

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики – процессов управления

КАФЕДРА МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ И
КОМПЬЮТЕРНЫХ СИСТЕМ

ДОРОНИН ГРИГОРИЙ ГЕННАДЬЕВИЧ

Выпускная квалификационная работа аспиранта

**Математическое моделирование эмиссионных систем
на основе полевых электронных катодов**

Mathematical modeling of the emission systems based on the field electron
cathodes

Основная образовательная программа: МК.3021.2017 «Системный анализ,
информатика и управление»

Направление подготовки: 09.06.01 «Информатика и вычислительная техника»

Руководитель образовательной программы,

доктор физ.-мат. наук,

профессор

Овсянников Д.А.

Научный руководитель,

доктор физ.-мат. наук,

профессор

Виноградова Е.М.

Рецензент,

кандидат физ.-мат. наук

Кримская К.А.

Санкт-Петербург

2021

Содержание

Цели работы	4
Введение	5
I. Моделирование осесимметричной диодной системы с одиночным полевым катодом специальной формы в цилиндрической системе координат	7
I.1 Моделирование полевого катода с помощью круговой заряженной нити .	7
I.1.1 Физическая постановка задачи расчета потенциала, создаваемого круговой заряженной нитью	7
I.1.2 Математическая модель задачи с круговой заряженной нитью в ограниченной области	7
I.1.3 Вычисление распределения потенциала системы с круговой заряженной нитью в ограниченной области	9
I.1.4 Результаты численного расчета потенциала с круговой заряженной нитью	12
I.2 Моделирование осесимметричной полевой эмиссионной системы с диэлектриками	13
I.2.1 Физическая постановка задачи расчета потенциала в полевой эмиссионной системе с диэлектриками	13
I.2.2 Математическая модель полевой эмиссионной системы с диэлектриками	15
I.2.3 Решение задачи нахождения распределения потенциала в системе с учетом влияния двух диэлектриков и одной заряженной нити . .	15
I.2.4 Нахождение коэффициентов разложений потенциала из условий сопряжения на границе раздела двух диэлектриков	16
I.2.5 Результаты численного расчета потенциала полевой эмиссионной системы с диэлектриками	17
II. Моделирование плоскосимметричных двумерных диодных систем с полевыми катодами лезвийной формы в декартовой системе координат	19

II.1	Моделирование диодной полевой эмиссионной системы с помощью заряженной нити	19
II.1.1	Физическая постановка задачи расчета потенциала системы с заряженной нитью	19
II.1.2	Математическая модель системы с заряженной нитью в ограниченной области	20
II.1.3	Вычисление распределения потенциала системы с заряженной нитью	21
II.1.4	Результаты численного расчета потенциала системы с заряженной нитью	22
II.2	Моделирование системы с произвольным числом заряженных нитей с учетом влияния диэлектриков	24
II.2.1	Физическая постановка задачи расчета потенциала системы с заряженными нитями и диэлектриками	24
II.2.2	Математическая модель системы с заряженными нитями и диэлектриками	25
II.2.3	Вычисление распределения потенциала системы с заряженными нитями и диэлектриками	25
II.2.4	Результаты численного расчета потенциала системы с заряженными нитями и диэлектриками	27
II.3	Моделирование периодической системы полевых эмиттеров с помощью заряженных плоскостей	28
II.3.1	Физическая постановка задачи расчета потенциала периодической системы заряженных плоскостей	28
II.3.2	Математическая модель периодической системы заряженных плоскостей	28
II.3.3	Вычисление распределения потенциала периодической системы заряженных плоскостей	29
II.3.4	Результаты численного расчета потенциала периодической системы заряженных плоскостей	31
II.4	Моделирование периодической системы заряженных плоскостей, разделенных диэлектрическими слоями	33

II.4.1	Физическая постановка задачи расчета потенциала периодической системы заряженных плоскостей с диэлектрическими слоями	33
II.4.2	Математическая модель периодической системы заряженных плоскостей с диэлектрическими слоями	34
II.4.3	Вычисление распределения потенциала периодической системы заряженных плоскостей с диэлектрическими слоями	34
II.4.4	Нахождение коэффициентов разложений потенциала из условий сопряжения на границе раздела диэлектриков в периодической системе	35
II.4.5	Результаты численного расчета потенциала периодической системы заряженных плоскостей, разделенных диэлектрическими слоями	37
II.5	Вычисление напряженности электростатического поля	39
	Заключение	42
	Список литературы	44

Цели работы

- Математическое моделирование осесимметричных диодных эмиссионных систем на основе полевых электронных катодов
- Математическое моделирование плоскосимметричных одиночных и многоэмиттерных эмиссионных систем на основе полевых электронных катодов

Задачи

1. Построение математической модели осесимметричной диодной системы с одиночным полевым катодом специальной формы в цилиндрической системе координат.
2. Построение математических моделей плоскосимметричных диодных систем с одиночными полевыми катодами лезвийной формы и многоэмиттерных систем в декартовой системе координат.
3. Нахождение распределения электростатического потенциала во всей области системы для каждой из представленных моделей полевых катодов с учетом влияния диэлектриков.
4. Разработка комплекса вычислительных программ, реализующих предложенные математические модели эмиссионных систем с полевыми катодами.

Введение

Полевая электронная эмиссия (ПЭЭ) является одним из основных средств получения пучка электронов в вакууме. ПЭЭ играет важную роль во многих практических и исследовательских приложениях, включая электронно-вакуумные устройства, источники света и электронную микроскопию.

Полевые эмиттеры привлекают внимание исследователей благодаря своим уникальным эмиссионным свойствам и потенциальным технологическим применением. Основными характеристиками устройств, использующих полевые эмиссионные катоды, являются их малые геометрические размеры, потребление небольшой мощности для эффективной работы. Всё это делает такие устройства крайне перспективными в разработке различных малогабаритных устройств [1],[2].

Однако их проектирование связано с определенными сложными процессами при ПЭЭ. В то время как простые острийные структуры с очень большим соотношением геометрических размеров обеспечивают наилучшие величины усиления поля, они менее механически устойчивы, чем структуры с более низким соотношением размеров, что обеспечивает компромисс между усилением электростатического поля и другими практическими соображениями, такими, например, как механическая стабильность. Кроме того, некоторые процессы формирования эмиттеров естественным образом создают структуры со сложными формами [3]—[7].

Также системы с одиночным полевым острием обычно дают небольшие значения эмиссионного тока. В зависимости от назначения прибора, существуют несколько методов получения нужных значений полного тока в полевой эмиссионной системе. Во-первых, увеличить ток позволяют многоострийные системы. Также существует большое число экспериментальных исследований с массивами полевых катодов различной формы. Однако, в силу взаимного влияния множества эмиттеров друг на друга - эффекта экранирования - требуется исследование подобного влияния и определение оптимального набора геометрических параметров системы, например, плотности упаковки, где под плотностью упаковки понимается отношение расстояния между соседними эмиттерами к длине самого эмиттера.

Поэтому вторым методом является увеличение площади эмиссии самого полевого катода. Полевые катоды так называемой лезвийной формы обладают значительно

большей площадью эмиссии по сравнению с одиночными острийными эмиттерами, что и позволяет увеличить общий ток в эмиссионной системе. Края слоев двухмерных полупроводниковых нано-материалов, например, графена, также обладают высокой эффективностью эмиссии и могут рассматриваться как полевые эмиттеры.

Преимущество математического моделирования полевых эмиссионных систем заключается в том, что они облегчают изучение ключевых параметров самой системы, таких как высота эмиттера, радиус вершины острия, геометрию массива, при этом подразумеваемая концептуальную простоту. Эти модели позволяют вычислить распределение потенциала и электрического поля как для одиночных острий, так и для массивов, поскольку позволяют получить простые аналитические выражения, вместо того, чтобы решать трехмерные задачи с соответствующими сложными граничными условиями.

В данной работе представлена методика моделирования эмиссионных систем на основе полевых электронных катодов. В первой главе исследуются осесимметричные диодные системы с одиночным полевым катодом специальной формы в цилиндрической системе координат. Во второй главе рассмотрены плоскосимметричные диодные системы как с одиночными полевыми катодами лезвийной формы, так и многоэмиттерные системы в декартовой системе координат.

Для получения представления об эффективности того или иного способа моделирования, необходимо рассчитать распределение электростатического потенциала во всей области системы. Нулевая эквипотенциальная линия, полученная в результате расчёта потенциала, визуализирует форму катода. Таким образом возможно контролировать форму поверхности катода, изменяя параметры рассматриваемой задачи, что даёт возможность определить, удобен ли соответствующий метод для моделирования в требуемом диапазоне измерения геометрических параметров системы. Представленные аналитические формулы для расчёта распределения электростатического потенциала позволяют рассчитать напряженность поля во всей области для каждой из исследуемых систем, что даёт представление об их эмиссионных характеристиках.

I. Моделирование осесимметричной диодной системы с одиночным полевым катодом специальной формы в цилиндрической системе координат

Данная глава посвящена моделированию полевого катода в цилиндрической системе координат. В силу того, что за поверхность катода можно принять любую эквипотенциальную поверхность, для расчёта потенциала заменим влияние катода на распределение поля системой круговых заряженных нитей. Электростатический потенциал ищется методом разделения переменных в цилиндрической системе координат (r, z, ϕ) .

I.1 Моделирование полевого катода с помощью круговой заряженной нити

I.1.1 Физическая постановка задачи расчета потенциала, создаваемого круговой заряженной нитью

Рассмотрим систему, в которой катод моделируется круговой заряженной нитью. Рассматриваемая система осесимметрична, поэтому задачу можно свести от трёхмерного случая к двумерному. На рисунке 1 представлено схематическое изображение диодной системы на плоскости, Ω — поверхность полевого катода.

I.1.2 Математическая модель задачи с круговой заряженной нитью в ограниченной области

Для того, чтобы найти распределение электростатического потенциала $U(r, z)$ во всей области диодной системы, требуется решить уравнение Лапласа

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} &= 0, \\ U(r, z)|_{\Omega} &= 0, \end{aligned} \tag{I.1.1}$$

Ω —поверхность острия.

с граничными условиями первого рода

$$U(r_2, z) = f_1(z),$$

$$U(r, z_1) = f_2(r),$$

$$U(r, z_2) = f_3(r),$$

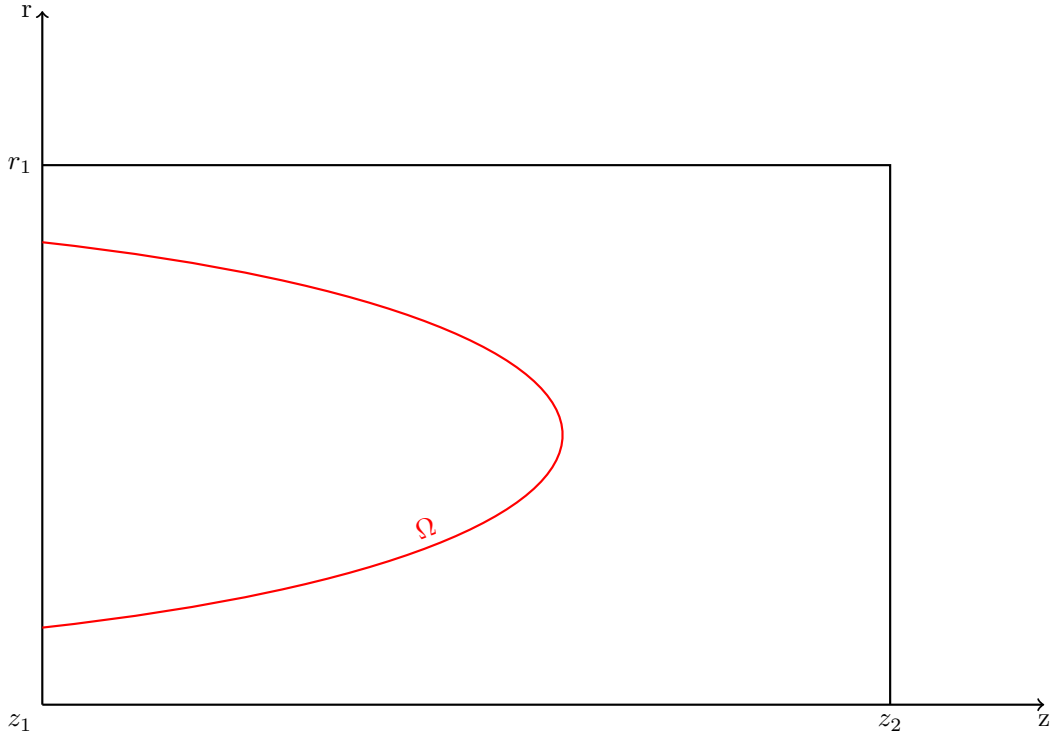


Рис. 1: Схематическое изображение электронно-оптической системы на плоскости.

$z = 0$ — поверхность подложки катода, $z = z_1$ — поверхность анода, $r = r_1$ — внешняя граница области.

Для нахождения распределения электростатического потенциала во всей области системы заменим влияние катода влиянием заряженной нити с линейной плотностью заряда τ , координаты заряженной нити — (r_q, z_q) , положение заряженной нити представлено на рисунке 2.

Задача определения распределения поля в системе с одной заряженной нитью и однородными граничными условиями сводится к решению уравнения Пуассона [8]

$$\Delta U_1 = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial U_1}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} = -\frac{\rho(r, z)}{\varepsilon_0}, \quad (\text{I.1.2})$$

граничные условия

$$\begin{aligned} U_1(r_2, z) &= 0, \\ U_1(r, z_1) &= 0, \\ U_1(r, z_2) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{I.1.3})$$

Линейная плотность заряда τ определяется по формулам

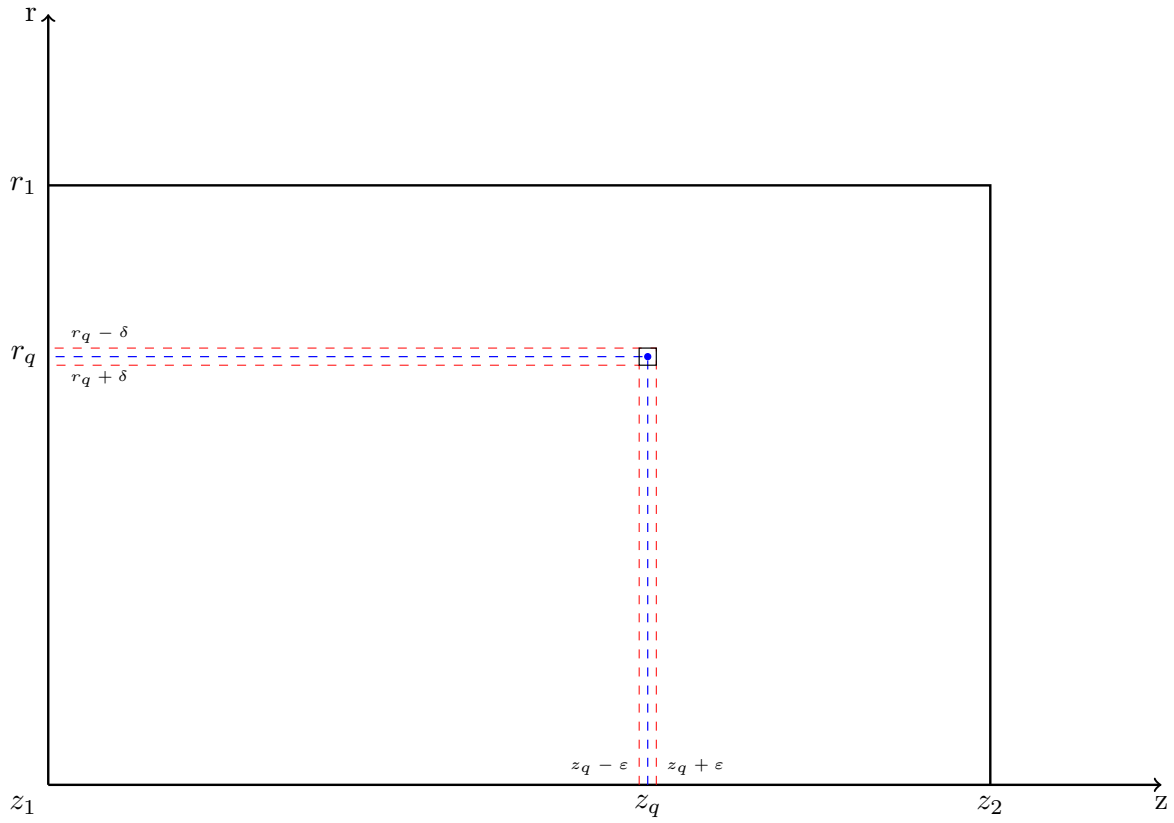


Рис. 2: Схематическое изображение положение заряда в системе на плоскости.

$$\tau = \frac{q}{2\pi r_q},$$

тогда объёмная плотность заряда определяется уравнением

$$\rho = \frac{\tau}{4\epsilon\delta},$$

где

$$q = 2\rho\epsilon\pi((r_q + \delta)^2 - (r_q - \delta)^2) = 8\rho\epsilon\pi r_q\delta.$$

Заряд q располагается в малом объёме $|r - r_q| \leq \delta$, $|z - z_q| \leq \epsilon$.

1.1.3 Вычисление распределения потенциала системы с круговой заряженной нитью в ограниченной области

Распределение потенциала в системе с одной заряженной круговой нитью находится с помощью метода разделения переменных в виде разложений Фурье-Бесселя.

$$\rho(r, z) = \begin{cases} \rho, & |r - r_q| \leq \delta \ \& \ |z - z_q| \leq \varepsilon, \\ 0, & |r - r_q| > \delta \ \vee \ |z - z_q| > \varepsilon. \end{cases}$$

Решение граничной задачи для уравнения Пуассона I.1.2-I.1.3 представляется в виде ряда

$$U_1(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n(z) J_0(\gamma_n \frac{r}{r_1}),$$

Обозначим через γ_n корни уравнения:

$$J_0(\gamma_n) = 0.$$

Для того, чтобы выразить $\nu_n(z)$ через $U_1(r, z)$, умножим обе части этого равенства на $r J_0(\gamma_n \frac{r}{r_1})$ и проинтегрируем по r от 0 до r_1 . Воспользуемся свойством ортогональности функций Бесселя [9]

$$\frac{r_1^2 J_q^2(\gamma_n)}{2} [\nu_n''(z) - \frac{\gamma_n^2}{r_1^2} \nu_n(z)] = \begin{cases} -\frac{\rho}{\varepsilon} \int_{r_q-\delta}^{r_q+\delta} r J_0(\gamma_n \frac{r}{r_1}) dr, & |z - z_q| \leq \varepsilon, \\ 0, & |z - z_q| > \varepsilon. \end{cases} \quad (\text{I.1.4})$$

Вычислим интеграл, входящий в правую часть уравнения I.1.4

$$I = \int_{r_q-\delta}^{r_q+\delta} r J_0(\gamma_n \frac{r}{r_1}) dr = \frac{r_1^2}{\gamma_n^2} \int_{\frac{r_q-\delta}{r_1}}^{\frac{r_q+\delta}{r_1}} t J_0(t) dt,$$

и, пользуясь пределом, получим [10]

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{r_1}{\gamma_n} J_0(\gamma_n \frac{r_q}{r_1}) = 2\delta \frac{r_1}{\gamma_n} J_0(\gamma_n \frac{r_q}{r_1}),$$

тогда

$$I = 2\delta r_q J_0(\gamma_n \frac{r_q}{r_1}). \quad (\text{I.1.5})$$

Дифференциальное уравнение относительно функций $\nu_n(x)$ с учетом I.1.5 можно представить в виде

$$\nu_n''(z) - \frac{\gamma_n^2}{r_1^2} \nu_n(z) = \phi(z),$$

где правая часть определяется по формуле

$$\phi(z) = \begin{cases} -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{2}{r_1 J_1^2(\gamma_n)} 2\delta \frac{1}{\gamma_n} J_1(\gamma_n \frac{r_q}{r_1}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{4\delta J_1(\gamma_n \frac{r_q}{r_1})}{R_1 J_1^2(\gamma_n) \gamma_n}, & |z - z_q| \leq \varepsilon, \\ 0, & |z - z_q| > \varepsilon. \end{cases} \quad (\text{I.1.6})$$

Решение уравнения I.1.6 имеет вид

$$\nu_n(z) = C \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_n}{r_1}(z_2 - z_1)\right) + \frac{r_1}{\gamma_n} \int_{z_1}^z \phi(\eta) \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_n}{r_1}(z_2 - \eta)\right) d\eta,$$

где C - константа интегрирования, для нахождения которой можно использовать равенство

$$C \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_n}{r_1}(z_2 - z_1)\right) + \frac{r_1}{\gamma_n} \int_{z_q - \varepsilon}^{z_q + \varepsilon} \phi(\eta) \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_n}{r_1}(z_2 - \eta)\right) d\eta = 0,$$

вычислив интеграл, получим

$$\nu_n(z) = C \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_n}{r_1}(z_2 - z_1)\right) + \frac{r_1}{\gamma_n} \frac{\rho}{\varepsilon_0} 4\delta J_1\left(\gamma_n \frac{r_q}{r_1}\right) \frac{1}{r_1 J_1^2(\gamma_n) \gamma_n} 2\varepsilon \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_n}{r_1}(z_2 - z_q)\right) = 0.$$

Таким образом

$$C = \tau \frac{2J_1\left(\gamma_n \frac{r_q}{r_1}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_n}{r_1}(z_2 - z_q)\right)}{\varepsilon_0 \gamma_n^2 J_1^2(\gamma_n) \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_n}{r_1}(z_2 - z_1)\right)}.$$

Тогда функции $\nu_n(z)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \nu_n = \tau \frac{2J_1\left(\gamma_n \frac{r_q}{r_1}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_n}{r_1}(z_2 - z_q)\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_n}{r_1}(z - z_1)\right)}{\varepsilon_0 \gamma_n^2 J_1^2(\gamma_n) \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_n}{r_1}(z_2 - z_1)\right)} + \\ + \frac{r_1}{\gamma_1} \int_{z_1}^z \phi(\eta) \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_n}{r_1}(z_2 - \eta)\right) d\eta, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \nu_n = \tau \frac{2J_1\left(\gamma_n \frac{r_q}{r_1}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_n}{r_1}(z_2 - z_q)\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_n}{r_1}(z - z_1)\right)}{\varepsilon_0 \gamma_n^2 J_1^2(\gamma_n) \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_n}{r_1}(z_2 - z_1)\right)} + \\ + \frac{r_1}{\gamma_1} \int_{z_q - \varepsilon}^{z_q + \varepsilon} \phi(\eta) \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_n}{r_1}(z_2 - \eta)\right) d\eta. \end{aligned}$$

Следовательно, решение имеет вид

$$\begin{aligned} \nu_n = \tau \frac{2J_1\left(\gamma_n \frac{r_q}{r_1}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_n}{r_1}(z_2 - z_q)\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_n}{r_1}(z - z_1)\right)}{\varepsilon_0 \gamma_n^2 J_1^2(\gamma_n) \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_n}{r_1}(z_2 - z_1)\right)} + \\ + \tau \frac{2J_1\left(\gamma_n \frac{r_q}{r_1}\right)}{\varepsilon_0^2 J_1^2(\gamma_n) \gamma_n^2} \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_n}{r_1}(z - z_q)\right), \end{aligned} \quad (\text{I.1.7})$$

при $z_q < z \leq z_2$.

Решение в общем виде

$$\nu_n = \sum_{n=1}^{\infty} \tau \frac{2r_q J_0\left(\gamma_n \frac{r_q}{r_1}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_n}{r_1}(z_2 - z_q)\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_n}{r_1}(z - z_1)\right)}{\varepsilon_0 J_1^2(\gamma_n) \gamma_n \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_n}{r_1}(z_2 - z_1)\right)} J_0\left(\gamma_n \frac{r}{r_1}\right), \quad (\text{I.1.8})$$

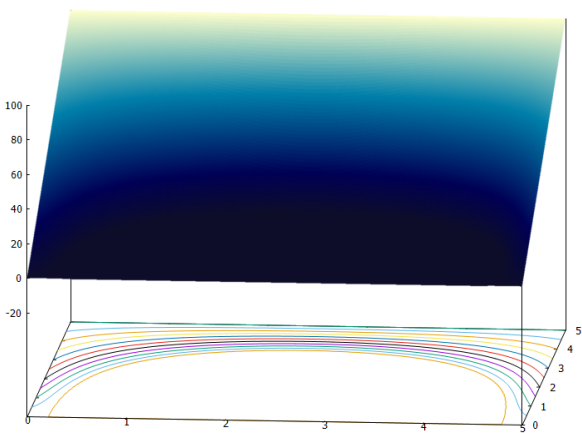
при $z_1 < z \leq z_q$,

$$\nu_n = \sum_{n=1}^{\infty} \tau \frac{2r_q J_0\left(\gamma_n \frac{r_q}{r_1}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_n}{r_1}(z_2 - z)\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_n}{r_1}(z_q - z_1)\right)}{\varepsilon_0 J_1^2(\gamma_n) \gamma_n \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_n}{r_1}(z_2 - z_1)\right)} J_0\left(\gamma_n \frac{r}{r_1}\right), \quad (\text{I.1.9})$$

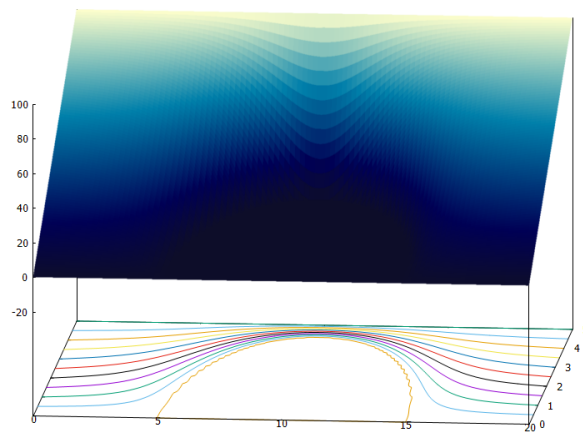
при $z_q \leq z \leq z_2$.

I.1.4 Результаты численного расчета потенциала с круговой заряженной нитью

На основе полученных результатов I.1.8-I.2.2, были построены графики распределения потенциала во всей области системы. По приведенным графикам можно определить форму моделируемого катода, что играет ключевую роль в понимании адекватности модели. Необходимо получить как можно более тонкое острие, форму которого на рисунках 3-4 описывает нулевая эквипотенциаль.

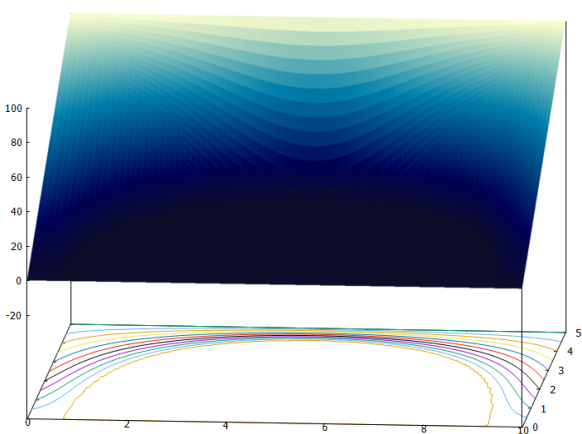


а) $r_1 = 5, r_q = 2.5$

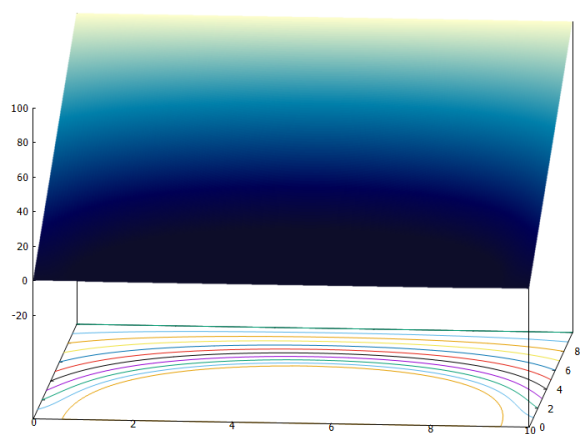


б) $r_1 = 20, r_q = 10$

Рис. 3: $z_2 = 5, z_q = 2.5, \tau = -20$.



а) $z_2 = 5, z_q = 2.5$



б) $z_2 = 10, z_q = 5$

Рис. 4: $r_1 = 10, r_q = 5, \tau = -20$

1.2 Моделирование осесимметричной полевой эмиссионной системы с диэлектриками

В данной главе моделируется осесимметричная диодная система на основе полевого острья с острой кромкой, вся внутренняя область которой заполнена двумя различными диэлектриками.

1.2.1 Физическая постановка задачи расчета потенциала в полевой эмиссионной системе с диэлектриками

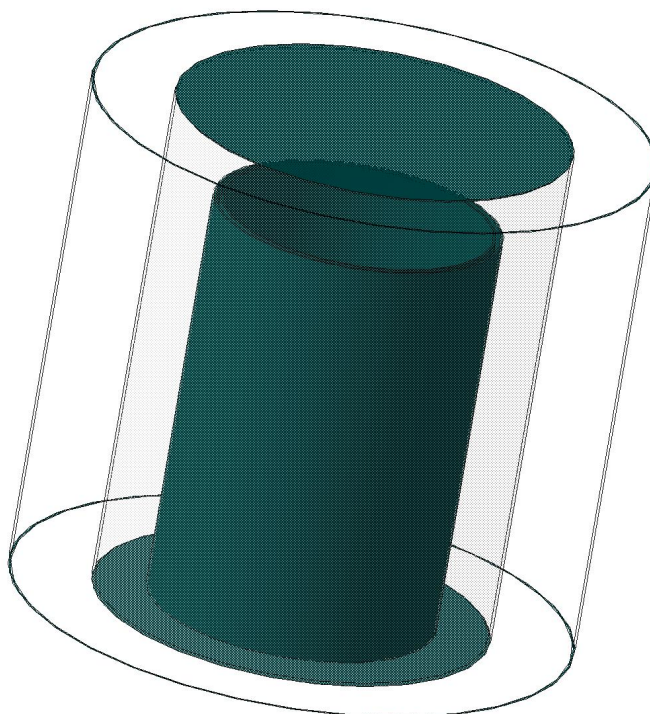


Рис. 5: Схематическое изображение электронно-оптической системы с двумя диэлектриками.

Полевое острие с острой кромкой расположено на плоской подложке. Анодом является плоскость, параллельная подложке катода.

На рисунке 6 представлено схематическое изображение диодной системы на плоскости (r, z) .

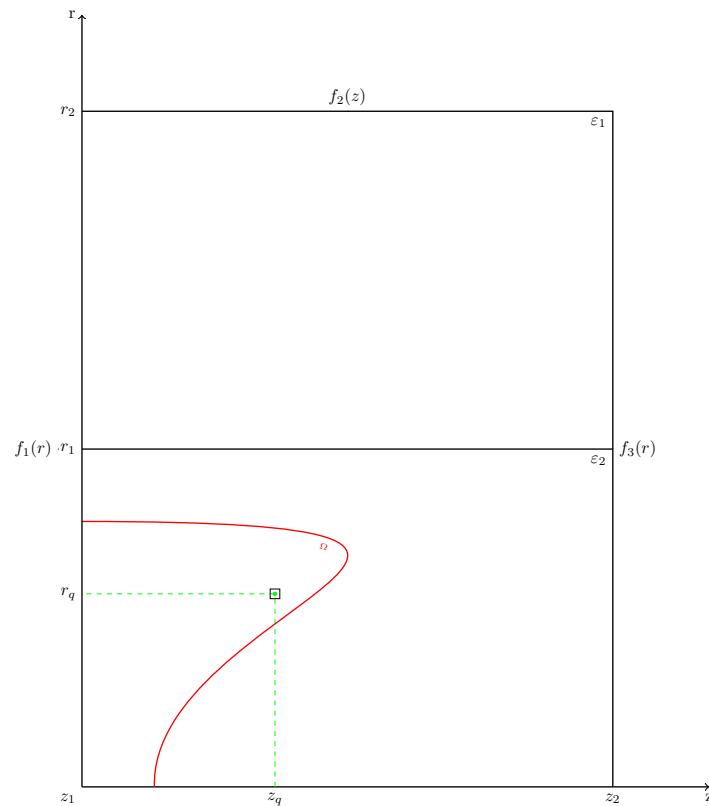


Рис. 6: Схематическое изображение электронно-оптической системы с острой кромкой на плоскости.

Параметры задачи:

$z = z_1$ - поверхность подложки катода;

$z = z_2$ - поверхность анода;

$r = r_1$ - плоскость, разделяющая диэлектрики;

$r = r_2$ - внешняя граница системы по переменной r ;

$U(r, z_1) = f_1(r)$ - граничное условие на подложке;

$U(r, z_2) = f_3(z)$ - граничное условие на аноде;

$U(r_2, z) = f_2(z)$ - граничное условие на боковой поверхности системы.

I.2.2 Математическая модель полевой эмиссионной системы с диэлектриками

Для нахождения распределения потенциала $U(r, z)$ в системе пользуемся уравнением Лапласа I.1.1 с краевыми условиями

$$\begin{aligned} f_1(r) &= 0, \\ f_2(z) &= U_0 \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}, \\ f_3(r) &= U_1. \end{aligned}$$

Влияние острия на распределение потенциала заменяется влиянием круговой заряженной нити, что приводит к решению уравнения Пуассона I.1.2 с граничными условиями

$$\begin{aligned} U|_{z=z_1} &= 0, \\ U|_{z=z_2} &= U_1, \\ U|_{r=r_2} &= U_0 \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \end{aligned} \tag{I.2.1}$$

I.2.3 Решение задачи нахождения распределения потенциала в системе с учетом влияния двух диэлектриков и одной заряженной нити

Решение исходной задачи можно представить в виде суммы двух решений [11]

$$U(r, z) = U_L(r, z) + U_P(r, z), \tag{I.2.2}$$

Обозначим

$$U(r, z) = \begin{cases} U_{11}(r, z), & r < r_1 \text{ \& } z < z_q; \\ U_{12}(r, z), & r < r_1 \text{ \& } z > z_q; \\ U_2(r, z), & r > r_1. \end{cases}$$

Тогда решение I.2.2 будет иметь вид $z < z_q$

$$\begin{aligned} U_{11}(r, z) &= U_0 \left(\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \right) + \sum_{m=0}^{\infty} g_{2m} \frac{I_0(\mu_m r)}{I_0(\mu_m r_1)} \sin \mu_m (z - z_1) + \\ &+ \frac{2\tau r_q}{\varepsilon_1 r_1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\gamma_s r_q}{r_1}\right) \operatorname{sh} \frac{\gamma_s}{r_1} (z_1 - z_q) \operatorname{sh}(\gamma_s (z - z_1) r_1)}{\gamma_s J_1^2(\gamma_s) \operatorname{sh} \frac{\gamma_s r}{r_1}} J_0\left(\frac{\gamma_s r}{r_1}\right), \end{aligned} \tag{I.2.3}$$

$z > z_q$

$$U_{12}(r, z) = U_0\left(\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\right) + \sum_{m=0}^{\infty} g_{2m} \frac{I_0(\mu_m r)}{I_0(\mu_m r_1)} \sin \mu_m (z - z_1) + \frac{2\tau r_q}{\varepsilon_1 r_1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\gamma_s r_q}{r_1}\right) \operatorname{sh} \frac{\gamma_s z_q}{r_1} \operatorname{sh}(\gamma_s (z_2 - z) r_1)}{\gamma_s J_1^2(\gamma_s) \operatorname{sh} \frac{\gamma_s r}{r_1}} J_0\left(\frac{\gamma_s r}{r_1}\right), \quad (\text{I.2.4})$$

$$U_2(r, z) = \sum_{m=1}^{\infty} g_{2m} \frac{\widetilde{W}_0(\mu_m, r, r_2)}{\widetilde{W}_0(\mu_m, r_1, r_2)} \sin \mu_m (z - z_1) + U_0\left(\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\right), \quad (\text{I.2.5})$$

где

$$\mu = \frac{\pi n}{z_2 - z_1},$$

а функция \widetilde{W}_0 является линейной комбинацией модифицированных функций Бесселя первого и второго рода [9]

$$\widetilde{W}_0(\mu_m, r, r_2) = I_0(\mu_m r) K_0(\mu_m r_2) - K_0(\mu_m r) I_0(\mu_m r_2).$$

I.2.4 Нахождение коэффициентов разложений потенциала из условий сопряжения на границе раздела двух диэлектриков

Из условий непрерывности потенциала и вектора электрического смещения на границе раздела двух диэлектриков при $r = r_1$ коэффициент g_{2m} имеет вид

$$g_{2m} = \frac{C_{1s} B_{1k}}{A_{1m} - A_{2m}} (C_{2k} + C_{3k}), \quad (\text{I.2.6})$$

где

$$C_{1s} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2\tau r_q}{r_1} \frac{J_0\left(\frac{\gamma_s r_q}{r_1}\right)}{r J_1(\gamma_s) \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_s}{r_1} (z_2 - z_1)\right)},$$

$$B_{1k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_s - \mu_k r_1}{r_1 \left(\left(\frac{\gamma_s}{r_1}\right)^2 + \mu_k^2\right)},$$

$$A_{1m} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m \frac{I_1(\mu_m r_1)}{I_0(\mu_m r_1)} \frac{\sin(\mu_m - \mu_k)(z_q - z_1)}{(\mu_m - \mu_k)},$$

$$A_{2m} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(\mu_m + \mu_k)(z_q - z_1)}{(\mu_m + \mu_k)} \frac{\pi_m \widetilde{W}_1(\mu_m, r_1, r_2)}{2\widetilde{W}_0(\mu_m, r_1, r_2)},$$

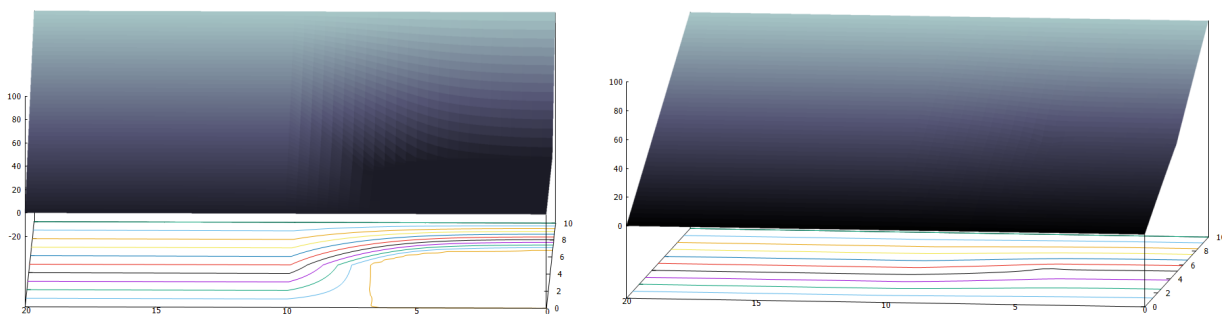
$$C_{2k} = \sin \frac{\gamma_s}{r_1} (z_2 - z_q) \left(\operatorname{ch} \frac{\gamma_s}{r_1} (z_q - z_1) \sin(\mu_k (z_q - z_1)) + \operatorname{sh} \left(\frac{\gamma_s}{r_1} (z_q - z_1) \right) \cos(\mu_k (z_q - z_1)) \right),$$

$$C_{3k} = \sin \frac{\gamma_s}{r_1} (z_q - z_1) \left(\operatorname{ch} \frac{\gamma_s}{r_1} (z_2 - z_q) \sin(\mu_k (z_2 - z_q)) + \operatorname{sh} \left(\frac{\gamma_s}{r_1} (z_2 - z_q) \right) \cos(\mu_k (z_2 - z_q)) \right).$$

1.2.5 Результаты численного расчета потенциала полевой эмиссионной системы с диэлектриками

На основе вычисленных значений распределения потенциала были построены графики. На рисунках 7 представлены различия в поведении нулевой эквипотенциали, очерчивающей форму края катода, в зависимости от значения диэлектриков на границе областей. Очевидно, что при увеличении соотношения $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ в 10 раз, нулевая эквипотенциаль становится довольно плоской и форма катода не выражена явно.

Все значения параметров заданы в безразмерных величинах.

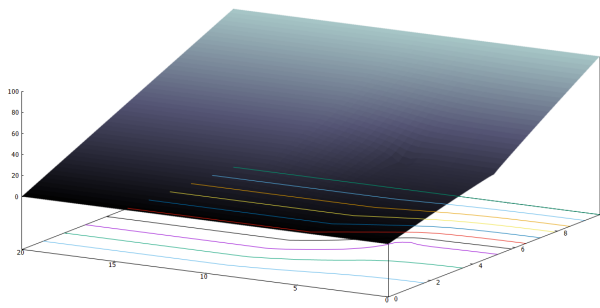


а) $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 1$

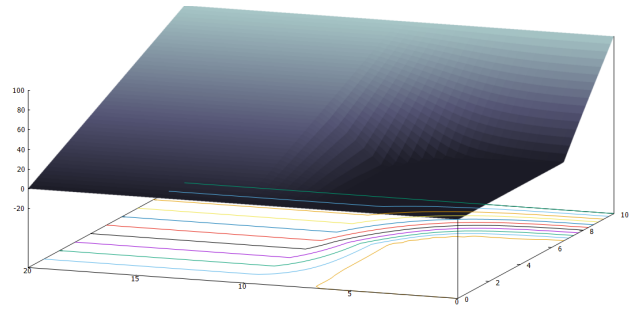
б) $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 10$

Рис. 7: $r_1 = 10$, $r_q = 5$, $r_2 = 20$, $z_1 = 10$, $x_q = 5$, $\tau = -100$

Если же значение отношения диэлектрических проницаемостей оставлять постоянным, однако не равным единице, то при увеличении значения плотности заряда τ в два раза, как изображено на рисунке 8, форма катода изменяется не так существенно, в отличие от задачи, рассматриваемой в первом параграфе, рисунки 3-4.



а) $\tau = -100$



б) $\tau = -500$

Рис. 8: $r_1 = 10, r_q = 5, r_2 = 20, z_1 = 10, x_q = 5, \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 5$

Значения параметров системы

$$z_1 = 0, z_2 = 10, r_1 = 10, r_2 = 20, \tau = -100, r_q = 5, z_q = 5.$$

II. Моделирование плоскосимметричных двумерных диодных систем с полевыми катодами лезвийной формы в декартовой системе координат

В данной главе представлены методы моделирования плоскосимметричных диодных эмиссионных систем с полевыми эмиттерами лезвийной формы, расположенными на плоской подложке [12]. Анодом является плоскость, параллельная подложке. Для вычисления распределения электростатического потенциала во всей области системы используется метод разделения переменных в декартовых координатах.

II.1 Моделирование диодной полевой эмиссионной системы с помощью заряженной нити

II.1.1 Физическая постановка задачи расчета потенциала системы с заряженной нитью

Рассмотрим задачу моделирования системы с помощью заряженной нити в декартовых координатах (x, y, z) .

Пренебрегая краевыми эффектами, будем считать, что форма лезвийного катода по переменной z не меняется. Таким образом, распределение потенциала $U((x, y))$ зависит от двух координат (x, y) . Влияние полевого катода на распределение поля заменим влиянием заряженной нити с плотностями зарядов τ , расположенной в плоскости xOy с координатами $x = x_0, y = y_0$. На рисунке 9 представлено схематическое изображение системы с заряженной нитью в двумерной области (x, y) . Положим, что поверхность реального катода совпадает с нулевой эквипотенциалью. Потенциал подложки эмиттера равен нулю, потенциал анода равен U_0 , на боковых границах системы по переменной задана линейная функция.

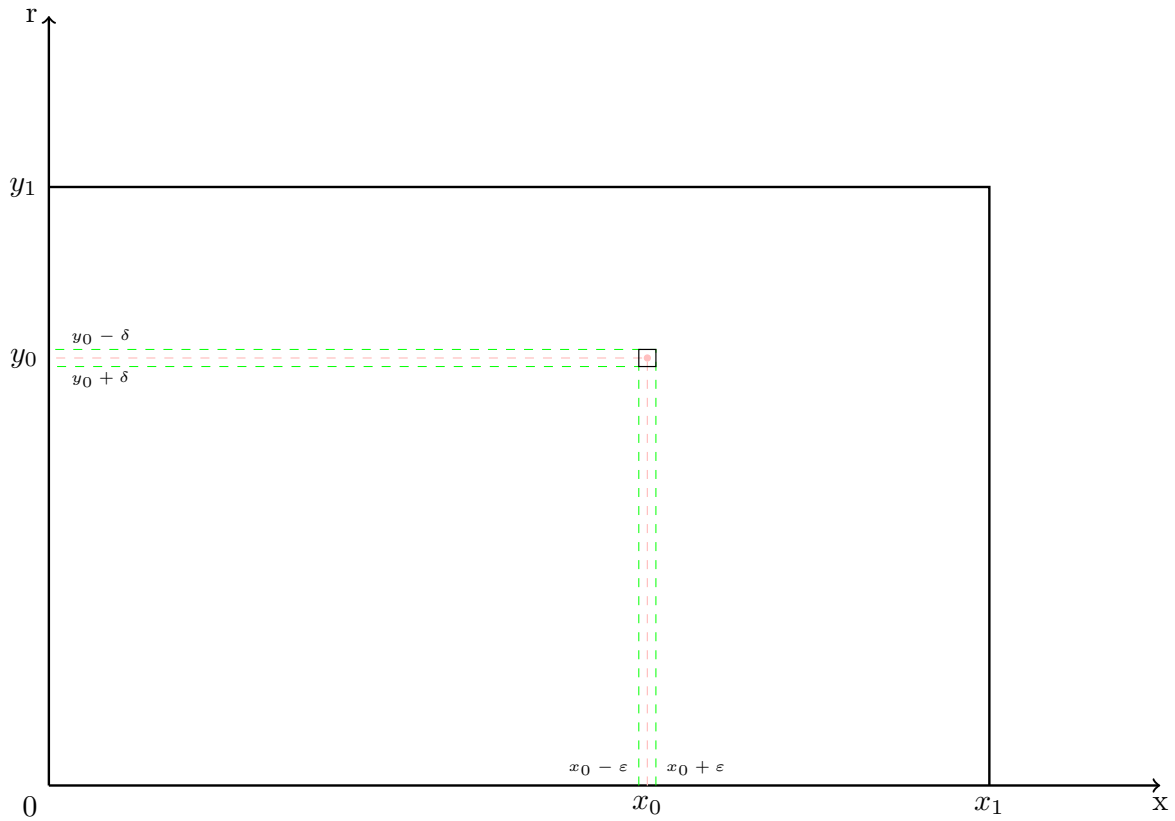


Рис. 9: Схематическое изображение системы с заряженной нитью на плоскости

II.1.2 Математическая модель системы с заряженной нитью в ограниченной области

Положим, что заряд с плотностью ρ равномерно распределен внутри прямоугольника небольшого объема

$$x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon; \quad y_0 - \delta < y < y_0 + \delta,$$

тогда $\tau = 4\varepsilon\delta\rho$, и задача сводится к решению уравнения Пуассона

$$\Delta U(x, y) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{\rho(x, y)}{\varepsilon_0}, \quad (\text{II.1.1})$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho, \\ \quad x_0 + \varepsilon > x > x_0 - \varepsilon \\ \quad y_0 + \delta > y > y_0 - \delta \\ 0, \\ \quad x_0 + \varepsilon < x; x < x_0 - \varepsilon \\ \quad y_0 + \delta < y; y < y_0 - \delta. \end{array} \right. \quad (\text{II.1.2})$$

при краевых условиях

$$U(0, y) = 0, U(x, 0) = 0, U(x_1, y) = 0, U(x, y_1) = 0. \quad (\text{II.1.3})$$

II.1.3 Вычисление распределения потенциала системы с заряженной нитью

Собственные функции находятся по переменной y . Дифференциальное уравнение собственных функций имеет вид

$$Y'' + \lambda Y = 0,$$

общий интеграл

$$Y_n(y) = C_1 \sin \sqrt{\lambda_n} y + C_2 \cos \sqrt{\lambda_n} y,$$

Собственные функции должны удовлетворять условиям

$$Y_n(0) = Y_n(y_1) = 0.$$

Из первого равенства можно сделать вывод, что $C_2 = 0$. Используя второе из равенств, находим

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{y_1^2},$$

тогда система функций

$$Y_n(y) = \sin \frac{n\pi}{y_1} y$$

задаёт искомые собственные функции.

Решение ищется в виде ряда

$$U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n(x) \sin \frac{n\pi}{y_1} y.$$

Умножим обе стороны равенства на $\sin \frac{n\pi}{y_1} y$ и проинтегрируем по y от 0 до y_1

$$\nu_n(x) = \frac{2}{y_1} \int_0^{y_1} U(x, y) \sin \frac{n\pi}{y_1} y dy.$$

Для нахождения $\nu_n(x)$ домножим II.1.1 на $\sin \frac{n\pi}{y_1} y$ и проинтегрируем по y от 0 до y_1

$$\int_0^{y_1} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \sin \frac{n\pi}{y_1} y dy + \int_0^{y_1} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \sin \frac{n\pi}{y_1} y dy = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^{y_1} \rho(x, y) \sin \frac{n\pi}{y_1} y dy.$$

Учитывая краевые условия, получим

$$\nu_n''(x) - \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 \nu_n(x) = -\frac{2}{y_1 \varepsilon_0} \phi(x) \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} \sin \frac{n\pi}{y_1} y dy,$$

из чего можно вывести окончательный вид уравнения

$$\nu_n''(x) - \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 \nu_n(x) = -\frac{4\delta}{\varepsilon_0 y_1} \phi(x) \sin \frac{n\pi y_0}{y_1}.$$

Решение будем искать в виде

$$\nu_n(x) = C_1(x) \operatorname{ch} \frac{n\pi}{y_1} x + C_2(x) \operatorname{sh} \frac{n\pi}{y_1} x.$$

Принимая во внимание граничные условия, найдём, что $C_1 = 0$. Тогда для C_2 будет верно следующее выражение

$$C_2 = \frac{8\rho\varepsilon\delta \sin \frac{n\pi}{y_1} y_0 \sin \frac{n\pi}{y_1} (x_1 - x_0)}{n\pi\varepsilon_0 \sin \frac{n\pi}{y_1} x_1} = \frac{2\tau \sin \frac{n\pi}{y_1} y_0 \sin \frac{n\pi}{y_1} (x_1 - x_0)}{n\pi\varepsilon_0 \sin \frac{n\pi}{y_1} x_1}.$$

Таким образом, получим, при $x \leq x_0$

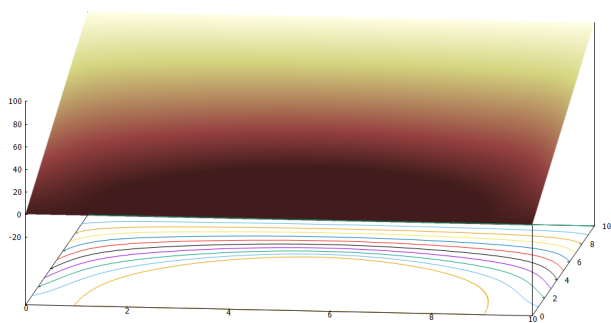
$$V = \frac{\tau}{\pi\varepsilon_0} \sin\left(\frac{\pi n}{y_1} y\right) \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{y_1} (x_2 - x_0)\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{y_1} x_2\right)} \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{y_1} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{y_1} y_0\right), \quad (\text{II.1.4})$$

при $x > x_0$

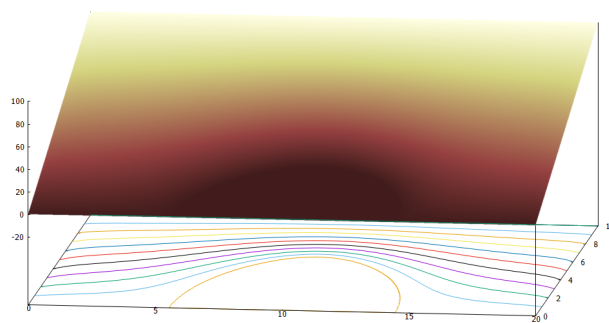
$$V = \frac{\tau}{\pi\varepsilon_0} \sin\left(\frac{\pi n}{y_1} y\right) \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{y_1} x_0\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{y_1} x_2\right)} \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{y_1} (x_2 - x_0)\right) \sin\left(\frac{\pi n}{y_1} y_0\right). \quad (\text{II.1.5})$$

II.1.4 Результаты численного расчета потенциала системы с заряженной нитью

На основе построенного решения написана программа, по результатам работы которой построены графики распределения потенциала во всей области системы. Отметим, что на рисунках 10 а) и б) форма катода остается практически неизменной, как и длина основания катода. Данный факт отражает адекватность построенной модели, то есть в результате моделирования получается необходимая форма и размеры катода, в то время как изменение размеров системы играет роль в изменении потенциала в области диодной системы, но вносит незначительный вклад в изменение формы катода.

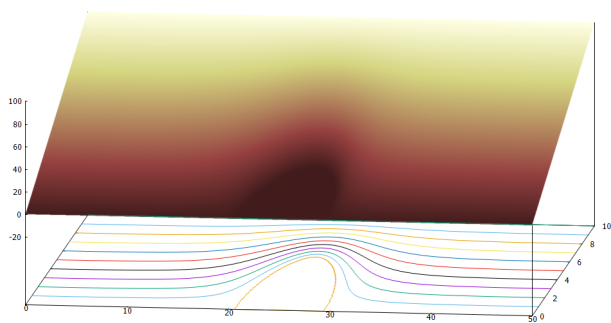


а) $x_1 = 10, x_0 = 5$

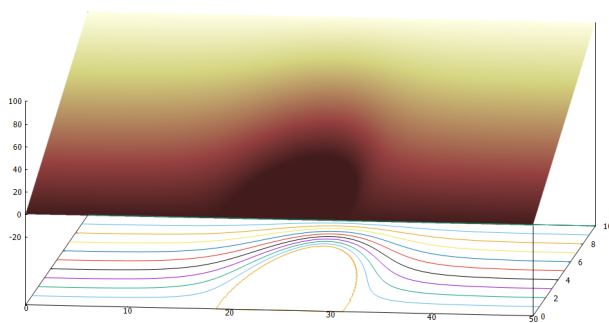


б) $x_1 = 20, x_0 = 10$

Рис. 10: $y_1 = 10, y_0 = 5, \tau = -10$.



а) $\tau = -10$



б) $\tau = -20$

Рис. 11: $y_1 = 10, y_0 = 5, x_1 = 50, x_0 = 25$

Рассмотрим рисунки 11. Рисунки а) и б) отличаются значением плотности заряда τ . Графики показывают, что при изменении значения τ в два раза происходит увеличение длины основания катода.

II.2 Моделирование системы с произвольным числом заряженных нитей с учетом влияния диэлектриков

II.2.1 Физическая постановка задачи расчета потенциала системы с заряженными нитями и диэлектриками

Решается двумерная задача расчета эмиссионной системы в декартовой системе координат (x, y) . Анод – плоскость, параллельная подложке. Для вычисления распределения потенциала влияние эмиттера заменяется влиянием заряженной плоскости, так что нулевая эквипотенциаль представляет собой поверхность эмиттера. Внутренняя область системы заполнена двумя разными диэлектриками. Влияние полевого острия заменяется влиянием системы заряженных нитей. Координаты нитей (x_0, y_{0i}) . Границей раздела диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 является прямая $y = y_1$. Полевой катод расположен на плоской подложке $y = 0$. На внешних границах рассматриваемой системы $x = 0$, $x = x_1$, $y = y_2$ заданы граничные условия первого рода. Потенциал подложки $y = 0$ равен нулю. Поверхность катода совпадает с поверхностью нулевой эквипотенциали.

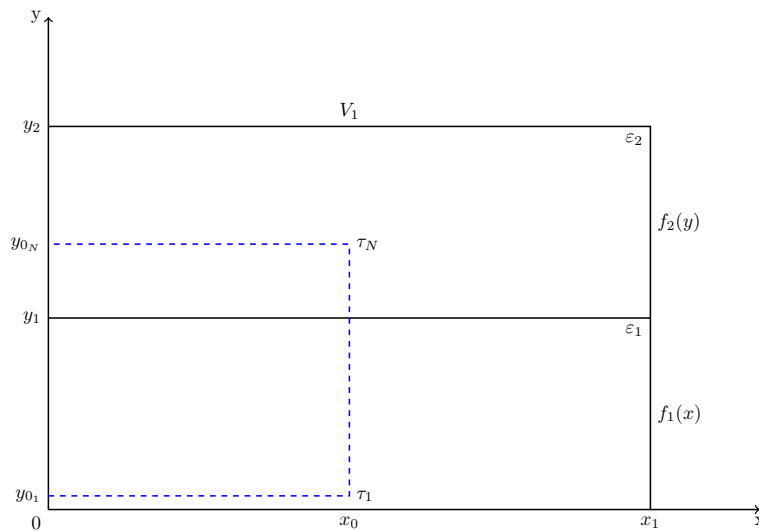


Рис. 12: Схематическое изображение системы с заряженными нитями на плоскости

II.2.2 Математическая модель системы с заряженными нитями и диэлектриками

Распределение электростатического потенциала $U(x, y)$ в декартовой системе координат удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial U^2}{\partial x^2} + \frac{\partial U^2}{\partial y^2} = 0. \quad (\text{II.2.1})$$

В силу того, что влияние катода заменяется влиянием заряженных нитей, исходная граничная задача II.2.1 сводится к решению уравнения Пуассона с соответствующими граничными условиями. Для решения граничной задачи используется метод разделения переменных в декартовых координатах.

$$\Delta U(x, y) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{\rho(x, y)}{\varepsilon_0}, \quad (\text{II.2.2})$$

граничные условия

$$\begin{aligned} U(0, y) &= U(x_1, y) = f(y), \\ U(x, y_2) &= V_1, \end{aligned} \quad (\text{II.2.3})$$

$$U(x, 0) = 0,$$

$$f(y) = \begin{cases} f_1(y) = V_1 \frac{y\varepsilon_2}{y_2\varepsilon_1 + y_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}, & 0 \leq y \leq y_1, \\ f_2(y) = V_1 \frac{y\varepsilon_1 + y_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{y_2\varepsilon_1 + y_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}, & y_1 \leq y \leq y_2. \end{cases} \quad (\text{II.2.4})$$

II.2.3 Вычисление распределения потенциала системы с заряженными нитями и диэлектриками

Для решения задачи II.2.2–II.2.4 вся внутренняя область системы разбивается на две подобласти по границе раздела диэлектриков $y = y_1$

$$U(r, z) = \begin{cases} U_1(y, x), & 0 \leq y \leq y_1, \\ U_2(y, x), & y_1 \leq y \leq y_2. \end{cases} \quad (\text{II.2.5})$$

Распределение потенциала II.2.5 можно представить в виде [11]

$$U_1(x, y) = f_1(y) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{\sinh \alpha_m y}{\sinh \alpha_m y_1} \sin \alpha_m x + \sum_{i=1}^j \frac{2\tau_i}{\pi \varepsilon_0} \times$$

$$\times \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh \beta_n (x_1 - x_0) \sinh \beta_n x}{n \sinh \beta_n x_1} \sin \beta_n y_{0i} \sin \beta_n y, \\ 0 \leq x \leq x_0; \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh \beta_n (x_1 - x) \sinh \beta_n x_0}{n \sinh \beta_n x_1} \sin \beta_n y_{0i} \sin \beta_n y, \\ x_0 \leq x \leq x_1; \end{cases} \quad (\text{II.2.6})$$

$$U_2(x, y) = f_2(y) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{\sinh \alpha_m (y_2 - y)}{\sinh \alpha_m (y_2 - y_1)} \sin \alpha_m x + \sum_{i=j+1}^N \frac{2\tau_i}{\pi \varepsilon_0} \times$$

$$\times \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sinh \gamma_k (x_1 - x_0) \sinh \gamma_k x}{k \sinh \gamma_k x_1} \sin \gamma_k (y_{0i} - y_1) \sin \gamma_k (y - y_1), \\ 0 \leq x \leq x_0; \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sinh \gamma_k (x_1 - x) \sinh \gamma_k x_0}{k \sinh \gamma_k x_1} \sin \gamma_k (y_{0i} - y_1) \sin \gamma_k (y - y_1), \\ x_0 \leq x \leq x_1; \end{cases} \quad (\text{II.2.7})$$

где

$$\alpha_m = \frac{\pi m}{x_1}, \quad \beta_n = \frac{\pi n}{y_1}, \quad \gamma_k = \frac{\pi k}{y_2 - y_1}.$$

Таким образом, разложения II.2.6-II.2.7 устанавливают непрерывность потенциала $U(x, y)$ на границе раздела диэлектриков $y = y_1$ и выполнение граничных условий II.2.3-II.2.4.

Выполнение условия непрерывности нормальной составляющей вектора электрического смещения на границе раздела диэлектриков:

$$\left. \frac{\partial U_1}{\partial y} \right|_{y=y_1} = \left. \frac{\partial U_2}{\partial y} \right|_{y=y_1}$$

приводит к вычислению коэффициентов в явном виде

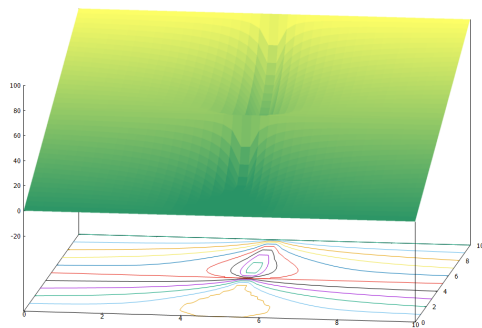
$$A_m = \frac{4}{\varepsilon_0 \pi m (\varepsilon_1 \coth(\alpha_m y_1) + \varepsilon_2 \coth(\alpha_m (y_2 - y_1)))} \times$$

$$\times \left(\frac{\varepsilon_1}{y_1} \left(\sum_{i=0}^j \sum_{n=1}^{\infty} \tau_i (-1)^n \sin(\beta_n y_{0i}) \frac{\beta_n}{\beta_n^2 + \alpha_m^2} \sin(\alpha_m x_0) \right) + \right.$$

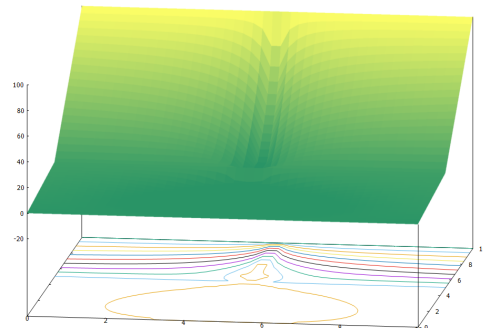
$$\left. + \frac{\varepsilon_2}{(y_2 - y_1)} \left(\sum_{i=j+1}^N \sum_{k=1}^{\infty} \tau_i \sin(\gamma_k (y_{0i} - y_1)) \frac{\gamma_k}{\gamma_k^2 + \alpha_m^2} \sin(\alpha_m x_0) \right) \right).$$

II.2.4 Результаты численного расчета потенциала системы с заряженными нитями и диэлектриками

Отметим, что полученные изображения удовлетворяют ожидаемым при моделировании результатам. При увеличении значения отношения диэлектрических проницаемостей $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ форма катода меняется относительно самой системы. Распределение потенциала в области, где проницаемость диэлектрика равна ε_2 , меняет угол наклона на графике и более полого, чем в первой области, подходит к границе области, как показано на рисунках 13.



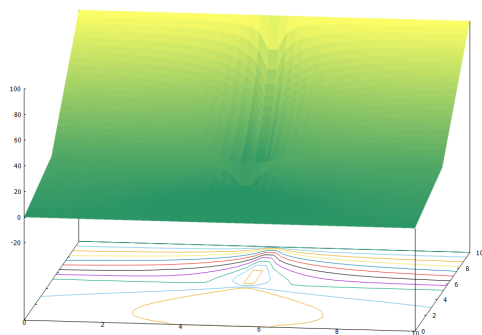
а) $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 1$



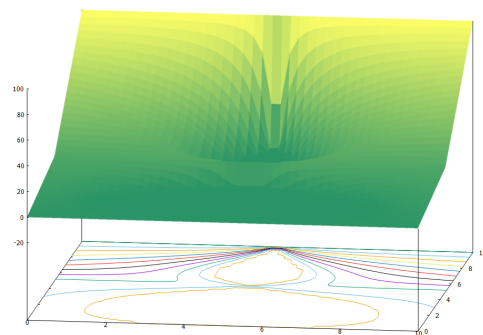
б) $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 10$

Рис. 13: $y_1 = 5$, $y_2 = 10$, $y_{0_i} = [0, 5]$, $N = 50$, $x_1 = 10$, $x_0 = 5$, $\tau = -100$

При увеличении значения τ , что видно на рисунках 14, острие немного увеличивается пропорционально относительно размеров системы.



а) $\tau = -100$



б) $\tau = -300$

Рис. 14: $y_1 = 5$, $y_2 = 10$, $y_{0_i} = [0, 5]$, $N = 50$, $x_1 = 10$, $x_0 = 5$, $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 5$

II.3 Моделирование периодической системы полевых эмиттеров с помощью заряженных плоскостей

II.3.1 Физическая постановка задачи расчета потенциала периодической системы заряженных плоскостей

В данном разделе моделируется периодическая система полевых эмиттеров лезвийной формы на плоской подложке. Анодом является плоскость, параллельная подложке. В силу периодичности системы, можно рассматривать одну элементарную ячейку с границами $0 \leq x \leq x_1$ (см. рисунок 19). Заменяем влияние каждого полевого эмиттера на распределение потенциала в элементарной ячейке влиянием заряженной плоскости с плотностью зарядов τ и координатами $x = x_0/2$, $0 \leq y \leq y_0$ [13]–[15].

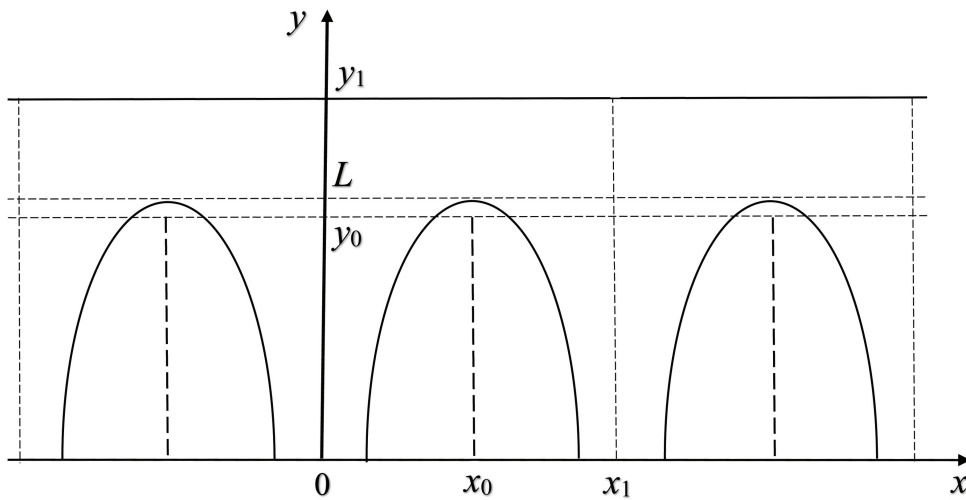


Рис. 15: Схематическое изображение электронно-оптической системы на плоскости.

II.3.2 Математическая модель периодической системы заряженных плоскостей

Для вычисления распределения потенциала $U(x, y)$ во всей области одной ячейки ($0 \leq x \leq x_1$, $0 \leq y \leq y_1$) требуется решить граничную задачу для уравнения Пуассона:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(x, y), \\ U(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq x_1, \\ U(x, y_1) = U_0, \quad 0 \leq x \leq x_1, \\ \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad 0 \leq y \leq y_1, \\ \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = 0, \quad 0 \leq y \leq y_1. \end{array} \right. \quad (\text{II.3.1})$$

Будем считать, что заряженная нить с линейной плотностью заряда $\tau(y)$ создает пространственное распределение заряда $\rho(x, y)$ в прямоугольнике малого объема ($|x - x_0| < \delta$, $0 \leq y \leq y_0$) [12],[13]:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \rho(y), & |x - x_0| < \delta \text{ и } 0 \leq y \leq y_0, \\ 0, & |x - x_0| > \delta \text{ или } y_0 \leq y \leq y_1, \end{cases} \quad (\text{II.3.2})$$

так что

$$\tau(y) = \lim_{\delta \rightarrow 0} 2\delta y_0 \rho(y). \quad (\text{II.3.3})$$

II.3.3 Вычисление распределения потенциала периодической системы заряженных плоскостей

Представим решение граничной задачи II.3.1-II.3.2 в виде

$$U(x, y) = U_0 y/y_1 + U_1(x, y). \quad (\text{II.3.4})$$

Для определения функции $U_1(x, y)$ из уравнения II.3.4 требуется решить уравнение Пуассона с однородными граничными условиями первого рода по переменной y и однородными граничными условиями второго рода по переменной x :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 U_1(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1(x, y)}{\partial y^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(x, y), \\ U_1(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq x_1, \\ U_1(x, y_1) = 0, \quad 0 \leq x \leq x_1, \\ \frac{\partial U_1(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad 0 \leq y \leq y_1, \\ \frac{\partial U_1(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = 0, \quad 0 \leq y \leq y_1. \end{array} \right. \quad (\text{II.3.5})$$

Решая уравнение II.3.5, получим [14]:

при $n = 0$

$$\begin{aligned} v_0(y) &= -\frac{y_1 - y}{x_1 y_1} \int_0^y \eta \phi_0(\eta) d\eta + \frac{y}{x_1 y_1} \int_y^{y_0} (\eta - y_1) \phi_0(\eta) d\eta, \quad 0 \leq y \leq y_0, \\ v_0(y) &= -\frac{y_1 - y}{x_1 y_1} \int_0^{y_0} \eta \phi_0(\eta) d\eta, \quad y_0 < y \leq y_1, \end{aligned} \quad (\text{II.3.6})$$

при $n > 0$

$$\begin{aligned} v_n(y) &= -\frac{2}{\pi n \sinh \alpha_n y_1} \left[\int_0^y \phi_n(\eta) \sinh \alpha_n \eta \sinh \alpha_n (y_1 - y) d\eta - \right. \\ &\quad \left. - \int_y^{y_0} \phi_n(\eta) \sinh \alpha_n (\eta - y_1) \sinh \alpha_n y d\eta \right], \quad 0 \leq y \leq y_0, \\ v_n(y) &= -\frac{2}{\pi n \sinh \alpha_n y_1} \left[\int_0^{y_0} \phi_n(\eta) \sinh \alpha_n \eta \sinh \alpha_n (y_1 - y) d\eta, \quad y_0 < y \leq y_1. \right. \end{aligned} \quad (\text{II.3.7})$$

II.3.4 Результаты численного расчета потенциала периодической системы заряженных плоскостей

В соответствии с полученными аналитическими формулами распределения потенциала II.3.7-II.3.6 в данном разделе представлены графики и картины эквипотенциалей для элементарной ячейки периодической многоэмиттерной системы.

На рисунках 16-17 представлены графики поля для различных значениях геометрических параметров и заданных значениях плотности зарядов τ .

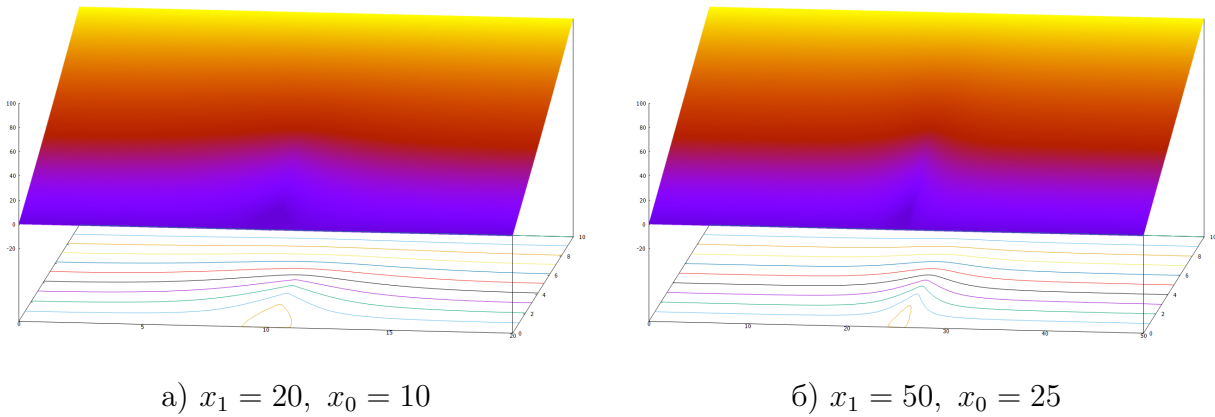


Рис. 16: $y_1 = 10, y_0 = 5, \tau = -20$.

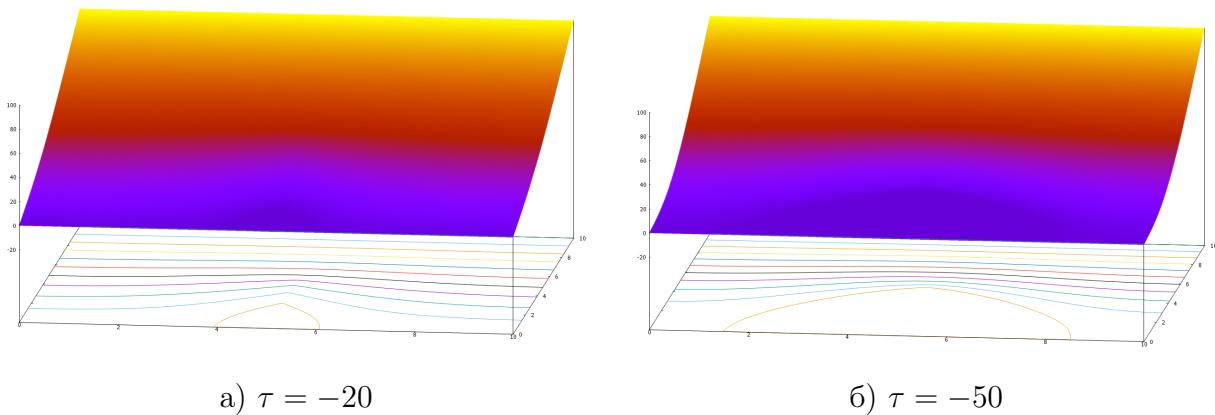
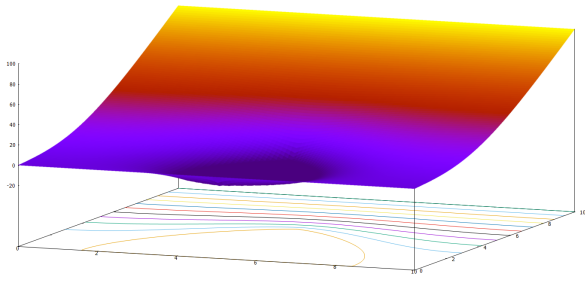
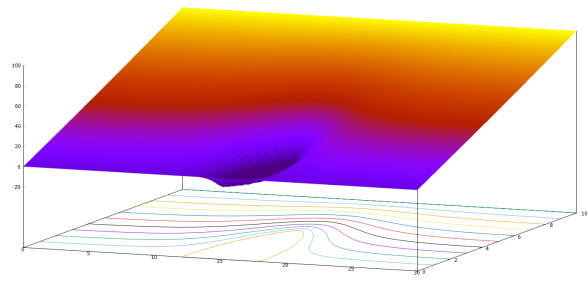


Рис. 17: $y_1 = 10, y_0 = 5, x_1 = 10, x_0 = 5$

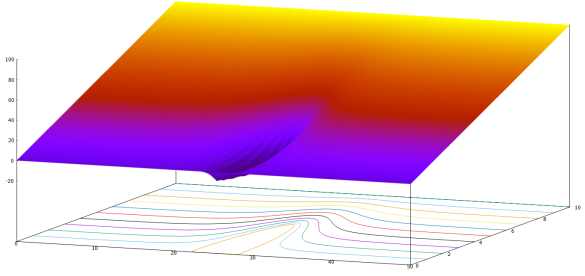
На рисунках 18 представлены графики поля для различных значениях геометрических параметров и при вычисленных значениях τ . Значения τ определялись из условия прохождения нулевой эквипотенциали, совпадающей с поверхностью катода, на заданном расстоянии l от вершины катода.



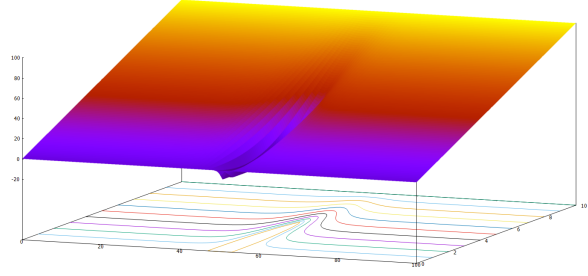
$$x_1 = 10, \tau = -49.285;$$



$$x_1 = 30, \tau = -54.756;$$



$$x_1 = 50, \tau = -55.374;$$



$$x_1 = 100, \tau = -56.955.$$

Рис. 18: Параметры системы: $y_1 = 10$, $U_0 = 100$, $l = 0.00005$

II.4 Моделирование периодической системы заряженных плоскостей, разделенных диэлектрическими слоями

II.4.1 Физическая постановка задачи расчета потенциала периодической системы заряженных плоскостей с диэлектрическими слоями

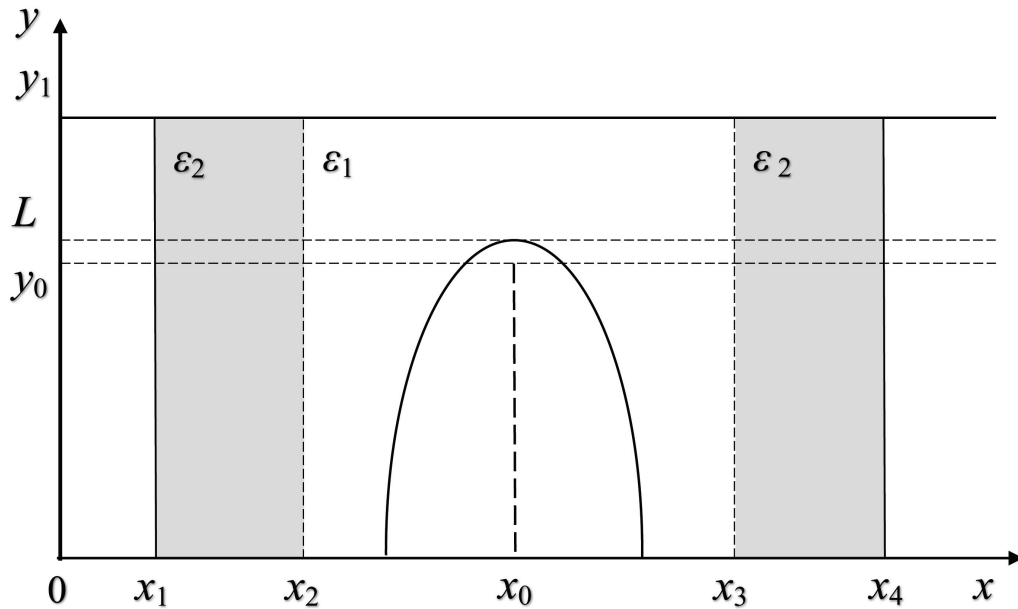


Рис. 19: Схематическое изображение одной ячейки периодической системы полевых эмиттеров.

Параметры задачи:

область диодной системы — $(x_1 \leq x \leq x_4, 0 \leq y \leq y_1)$;

граница раздела диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями ϵ_2 и ϵ_1 — $x = x_2, 0 \leq y \leq y_1$;

граница раздела диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 — $x = x_3, 0 \leq y \leq y_1$;

заряженная плоскость — $x = x_0 = (x_2 + x_3)/2, 0 \leq y \leq y_0$;

поверхность подложки — $y = 0$; поверхность анода — $y = y_1$;

потенциал подложки — $U(x, 0) = 0$, $x_1 \leq x \leq x_4$; потенциал анода — $U(x, y_1) = U_0$,
 $x_1 \leq x \leq x_4$;

распределение потенциала на боковых границах области — $U(x_1, y) = U(x_4, y) = U_0 \frac{y}{y_1}$, $0 \leq y \leq y_1$.

Заменим влияние полевого катода на распределение потенциала в каждой ячейке влиянием заряженной плоскости с плотностью зарядов τ [16]–[18].

II.4.2 Математическая модель периодической системы заряженных плоскостей с диэлектрическими слоями

Распределение электростатического потенциала $U(x, y)$ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta U(x, y) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{\rho(x, y)}{\varepsilon_0}, \quad (\text{II.4.1})$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} U(x_1, y) &= U(x_4, y) = U_0 y / y_1, \\ U(x, y_1) &= U_0, \quad U(x, 0) = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.4.2})$$

II.4.3 Вычисление распределения потенциала периодической системы заряженных плоскостей с диэлектрическими слоями

Представим функцию $U(x, y)$ в виде суммы решения $U_1(x, y)$ и линейной добавки $U_0 \frac{y}{y_0}$. Для решения граничной задачи II.4.1–II.4.2 разобьем всю область моделируемой системы ($x_1 \leq x \leq x_4$, $0 \leq y \leq y_1$) на три части

$$\begin{aligned} U(x, y) &= U_0 y / y_1 + U_1(x, y), \\ U_1(x, y) &= \begin{cases} U_1^I(x, y), & x_1 \leq x \leq x_2; \\ U_1^{II}(x, y), & x_2 \leq x \leq x_3; \\ U_1^{III}(x, y), & x_3 \leq x \leq x_4. \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда, функции $U_1^I(x, y)$, $U_1^{II}(x, y)$, $U_1^{III}(x, y)$ можно представить в виде разложений по собственным функциям

$$U_1^I(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sinh(\lambda_n(x - x_1))}{\sinh(\lambda_n(x_2 - x_1))} \sin \lambda_n y, \quad x_1 \leq x \leq x_2; \quad (\text{II.4.3})$$

$$U_1^{II}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{\sinh(\lambda_n(x_3 - x))}{\sinh(\lambda_n(x_3 - x_2))} + \right. \\ \left. + b_n \frac{\sinh(\lambda_n(x - x_2))}{\sinh(\lambda_n(x_3 - x_2))} \right) \sin \lambda_n y + U_{\tau}(x, y), \quad x_3 \leq x \leq x_2; \quad (\text{II.4.4})$$

$$U_1^{III}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\sinh(\lambda_n(x_4 - x))}{\sinh(\lambda_n(x_4 - x_3))} \sin \lambda_n y, \quad x_3 \leq x \leq x_4. \quad (\text{II.4.5})$$

Функция $U_{\tau}(x, y)$ имеет вид

$$U_{\tau}(x, y) = \begin{cases} \frac{\tau}{y_0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \sin \alpha_m(x_0 - x_2)}{\alpha_m \pi m \varepsilon_0} \left[1 - \frac{\sinh(\alpha_m(y_1 - y))}{\sinh(\alpha_m y_1)} - \frac{\sinh(\alpha_m y) \cosh(\alpha_m(y_1 - y_0))}{\sinh(\alpha_m y_1)} \right] \times \\ \times \sin \alpha_m(x - x_2), \quad 0 \leq y \leq y_0; \\ \frac{\tau}{y_0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \sin \alpha_m(x_0 - x_2)}{\alpha_m \pi m \varepsilon_0} \frac{\sinh(\alpha_m(y_1 - y))}{\sinh(\alpha_m y_1)} \times \\ \times (\cosh(\alpha_m y_0) - 1) \sin \alpha_m(x - x_2), \quad y_0 \leq y \leq y_1; \end{cases} \quad (\text{II.4.6})$$

где τ - постоянная плотность заряда на плоскости $x = x_0, 0 < y < y_0$.

II.4.4 Нахождение коэффициентов разложений потенциала из условий сопряжения на границе раздела диэлектриков в периодической системе

Коэффициенты a_n, b_n в разложениях II.4.3–II.4.5 могут быть найдены из условий непрерывности вектора электрического смещения при $x = x_2, x = x_3$

$$\varepsilon_2 \frac{\partial U_1^I(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=x_2} = \varepsilon_1 \frac{\partial U_1^{II}(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=x_2}, \\ \varepsilon_1 \frac{\partial U_1^{II}(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=x_3} = \varepsilon_2 \frac{\partial U_1^{III}(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=x_3}.$$

Условия сопряжения на границе раздела диэлектриков и ортогональность системы собственных функция в рядах II.4.3–II.4.6 приводят к нахождению коэффициентов a_n, b_n в явном виде

$$a_n = A_n \frac{\delta_n + \gamma_n}{\beta_n \delta_n - \gamma_n^2}, \quad b_n = A_n \frac{\beta_n + \gamma_n}{\beta_n \delta_n - \gamma_n^2},$$

где

$$A_n = \tau \frac{4(1 - \cos \lambda_n y_0)}{\varepsilon_0 y_0 y_1 \lambda_n^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \alpha_m (x_0 - x_2)}{\pi m} \frac{\alpha_m^2}{\alpha_m^2 + \lambda_n^2},$$

$$\beta_n = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \coth(\lambda_n (x_2 - x_1)) + \coth(\lambda_n (x_3 - x_2)),$$

$$\gamma_n = \frac{1}{\sinh(\lambda_n (x_3 - x_2))},$$

$$\delta_n = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \coth(\lambda_n (x_4 - x_3)) + \coth(\lambda_n (x_3 - x_2)).$$

Величина линейной плотности заряда τ вычисляется из условия

$$U(x_0, L) = 0,$$

чтобы нулевая эквипотенциаль проходила через вершину катода ($x = x_0$, $y = L$).

II.4.5 Результаты численного расчета потенциала периодической системы заряженных плоскостей, разделенных диэлектрическими слоями

На рисунках 20, 21 представлены графики распределения потенциала и картины эквипотенциальных линий в зависимости от отношения значений диэлектрических проницаемостей $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ для заданных геометрических параметров системы и вычисляемых величинах τ при условии, чтобы нулевая эквипотенциаль проходила через вершину катода (x_0, L) [19].

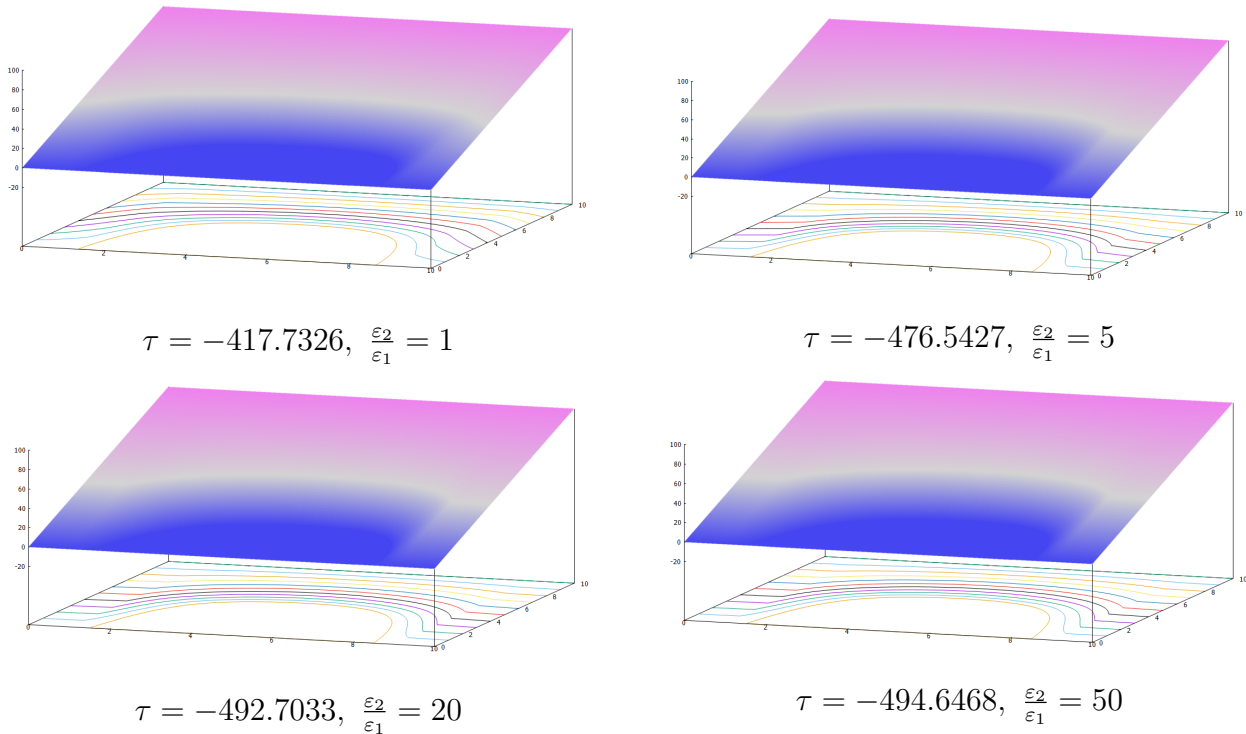


Рис. 20: Параметры: $y_0 = 5$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 9$, $x_4 = 10$, $y_1 = 10$, $U_1 = 100$, $L = 5,00005$.

Отметим, что при увеличении соотношения $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ значения плотности заряда τ увеличиваются и влияние диэлектриков на полученное распределение электростатического потенциала представлено на рисунках 20.

На рисунках 21 демонстрируется влияние изменения границ системы. С помощью параметров x_2 и x_3 задаются расположение диэлектриков в одной ячейке системы. Таким образом можно изменять форму катода на требуемую не только с помощью изменения значений соотношения диэлектрических проницаемостей, геометрических параметров всей системы, но и изменяя расположение диэлектриков внутри рассматриваемой системы.

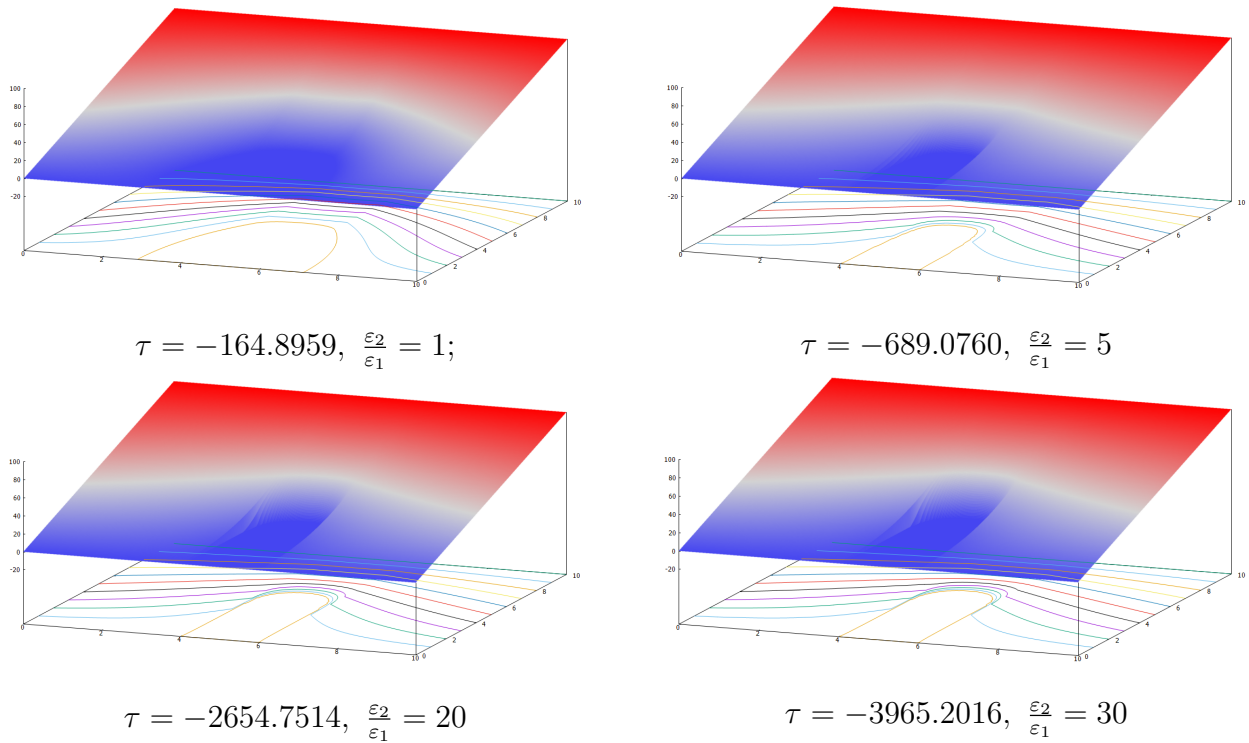


Рис. 21: Параметры: $y_0 = 5$, $x_1 = 0$, $x_4 = 10$, $x_2 = 4$, $x_3 = 6$, $y_1 = 10$, $U_1 = 100$, $L = 5,00005$.

II.5 Вычисление напряженности электростатического поля

Напряженность электростатического поля является важнейшей характеристикой полевой эмиссионной системы, т.к. именно она позволяет вычислить плотность тока, величину полного тока и т.д. [19]

В данном разделе напряженность поля рассчитывается не во всей области системы, так как особый интерес представляет значения напряженности именно на вершине катода и в его малой окрестности δ :

$$L = y_0 + \delta.$$

Значения напряженности для осесимметричной системы, с одиночным полевым катодом представлены на рисунках 22:

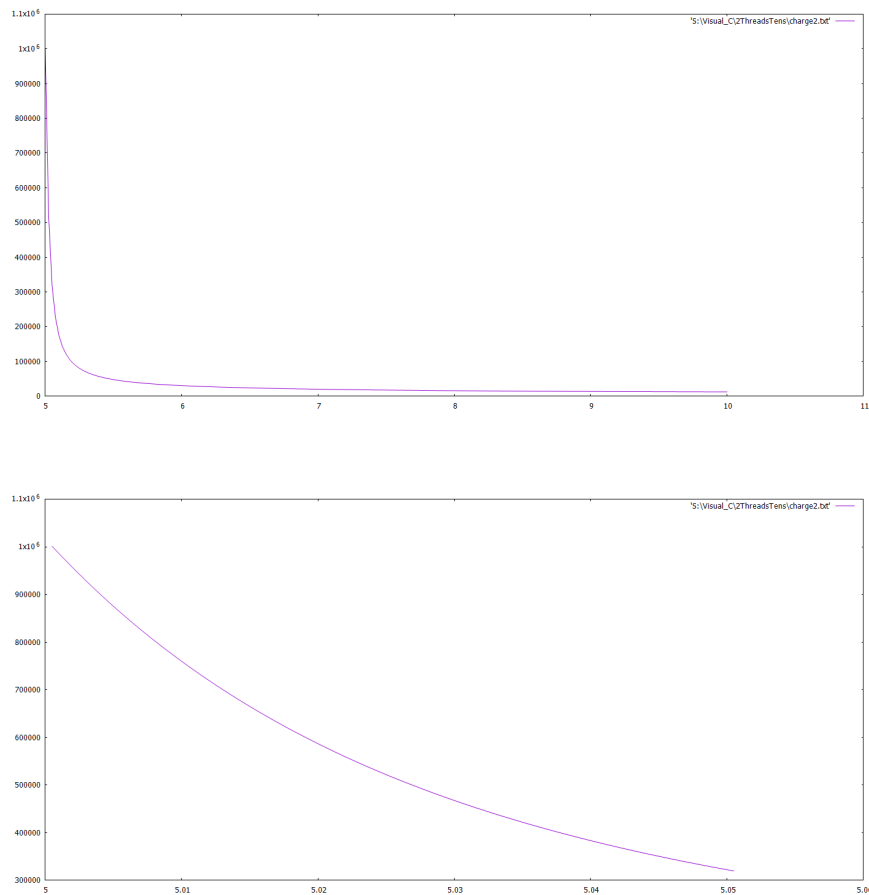


Рис. 22: Параметры: $r_1 = 10$, $z_1 = 10$, $r_q = 5$, $z_q = 5$, $U_0 = U_1 = 100$, $\tau = -100$, $L = 0.0005$

Значения напряженности для случая периодической системы катодов, моделируемой заряженной плоскостью в декартовых координатах, представлены на рисунке 23. Отметим, что максимальное значение напряженности для плоской системы, моделируемой с помощью заряженной плоскости, меньше в 10^3 раз, чем значения для осесимметричной системы в цилиндрических координатах.

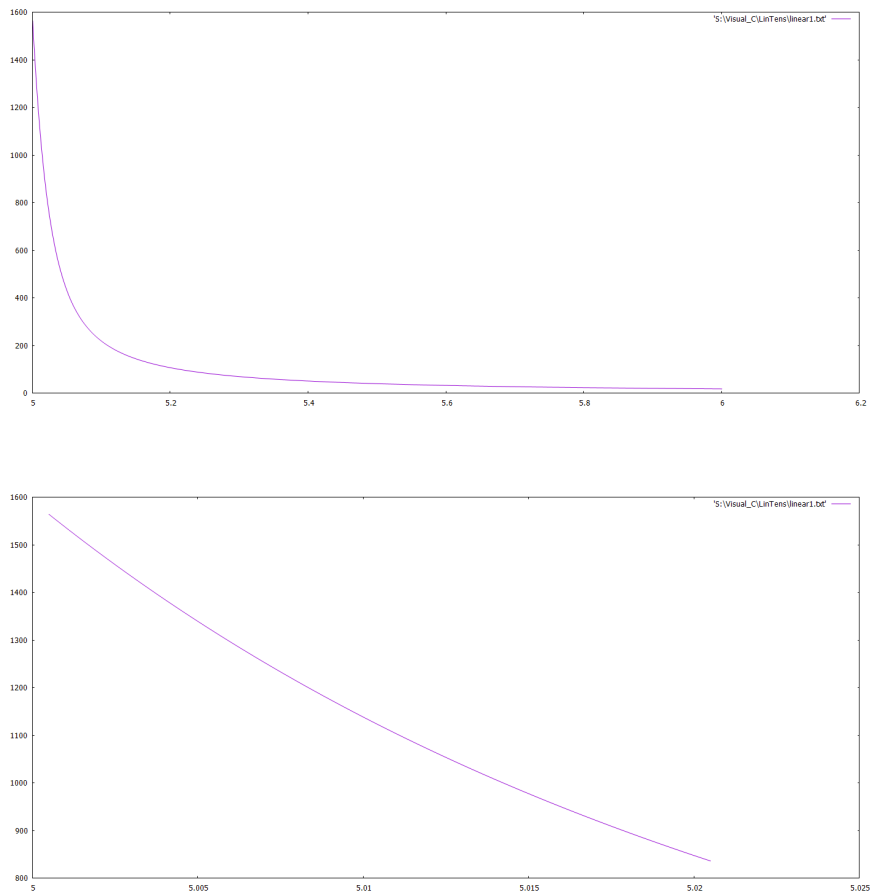


Рис. 23: Параметры: $x_1 = 10$, $y_1 = 10$, $x_0 = 5$, $y_0 = 5$, $V_0 = V_1 = 100$, $\tau = -100$, $L = 0.0005$

На рисунке 23 представлена периодическая система эмиттеров, содержащая диэлектрические прослойки. На данных графиках видно, что максимальная напряженность вблизи острия так же сравнительно небольшая — лишь $12 \cdot 10^3$, что, однако, больше, чем значения для неперодической системы. Важно отметить, что данные значения напряженности должны уменьшаться при создании реального устройства из-за влияния эффекта экранирования эмиттеров друг другом [14].

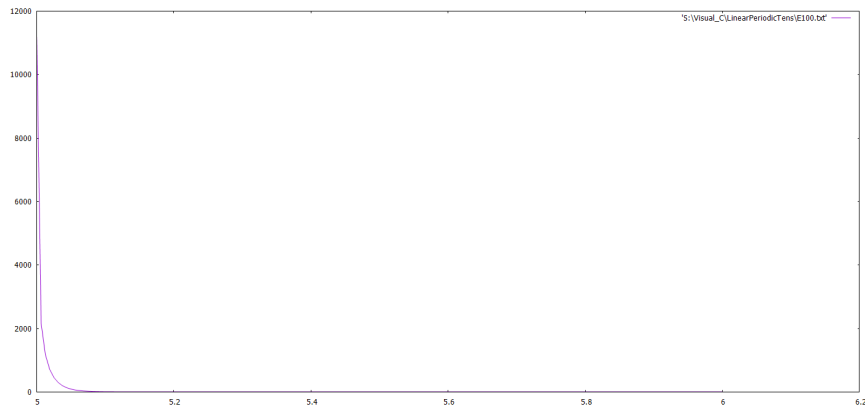


Рис. 24: Параметры: $x_1 = 10$, $y_1 = 10$, $x_0 = 5$, $y_0 = 5$, $V_0 = V_1 = 100$, $\tau = -100$, $L = 0.0005$

Наименьшие значения напряженности вблизи вершины катода показывает система с заряженными нитями, представленная на рисунке 25.

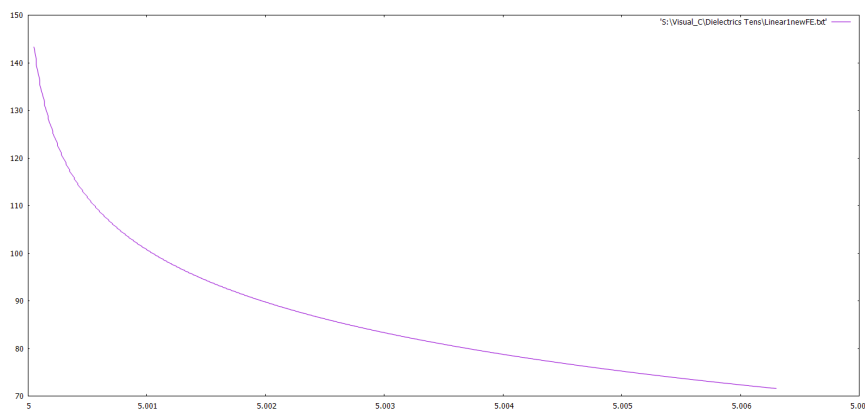
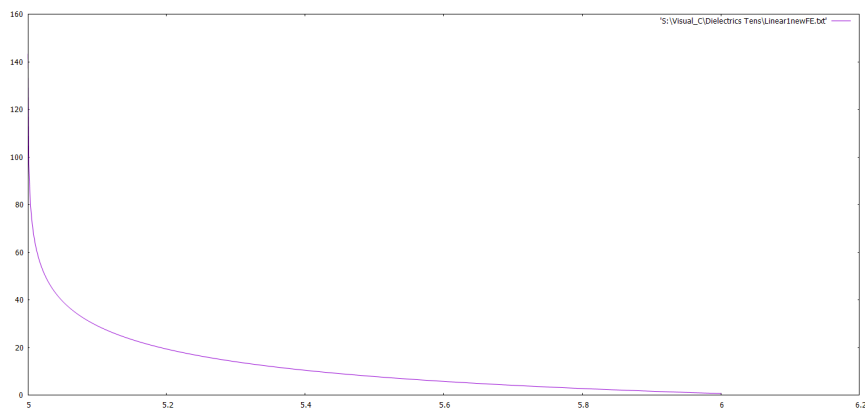


Рис. 25: Параметры: $x_1 = 10$, $y_1 = 10$, $x_0 = 5$, $y_0 = 5$, $V_0 = V_1 = 100$, $\tau = -100$, $L = 0.0005$

Заключение

В данной работе предложены методы моделирования различных двумерных эмиссионных систем на основе полевых эмиттеров. Одной из главных задач исследования полевых катодов является поиск наиболее удобного способа моделирования, который для каждой конкретной задачи поможет конструировать катоды необходимых размеров и форм. Особое внимание уделялось исследованию вопроса об изменении распределения электростатического потенциала внутри системы и влиянию изменения геометрических параметров системы на результат моделирования.

В первой главе представлены следующие осесимметричные эмиссионные диодные системы в цилиндрической системе координат:

- с одиночным полевым катодом специальной формы, моделируемым с помощью круговой заряженной нити,
- с одиночным катодом и диэлектрической прослойкой по радиальной переменной.

Во второй главе рассмотрены плоскосимметричные эмиссионные диодные системы в декартовой системе координат:

- с одиночным катодом лезвийной формы, моделируемым с помощью тонкой заряженной нитью,
- с одиночным катодом лезвийной формы, моделируемым с помощью произвольного числа бесконечно заряженных нитей, с учетом влияния диэлектрической прослойки на подложке катода,
- периодическая система эмиттеров, моделируемая с помощью заряженных плоскостей,
- периодическая система эмиттеров, разделенных диэлектрическими прослойками.

Для каждой из представленных моделей распределение электростатического потенциала было вычислено во всей области системы в аналитическом виде как разложения по собственным функциям, коэффициенты разложений найдены в явном виде.

В соответствии с полученными формулами приведены графики распределения потенциала для различных геометрических параметров рассмотренных диодных систем. Представлены примеры влияния на систему с помощью варьирования исходных значений параметров задачи.

Для осесимметричных систем, изменение границ области по переменным r и z меняет форму катода - рисунки 3,4. Влияние изменение соотношения диэлектрических

слоев также продемонстрировано на рисунках 7,8.

Для систем, моделируемых в декартовой системе координат, использовались различные способы построения виртуального катода, форма которого представлена нулевой эквипотенциалью: с помощью заряженных нитей и с помощью заряженных плоскостей. Необходимо отметить, что задание формы эмиттера с помощью заряженных нитей является более предпочтительным, учитывая гибкость модели для широкого класса полевых катодов различной формы (рисунки 10—11, 13—14, 16—17, 20—21).

В работе представлены графики напряженности поля вблизи острия для нескольких из рассматриваемых систем. Напряженность является важной эмиссионной характеристикой модели и позволяет проанализировать целесообразность использования того или иного способа моделирования при создании реальных устройств вакуумной электроники. Значения напряженности для круговых нитей являются довольно большими, что говорит об удобстве использования данного метода при создании сравнительно крупных катодов в миллиметровом диапазоне (рисунки 22). Плоские модели, наоборот, обладают довольно слабыми значениями напряженности поля, однако их преимуществом является возможность использования таких систем в приборах нанoeлектроники (рисунки 23—25).

Таким образом, каждая из представленных моделей обладает рядом преимуществ и недостатков, которые важно учитывать при проектировании реальных устройств. Однако каждая из разработанных моделей полевых эмиссионных систем может быть использована в реальных приборах, в зависимости от поставленной технической задачи.

Список литературы

- [1] Forbes R. G. Physical electrostatics of small field emitter arrays/clusters // Journal of Applied Physics. 2016. Vol. 120, No 5. 054302.
- [2] Hongzhong Liu, Yongsheng Shi, Bangdao Chen, Xin Li, Yucheng Ding, Bingheng Lu, Vacuum // 2011. Т. 86, С.934.
- [3] Hansung Lee, Ki Buem Kim, Naesung Lee, Jeungchoon Goak, Jun-Young Park, Jusung Choi, Yongho Seo, Byoungyun Kong, Young Chul Choi, Choong Hu Lee, Yoon Ho Song, SciVerse ScienceDirect // 2012. Т.50, С.2126-2133.
- [4] A.T.T. Koh, J. Hsieh, Daniel H.C. Chua, Applied Surface Science // 2009. Т.256, С.178-182.
- [5] Е.М. Виноградова, Н.В. Егоров, Д.С. Телевный, Журнал технической физики // 2014. Т. 84, №2. С.139.
- [6] *Vinogradova E. M., Egorov N. V., Televnyi D. S.* Calculation of a triode field-emission system with a modulator // Tech. Phys. 2014. Vol. 59. Iss. 2. P. 291-296.
- [7] *Бугаев А. С., Виноградова Е. М., Егоров Н. В., Шешин Е. П.* Автоэлектронные катоды и пушки. Долгопрудный: ИД «Интеллект», 2017, 288 с.
- [8] Миролюбов Н. Н., Костенко М. В., Левинштейн М. Л., Методы расчета электростатических полей. Москва. 1963. Государственное издательство "Высшая школа". 412 стр.
- [9] М. Abramowitz, I. Stegun, Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. Washington D.C. 1972. Courier Corporation. 1030 стр.
- [10] А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. Уравнения математической физики. Москва. 1977. Наука. 735 стр.
- [11] И.С. Градштейн, И. М. Рыжик Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва. 1963. Государственное издательство физико-математической литературы. 1108 стр.

- [12] Виноградова Е. М., Доронин Г. Г., Егоров Н. В. Математическое моделирование двумерной диодной системы с полевым эмиттером лезвийной формы // Журнал технической физики. 2020. Т. 90. вып. 4. С. 540-543.
- [13] Виноградова Е. М., Доронин Г. Г. Математическое моделирование двумерной периодической системы полевых эмиттеров // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. № 2. С. 121–128.
- [14] Vinogradova E. M., Doronin G. G., Egorov N. V. Mathematical Simulation of a 2D Diode System with a Blade-Shaped Field Emitter // Technical Physics . 2020. 65(4), с. 514-517.
- [15] Виноградова Е. М., Доронин Г. Г. Моделирование полевого эмиттера в двумерной диодной системе с диэлектрическими слоями // Процессы управления и устойчивость. 2020. Т. 7. № 1. С. 90-93.
- [16] Виноградова Е. М., Доронин Г. Г. Моделирование диодной полевой эмиссионной системы с диэлектрической простойкой // Процессы управления и устойчивость (Международная конференция). 2019. Т. 6. № 1. С. 73-77. ISSN: 2313-7304.
- [17] Vinogradova E. M., Egorov, N. V., Doronin G. G. The sharp-edged field cathode mathematical modeling // Статья в сборнике трудов конференции 2016 14th International Baltic Conference on Atomic Layer Deposition, BALD 2016 - Proceedings 24 March 2017, Article number 7886541, Pages 68-70.
- [18] Vinogradova E. M., Doronin G. G. The arbitrarily shaped field emitter mathematical modeling Статья в сборнике трудов конференции // 2016 Young Researchers in Vacuum Micro/Nano Electronics, VMNE-YR 2016 - Proceedings 16 March 2017, Article number 7880402.
- [19] Vinogradova E. M., Doronin G. G. Mathematical modeling of two-dimensional periodic system of field emitters // Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta, Prikladnaya Matematika, Informatika, Protsessy Upravleniya. 2020. 16(2), с. 121-128.