# ОТЗЫВ

о выпускной квалификационной работе Зайковского А. А.
“Гомологические свойства некоторых алгебраических структур”

Гомологическая алгебра, возникшая первоначально как некий “инструментарий” для исследования “живых” математических объектов (например, в топологии), с течением времени превратилась в своеобразный симбиоз весьма мощных технических средств и огромной массы “объектов”, имеющих гомологическую природу и в свою очередь подлежащих теоретическому исследованию.

Рецензируемая работа – хорошая иллюстрация к такому положению дел. В трёх различных задачах изучаются (ко)гомологические объекты, сопоставляемые тем или иным алгебраическим структурам.

В первой задаче вычисляются группы когомологий Хохшильда для одной из серий алгебр полудиэдрального типа с двумя простыми модулями. Такие алгебры возникли в работах К. Эрдман в процессе классификации групповых блоков, имеющих ручной тип представления. Для алгебр изучаемой серии строится минимальная бимодульная проективная резольвента. Построение таких резольвент – это обычно довольно сложная “комбинаторно–алгебраическая” задача, и А. Зайковский с ней блестяще справился. Затем эта резольвента используется для вычисления размерностей групп когомологий Хохшильда. Наконец, это вычисление групп когомологий, интересное само по себе, используется для уточнения описания классов производной эквивалентности для алгебр из классификации К.Эрдман.

Во второй задаче исследуется алгебра гомологий абелевой группы $\mathrm{H}_*(A, \mathbb{F}_p)$ (со стандартной структурой алгебры Хопфа). В случае $p \neq 2$ структура этой алгебры полностью “контролируется” (ввиду теоремы А. Картана) парой векторных пространств, сопоставляемых абелевой группе $A$: $A/pA$ и ${}_pA := \{a \in A \mid pa = 0\}$. При $p = 2$ ситуация оказывается более сложной. В работе приводится строгое обоснование того, что такой “контроль” при $p = 2$ невозможен. Но еще более ценно то, что с помощью присоединения к указанным векторным пространствам некоторого отображения, действующего между ними, уже удаётся по такой тройке “данных” восстановить алгебру $\mathrm{H}_*(A, \mathbb{F}_2)$. Это описание алгебры $\mathrm{H}_*(A, \mathbb{F}_2)$ приводит также к соответствующему описанию групп гомологий $\mathrm{H}_n(A, \mathbb{F}_2)$, которое формулируется с помощью введения некоторой фильтрации на группах гомологий. На самом деле, эти результаты выводятся (с помощью стандартной двойственности) из предварительно получаемых результатов об алгебре когомологий $\mathrm{H}^*(A, \mathbb{F}_2)$ для конечно порождённых абелевых групп $A$.

Третья задача связана с исследованием гомологий так называемых парасвободных алгебр Ли, определяемых по аналогии с парасвободными группами. Для гомологий таких алгебр Ли возникают вопросы, аналогичными проблемам, связанным с гомологиями парасвободных групп (некоторые из этих проблем до сих пор остаются открытыми). В работе строится пример счётной парасвободной алгебры Ли с ненулевой второй группой гомологий, а также пример парасвободной алгебры Ли когомологической размерности большей 2. Ценность таких примеров, в частности, в том, что это позволяет уточнять ранее сформулированные гипотезы. Кроме того, возможно какое-то “перенесение” подобных примеров на “территорию” парасвободных групп.

Отдельного упоминания заслуживает широкая эрудиция автора работы. Также надо отметить, что все основные результаты работы уже опубликованы.

Таким образом, результаты рецензируемой работы являются новым вкладом в те разделы гомологической алгебры и её приложений, которым она посвящена.

Считаю, что выпускная квалификационная работа А. А. Зайковского заслуживает оценки “отлично”.

Научный руководитель,<br>
профессор (А. И. Генералов)

11 июня 2021 г.