных минимумов, а стохастические методы имеют возможность преодолевать локальные минимумы для достижения глобального минимума [83].

Целью данного исследования является сравнение стохастических методов оптимизации для задач динамики пучка заряженных частиц. Также итогом данного исследования станет моделирование и оптимизация примера интенсивного пучка.

Для решения поставленной цели будут решены следующие задачи:

- изучение информационной базы по тематике исследования,
- выделение подходящих направлений и методов,
- применение выбранных методов к заданной математической модели динамики заряженных частиц пучка,
- сравнение результатов выбранных методов.

## Постановка задачи

При проектировании новых ускорителей заряженных частиц и электрофизических установок возникают задачи управления [12]. Объект управления здесь – это заряженные частицы (траектории движения частиц, описанные дифференциальными уравнениями). Управление реализовано со стороны воздействующего внешнего электрического поля. В итоге рассматривается задача пучка (ансамбля) траекторий.

В моем исследовании примером рассмотрения является интенсивный пучок в поле бегущей волны. Эволюция интенсивного пучка моделируется системой уравнений, описывающих динамику синхронной частицы и произвольной частицы пучка [61–63].

В работе рассматриваются стохастические методы оптимизации для данной задачи, которые позволяют снизить фазовый разброс на выходе прибора, уменьшить относительный разброс по энергиям и повысить коэффициент захвата частиц. Основными задачами данного исследования являются численное моделирование и оптимизация вышеупомянутых показателей для линейного волноводного ускорителя различными методами, а также выбора наиболее подходящего из них. Параметры данного ускорителя были взяты [62], т.к. они достаточно удобны для апробации методов, и в дальнейшем полученные результаты можно распространить на другие ускорители заряженных частиц.

## Обзор литературы

Ускорители частиц — это «автоматизированные системы», используемые для ускорения энергии заряженных частиц [16, 18, 30]. Они находят применение во многих областях фундаментальной физики элементарных частиц, от астрофизики до ядерной и атомной физики, а также в медицине и других областях [56–58, 77].

Автоматизированные системы могут выполнять следующие действия:

1. использование высокоточных моделей для онлайн-использования в программах управления (например: прогнозирование, идентификация подробностей в поведении пучка и иных);

2. исключение шума, возникающего в результате взаимодействия системы с окружающим миром, благодаря обучению системы на соответствующих задаче примерах;

3. эффективная идентификация полезной информации в больших объемах данных. В том числе в тех случаях, когда анализ данных не является простым.

4. быстрая настройка в условиях постоянно изменяющихся рабочих условий (например: новые параметры луча);

5. параллельная оптимизация параметров машины по всей системе, для максимизации общих показателей производительности;

6. влияние на обучение и минимизацию ошибки в вычислениях с помощью выбора метода из широкого спектра доступных.

Например, в медицине терапия заряженными частицами — это быстро развивающийся метод прецизионной лучевой терапии, при котором опухоли лечат ионными лучами, актуальный на данный момент. Поскольку системы доставки ионного пучка имеют несколько степеней свободы (включая энергию и плотность потока, траектории пучка), может быть чрезвычайно сложно найти план лечения, который точно соответствует дозе, предписанной для опухоли, при сохранении близлежащих здоровых структур. Эта обратная задача называется обратным планированием лечения. Многие подходы были

предложены для более простого случая рентгеновской терапии [55, 72], но работа, посвященная терапии заряженными частицами, обычно ограничивается оптимизацией плотности потока пучка с учетом траекторий и энергии. Эксперименты с различными конфигурациями облучения и все более сложными алгоритмами оптимизации демонстрируют преимущества и потенциал, открывая новые горизонты терапии заряженными частицами [68].

Одним из способов обеспечения плана лечения лучевой терапией или радио-хирургией является метод роя частиц, примененный в качестве решения проблемы оптимизации и обеспечения местоположения дозы излучения от источника излучения, где решение представляет собой местоположение роя частиц в состоянии минимальной энергии [79].

Также применяются новые подходы с помощью построения нейронных сетей, моделирующих динамику пучка заряженных частиц [39, 50, 51]. В том числе может быть рассмотрен подход симплектической регуляризации для полиномиальных нейронных сетей, который всегда ограничивает обученную модель гамильтоновыми системами и значительно улучшает процедуру обучения. Подобные сети могут быть использованы для моделирования динамики пучка или для точной настройки модели лучевой оптики с экспериментальными данными. Структура сети позволяет моделировать большие ускорители с большим количеством магнитов [42]. Также с помощью нейронных сетей могут быть решены задачи оптимизации продольного движения заряженных частиц в ускорителе с пространственно-однородной квадрупольной фокусировкой. Такой подход может предоставить возможность рассматривать отдельно поперечное и продольное движения [21].

Рабочие параметры ускорителей обычно не соответствуют прогнозам физических конструкций из-за ошибок при установке или механическом согласовании. В связи с этим методы оптимизации параметров, такие как эволюционные алгоритмы и поиск сопряженного направления, широко используются при настройке луча для компенсации этой несогласованности.

Сложность здесь возникает в связи с большим количеством дискретных локальных оптимумов. Возможным решением данной проблемы является применение алгоритма АЗС в области автоматического управления, он может обеспечить подход для улучшения многомерной оптимизации [84].

В следствии того, что на текущий момент до конца не изучены и не оптимизированы многие подходы для построения ускорителей, исследование данного рода задач является актуальным. Также данные задачи хранят в себе большой объём данных, обработать которые традиционными методами часто невозможно. Многие из этих данных носят нелинейный характер. Существует ряд мировых программ, направленных на изучение поведения частиц при их ускорении: проект COMPASS (Community Petascale Project for Accelerator Science and Simulation) в Lawrence Berkeley National Laboratory (лаборатория в Беркли) [24, 75], проект NICA (Nuclotron based Ion Collider facility) в Дубне Московской области и проект FAIR (Facility for Antiproton and Ion Research) немецкого Института физики тяжелых ионов [48, 49] и другие.

Например, NICA – это новый российский ускорительный комплекс, введенный в эксплуатацию в 2020 г., он создан на базе «Объединённого института ядерных исследований». Целью построения данного комплекса является изучения свойств плотной барионной материи, с возможностью имитации и исследования в лабораторных условиях ядерной материи в экстремальных условиях, а также особого состояния вещества (кварк-глюонной плазмы), из которого состояла Вселенная после Большого Взрыва [17, 18, 48, 49]. Коллайдер RHIC, находящийся на территории США в Брукхейвенской национальной лаборатории, сталкивает пучки частиц различной природы (от тяжелых ионов до протонов) с энергиями от сотен до тысяч миллиардов электронвольт [38, 59, 64]. В связи с созданием ускорителей и разработкой проектов по всему миру, растет и необходимость обработки и систематизации больших объемов данных, которые получены экспериментальным путем.



Применение нейронных сетей и алгоритмов машинного обучения для предсказания и обработки результатов в различных областях науки, и, в частности, в области медицины также имеет большое значение, т.к. на основании определенной выборки, при правильном выборе функции активации, можно с определенной долей вероятности выявить правильный способ лечения [25]. Данный способ также позволяет сократить время получения результата. Имеется возможность использовать нейронные сети для определения расчета траектории направленного пучка частиц, с помощью которого необходимо облучить зону опухоли, где локализовано новообразование [23].

Одним из перспективных методов решения динамических уравнений описывающих пучок заряженных частиц является матричный формализм [1, 19]. В моей работе будет рассмотрена задача оптимизации динамики пучка по управлениям для обеспечения высокого качества группировки пучка и ускорения. Для повышения уровня точности численного интегрирования динамики пучка в рамках задачи оптимизации целесообразно использование матричного формализма [1, 19]. Однако недостатком данного подхода является необходимость решения матричных линейных дифференциальных уравнений большой размерности, причем данная размерность будет тем выше, чем больше требования к точности мы предъявляем. В следствии того, что вычислительные ресурсы ограничены, нам необходимо балансировать эту размерность [7].

Также в задачах управления возникают мультиагентные системы, при управлении которыми возникает ряд вопросов, для которых традиционные методы построения нейронных сетей на текущий момент требуют существенной доработки. С другой стороны, применение агентской структуры и ее развитие позволяет повысить возможность производительности в управлении ускорителем [82]. В системе ускорителя одной из основных частей является Microtron (небольшой ускоритель, который ускоряет электронный пучок до 20 МэВ). Модель Microtron в настоящее время используется при

разработке многоагентной системы и основана на экспериментальном выявлении взаимозависимости между различными параметрами [83].

При проектировании мультиагентных систем управления также могут использоваться нейросетевые архитектуры. Например, в качестве маршрутизатора в компьютерной сети, связывающей локальные системы управления агентов, мы можем применять нейронные сети Хопфилда [45]. Такие нейронные сети обеспечивают кратчайшие маршруты связи между агентами и параллельную обработку в реальном времени информации при мультиагентном управлении.

Основными типами ускорителей и компонентов являются линейные ускорители (инжекторы, линейный коллайдер, FEL, источники нейтронов расщепления), циклотроны, синхротроны (источники света, накопительные кольца), расширенные концепции ускорителей (plasma-wakefield, которые используют волны, созданные в плазме интенсивными электронными или лазерными пучками) [6, 16, 83].

Применение ускорителей также осуществляется в проблемах лучевой оптики. Задачей лучевой оптики является направление луча в экспериментальную станцию, удовлетворяющую ряду ограничений: геометрическое рулевое управление с дипольными магнитами, внедрение в апертуру (фокусировку), обеспечение необходимых размеров луча на экспериментальных станциях (фокусировка), выявление правильных хроматических эффектов (фокусировка в зависимости от энергии), в круговых ускорителях дополнительное обеспечение стабильности [36, 69].

Проблемы вышеописанных областей применения ускорителей, которые до сих пор не решены: сложность некоторых типов магнитов (например, магнит ЛНС с кусками катушки, полосы и т.д.), вычисление хроматических функций, коллективные эффекты (например Intra-beam рассеяние) [37], диафрагма и информация о макете (инженерный дизайн), формат ввода (переносимость между кодами) [69].

Ускорители частиц содержат сложные и нелинейные физические явления [18, 30, 80]. Они часто связаны с множеством взаимодействующих систем, подвержены жестким требованиям к производительности и должны иметь возможность работать в течение продолжительных периодов времени с минимальными перерывами. Одним из перспективных направлений для удовлетворения вышеизложенных требований к системам является введение машинного обучения и сложных методов управления, созданных искусственным интеллектом [27, 28, 44, 67]. Для моделирования, контроля и диагностического анализа сложных, нелинейных и изменяющихся во времени систем, а также систем с большими пространствами параметров лучше всего подходят нейронные сети. Использование методов моделирования и управления на основе нейронной сети имеет существенное преимущество и для ускорителей частиц [25, 29, 41].

Нейронные сети могут быть полезны в тех случаях, когда доступны точные данные из симуляций или какая-либо другая процедура с интенсивным вычислением, при которых соотношение затрат и результатов должно быть рассчитано быстрее для эффективного развертывания в режиме реального времени [32, 33, 54, 74]. Автоматизация рутинных задач, выполняемых человеком, может значительно повысить производительность с точки зрения достигнутых параметров пучка, эффективности времени и общих эксплуатационных затрат (как в узком смысле стоимости за единицу времени, так и в более широком смысле стоимости за экспериментальное исследование) [19]. Однако четко прослеживается проблема со сбором и верификацией данных для применения нейронных сетей к задаче на практике. Иными словами, данные должны быть качественными, иначе интерпретация результата будет затруднительна.

Но не смотря на широкое использование нейронных сетей к широкому спектру задач, результаты зачастую зависят от многих параметров, в том числе от обучающей выборки [29, 69]. А с учетом индивидуальной настройки

ускорителей, выборка для определенных случаев может отсутствовать или не иметь большого объема.

Именно поэтому в моей работе исследованы стохастические методы, которые не базируются на определенной базе данных.

В задачах оптимизации пучка частиц присутствует множество различных и разнородных критериев качества, которые для проведения оптимизации и упрощения задачи комбинируют, некоторым образом, чтобы получить один «общий» критерий, описывающий суммарное влияние всех отдельных критериев.

Однако такое обобщение приводит к появлению множества локальных оптимумов у обобщенного критерия качества, которые обычные градиентные методы не в состоянии преодолеть. Именно поэтому возникает естественное стремление использовать генетические алгоритмы, в частности, метод роя частиц.

Метод роя частиц часто используется для решения задач оптимизации динамики пучка заряженных частиц и позволяют получить требуемые результаты за приемлемое время даже при наличии большого числа критериев качества [43, 47, 65, 66]. Эффективность данного метода может быть объяснена тем, что он позволяет одновременно исследовать несколько управлений и последовательно улучшить их, следуя аналогии колонии насекомых, обеспечивая постепенное притяжение управлений на каждой итерации к более оптимальному управлению [47, 81]. За счет того, что исследуются сразу несколько (часто отдаленных друг от друга, особенно на начальных итерациях) управлений, метод роя частиц позволяет преодолевать локальные минимумы выбранного функционала качества и дает управление близкое к глобальному оптимуму [60].

Безусловно метод роя частиц является приближенным, стохастическим оптимизационным алгоритмом, поэтому для получения приемлемых результатов зачастую требуется произвести несколько запусков алгоритма оптимизации пучка с различным начальным распределением частиц роя,

однако эта особенность не сильно влияет на скорость получения «оптимизированного» управления [43, 47, 66].

Исходя из того, что в реальных задачах оптимизации динамики пучка встречается намного более одного критерия качества управления, которые часто не согласуются друг с другом полностью и не могут быть объединены в один некий суммарный критерий без потери свойств присущих каждому из них в отдельности, в исследованиях возникают методы многокритериальной оптимизации, в частности метод построения фронта Парето [22, 26, 73].

Методы многокритериальной оптимизации не пытаются рассматривать множество критериев качества управления как один общий критерий, а стремятся найти баланс между каждым критерием таким образом, чтобы получить оптимальную их комбинацию, таким образом не теряется информация присущая каждому конкретному критерию. Однако эта же особенность приводит к сложности и многомерности получаемых моделей и увеличению, а также усложнению вычислений [3, 40, 53].

# Глава 1. Математическая модель оптимизации динамики интенсивных пучков заряженных частиц

## 1.1 Динамические уравнения пучка заряженных частиц

По типу траекторий ускорители можно разделить на линейные, траектории которых близки к прямым и циклические, траектории, которых представляют собой кольца или спирали [78]. В рамках задачи будет рассмотрен линейный ускоритель в связи с его основным преимуществом – ввод и вывод частиц здесь достаточно прост. Благодаря этому появляется возможность использования инжектора и источника, которые на входе ускорителя дают интенсивный пучок малого диаметра, а также небольшой энергетический разброс. Пучок ускорившихся частиц на выходе ускорителя будет значительно превосходить пучки, выводимые из циклических ускорителей по плотности, а также по собственной энергетической определенности. Линейные ускорители позволяют сформировать интенсивные, сфокусированные пучки, в отличие от циклических ускорителей, которые не могут похвастаться таким качеством. Единственным неудобством применения данного вида ускорителей является то, что частота повторения рабочих циклов достаточно мала [13, 31].

Наиболее важным требованием к физической установке ускорителя электронов является создание бегущей волны, причем ее скорость распространения в каждой точке траектории будет равна скорости частицы. Исходя из этого скорость частиц в ускорителе будет меняться соответственно скорости распространения волны. При этом равновесная фаза будет являться точкой устойчивого равновесия. Скорость частицы, которая будет находиться до равновесной фазы будет смещаться назад к точке устойчивого равновесия, так как ее скорость будет расти достаточно медленно. Наравне с этим скорость частицы, расположенной после равновесной фазы, будет расти быстрее скорости распространения волны, поэтому она будет пытаться догнать точку устойчивого равновесия. В течении данного процесса появляется область

фазовой устойчивости, а частицы, которые находятся внутри данной области, будут совершать медленные, в равнении с частотой бегущей волны, колебания около точки устойчивого равновесия [9, 10, 13, 18].

При достижении частицами скорости близкой к скорости света, колебания будут остановлены, в связи с тем, что скорость, при таком положении дел, уже практически не будет зависеть от энергии. Скорости света, в данном случае, будет также равна скорость распространения волны. Точка устойчивого равновесия и пороговая амплитуда будут отсутствовать. От начального разброса частиц по фазе и амплитуды волны будут зависеть фазовый разброс и энергия на выходе ускорителя. Иными словами, наличие бегущей волны будет обеспечивать фазовую устойчивость частиц [13, 14, 18].

При проектировании новых ускорителей заряженных частиц и электрофизических установок возникают задачи управления [12]. Объект управления здесь – это заряженные частицы (траектории движения частиц, описанные дифференциальными уравнениями). В итоге рассматривается задача пучка (ансамбля) траекторий.

Моделью в моем исследовании является интенсивный пучок в поле бегущей волны. Эволюция интенсивного пучка моделируется системой уравнений, описывающих динамику синхронной частицы и произвольной частицы пучка [61–63]. Метод роя частиц случайным образом меняет управления.

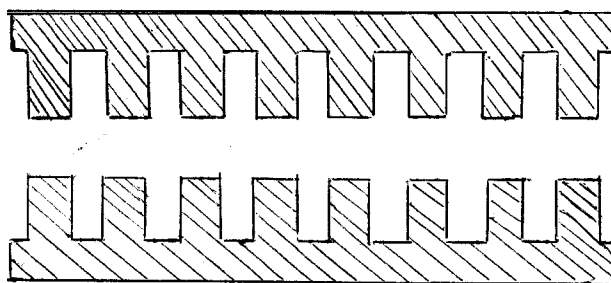


Рисунок 1. Канал волноводного ускорителя в разрезе

На рис. 1 приведена упрощенная схема линейного ускорителя в разрезе, в действительности же канал ускорителя представляет собой полый цилиндр, в котором расположены диафрагмы, с помощью которых изменяется скорость

бегущей волны. Так, если скорость частиц приблизительно равна фазовой скорости волны, а скорость волны вдоль структуры возрастает, то частицы будут ускоряться.

Продольная компонента (вдоль оси ускорителя) электрического поля ускоряющей волны может быть описана в следующем виде.

$$E^{(RF)} = E(z, t) = E_0(z) \sin(\varphi),$$

где  $E_0(z)$  – амплитуда волны,  $z$  – продольная координата вдоль оси ускорителя,  $\varphi$  – фаза волны,  $t$  – время. Фаза ускоряющей волны может быть записана в виде [10, 62, 63]:

$$\varphi = \varphi(z, t) = \omega \int_0^z \frac{d\chi}{v_\phi(\chi)} - \omega t + \varphi_0,$$

где  $\omega$  – циклическая частота,  $v_\phi(\chi)$  – фазовая скорость ускоряющей волны,  $\varphi_0$  – начальная фаза ускоряющей волны.

Для вывода математической модели удобной для проведения оптимизации динамики пучка заряженных частиц полезно начать с самых общих выражений – уравнения Ньютона-Лоренца, которое описывает изменение импульса одной заряженной частицы в электромагнитном поле:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}),$$

где  $\vec{p}$  – импульс частицы,  $q$  – заряд частицы,  $\vec{v}$  – скорость частицы,  $\vec{E}$  – напряженность электрического поля,  $\vec{B}$  – индукция магнитного поля.

Далее, распишем скорость частицы через изменение радиус-вектора заряженной частицы:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \\ \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \end{cases},$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор частицы.

Исходя из того, что линейный ускоритель представляет собой полый цилиндр и обладает симметрией, будет удобно ввести цилиндрическую



систему координат  $(r, \theta, z)$ , где ось  $Oz$  необходимо направить вдоль структуры ускорителя заряженных частиц.

Будем рассматривать только продольное движение частицы

$$\frac{dp_z}{dt} = q(E_z + v_r B_\theta - v_\theta B_r).$$

Учитывая, что для частицы движущейся близко к оси ускорителя  $p \approx p_z$ , где  $p = |\vec{p}|$ , что заряд  $q = -e$ , где  $e$  – абсолютная величина заряда электрона, и что линейном ускорителе управляющее электрическое поле является аксиально-симметричным (можно пренебречь членами  $v_r$  и  $v_\theta$ ), мы можем довольно точно описать динамику частицы движущейся близко к оси ускорителя уравнением:

$$\frac{dp}{dt} = -eE_z.$$

В действительности электрическое поле представляет собой сумму двух компонент:

$$-eE_z = -eE^{(RF)} + eE^{(int)},$$

где  $E^{(RF)}$  – продольная компонента внешнего электрического поля,  $E^{(int)}$  – продольная компонента электрического поля, создаваемого самим зарядом. Тогда получаем следующее уравнение динамики частицы.

$$\frac{dp}{dt} = -eE^{(RF)} + eE^{(int)}.$$

Удобно воспользоваться известными и легко проверяемыми выражениями:

$$\beta = \frac{v}{c},$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$$\beta = \frac{\beta\gamma}{\sqrt{1 + (\beta\gamma)^2}},$$

где  $\beta$  – приведенная скорость частицы,  $c$  – скорость света в вакууме,  $v$  – абсолютная величина скорости частицы,  $\gamma = \frac{mc^2}{m_0c^2}$  – приведенная энергия частицы;  $\beta\gamma = \frac{mv}{m_0c}$  – приведенный импульс частицы.

Назовем фазой частицы в момент времени  $t$  и в точке  $z$  соответствующую фазу бегущей волны  $\phi$ . Запишем уравнение динамики частицы с помощью приведенных величин: приведенного времени  $\tau = ct$ , приведенной энергии частицы  $\gamma = \frac{mc^2}{m_0c^2}$  и приведенного импульса частицы  $\beta\gamma = \frac{mv}{m_0c}$ .

Используя выражение  $p = \beta\gamma m_0c$ , где  $m_0$  – масса покоя электрона, уравнение динамики записывается следующим образом.

$$\begin{aligned} \frac{d(\beta\gamma)}{d\tau} &= -\frac{e}{m_0c^2} E^{(RF)} + \frac{e}{m_0c^2} E^{(int)} \\ &= -\frac{e}{m_0c^2} E_0(z) \sin(\phi) + \frac{e}{m_0c^2} E^{(int)} \\ &= -\frac{\alpha(z)}{\lambda} \sin(\phi) + \frac{e}{m_0c^2} E^{(int)}, \end{aligned}$$

где фаза  $\phi = \phi(z, \tau) = \frac{2\pi}{\lambda} \int_0^z \frac{d\chi}{\beta_\phi(\chi)} - \frac{2\pi}{\lambda} \tau + \phi_0$ ,  $\lambda$  – длина ускоряющей волны;

$\beta_\phi(z)$  – приведенная фазовая скорость волны,  $\alpha(z) = \frac{e\lambda E_0(z)}{m_0c^2}$  – приведенная амплитуда электрического поля.

Таким образом внешнее электрическое поле задается двумя функциями, которые мы будем рассматривать как двумерный вектор управлений  $u(z) = (u_1(z), u_2(z)) = (\alpha(z), \beta_\phi(z))$ .

Собирая вместе все полученные выражения, мы получаем систему уравнений, описывающих динамику частицы в поле бегущей волны в линейном ускорителе

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = \frac{\beta\gamma}{\sqrt{1 + (\beta\gamma)^2}}, \\ \frac{d(\beta\gamma)}{d\tau} = -\frac{\alpha(z)}{\lambda} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \int_0^z \frac{d\chi}{\beta_\phi(\chi)} - \frac{2\pi}{\lambda} \tau + \phi_0\right) + \frac{e}{m_0 c^2} E^{(int)}(z), \end{cases}$$

где необходимо задать начальные условия в момент  $\tau_0$

$$z(\tau_0) = z_0, \beta\gamma(\tau_0) = (\beta\gamma)_0.$$

Чтобы исключить операцию интегрирования из динамических уравнений введем новую переменную (фазу  $\phi$ ) и запишем для нее соответствующее уравнение:

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{\beta_\phi(z)} \frac{\beta\gamma}{\sqrt{1 + (\beta\gamma)^2}} - 1 \right).$$

Окончательно, движение электронов в линейном ускорителе под воздействием электрического поля, описывается системой трех дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = \frac{\beta\gamma}{\sqrt{1 + (\beta\gamma)^2}} \\ \frac{d(\beta\gamma)}{d\tau} = -\frac{\alpha(z)}{\lambda} \sin(\phi) + \frac{e}{m_0 c^2} E^{(int)}(z), \\ \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{\beta_\phi(z)} \frac{\beta\gamma}{\sqrt{1 + (\beta\gamma)^2}} - 1 \right) \end{cases}$$

и начальными условиями в момент  $\tau_0$

$$z(\tau_0) = z_0,$$

$$\beta\gamma(\tau_0) = (\beta\gamma)_0,$$

$$\phi(\tau_0) = \phi_0(z_0, (\beta\gamma)_0).$$

Выделим в пучке особую частицу, фаза которой в каждый момент времени совпадает с фазой бегущей волны (в разные моменты времени роль синхронной частицы могут выполнять различные частицы пучка) и назовем ее синхронной.

Перейдем к приведенной координате  $\xi_s = z/\lambda$ , где  $\lambda$  – длина бегущей волны, а  $z$  – координата частицы, и запишем уравнения движения синхронной частицы:

$$\begin{cases} \frac{d\xi_s}{d\tau} = \frac{(\beta\gamma)_s}{\sqrt{1 + (\beta\gamma)_s^2}} \\ \frac{d(\beta\gamma)_s}{d\tau} = -\alpha(\xi_s) \sin(\phi_s) \end{cases},$$

Тогда уравнения движения произвольной частицы пучка можно записать через параметры синхронной частицы

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{d\tau} = \frac{\beta\gamma}{\sqrt{1 + (\beta\gamma)^2}} \\ \frac{d(\beta\gamma)}{d\tau} = -\alpha(\xi) \sin(\phi + \phi_s) + \frac{e}{m_0 c^2} E^{(int)}(\xi), \\ \frac{d\phi}{d\tau} = 2\pi \left( \frac{\beta\gamma \sqrt{1 + (\beta\gamma)_s^2}}{(\beta\gamma)_s \sqrt{1 + (\beta\gamma)^2}} - 1 \right) \end{cases}$$

Тогда управлениями будем считать  $u(\xi) = (u_1(\xi), u_2(\xi)) = (\alpha(\xi), \phi_s(\xi))$ , то есть амплитуду электрического поля и фазу синхронной частицы.

Интегрируя две последние системы, мы получим совокупную динамику пучка заряженных частиц.

Таким образом мы записали системы описывающие динамику пучка в безразмерных (приведенных) величинах:  $\tau = \frac{ct}{\lambda}$  — время,  $\xi = \frac{z}{\lambda}$  — координата,  $\beta = \frac{v_z}{c}$  — скорость,  $\beta\gamma = \frac{p_z}{m_0 c}$  — импульс,  $\gamma = \frac{m}{m_0}$  — энергия. Где  $c$  - скорость света.

Уравнения продольного движения выделенной (синхронной) частицы в поле бегущей волны:

$$\frac{d\xi_s}{d\tau} = \frac{(\beta\gamma)_s}{\sqrt{1 + (\beta\gamma)_s^2}}, \quad (1.1.1)$$

$$\frac{d(\beta\gamma)_s}{d\tau} = -\alpha(\xi_s, u_1) \sin(\varphi_s(\xi_s, u_2)), \quad (1.1.2)$$

где  $\alpha(\xi_s, u_1)$  и  $\varphi_s(\xi_s, u_2)$  — амплитуда ускоряющей волны и синхронная фаза (тригонометрические полиномы);  $u_1$  и  $u_2$  есть значения производных полиномов в узлах сетки [47]. Эту систему решаем методом Рунге-Кутты с

переменным шагом, чтобы посмотреть, как частицы двигались при конкретном управлении. Синхронная частица всегда попадает в нужную фазу поля. У поля можно менять амплитуду и фазу для управления пучком.

Начальные данные:

$$\xi_s(0) = 0, (\beta\gamma)_s(0) = \beta\gamma_{ent}, \quad (1.1.3)$$

$$\xi(0) \in \left[-\frac{\beta_{ent}}{2}; \frac{\beta_{ent}}{2}\right], \beta\gamma(0) = \beta\gamma_{ent}, \hat{\varphi}(0) \in [-\pi; \pi]. \quad (1.1.4)$$

Фаза произвольной частицы пучка:

$$\varphi = \hat{\varphi} + \varphi_s = 2\pi \int_0^\tau \left( \frac{(\beta\gamma)(\mu)}{\sqrt{1 + (\beta\gamma)^2(\mu)}} \frac{\sqrt{1 + (\beta\gamma)_s^2(\mu)}}{(\beta\gamma)_s(\mu)} - 1 \right) d\mu + \hat{\varphi}_0 + \varphi_s.$$

Половина толщины диска облака:

$$\Delta = \frac{(\beta\gamma)_{ent}\lambda}{2N}.$$

Уравнения продольного движения частицы пучка в поле бегущей волны задаются следующим образом:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{\beta\gamma}{\sqrt{1 + (\beta\gamma)^2}}, \quad (1.1.5)$$

$$\frac{d(\beta\gamma)}{d\tau} = -\alpha(\xi, u_1) \sin(\hat{\varphi} + \varphi_s(\xi, u_2)) + \frac{e\lambda}{m_0c^2} E_z^{int}(\tau, \xi), \quad (1.1.6)$$

$$\frac{d\hat{\varphi}}{d\tau} = 2\pi \left( \frac{\sqrt{1 + (\beta\gamma)_s^2}}{(\beta\gamma)_s} \cdot \frac{\beta\gamma}{\sqrt{1 + (\beta\gamma)^2}} - 1 \right), \quad (1.1.7)$$

Для получения выражения электрического поля, создаваемого частицами пучка заряженных частиц воспользуемся методом крупных частиц. Данный метод базируется на рассмотрении макрочастиц, то есть групп частиц пучка, которые расположены достаточно близко друг к другу в фазовом пространстве.

Рассмотрим модельные частицы в виде дисков-облаков, конечная толщина которых, в сопутствующей системе отсчета, составляет  $2\Delta$ , заряд равен  $q = \frac{I\lambda}{cN}$ , при том, что радиус  $R$  будет одинаковым у всех дисков. Здесь  $\frac{\lambda}{c}$

– период высокочастотного поля,  $I$  – средний ток пучка, а  $N$  – число модельных частиц.

Напряженность поля, которая описывает воздействие системы  $N$  дисков на  $i$ -й диск, характеризуется уравнением [11]:

$$E_{zi} = \frac{\eta' a^2}{\varepsilon_0 \Delta} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\mu_k R/a)}{\mu_k^4 J_1^2(\mu_k)} \times \\ \times [2g_k(\gamma_n(z_i - z_n)) - g_k(\gamma_n(z_i - z_n) + 2\Delta) - g_k(\gamma_n(z_i - z_n) - 2\Delta)],$$

здесь  $g_k(x) = \text{sign}(x)(1 - e^{-\mu_k|x|/a})$ ,  $\eta' = q / (2\Delta\pi R^2)$  – объемная плотность заряда частицы пучка,  $a$  – радиус сечения линейного ускорителя в поле бегущей волны,  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная (диэлектрическая проницаемость вакуума),  $\gamma_n$  – приведенная энергия  $n$ -ой частицы пучка,  $J_1(x)$  – функция Бесселя первого рода первого порядка, а  $\mu_k$  – корни функции Бесселя первого рода нулевого порядка  $J_0(x)$ .

Переходя к переменным  $\xi$  – приведенная координата,  $p$  – приведенный импульс частицы, получаем уравнение:

$$E_z^{(int)}(\xi) = \frac{\eta' a^2}{\varepsilon_0 \Delta} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\mu_k R/a)}{\mu_k^4 J_1^2(\mu_k)} \times \\ \times [2g_k(\gamma_n \lambda(\xi - \xi_n)) - g_k(\gamma_n \lambda(\xi - \xi_n) + 2\Delta) - g_k(\gamma_n \lambda(\xi - \xi_n) - 2\Delta)],$$

где  $\gamma_n = \sqrt{1 + p_n^2}$ .

Пусть

$$F(\xi_i, \xi_n, p_n) = \frac{Q a^2}{2\pi R^2 \Delta^2 \varepsilon_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\mu_k R/a)}{\mu_k^4 J_1^2(\mu_k)} \times \\ \times [2g_k(\gamma_n \lambda(\xi - \xi_n)) - g_k - g_k(\gamma_n \lambda(\xi - \xi_n) - 2\Delta)],$$

где  $Q = qN$  – заряд сгустка.

Тогда напряженность электрического поля, создаваемого частицами пучка, будет иметь вид:

$$E_z^{(int)}(\xi) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N F(\xi_i, \xi_n, p_n).$$

Данное выражение может быть записано в непрерывном виде:

$$\begin{aligned}
E_z^{int}(\tau, \xi) &= \iint_{M_{\tau,u}} V(\xi - \tilde{\xi}_\tau, (\tilde{\beta\gamma})_\tau) \rho(\tau, \tilde{\xi}_\tau, (\tilde{\beta\gamma})_\tau) d\tilde{\xi}_\tau d(\tilde{\beta\gamma})_\tau \approx \\
&\approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N V(\xi - \xi_n, (\beta\gamma)_n), \\
V(d, (\beta\gamma)_n) &= \frac{I\lambda a^2}{2\pi\Delta^2 R^2 c\epsilon_0} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{J_1((\mu_m R)/a)}{\mu_m^2 J_1(\mu_m)} \right)^2 * \\
&* [2g_m(\lambda b_n d) - g_m(\lambda b_n d + 2\Delta) - g_m(\lambda b_n d - 2\Delta)], \\
b_n &= \sqrt{1 + (\beta\gamma)_n^2}, \quad g_m(x) = \text{sign}(x)(1 - e^{-\mu_m|x|/a}),
\end{aligned}$$

## 1.2 Критерий качества управлений

Поставим задачу оптимизации динамики пучка по управлениям  $u_1$  и  $u_2$  с целью обеспечения высокого качества группировки и ускорения [4]. Функционал качества управления динамикой пучка частиц зададим как сумму отдельных критериев в следующем виде:

$$K(u) = K_1(u) + K_2(u) + K_3(u) + K_4(u) + K_5(u) + K_6(u), \quad (1.2.8)$$

Обеспечение выходной энергии синхронной частицы в требуемом промежутке описывается следующим функционалом:

$$K_1(u) = \begin{cases} (\gamma_s(L) - \gamma_1)^2, & \gamma_s(L) < \gamma_1 \\ 0, & \gamma_s(L) \in [\gamma_1, \gamma_2] \\ (\gamma_s(L) - \gamma_2)^2, & \gamma_s(L) > \gamma_2 \end{cases},$$

где  $\gamma_1 = 11.0$ ,  $\gamma_2 = 12.0$ .

Минимизация энергетической неоднородности пучка на выходе ускорителя (минимизируем средний квадрат отклонения энергии частиц от энергии синхронной частицы, так как необходимо приблизить среднюю энергию пучка к энергии синхронной частицы) описывается следующим функционалом:

$$K_2(u) = \frac{1}{|N_a|} \sum_{j \in N_a} (\gamma_j(L) - \gamma_s(L))^2.$$

Минимизация фазовой неоднородности пучка на выходе ускорителя описывается следующим функционалом:

$$K_3(u) = \frac{1}{|N_a|} \sum_{j \in N_a} \left( \hat{\varphi}_j(L) - \bar{\varphi}(L) \right)^2, \quad \bar{\varphi}(\xi_i) = \frac{1}{|N_L|} \sum_{j \in N_L} \hat{\varphi}_j(L).$$

Максимизация захвата частиц в режиме ускорения описывается следующим функционалом, который представляет собой комбинацию двух функционалов:

$$K_4(u) = a_1 K_{41}(u) + a_2 K_{42}(u),$$

$$K_{41}(u) = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^P \sum_{n=1}^N \begin{cases} (\xi_n(\tau_{si} + 0.5) - \xi_i)^2, & \xi_n(\tau_{si} + 0.5) < \xi_i \\ 0, & \xi_n(\tau_{si} + 0.5) \geq \xi_i \end{cases},$$

$$K_{42}(u) = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^P \sum_{n=1}^N h(q_{in}, \bar{q}_i),$$

$$h(q, \bar{q}) = \begin{cases} (q - \bar{q})^2, & q > \bar{q} \\ 0, & q \leq \bar{q} \end{cases},$$

здесь  $P$  – число пространственных сечений структуры, а индекс  $s$ , помечает характеристики синхронной частицы;  $\xi_i$  – приведенная координата  $i$ -го сечения;  $q_{in} = H(\hat{\varphi}_n(\xi_i), p_{\psi n}(\xi_i))$  – значение гамильтониана для  $n$ -й частицы в  $i$ -ом сечении;  $\bar{q}_i$  – значение гамильтониана, соответствующее сепаратрисе.

Далее, подставляя  $h(q, \bar{q})$  более компактно записываем критерий  $K_{41}(u)$ :

$$K_{41}(u) = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^P \sum_{n=1}^N h(\xi_i, \xi_n(\tau_{si} + 0.5)).$$

Гамильтониан:

$$H(\psi, p_\psi) = V(\psi) + \frac{\pi}{\sqrt{(\gamma_s^2 - 1)^3}} p_\psi^2,$$

$$V(\psi) = -\alpha(\xi) (\cos(\psi + \varphi_s(\xi)) + \psi \sin(\varphi_s(\xi))), \quad p_\psi = \gamma - \gamma_s,$$

$$\bar{q}_i = V(-\pi - 2\varphi_s(\xi_i)),$$



Если частица с номером  $n$  выпала из режима ускорения и не доходит до  $i$ -го сечения, т.е.  $\xi_n(\tau_{si} + 0.5) < \xi_i$ , положим  $q_{in} = 2\bar{q}_i$  (мы присваиваем этой частице значение гамильтониана, соответствующее нахождению вне сепаратрисы).

Минимизация влияния дефокусирующего фактора описывается следующим функционалом:

$$K_5(u) = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^P h(A_{def}(\xi_i), \hat{A}_i).$$

Последний функционал качества обеспечивает монотонность группирования частиц пучка. Полагаем, что  $N_i$  – множество номеров  $n$  частиц, дошедших до сечения  $\xi_i$  за время моделирования  $T_s + 0.5$ , т.е. множество номеров  $n$  частиц, для которых  $\xi_n(T_s + 0.5) \geq \xi_i$ .

$$\frac{dD}{d\xi}(\xi_i) = \frac{4\pi}{|N_i|} \sum_{n \in N_i} \hat{\varphi}(\xi_i) \left( \frac{\sqrt{1 + (\beta\gamma)_s^2(\xi_i)}}{(\beta\gamma)_s(\xi_i)} - \frac{\sqrt{1 + (\beta\gamma)_n^2(\xi_i)}}{(\beta\gamma)_n(\xi_i)} \right),$$

$$K_6(u) = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^P h\left(\frac{dD}{d\xi}(\xi_i), 0\right),$$

$\hat{\gamma} = 11.5$  — требуемая энергия на выходе ускорителя (примерно 5.37 МэВ).

## Глава 2. Численное моделирование динамики интенсивных пучков заряженных частиц и сравнение методов

Для линейного волноводного ускорителя будут выполнены численное моделирование и оптимизация тремя методами. Это метод роя частиц, генетический алгоритм глобальной оптимизации и генетический алгоритм многокритериальной оптимизации.

Длина ускорителя  $L = 0.8$  метров, длина ускоряющей волны  $\lambda = 0.1$  метра, средний ток пучка  $I = 1$  А, радиус пучка  $R = 0.002$  метра, радиус канала  $a = 0.004$  метра  $N$  - количество крупных частиц для моделирования  $N1 = 50$ ,  $N2 = 200$ . Энергия инжекции  $W_{ent} = 80$  кэВ [6].

Численное моделирование будет выполнено в пакете прикладных программ для решения задач технических вычислений Matlab. Язык MATLAB является высокоуровневым интерпретируемым языком программирования, что позволяет решать довольно широкий спектр задач [20, 35]. Построение графиков и визуальный анализ данных также будет произведен в данной среде разработки.

### 2.1 Метод роя частиц

Метод роя частиц – это один из популярных не градиентных методов оптимизации. Его удобно использовать в тех задачах, где точное выражение для градиента оптимизируемого функционала неизвестно, а также если его трудно получить, в том числе численно. Алгоритм роя частиц был предложен в 1995 году Джеймсом Кеннеди (Kennedy), Расселом Еберхартом (Eberhart) [47].

Задача моделирования динамики пучка заряженных частиц с учетом наличия поля Кулона между всеми частицами попадает в данный класс задач, в следствии того, что вычисление градиента численными методами требует больших вычислительных затрат [10]. К тому же при поиске управлений,

которые обеспечат оптимальное (минимальное) значение функционалу качества в данной задаче, удобно ограничить область возможных изменений параметров управлений с целью получения физически реализуемых функций, что при использовании метода роя частиц удастся выполнить естественным образом. По этим причинам использование метода роя частиц представляется крайне привлекательным в задаче моделирования динамики заряженных частиц.

Идея метода роя частиц заключается в выделении некоторой области пространства параметров задачи, от которых зависит оптимизируемый функционал, и использовании набора  $N$  частиц, которые некоторым образом движутся внутри этой области, при необходимости отражаясь от границ области.

На каждом шаге данного метода для всех частиц, составляющих рой частиц, вычисляется значение функционала, подлежащего оптимизации, и на основании полученных наилучших значений функционала положения и скорости всех частиц обновляются некоторым случайным образом, пытаясь на следующем шаге приблизиться к частицам с наилучшими значениями функционала. Можно сказать, что частицы проявляют коллективное «разумное» поведение, группируясь около частиц с наилучшими значениями функционала.

Благодаря наличию случайных параметров, которые используются на каждом шаге обновления положений частиц роя, данный метод обладает возможностью преодолевать точки локальных оптимумов и исследовать всю доступную область параметров оптимизации более полно, чем позволяют многие градиентные методы.

Для сравнения результатов я взяла задачу (1.1.1) – (1.1.7), (1.2.8) и применила к ней метод роя частиц, а затем генетический алгоритм глобальной оптимизации.

Оптимизация позволила снизить фазовый разброс на выходе прибора с 1.98 до 1.13 рад, уменьшить относительный разброс по энергиям с 0.52 до 0.29 и повысить коэффициент захвата с 95.5% до 97.5% [8].

Графики, представляющие оптимизированные управления и начальные управления, первое управление – амплитуда электрического поля (сверху) и второе управление – это фаза синхронной частицы (снизу), приведены на рисунке 2.

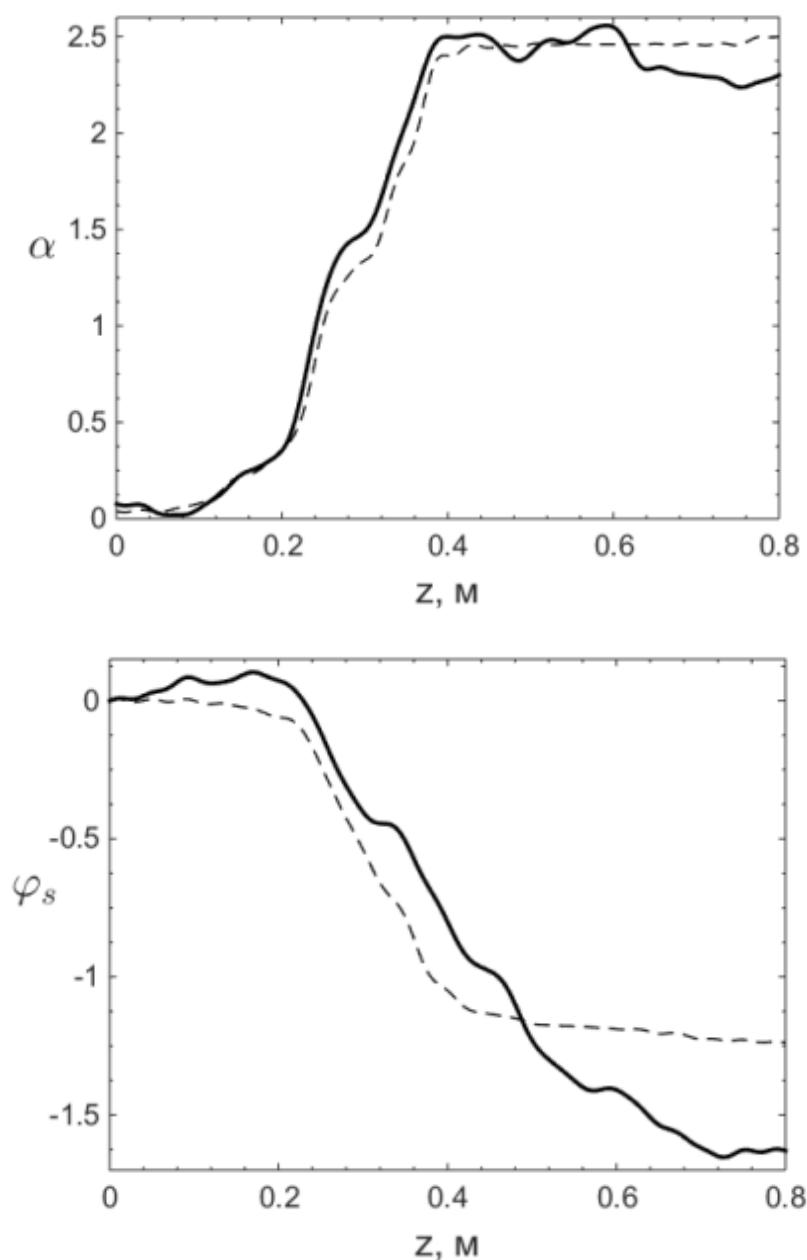


Рисунок 2. Начальные (штриховая линия) и оптимизированные (сплошная линия) функции  $\alpha(z)$  и  $\varphi_s(z)$  соответственно.

Однако, несмотря на достаточно хороший результат метода роя частиц, воспользоваться им для больших объемов данных представляется затруднительным, т.к. в среднем время на 1 итерацию при существующем пучке в 100 частиц тратится около 1,5 часов (при оперативной памяти в 6 Гб и процессоре Core i5 2,5 ГГц), даже не включая поле Кулона.

Именно по этой причине дальнейшее исследование стало основываться на применении генетического алгоритма глобальной оптимизации к проблеме оптимизации динамики пучка частиц.

Здесь поле Кулона не учтено, т.к. для грубого сравнения методов и быстродействия достаточно упрощенного уравнения продольного движения в поле бегущей волны:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{\beta\gamma}{\sqrt{1 + (\beta\gamma)^2}}, \quad (2.1.1)$$

$$\frac{d(\beta\gamma)}{d\tau} = -\alpha(\xi, u_1) \sin(\hat{\varphi} + \varphi_s(\xi, u_2)), \quad (2.1.2)$$

$$\frac{d\hat{\varphi}}{d\tau} = 2\pi \left( \frac{\sqrt{1 + (\beta\gamma)_s^2}}{(\beta\gamma)_s} \cdot \frac{\beta\gamma}{\sqrt{1 + (\beta\gamma)^2}} - 1 \right). \quad (2.1.3)$$

Далее был применен метод Рунге-Кутты и метод роя частиц для оптимизации, на выходе получили для количества частиц 100, количество частиц в рое 1000. Диапазон фаз на выходе для частиц в режиме ускорения 1,24919642. Относительный разброс энергий для частиц в режиме ускорителя 0,564693024. Энергия синхронной частицы 11,43381553. Среднее значение энергии для частиц в режиме ускорения 11,71995794. Количество частиц в режиме ускорения 92. Количество частиц внутри сепаратрисы 100. Количество итераций – 3.

Графики, представляющие фазы частиц в пространстве, находящихся в режиме ускорения до оптимизации (сверху) и после оптимизации (снизу), приведены на рисунке 3.

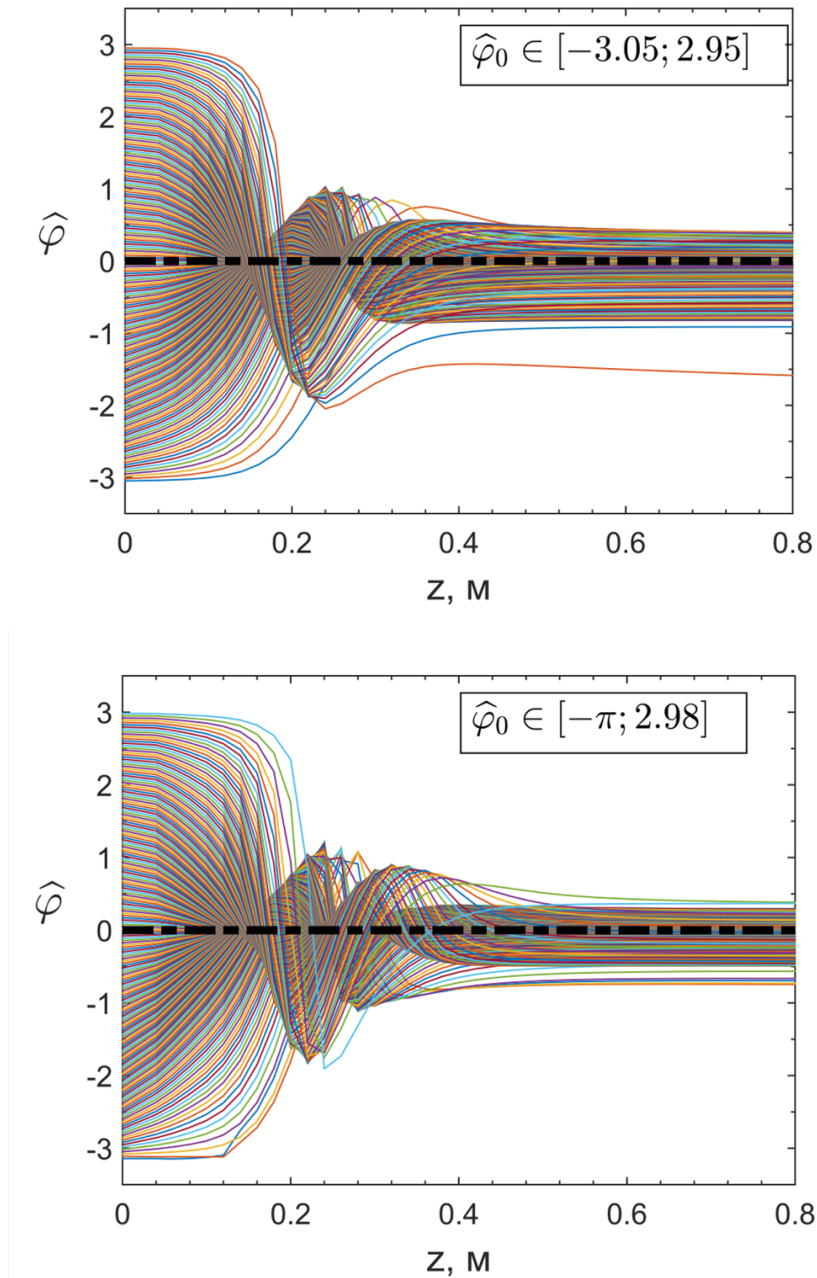


Рисунок 3. Отклонение фазы частицы от синхронной (для частиц в режиме ускорения). На графике  $\hat{\varphi}_0$  – начальный диапазон фаз на старте ускорителя, которые попади в режим ускорения.  $\gamma$  – приведенная энергия,  $\hat{\varphi}$  – отклонение фаз частиц от фазы синхронной частицы.

Графики, представляющие приведенную энергию частиц пучка до оптимизации (сверху) и после оптимизации (снизу), приведены ниже (на рисунке 4):

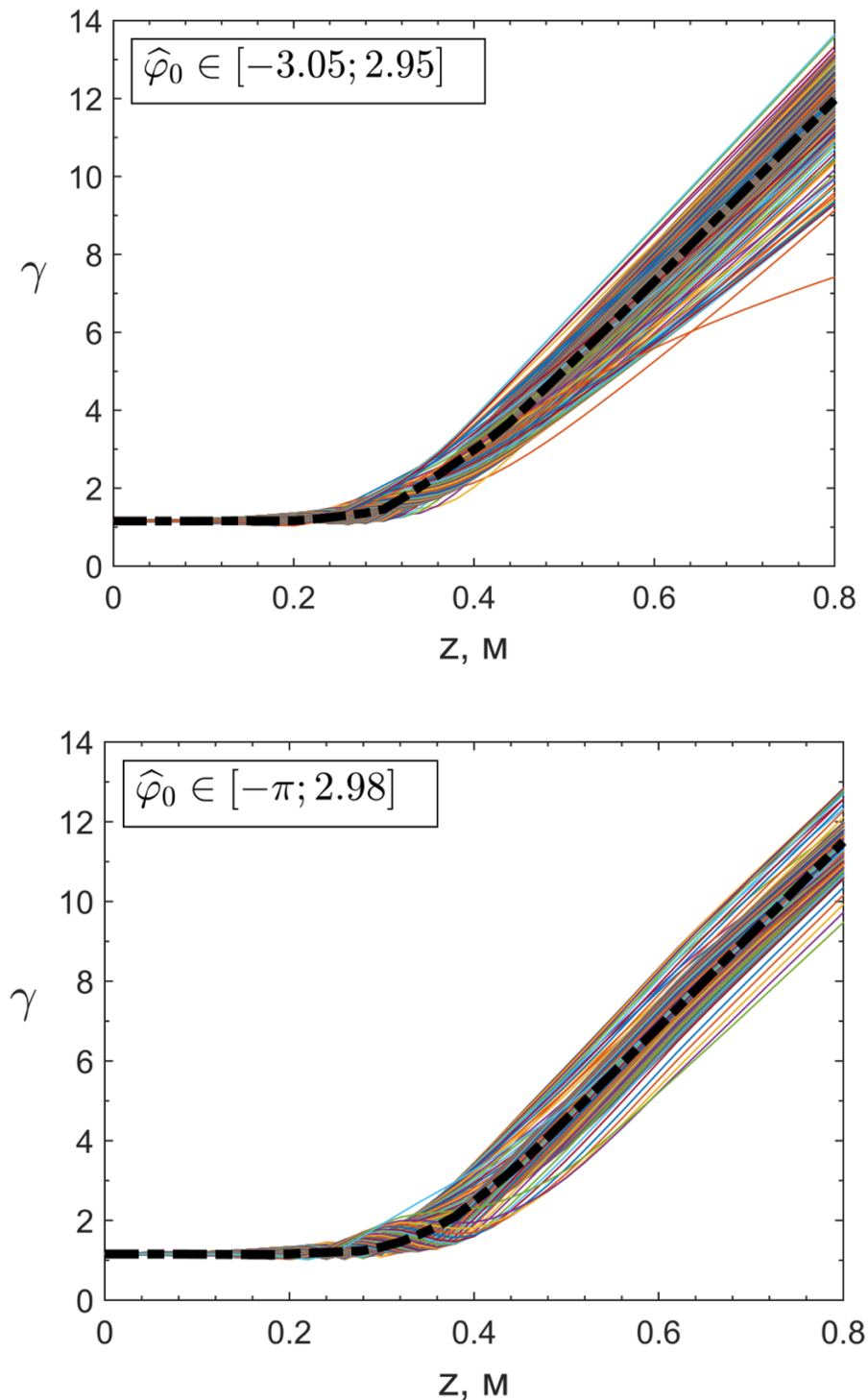


Рисунок 4. Приведенная энергия частиц пучка. На графике  $\hat{\varphi}_0$  – начальный диапазон фаз на старте ускорителя, которые попади в режим ускорения.  $\gamma$  – приведенная энергия,  $\hat{\varphi}$  – отклонение фаз частиц от фазы синхронной частицы.

Графики, представляющие распределение энергии по фазам частиц на выходе ускорителя до оптимизации (сверху) и после оптимизации (снизу), приведены на рисунке 5:

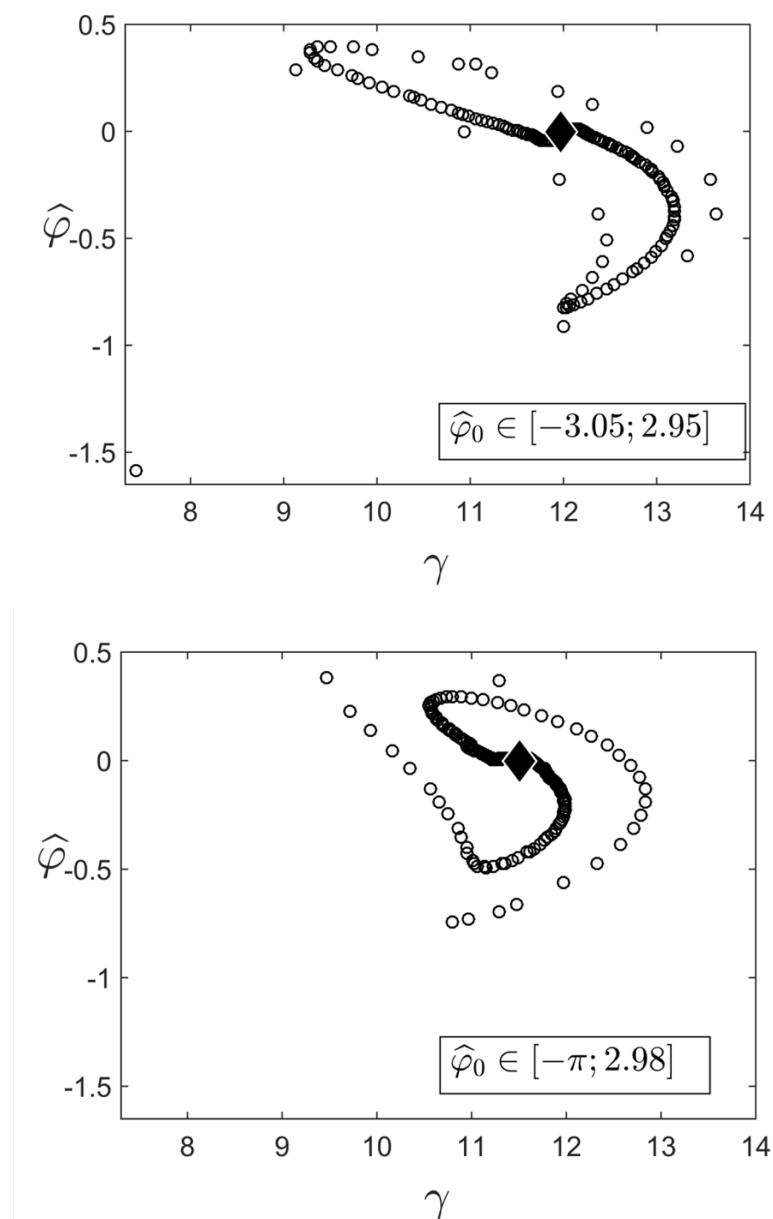


Рисунок 5. Распределение энергии по фазам частиц на выходе ускорителя. На графике  $\hat{\varphi}_0$  – начальный диапазон фаз на старте ускорителя, которые попади в режим ускорения.  $\gamma$  – приведенная энергия,  $\hat{\varphi}$  – отклонение фаз частиц от фазы синхронной частицы.

Необходимо отметить, что результат данного метода носит стохастический характер, при каждом запуске на разных наборах данных оптимизация происходит по-разному, поэтому получив благоприятный результат, он был зафиксирован для дальнейшего исследования.



## 2.2 Генетический алгоритм глобальной оптимизации

Генетический алгоритм глобальной оптимизации использует нормальное распределение при формировании новых поколений и обеспечивает адаптацию ковариационной матрицы во время случайного поиска. Этот метод не требует вычисления ковариационной матрицы.

При проектировании новых ускорителей заряженных частиц и электрофизических установок возникают задачи управления [12]. Объект управления здесь – это заряженные частицы (траектории движения частиц, описанные дифференциальными уравнениями). В итоге рассматривается задача пучка (ансамбля) траекторий.

Данный алгоритм применяется для поиска глобального экстремума функционала, который характеризует качество динамики пучка в линейном ускорителе. Исследуемая задача по поиску экстремума имеет большое количество переменных, а целевая функция является мультиэкстремальной. По этой причине использование стохастического метода является предпочтительным способом достижения цели. Алгоритм быстро сходится и может быть успешно использован при решении многомерных задач оптимизации, в том числе в сочетании с направленными методами.

Генетические алгоритмы реализуют итеративный подход; каждая итерация имеет дело с генерацией точек. Общая схема стохастических методов глобальной оптимизации включает в себя проектирование начальной генерации и способ перехода к следующему поколению. Цель состоит в том, чтобы обеспечить сходимость последовательности генерации к глобальной точке экстремума.

Рассматривается генетический алгоритм, принадлежащий к набору методов, позволяющих эволюцию ковариационной матрицы в ходе случайного поиска. Следующее поколение моделируется с использованием нормального распределения случайных контрольных точек. Специальный метод моделирования нового поколения позволяет не рассчитывать ковариационную матрицу [2].

Рассмотрим задачу поиска глобального минимума функции  $F(X)$  в области  $D$   $n$ -мерного евклидова пространства  $E^n$ :

$$\min_{X \in D} F(X).$$

Пусть  $l$  – это номер поколения,  $\varepsilon$  – требуемая точность.

а) Начальное поколение:  $l = 0$ .

1. Моделируем  $M$  случайными точками  $X_i, i = \overline{1, M}$ , используя равномерное распределение в области  $D$ .

2.

$$F_{\min}^{(0)} = \min_{i=1, \dots, M} F(X_i), \quad X_{\min}^{(0)} = \arg \min_{i=1, \dots, M} F(X_i).$$

б) Переходим к следующему поколению:

1. Выберем  $m$  лучших точек  $Y_1, \dots, Y_m$  среди точек  $X_1, \dots, X_M$ .

2. Введем новые точки:

$$X_j := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \eta_j^{(i)} (Y_i - X_{\min}^{(l)}) + X_{\min}^{(l)}, \quad j = \overline{1, M},$$

где  $\eta_j^{(i)}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, M}$  независимые стандартные нормальные случайные величины ( $M\eta_j^{(i)} = 0, M(\eta_j^{(i)})^2 = 1$ ).

$$X_{\max} = \arg \max_{i=1, \dots, M} F(X_i).$$

3. Если  $F(X_{\max}) > F(X_{\min}^{(l)})$ , то произведем замену  $X_{\max}$  на  $X_{\min}^{(l)}$ .

4.  $l := l + 1$ .

с) Вычисляем  $l$ -ое поколение.

$$F_{\min}^{(l)} = \min_{i=1, \dots, M} F(X_i), \quad X_{\min}^{(l)} = \arg \min_{i=1, \dots, M} F(X_i).$$

1. Если  $\frac{F_{\min}^{(l)} - F_{\min}^{(l-1)}}{F_{\min}^{(l-1)}} < \varepsilon$ , тогда заканчиваем процесс, иначе переходим

к пункту б).

Из-за случайных величин  $\eta_j^{(i)}$ , включенных в вектор  $X_j$ , ковариационная матрица изменяется от поколения к поколению и позволяет сконцентрировать

образец в области рассеивающего эллипсоида с центром  $X_{\min}^{(1)}$ . Таким образом, контрольные точки чаще появляются в непосредственной близости от лучшей популяции, найденной в предыдущем поколении. При нахождении случайных нормально-распределенных точек выборки нет необходимости вычислять ковариационную матрицу и использовать ее при моделировании. Это особенно важно при большом размере пространства, т.к. процесс поиска долог.

Продольная динамика пучка в линейном ускорителе считается комплексом синхронного движения частиц и движения частиц пучка. Предполагается, что синхронная фаза изменяется вдоль структуры. Такой подход открывает дополнительные возможности для оптимизации эволюции пучка. Уравнения динамики пучка имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{d\xi_s}{d\tau} &= (\beta\gamma)_s / \sqrt{1 + (\beta\gamma)_s^2}, \\ \frac{d(\beta\gamma)_s}{d\tau} &= -\alpha(\xi_s, u_1) \sin(\varphi_s(\xi_s, u_2)), \\ \frac{d\xi}{d\tau} &= \beta\gamma / \sqrt{1 + (\beta\gamma)^2}, \\ \frac{d(\beta\gamma)}{d\tau} &= -\alpha(\xi, u_1) \sin(\hat{\varphi} + \varphi_s(\xi, u_2)),\end{aligned}\tag{2.2.1}$$

при начальных значениях

$$\xi_s(0) = \xi_{s0}, (\beta\gamma)_s(0) = (\beta\gamma)_{s0}, \xi(0) = \xi_0, (\beta\gamma)(0) = (\beta\gamma)_0,\tag{2.2.2}$$

здесь  $\tau$  – приведенное (безразмерное) время,  $\xi, \beta\gamma$  приведенные координаты и импульс частицы,  $\beta$  и  $\gamma$  приведенные скорость и энергия; индекс  $s$  обозначает характеристики синхронной частицы; функции  $\alpha$  и  $\varphi_s$  соответственно безразмерные амплитуда ускоряющей волны и синхронной фазы;  $u_1$  и  $u_2$  векторы параметров;  $\hat{\varphi}$  отклонение фазы частицы от синхронной фазы, определяемой выражением:

$$\hat{\varphi}(\tau, \xi_0, (\beta\gamma)_{s0}) = 2\pi \int_0^\tau \left( \frac{(\beta\gamma)(\mu)}{\sqrt{1 + ((\beta\gamma)(\mu))^2}} \frac{\sqrt{1 + ((\beta\gamma)_s(\mu))^2}}{(\beta\gamma)_s(\mu)} - 1 \right) d\mu + \hat{\varphi}_0(\xi_0, (\beta\gamma)_{s0}),\tag{2.2.3}$$

$$\text{где } \widehat{\varphi}_0(\xi_0, (\beta\gamma)_{s0}) = \frac{2\pi\xi_0\sqrt{1+(\beta\gamma)_{s0}^2}}{(\beta\gamma)_{s0}}.$$

При интегрировании данной системы (2.2.1), (2.2.2), целесообразно рассмотреть дифференциальное уравнение вместо отношения (2.2.3):

$$\frac{d\widehat{\varphi}}{d\tau} = 2\pi \left( \beta\gamma\sqrt{1+(\beta\gamma)_s^2} / \left( (\beta\gamma)_s\sqrt{1+(\beta\gamma)^2} \right) - 1 \right),$$

которое нужно интегрировать совместно с уравнениями (2.2.1); при начальном значении:

$$\widehat{\varphi}(0) = \widehat{\varphi}_0(\xi_0, (\beta\gamma)_{s0}).$$

Вводим независимую переменную, которая будет аналогом времени. Такая форма описания динамики пучка удобна для учета кулоновского поля; это планируется сделать с дальнейшими исследованиями.

Перед постановкой задачи оптимизации приведем уравнения Гамильтона с независимой переменной  $\xi$  описывающие продольные колебания частиц вблизи синхронного. Динамические переменные — это разности фаз асинхронных и синхронных частиц ( $\psi = \varphi - \varphi_s$ ) и разности энергий асинхронных и синхронных частиц ( $p_\psi = \gamma - \gamma_s$ ). Из этого следуют уравнения:

$$\frac{dp_\psi}{d\xi} = - \frac{\partial H(\xi, \psi, p_\psi)}{\partial \psi}, \quad \frac{d\psi}{d\xi} = \frac{\partial H(\xi, \psi, p_\psi)}{\partial p_\psi},$$

где

$$H(\xi, \psi, p_\psi) = \pi(\gamma_s^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} p_\psi^2 + V(\xi, \psi),$$

$$V(\xi, \psi) = -\alpha(\xi, u_1) \left( \cos(\psi + \varphi_s(\xi, u_2)) + \psi \sin(\varphi_s(\xi, u_2)) \right),$$

В предположении адиабатического изменения функций  $\alpha(\xi, u_1)$ ,  $\varphi_s(\xi, u_2)$ ,  $(\gamma_s^2 - 1)^{-\frac{3}{2}}$  вдоль структуры мы имеем уравнение для сепаратрисы [9], которое ограничивает область захвата частиц в режим ускорения:

$$P_\psi = \pm \sqrt{(1/\pi)(\gamma_s^2 - 1)^{\frac{3}{2}} \sqrt{V(\xi, -\pi - 2\varphi_s(\xi, u_2)) - V(\xi, \psi)}}.$$

Мы представим критерии качества с точки зрения динамики модельных частиц. Рассмотрим  $N$  модельных частиц и  $P$  сечений по плоскостям  $\xi = \xi_i$ ,  $i = \overline{1, P}$ , при условии, что  $\xi_P = L$ . Пусть индекс  $n$  обозначает характеристики  $n$ -ой частицы, и индекс  $i$  обозначает номер сечения.

Значение Гамильтониана на сепаратрисе для  $i$ -ого сечения следующее:

$$\bar{q}_i = V(\xi_i, -\pi - 2\varphi_s(\xi_i, u_2)).$$

Пусть

$$q_{in} = H(\xi_i, \hat{\varphi}_n(\xi_i), p_{\psi n}(\xi_i)),$$

значение Гамильтониана для  $n$ -ой частицы в  $i$ -ом сечении. Где  $\hat{\varphi}_n(\xi)$  – это отклонение фазы частицы в момент времени, когда ее приведенная координата  $\xi$ .

Пусть синхронная частица пересекает  $i$ -ый участок за приведенное время  $\tau_{si}$ . Частицы, пересекающие этот участок за период  $(\tau_{si} - 0.5, \tau_{si} + 0.5)$ , принимаются для формирования сгустка и используются при расчете характеристик пучка для сечения. Например, на выходном участке  $\xi_P = L$  среднее отклонение фазы частицы от синхронной получается по формуле [10]

$$\bar{\varphi}(L) = \frac{1}{|N_L|} \sum_{j \in N_L} \hat{\varphi}_j(L),$$

где  $N_L$  представляет собой набор чисел модельных частиц, пересекающих этот участок за период  $(\tau_{sP} - 0.5, \tau_{sP} + 0.5)$ ,  $|N_L|$  количество элементов этого набора.

Давайте введем функцию штрафа, которая будет использоваться для построения функционала качества:

$$\Theta(b, \hat{b}) = \begin{cases} (b - \hat{b})^2, & b > \hat{b} \\ 0, & b \leq \hat{b} \end{cases}$$

Рассмотрим задачу оптимизации динамики пучка по параметрам управления  $u = (u_1, u_2)$  обеспечивая высокое качество группировки и ускорения пучка частиц. Используем критерии, приведенные ранее в (1.2.8).

Далее строим математическую оптимизационную модель обобщая модель динамики пучка. Рассмотрим динамический управляемый процесс, описываемый следующими уравнениями:

$$\frac{dx_s}{d\tau} = f_s(\tau, x_s, u), \quad (2.2.4)$$

$$\frac{dx}{d\tau} = f(\tau, x, u, \psi), \quad (2.2.5)$$

$$\psi(\tau, x_0, u) = \int_0^{\tau} h(\mu, x(\mu, x_0, u), x_s(\mu))d\mu + \psi_0, \quad (2.2.6)$$

с начальными параметрами:

$$x_s(0) = x_{s0}, \quad x(0) = x_0 \in \bar{M}_0.$$

Рассмотрим задачу совместной оптимизации программного движения, описываемого системой (2.2.4) и ансамблем траекторий системы (2.2.5) - (2.2.6). Модифицируем и обобщаем формулировку задачи оптимизации, приведенную выше [4]. Функциональная оценка качества динамического управляемого процесса (2.2.4) - (2.2.6) вводится следующим образом:

$$I(u) = \int_0^T \Phi_s(\tau, x_s(\tau), u(\tau))d\tau + \int_0^T \Phi(\omega(\tau))d\tau, \quad (2.2.7)$$

где

$$\omega(\tau) = \int_{M_0} \eta(\tau, x_s(\tau), x(\tau, x_0, u), \psi(\tau, x_0, u), u(\tau))\rho_0(x_0)dx_0. \quad (2.2.8)$$

Задача оптимизации динамики пучка теперь формулируется как задача минимизации функционала (2.2.7) - (2.2.8) с помощью управления  $u$ .

Представление критерия качества в виде (2.2.7) - (2.2.8) в предположении гладкости функций  $\Phi_s$ ,  $\Phi$ ,  $\eta$  гладкости, позволяет получить аналитическое выражение для функциональной вариации на основе методологии [4, 61, 62]; это дает возможность использовать методы направленной оптимизации в сочетании со случайным поиском.

Численное моделирование и оптимизация динамики продольного пучка выполнены для ускорителя со следующими основными характеристиками: энергия инжекции 80 кэВ, длина ускоряющей волны 10 см, длина канала ускорителя 80 см.

Функции  $\alpha(\xi)$  и  $\varphi_s(\xi)$  моделируются тригонометрическими полиномами, компоненты векторов  $u_1$  и  $u_2$  являются значениями производных многочленов в точках сетки и значениями  $\alpha(0)$ ,  $\varphi_s(0)$ . Это позволяет получить гладкие функции  $\alpha(\xi)$  и  $\varphi_s(\xi)$ . Количество узлов для каждого вектора управления равно 41.

Задача оптимизации динамики пучка сводится к минимизации критерия (1.2.8) по параметрам управления (составляющие  $u_1$  и  $u_2$ ). Эта экстремальная проблема решается с использованием генетического стохастического алгоритма с эволюцией ковариационной матрицы. Чтобы применить алгоритм, представленный выше, предположим, что  $X$  является вектором параметров управления  $\dim(X) = 84$ ,  $F(X) = K(u)$ .

Итак, поиск осуществляется в многомерной области  $D \in E^{84}$ . Опыт численной оптимизации показывает, что целевая функция имеет множество близко расположенных экстремумов. Из этого следует, что для реализации алгоритма необходимо достаточно большое количество  $M$  случайных векторов. Параметры метода выбираются следующим образом:  $M=1000$ ,  $m=50$ .

Проведенная оптимизация обеспечила значительное снижение объективной функциональной ценности и улучшение соответствующей динамики пучка. Для достижения необходимой точности ( $\epsilon = 0.01$ ) определения экстремума потребовалось всего 6 итераций (37 минут для каждой на компьютере с параметрами такими же, как использовались для метода роя частиц) [70, 71].

Оптимизация позволила уменьшить разброс фаз на выходе устройства с 1,63 до 0,98 (радиан), уменьшить относительный разброс энергии с 0,36 до 0,31 и увеличить количество частиц в сепаратрисе с 94 до 98. Коэффициент захвата

сохраняется постоянным во время оптимизации и равен 96%. Синхронная частица приведенной энергии изменилась с 11,93 до 11,37 и принадлежит требуемому интервалу (11,3; 11,7).

Графики, представляющие фазы частиц в пространстве, находящихся в режиме ускорения до оптимизации (верхний) и после оптимизации (нижний), приведены ниже на рисунке 6:

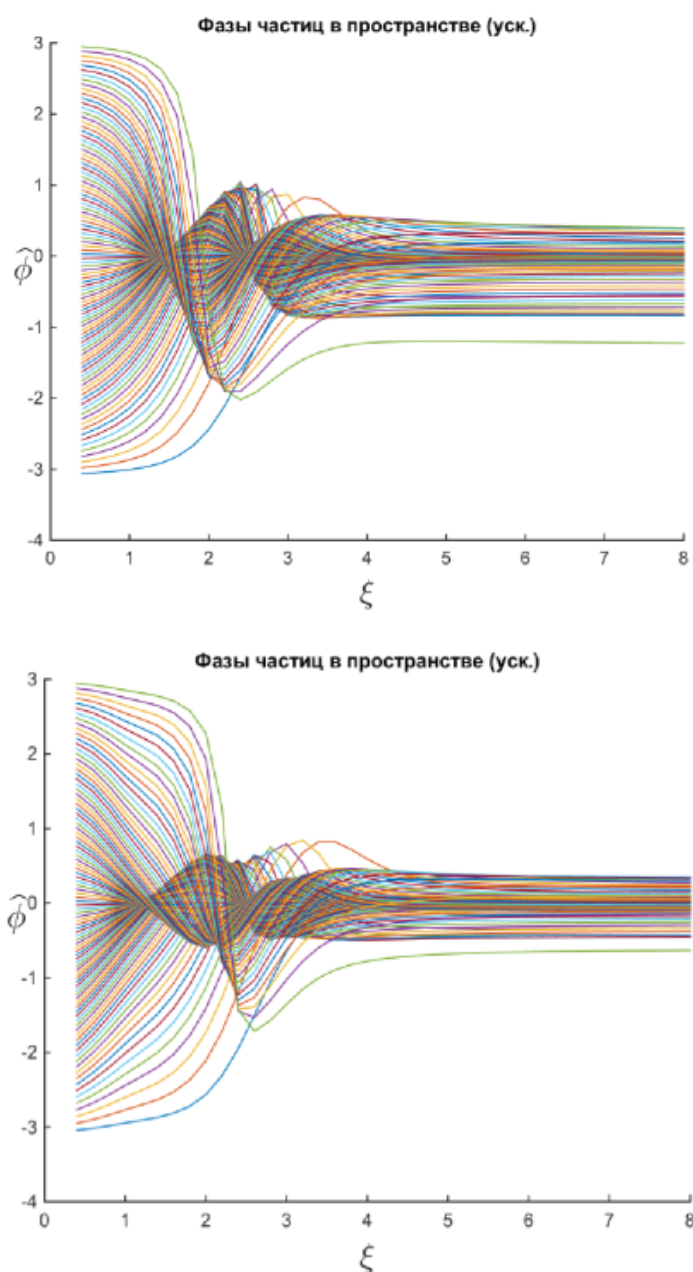


Рисунок 6. Отклонение фазы частицы от синхронной (для частиц в режиме ускорения). На графике  $\hat{\phi}$  – отклонение фаз частиц от синхронной частицы,  $\xi$  – это приведенная координата вдоль ускорителя.



Графики, представляющие приведенную энергию частиц пучка до оптимизации (сверху) и после оптимизации (снизу), приведены ниже на рисунке 7:

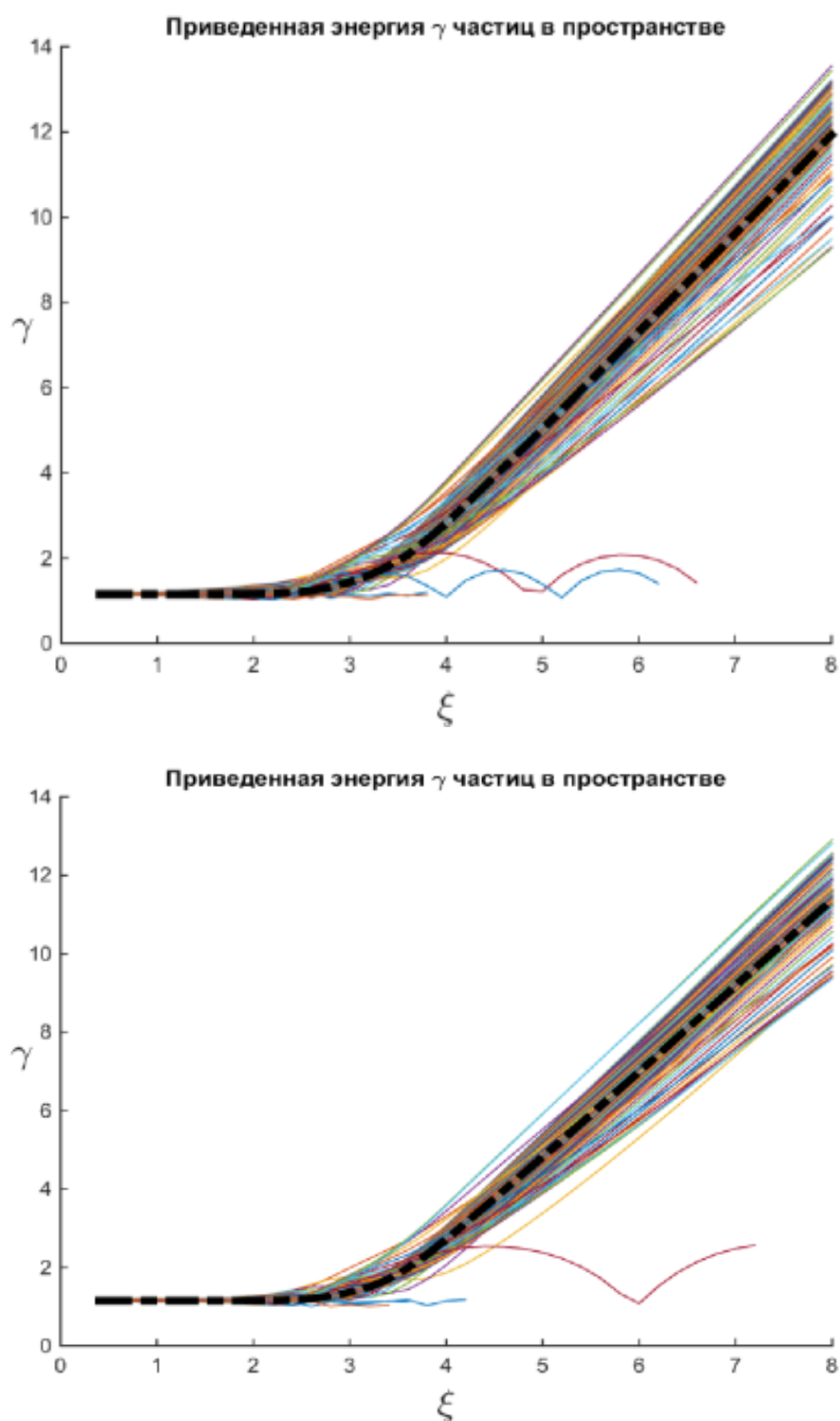


Рисунок 7. Приведенная энергия частиц пучка. На графике  $\gamma$  – приведенная энергия частиц,  $\xi$  – это приведенная координата вдоль ускорителя.

Графики, представляющие сепаратрису и распределение энергии по фазам частиц на выходе ускорителя до оптимизации (сверху) и после оптимизации (снизу), приведены ниже на рисунке 8:

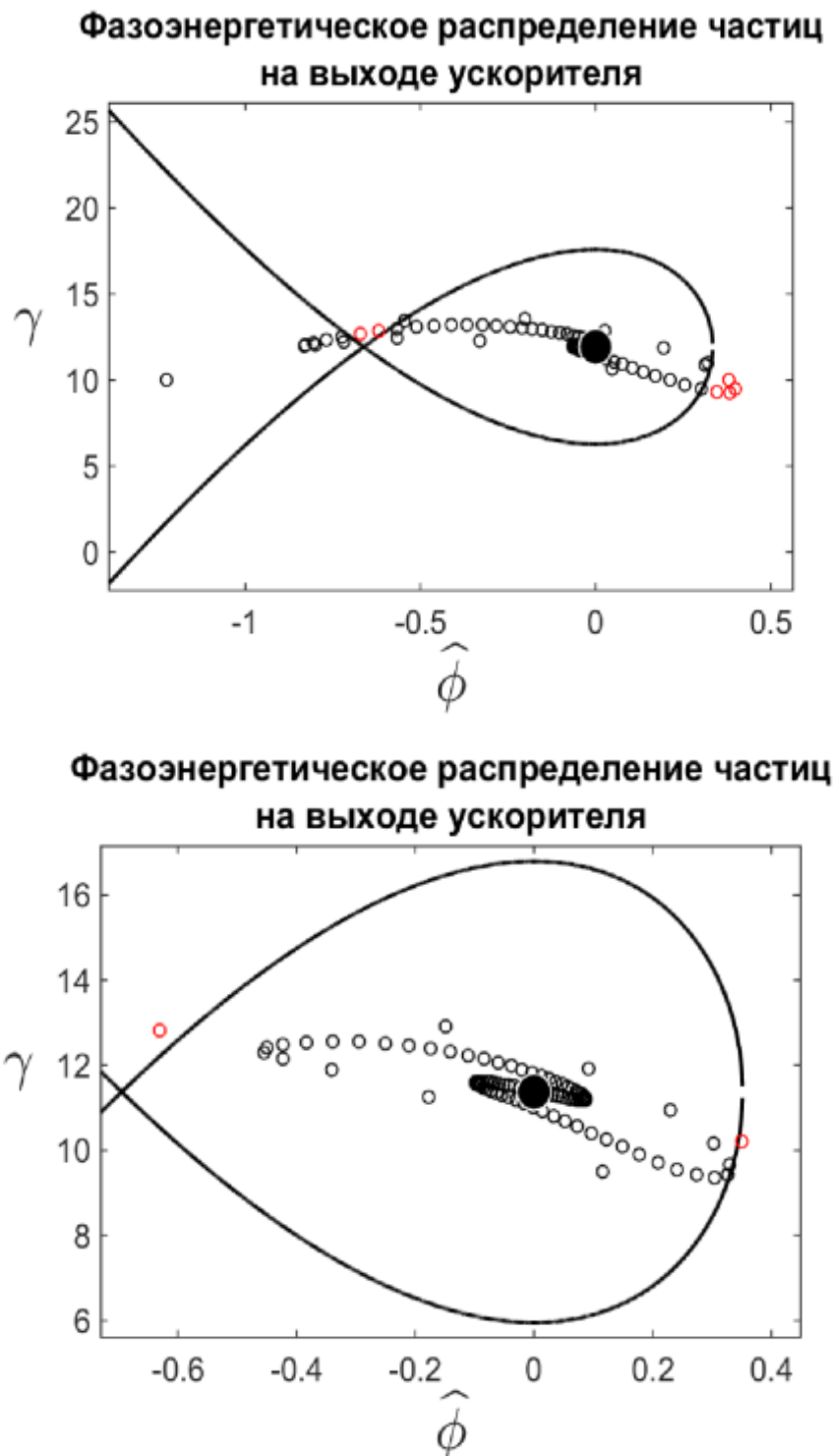


Рисунок 8. Сепаратриса и распределение энергии по фазам частиц на выходе ускорителя. На графиках  $\hat{\phi}$  – отклонение фаз частиц от синхронной частицы,  $\gamma$  – приведенная энергия частиц.

Теперь представим графики управлений: функций  $\alpha(z, u_1)$  (параметр амплитуды ускоряющего поля) и  $\phi_s(z, u_2)$  (синхронная фаза) на рисунке 9.

Графики этих функций для начального управления показаны пунктирной линией, графики, полученные после оптимизации, показаны сплошной линией.

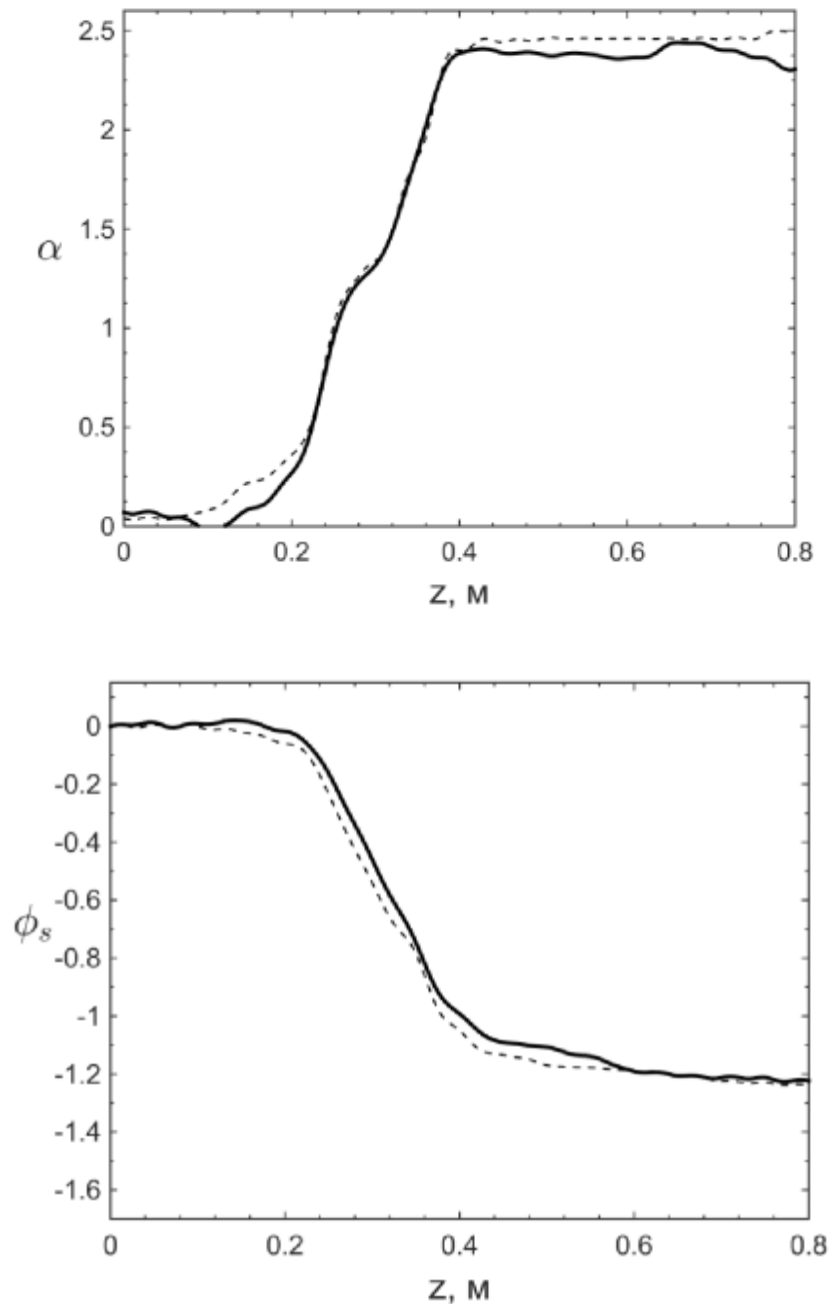


Рисунок 9. Функции  $\alpha(z)$  и  $\phi_s(z)$  до оптимизации (пунктирная линия) и после оптимизации (сплошная линия).

## 2.3 Генетический алгоритм многокритериальной оптимизации

В предыдущем параграфе была проведена оптимизация суммарного влияния нескольких критериев качества, входящих в сумму с разными коэффициентами. Но в такой ситуации было трудно подобрать подходящие коэффициенты, которые бы приводили к одинаково «хорошей» оптимизации каждого критерия в отдельности. В связи с этим было принято решение применить многокритериальную оптимизацию к данной задаче, т.к. данный подход позволяет получить приемлемые результаты в аналогичных задачах, где присутствуют несколько критериев для оптимизации. В частности, полезным подходом является построение фронта Парето.

Пусть задан вектор критериев:  $F(X) = (F_1(X), \dots, F_s(X))$ , где  $X \in E^n$  – вектор управлений, область поиска  $D \subset E^n$ .

Пусть  $M$  – приближенное число пробных точек (число пробных точек будет меняться от поколения к поколению, но оставаться близким к  $M$ ).  $l$  – номер поколения.

Суть метода заключается в том, что множество приближенно эффективных управлений уточняется от поколения к поколению до достижения требуемой точности  $\varepsilon$ , при построении пробных точек используется нормальное распределение.

$S \subset E^s$  – приближенное множество Парето.

$P \subset D \subset E^n$  – множество приближенно эффективных управлений (ПЭУ).

$\rho$  – мера изменения множества  $P$  от поколения к поколению.

В данном случае я рассматриваю задачу многокритериальной оптимизации вектора критериев  $F$ , алгоритм которой заключается в следующем:

А) Нулевое поколение  $l = 0$ .

Задаем равномерно распределенные в  $D$  пробные точки:

$$X_i \in Unif(D), \quad i = \overline{1, M}$$

Строим приближенное множество Парето  $C \subset E^s$ .

Пусть  $m$  – число точек Парето в пространстве критериев  $m = |C|$ .

Множеству  $C$  соответствует множество  $P \subset D$  – множество приближенно эффективных управлений в пространстве параметров.

$$P = \{Y_1, \dots, Y_m\}$$

Таким образом роль «лучших» точек играют приближенно эффективные управления (ПЭУ). Переходим далее к пункту В.

В) Построение точек поколения  $l$ :

а) Из предыдущего  $l - 1$  поколения известны:

$C$  – приближенное множество Парето;

$$m = |C|;$$

$P = \{Y_1, \dots, Y_m\}$  – множество ПЭУ («лучшие» (в смысле многокритериальной оптимизации) точки  $l - 1$  поколения).

б) Моделируем рассеяние пробных точек вокруг каждой из  $Y_1, \dots, Y_m$  в соответствии с нормальным законом распределения.  $J$  пробных точек вокруг каждой  $Y_k$ ,  $k = \overline{1, M}$ . Чтобы общее количество пробных точек было близко к  $M$ .

$$J = \left[ \frac{M}{m} \right],$$

$$X_{ki} := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \eta_{kj}^{(i)} (Y_i - Y_k) + Y_k, \quad k = \overline{1, m}, j = \overline{1, J},$$

где  $\eta_{kj}^{(i)}$  – независимые стандартные нормально распределенные величины.

Значения  $X_{ki}$  запишем в виде одномерного массива:

$$X_{(k-1)J+j} := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \eta_{kj}^{(i)} (Y_i - Y_k) + Y_k, \quad k = \overline{1, m}, j = \overline{1, J}.$$

Добавим к этим пробным точкам точки ПЭУ  $l - 1$  поколения (т.е. центры рассеяния):

$$X_{kJ+i} := Y_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

Получаем пробные точки  $X_1, \dots, X_{(m+1)J}$

с) Построим  $C^{(l)}$  – приближенное множество Парето и  $P^{(l)}$  – множество ПЭУ.

В связи с тем, что множество  $P$  (ПЭУ предыдущего поколения) включено в множество пробных точек, точки множества  $P^{(l)}$  могут быть не хуже или лучше, чем точки множества  $P$ .

Пусть  $P^{(l)} = \{Z_1, \dots, Z_{m_l}\}$ .

Найдем меру  $\rho$  измерения множества ПЭУ по сравнению с поколением  $l - 1$ , т.е. меру различия  $P^{(l)}$  и  $P$ . Для каждой  $i$ -ой точки из  $P$  отмечаем номера  $k$  точек из  $P^{(l)}$ , для которых  $F(Z_k) \leq F(Y_i)$ . Здесь  $F(Z_k)$  предпочтительнее [5]  $F(Y_i)$ .

Пусть  $\chi$  – множество таких номеров  $k$ .

Положим

$$\rho_i = \begin{cases} \max_{k \in \chi} \|Y_i - Z_k\|, & \text{если } \chi \text{ не пусто,} \\ 0, & \text{если } \chi \text{ пусто.} \end{cases}$$

Положим  $\rho = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \rho_i$ .

d)  $m := m_l$ ;  $C := C^{(l)}$ ;  $P := P^{(l)}$ ;  $\Leftrightarrow \{Y_1, \dots, Y_m\} = \{Z_1, \dots, Z_{m_l}\}$ .

e) Если  $\rho \leq \varepsilon$ , необходимо перейти к пункту Exit.

Если  $\rho > \varepsilon$ , необходимо перейти к пункту B).

Exit. Получены результирующее множество Парето  $C$ ;  $m = |C|$ ; результирующее множество ПЭУ  $P = \{Y_1, \dots, Y_m\}$ . Далее нужно из множества  $P$  взять одно управление, которое было бы «лучше» других. В частности, я выбрала такое управление, как приближение  $\hat{X}_{min}$  к глобальному экстремуму связки критериев:

$$b_1 F_1(X) + b_2 F_2(X) + \dots + b_s F_s(X)$$

по формуле

$$\hat{X}_{min} = \underset{i=\overline{1,m}}{\operatorname{argmin}} (b_1 F_1(Y_i) + \dots + b_s F_s(Y_i)).$$

Теперь рассмотрим практическую адаптацию данного алгоритма к нашей задаче. Возьмем управления, обозначенные пунктирной линией на рисунке 9 (они были ранее получены как «оптимальные» [62]). Попробуем их улучшить. Зададим вдоль этих управлений область, в рамках которой могут меняться пробные управления. Так как каждое управление задано на 41 точке, то имеем 41 диапазон изменения управлений  $[Umin(j); Umax(j)]$ ,  $j = \overline{1,41}$ . Зададим  $M=49$ . Далее равномерно распределим точки в каждом из этих диапазонов и получим 49 новых управлений – первое управление проходит по всем минимальным значениям диапазонов  $Umin(j)$ , а 49-е по всем максимальным значениям диапазонов  $Umax(j)$ . Добавляем к этому набору из 49 управлений начальное.

Далее начинаем процесс оптимизации. На каждой итерации  $i = \overline{0,10}$  для нового набора управлений вычисляем динамику системы и по ней вычисляем критерии  $K_1, K_2, K_3, K_4$ . Критерии  $K_5$  и  $K_6$  не учитываем. На нулевой итерации берем набор, полученный равномерным распределением из «оптимизированного» управления по алгоритму, описанному выше. На последующих итерациях строим новые управления из тех, что входят во фронт Парето на предыдущей итерации.

Далее отбрасываем те управления, для которых  $K_1 > K_{1HardLimit}(l)$  или  $K_4 > K_{4HardLimit}(l)$  – на каждой итерации можно задавать свои ограничения. Причина введения различных лимитов на разных итерациях заключается в том, что на нулевой и первой итерации велика вероятность работать с очень различными управлениями, которые дают большой разброс в  $K_1$  и в  $K_4$ , поэтому лучше задать большие  $K_{1HardLimit}$  и  $K_{4HardLimit}$  на нулевой и первой итерациях, а затем уменьшать их.

Для оставшихся управлений, которые мы не отбросили по критерию максимальнойности, мы находим фронт Парето по набору критериев  $(K_2, K_3)$ . Если нашли 0 или 1 точку на фронте Парето, то останавливаемся, так как из этого набора не построить нового набора управлений, которые улучшат критерии.

Начинаем сравнивать новые и старые управления, чтобы определить критерий останова. Там, где необходимо находить номера точек Парето, которые «предпочтительнее», чем точки из предыдущего поколения, используется определение «предпочтительности» [5]: если  $K_{2new} \leq K_2$  и  $K_{3new} \leq K_3$  и хотя бы для одного из них неравенство строгое, тогда новая точка «предпочтительнее» старой.

Для визуального сравнения поколений выбираем из управлений Парето те, у которых минимальное значение  $a * K_1 + b * K_2 + c * K_3 + d * K_4$ . На последней итерации будем считать такое управление, в качестве «оптимального».

Зададим точность  $\varepsilon = 0.01$ .

Возьмем пучок из 100 частиц. Начальное количество пробных управлений – 150.

$$[a \ b \ c \ d] = [100 \ 1 \ 1 \ 1]$$

$$K_{1\text{HardLimit}} = [100 \ 50 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5],$$

$$K_{4\text{HardLimit}} = [400 \ 200 \ 74 \ 74 \ 74 \ 74 \ 74 \ 74 \ 74 \ 74].$$



Таблица 1. Количественные характеристики пучка на выходе.

| Выходное сечение  | N=100                       |                             |                      |                           |
|---|-----------------------------|-----------------------------|----------------------|---------------------------|
|   | Начальное управление        | Оптимизированное управление |                      |                           |
|   |                             | i = 0                       | i = 1                | i = 2                     |
| Количество оставшихся точек ( $K_1$ и $K_4$ в пределах)   | -                           | 4                           | 70                   | 13                        |
| Количество точек Парето   | -                           | 3                           | 7                    | 2                         |
| Диапазон начальных фаз частиц в режиме ускорения  | 6,029319                    | 6,2197188                   | 6,28319              | 6,156252                  |
| $\Delta\hat{\phi} = \hat{\phi}_{\max} - \hat{\phi}_{\min}$ рад<br>для частиц в режиме ускорения               | 1,626878                    | 1,0299539                   | 1,39851              | 1,015601                  |
| $\delta_\gamma = \frac{\gamma_{\max} - \gamma_{\min}}{\gamma_s}$<br>для частиц в режиме ускорения             | 0,358915                    | 0,7524802                   | 0,76314              | 0,736687                  |
| $\gamma_s$ — приведенная энергия синхронной частицы   | 11,92847                    | 11,357617                   | 11,5212              | 11,70534                  |
| $\bar{\gamma} = \frac{1}{N_a} \sum_{j=1}^{N_a} \gamma_{i(j)}$<br>$N_a$ — количество частиц в режиме ускорения | 11,91082                    | 11,995406                   | 11,865               | 12,46442                  |
| Количество частиц в режиме ускорения  | 96                          | 96                          | 92                   | 98                        |
| Процент частиц в режиме ускорения   | 96                          | 96                          | 92                   | 98                        |
| [ $K_1, K_2, K_3, K_4$ ]  | [0.522 0.856<br>0.0916 172] | [0 5.1 0.0545<br>142]       | [0 4.13<br>0.06 141] | [0.003 4.65<br>0.06 58.6] |
| K   | 223,1676                    | 146,83124                   | 144,86               | 63,64423                  |
| Количество частиц внутри сепаратрисы  | 94                          | 100                         | 100                  | 100                       |

Точки Парето по итерациям – красные, остальные управления, не вошедшие в фронт Парето - синие (оси  $K_2$  (горизонтальная ось) x  $K_3$  (вертикальная ось)):

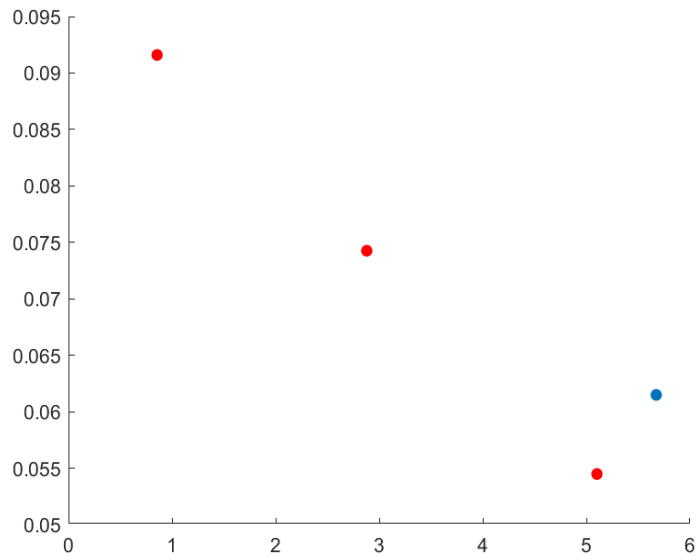


Рисунок 10. Фронт Парето (красные точки (светлые точки)), управления, для которых  $K_1$  и  $K_4$  находятся в нужном диапазоне на первой итерации

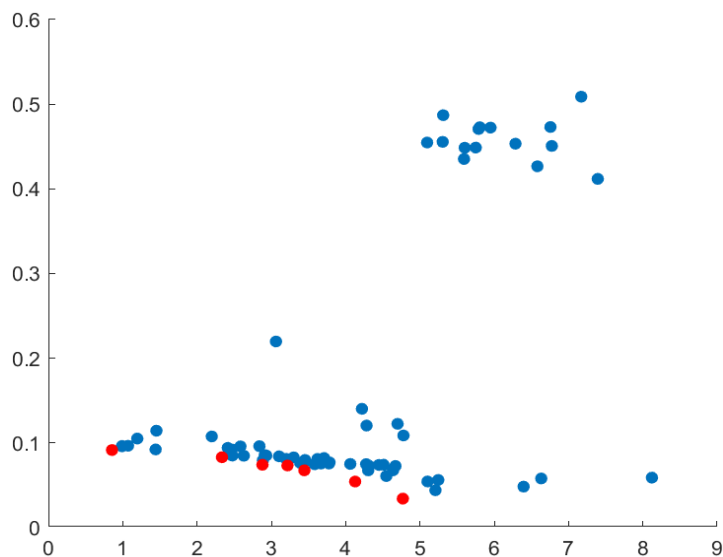


Рисунок 11. Фронт Парето (красные точки (светлые точки)), управления, для которых  $K_1$  и  $K_4$  находятся в нужном диапазоне на второй итерации.

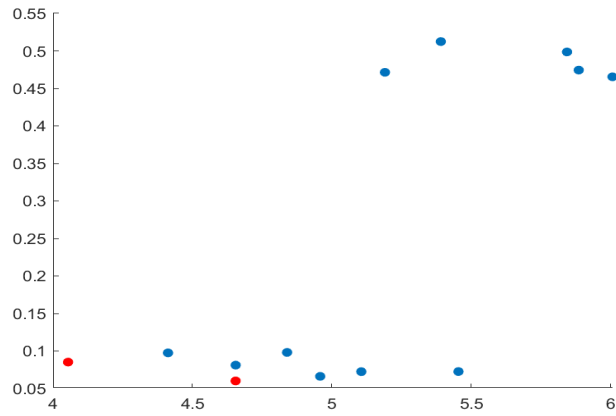


Рисунок 12. Фронт Парето (красные точки (светлые точки)), управления, для которых  $K_1$  и  $K_4$  находятся в нужном диапазоне на третьей итерации.

Графики, представляющие отклонение фазы частицы от синхронной до оптимизации (сверху) и после оптимизации (снизу), приведены ниже:

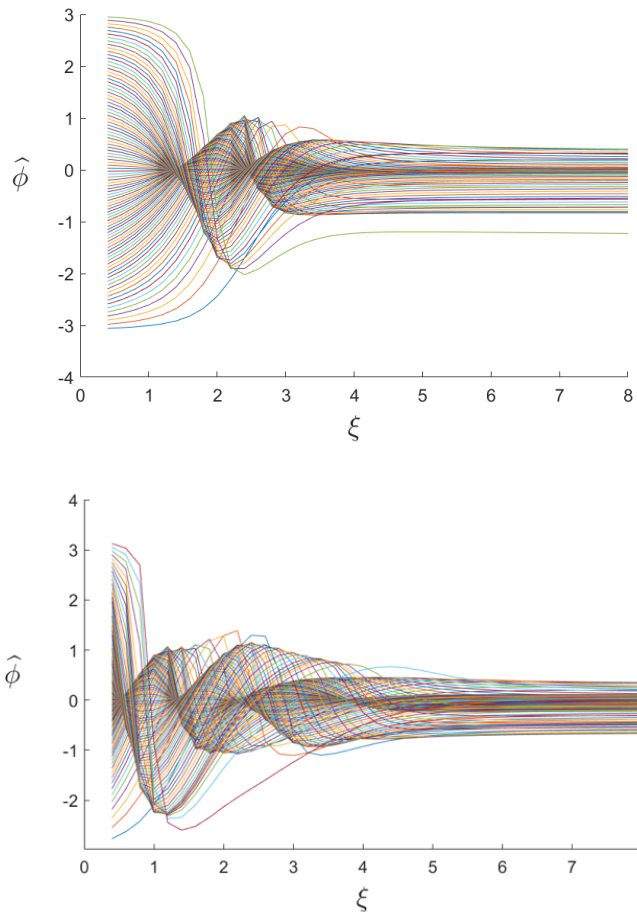


Рисунок 13. Отклонение фазы частицы от синхронной (для частиц в режиме ускорения).

На графике  $\hat{\phi}$  – отклонение фаз частиц от синхронной частицы,  $\xi$  – это приведенная координата вдоль ускорителя.

Графики, представляющие приведенную энергию частиц пучка до оптимизации (сверху) и после оптимизации (снизу), приведены ниже на рисунке 14:

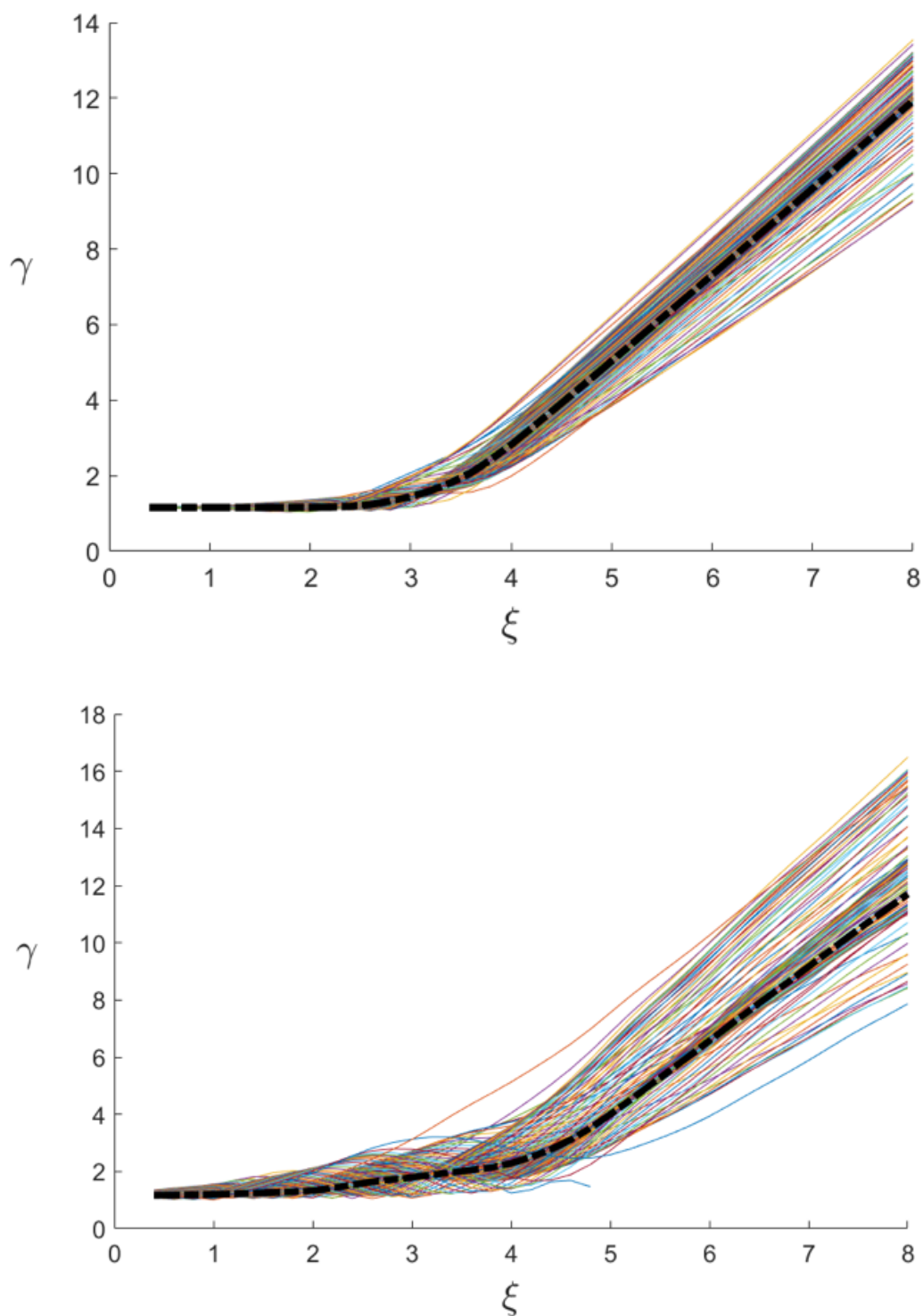


Рисунок 14. Приведенная энергия частиц пучка. На графике  $\gamma$  – приведенная энергия частиц,  $\xi$  – это приведенная координата вдоль ускорителя.

Графики, представляющие сепаратрису и распределение энергии по фазам частиц на выходе ускорителя до оптимизации (слева) и после оптимизации (справа), приведены ниже на рисунке 15:

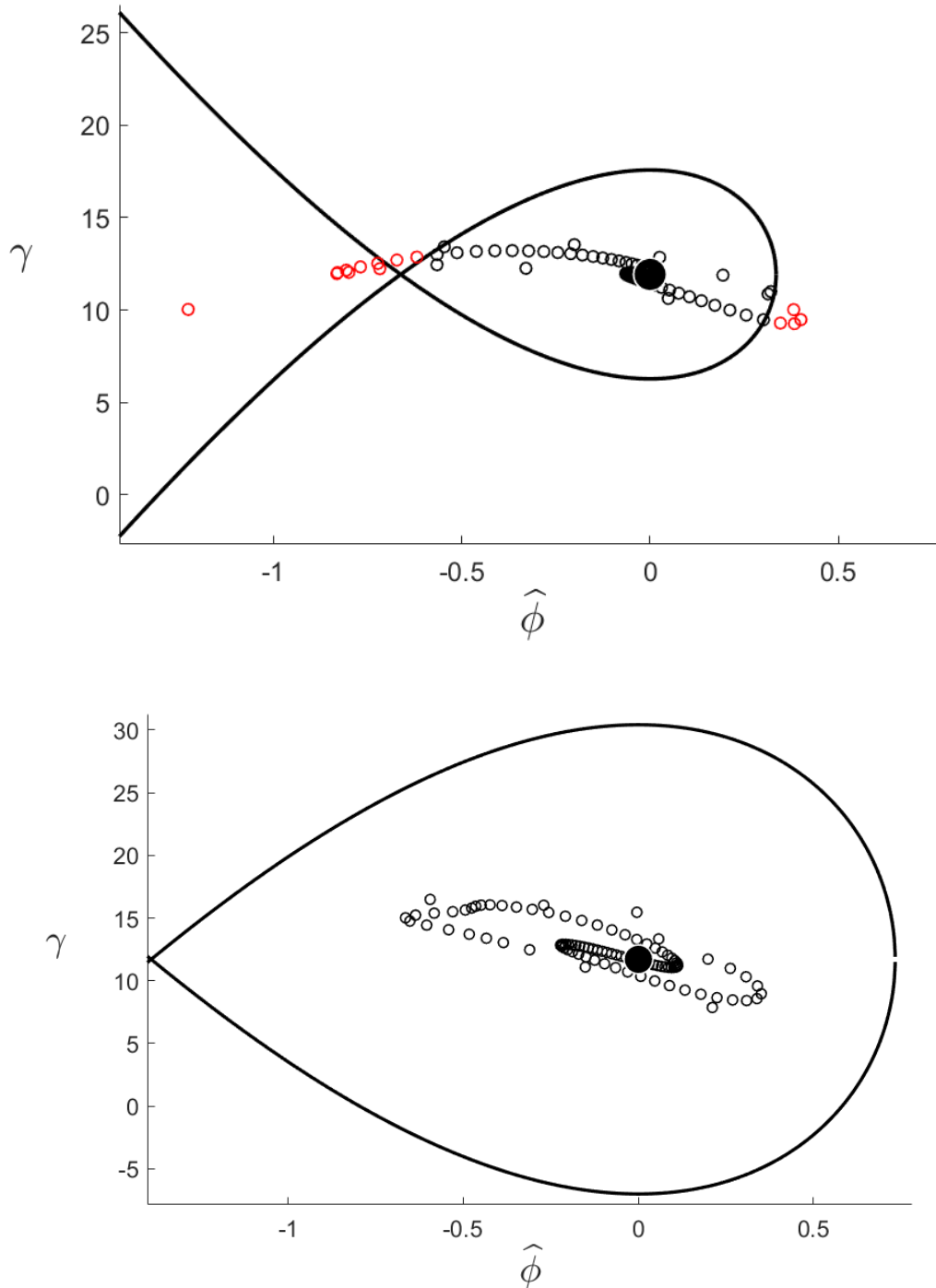


Рисунок 15. Сепаратриса и распределение энергии по фазам частиц на выходе ускорителя. На графике  $\gamma$  – приведенная энергия частиц,  $\hat{\phi}$  – отклонение фаз частиц от синхронной частицы.

Теперь представим графики функций  $\alpha(z, u_1)$  (параметр амплитуды ускоряющего поля) и  $\phi_s(z, u_2)$  (синхронная фаза).

Графики этих функций для начального управления показаны пунктирной линией, графики, полученные после оптимизации, показаны сплошной линией.

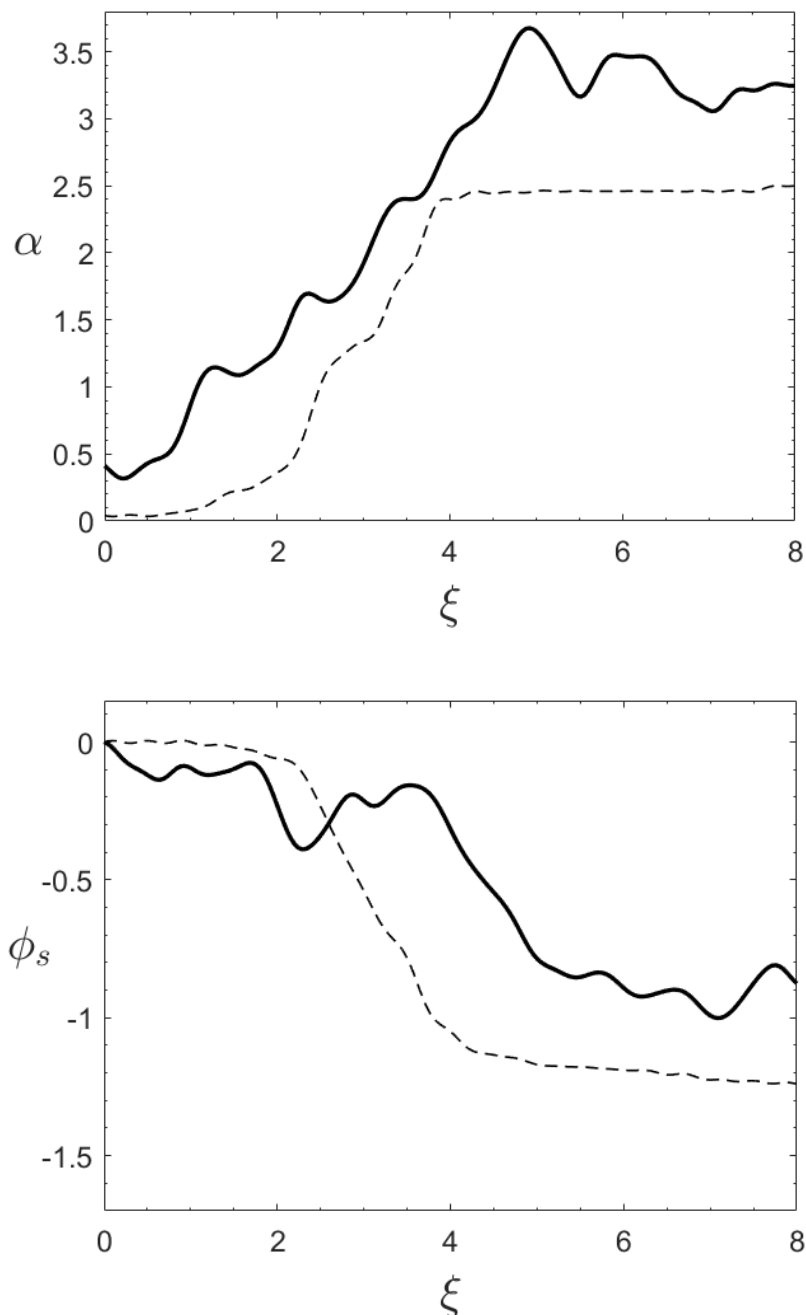


Рисунок 16. Функции  $\alpha(z)$  и  $\phi_s(z)$  до оптимизации (пунктирная линия) и после оптимизации (сплошная линия).  $\phi_s$  – это фаза синхронной частицы,  $\xi$  – это приведенная координата вдоль ускорителя.

## Выводы

После применения трех различных методов к задаче моделирования и оптимизации динамики интенсивного пучка в поле бегущей волны было обнаружено, что:

1) для метода роя частиц: недостатком является то, что необходимо использовать комбинацию всех критериев качества управлений с некоторыми весами, в результате чего теряется некоторая часть информации, которая присуща каждому конкретному критерию. Также недостатком является то, что необходимо использовать рой большой размерности и таким образом на каждой итерации множество раз рассчитывать динамику пучка частиц, что занимает довольно большое время. Преимуществами данного метода являются значительное уменьшение критерия качества, т.е. улучшение качественных характеристик пучка. Данный метод способен преодолевать локальные минимумы критерия качества.

2) для генетического алгоритма глобальной оптимизации: недостатком данного метода является то, что, как и в методе роя частиц нам необходимо использовать совокупность критерия качества управлений с весовыми коэффициентами, которые влияют на итоговую погрешность полученного результата. Но несмотря на это на практике данный метод давал приемлемое оптимизированное управление быстрее, чем метод роя частиц. А полученные результаты по качеству не уступают примененному методу роя частиц. Способность преодолевать локальные минимумы критерия качества при этом сохраняется.

3) для генетического алгоритма многокритериальной оптимизации: недостатком данного метода является то, что при количестве критериев больше двух, трудно визуально представить и найти фронт Парето. Поэтому пришлось отказаться от двух критериев  $K_5$  и  $K_6$ , а критерии  $K_1$  и  $K_4$  было необходимо грубо ограничить максимальными и минимальными значениями на каждом интервале изменения управления. Несомненным плюсом данного

метода является то, что несмотря на ограничения, оптимизация лишь двух критериев позволила получить результаты, часто не уступающие результатам, полученных путем применения предыдущих методов к комбинации всех шести критериев. В связи с этим, многокритериальная оптимизация представляется перспективным направлением дальнейшего исследования. Время вычисления текущей задачи методом многокритериальной оптимизации в среде Matlab не превосходит, а зачастую меньше, чем время, затраченное на вычисление подобной задачи с помощью генетического алгоритма метода глобальной оптимизации.

Общим недостатком данных методов является их стохастическая природа, т.е. нельзя гарантировать, что каждый запуск этих методов приведет к получению одних и тех же оптимизированных управлений. Например, в генетическом алгоритме многокритериальной оптимизации на этот фактор влияет выбор начальных управлений, а методе роя частиц и для генетического алгоритма глобальной оптимизации на каждой итерации присутствует случайность при построении каждого следующего поколения управлений.



## Заключение

В данной работе была рассмотрена проблема моделирования и оптимизации динамики интенсивного пучка в поле бегущей волны с помощью трех различных методов оптимизации: метода роя частиц, генетического алгоритма глобальной оптимизации и генетического алгоритма многокритериальной оптимизации. Данные методы были реализованы в среде и на языке Matlab [20].

При этом решены следующие задачи:

- в процессе исследования была изучена информационная база, включающая в себя текущее состояние дел в рамках научного исследования, изучены стохастические методы оптимизации для задач динамики пучка заряженных частиц,
- в качестве наиболее подходящих для дальнейшего исследования и применения были выбраны методы роя частиц, генетический алгоритм глобальной оптимизации и генетический алгоритм многокритериальной оптимизации,
- применение выбранных методов к заданной математической модели динамики заряженных частиц пучка в поле бегущей волны было осуществлено на практике численно. Полученные результаты представлены в работе. Также было проведено сравнение результатов и описан процесс получения итоговых данных.

В дальнейшем предполагается:

- сравнить методы для большего набора данных [16, 37];
- применить полученные данные на другой модели ускорителя заряженных частиц;
- добавить в расчеты поле Кулона [12];
- применить метод матричного формализма для большого количества частиц [1, 19].

## Список литературы

1. Андрианов С. Н. Динамическое моделирование систем управления пучками частиц. / Н. Андрианов С., под ред. Зайцев В.Ф., Матышев А.А., Санкт-Петербург: Издательство С.-Петербургского ун-та, 2002. 70–72 с.
2. Владимирова Л. [и др.]. Математическая модель оптимизации динамики пучка в ускорителе и применение генетического стохастического алгоритма // Труды Национальной (Всероссийской) конференции по естественным и гуманитарным наукам «Наука СПбГУ – 2020». 2021.
3. Владимирова Л. В. Многокритериальная оптимизация динамики пучков // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика, том 7. 2014. С. 3–18.
4. Владимирова Л. В., Жданова А. Ю., Рубцова И. Д. Использование генетического алгоритма глобального поиска в задаче оптимизации динамики пучка // Сборник трудов конференции ЛАПЛАЗ. 2020. С. 91–92.
5. Владимирова Л. В., Овсянников Д. А., Рубцова И. Д. Методы Монте-Карло в прикладных задачах 2015. С. 100–107.
6. Давыдов А. С. Квантовая механика / С. Давыдов А., Издание 2-е изд., Москва: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1973. 675–703 с.
7. Жданова А. Ю., Андрианов С. Н. Матричный формализм для моделирования и оптимизации динамики интенсивного пучка в поле бегущей волны. // Труды Национальной (Всероссийской) конференции по естественным и гуманитарным наукам «Наука СПбГУ – 2020». 2020.
8. Жданова А. Ю., Рубцова И. Д. Моделирование и оптимизация динамики интенсивного пучка в поле бегущей волны // ЛАПЛАЗ Сборник трудов. 2019. С. 160–161.
9. Капчинский И. М. Теория линейных резонансных ускорителей / М. Капчинский И., под ред. Вайднер О.А., Москва: Издательство: Энегоиздат, 1982. 21–30 с.

10. Овсянников А. Д. Математические модели оптимизации динамики пучков / Д. Овсянников А., под ред. Ворогушин М.Ф., Жабко А.П., Санкт-Петербург: Изд-во ВВМ, 2014. 37–61 с.
11. Овсянников Д. А., Рубцова И. Д., Козыченко В. А. Некоторые проблемы моделирования интенсивных пучков заряженных частиц в линейных ускорителях / А. Овсянников Д., Д. Рубцова И., А. Козыченко В., Санкт-Петербург: ООО «Издательство ВВМ», 2013. 38–59 с.
12. Свистунов Ю. А. [и др.]. Разработка малогабаритного ускорителя дейтронов для нейтронного генератора на энергию 1 МэВ. // Вестник СПбГУ. 2011. С. 49–59.
13. Смит Л. Ускорители / Л. Смит, под ред. Яблоков Б.Н., Линейные ускорители-е изд., Москва: Госатомиздат, 1962. 489–556 с.
14. Харвей А. Ф. Техника сверхвысоких частот. Том 2 / Ф. Харвей А., под ред. Сушкевича В.И., Москва: Советское радио, 1965. 451–458 с.
15. Aerts D. [и др.]. Quantum Theory Methods as a Possible Alternative for the Double-Blind Gold Standard of Evidence-Based Medicine: Outlining a New Research Program // Foundations of Science. 2019. № 2 (24). С. 217–225.
16. Agapov I. Computing for accelerator physics. Hamburg, 2009.
17. Agapov N. N., Butenko A. V., Eliseev A. Booster synchrotron of NICA accelerator complex // Physics of Particles and Nuclei Letters. 2010. № 7 (7). С. 437–441.
18. Amaldi U. Particle Accelerators: From Big Bang Physics to Hadron Therapy / U. Amaldi, Cham, Switzerland: Springer, 2014.
19. Andrianov S. N. Methods of Geometrical Integration in Accelerator Physics. // Physics of Particles and Nuclei Letters. Pleiades Publishing, Ltd. 2016. № 7 (13). С. 810–913.
20. Attaway C. D. Matlab: A Practical Introduction to Programming and Problem Solving / D. Attaway C., под ред. Attaway Stormy, edition 2-е изд., Amsterdam: Butterworth-Heinemann, 2012.

21. Balabanov M. Yu., Mizintseva M. A., Ovsyannikov D. A. Beam dynamics optimization in a linear accelerator // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. 2018. № 1 (14). С. 4–13.
22. Bazarov I. [и др.]. Innovations in optimization and control of accelerators using methods of differential geometry and genetic algorithms // United States. <https://doi.org/10.2172/1530158>.
23. Bilski P., Guerriero F. Computer Systems for Healthcare and Medicine / P. Bilski, F. Guerriero, Aalborg, River Publishers, 2017.
24. Cary J. R. COMPASS, the COMMunity Petascale project for Accelerator Science and Simulation, a board computational accelerator physics initiative // Lawrence Berkeley National Laboratory. University of California: eScholarship. 2008.
25. Chabot E., D'Arras H. Neural Computation and Particle Accelerators: Research, Technology and Applications // New York: Nova Science Publishers. 2010.
26. Chang K.-H. Design Theory and Methods Using CAD/CAE Design Theory and Methods Using CAD/CAE. Chapter 5. Multiobjective Optimization and Advanced Topics / K.-H. Chang, Academic Press, Elsevier Inc., 2015. 325–406 с.
27. Edelen A. [и др.]. Opportunities in machine learning for particle accelerators // University of Malta: OAR@UM. 2018.
28. Edelen A. [и др.]. Machine learning for orders of magnitude speedup in multiobjective optimization of particle accelerator systems // Physical Review Accelerators and Beams. APS - American Physical Society Country of Publication: USA. 2020. № 4 (23). С. 23–23.
29. Edelen A. L. [и др.]. Neural Networks for Modeling and Control of Particle Accelerators // IEEE Transactions on Nuclear Science. 2016. № 2 (63).
30. Frost Frederick E., Putnam Jane M. Particle accelerators / E. Frost Frederick, M. Putnam Jane, Berkeley, CA: University of California Radiation Laboratory, 1954.

31. Ghasemi F. [и др.]. Electron filed measurement of a prototype tube constructed for a traveling wave electron linear accelerator // Isfahan University of Technology. 2017. № 2 (17). С. 223–231.
32. Giovannozzi M. [и др.]. Machine Learning Applied to the Analysis of Nonlinear Beam Dynamics Simulations for the CERN Large Hadron Collider and Its Luminosity Upgrade // Information 2021. 2021. № 2 (12).
33. Grech L., Valentino G., Alves D. A Machine Learning Approach for the Tune Estimation in the LHC // Information 2021, Accelerator Systems Department, CERN. 2021.
34. Guanghui L. First-order and Stochastic Optimization Methods for Machine Learning / L. Guanghui, 2020.
35. Hahn B. H., Valentine D. T. Essential MATLAB for Engineers and Scientists / B. H. Hahn, D. T. Valentine, 7-е изд., Academic Press, 2019. 28–429 с.
36. Harada H. [и др.]. Virtual accelerator as an operation tool AT J-PARC 3 GEV rapid cycling synchrotron (RCS) // Proceedings of EPAC, Edinburgh, Scotland. 2006.
37. Harada H. [и др.]. Beam-commissioning study of high-intensity accelerators using virtual accelerator model. // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A. 2009.
38. Harrison M., Peggs S., Roser T. The RHIC accelerator // Annual Review of Nuclear & Particle Science. 2002. № 1 (52). С. 425–445.
39. Hussain S. Artificial Neural Network Model for Spectral Construction of a Linear Accelerator Megavoltage Photon Beam // 2010 International Conference on Intelligent Systems, Modelling and Simulation Intelligent Systems, Modelling and Simulation (ISMS), 2010 International Conference. 2010. С. 86–91.
40. Ineichen Y. Toward massively parallel multi-objective optimization with application to particle accelerators 2013.
41. Ivanov A., Agapov I. Physics-based deep neural networks for beam dynamics in charged particle accelerators // Physical review accelerators and beams. 2020.

42. Ivanov A., Agapov I. Physics-based deep neural networks for beam dynamics in charged particle accelerators // *Physical Review Accelerators and Beams*, APS - American Physical Society Country of Publication: USA. 2020. № 7 (23).
43. Jaypuria S., Das A. K., Pratihari D. K. Swarm-Intelligence-Based Computation for Parametric Optimization of Electron Beam Fabrication // *Advances in Computational Methods in Manufacturing, Lecture Notes on Multidisciplinary Industrial Engineering*. Springer, Singapore. 2019. C. 153–163.
44. Jefferson T. Machine learning improves particle accelerator diagnostics // *States News Service*. 2021.
45. Kanaya N. Virtual accelerator and fundamental guidelines towards sharable software for accelerator control systems // *Photon Factory, National Laboratory for High Energy Physics (KEK), Tsukuba, Japan*. 2002. C. 305–305.
46. Karimi M. [и др.]. Multi-Objective Stochastic Optimization Algorithms to Calibrate Microsimulation Models // *Transportation Research Record*, SAGE Publications Ltd. 2019. C. 743–752.
47. Kennedy J. Particle swarm optimization // *Proc. of IEEE International Conference on Neural Networks IV*. 1995. C. 1942–1948.
48. Khodzhbagiyani H. G. [и др.]. Superconducting Magnets for the NICA Accelerator Complex in Dubna // *IEEE Transactions on Applied Superconductivity* IEEE Trans. Appl. Supercond. Applied Superconductivity. 2011. № 3 (21).
49. Klahn T., Blaschke D., Weber F. Exploring hybrid-star matter at NICA and FAIR // *Physics of Particles and Nuclei Letters*, Publisher: Maik Nauka/Interperiodica Publishing Country of Publication: Russia. 2012. C. 484–487.
50. Koleva L. [и др.]. Overall robust optimization of biopolymer synthesis with linear electron accelerators // *2020 International Conference Automatics and Informatics (ICAI) Automatics and Informatics (ICAI)*, 2020 International Conference. 2020.

51. Kranjčević M. [и др.]. Multiobjective optimization of the dynamic aperture using surrogate models based on artificial neural networks // *Physical Review Accelerators and Beams*. 2021. № 1 (24).
52. Kurt M. *Stochastic Optimization Methods: Applications in Engineering and Operations Research* / M. Kurt, Third-е изд., Ed. Heidelberg: Springer., 2015.
53. Lehe R. [и др.]. Machine learning and surrogate models for simulation-based optimization of accelerator design / R. Lehe, A. Hanuka, A. Edelen, X. Huang, C. Mayes, [и др.], American Physical Society, 2020.
54. Li S. [и др.]. A Novel Approach for Classification and Forecasting of Time Series in Particle Accelerators // *Information* 2021. 2021. № 3 (12).
55. Loeffler J., Durante M. Charged particle therapy—optimization, challenges and future directions // *Nature Reviews Clinical Oncology*. 2013. С. 411–424.
56. Möller S. *Accelerator Technology: Applications in Science, Medicine, and Industry* / S. Möller, Cham, Switzerland: Springer 2020, 2020.
57. Myers S. [и др.]. *Accelerators in Medicine: Application of Accelerators and Storage Rings* // *Accelerators and Colliders*, Heidelberg: Springer. Berlin. 2013. С. 488–513.
58. Myers S. [и др.]. 11.5 Heavy Ion Accelerators for Nuclear Physics: Application of Accelerators and Storage Rings // *Accelerators and Colliders*, Springer. 2013. С. 525–551.
59. Myers S., Schopper H., Roser T. 10.2 RHIC: The Largest Accelerators and Colliders of Their Time // *Accelerators and Colliders*. 2013. С. 400–407.
60. Nadolski L. S., Bence A. First application of online particle swarm optimisation at soleil // *10th Int. Particle Accelerator Conf., JACoW Publishing*. 2019. С. 82–85.
61. Ovsyannikov A. D. [и др.]. Application of Optimization Techniques for RFQ Design // *Problems of Atomic Science and Technology*. 2014. № 3 (91). С. 116–119.

62. Ovsyannikov A. D., Shirokolobov A. Y. Mathematical model of beam dynamics optimization in traveling wave // Proc. RuPAC, JACoW, Geneva. 2012. C. 355–357.
63. Ovsyannikov D. A. Mathematical modeling and optimization of beam dynamics in accelerators // Proc. RuPAC. JACoW, Geneva. 2012. C. 68–72.
64. Ozaki S. RHIC project (ion synchrotron) // Conference Record of the 1991 IEEE Particle Accelerator Conference Particle Accelerator Conference, 1991. Accelerator Science and Technology. 1991. C. 2901–2904.
65. Pang X., Rybarcyk L. J. Multi-objective particle swarm and genetic algorithm for the optimization of the LANSCE linac operation // Elsevier Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. 2014. (741). C. 124–129.
66. Peiyong J. [и др.]. DOI Application of multi-objective particle swarm optimization in the design optimization of alternative phase focused DTL // Nuclear Physics Review. 2015. № 4 (32). C. 415–420.
67. Rescic M., Seviour R., Blokland W. Predicting particle accelerator failures using binary classifiers // Nuclear Inst. and Methods in Physics Research. 2020.
68. Robini M. C., Yang F., Zhu Y. A stochastic approach to full inverse treatment planning for charged-particle therapy // Journal of Global Optimization. 2020.
69. Rojas R. Neural networks // A systematic introduction. Springer, Berlin. 1996. C. 502–502.
70. Rubtsova I. [и др.]. Genetic Stochastic Algorithm Application in Beam Dynamics Optimization Problem. St. Petersburg, 2020.
71. Rubtsova I. D. Mathematical optimization model of longitudinal beam dynamics in klystron-type buncher // RuPAC-2014. Geneva: JACoW. 2014. C. 66–68.
72. Schardt D., Elsässer T., Schulz-Ertner D. Heavy-ion tumor therapy: physical and radiobiological benefits // American Physical Society. 2010. C. 383–425.



73. Scheinker A. [и др.]. Online multi-objective particle accelerator optimization of the AWAKE electron beam line for simultaneous emittance and orbit control // AIP Advances 10. 2020.

74. Scheinker A. Adaptive Machine Learning for Robust Diagnostics and Control of Time-Varying Particle Accelerator Components and Beams // Information 2021, Los Alamos National Laboratory. 2021.

75. Spentzouris P. [и др.]. Community petascale project for accelerator science and simulation: Advancing computational science for future accelerators and accelerator technologies // Journal of Physics: Conference Series, Institute of Physics Publishing. 2008.

76. Tang R., Zhang Q. The Rolling Process Analysis and Groove Optimization of 16# I-Beam Based on FEM // Cyber Security Intelligence and Analytics, Advances in Intelligent Systems and Computing, Springer Verlag. 2020.

77. Tudor D. [и др.]. A facility for direct measurements for nuclear astrophysics at IFIN-HH - a 3 MV tandem accelerator and an ultra-low background laboratory // Nuclear Inst. and Methods in Physics Research, Elsevier B.V. 2020.

78. Wiedemann H. Particle Accelerator Physics / H. Wiedemann, под ред. Hassan Sadri [и др.], 4-е изд., California, USA: Springer International Publishing, 2015. 43–80 с.

79. Wilson B. S. [и др.]. Optimization methods for radiation therapy planning // STC.UNM, USPTO Patent Grants. 2020.

80. Wolski A. Beam Dynamics in High Energy Particle Accelerators / A. Wolski, Singapore: Imperial College Press, 2014.

81. Wurtz W. A. Coupling control and optimization at the Canadian Light Source // Elsevier Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. 2018. С. 1–9.

82. Yadav R. P. [и др.]. A multi-agent based control scheme for accelerator pre-injector and transport line for enhancement of accelerator operations. // Elixir Computer Science and Engineering. 2012.

83. Yan Y. T. [и др.]. Virtual accelerator for accelerator optics improvement // SLAC, Stanford, CA 94309 USA. 2005.

84. Yun Z. [и др.]. Application of the asynchronous advantage actor-critic machine learning algorithm to real-time accelerator tuning // Nuclear Science and Techniques, Springer, Germany. 2019. № 10 (30). С. 158–158.