Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра высшей алгебры и теории чисел

Зайковский Анатолий Александрович

Гомологические свойства некоторых алгебраических структур

Выпускная квалификационная работа

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор Генералов А. И.

Рецензент:
к. ф.-м. н. Косовская Н. Ю.

Санкт-Петербург
2021

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY
Faculty of Mathematics and Mechanics
Department of Algebra and Number Theory

Anatolii Zaikovskii

On homological properties of some algebraic structures

Postgraduate dissertation

Scientific supervisor:
Dr. of Phys. and Math., Prof. Alexander Generalov

Reviewer:
Mathematics PhD. Nadezhda Kosovskaya

Saint-Petersburg
2021

Содержание

1. Введение

Группы (ко)гомологий были изначально введены в алгебраической топологии как инвариант пространства, в некотором алгебраическом смысле описывающем его дыры. Дальнейшее изучение этих инвариантов и методов их вычисления позволили определить подобные инварианты для различных алгебраических структур. Большинство групп или модулей гомологий можно определить как производные функторы на соответствующих абелевых категориях, измеряющие насколько далек функтор от того, чтобы быть точным. Младшие группы (ко)гомологий обычно имеют интуитивно понятный смысл, описывающий свойства соответствующего объекта в терминах самого объекта. Однако единого понимания этого инварианта для различных структур не существует, более того для большинства структур нет интуитивной интерпретации для старших гомологий. Несмотря на то, что гомологии часто описывают какие-то внутренние и очень абстрактные свойства объекта, они бывают очень информативными. В работе приводятся примеры вычисления групп (ко)гомологий для различных структур, а также некоторые применения результатов этих вычислений. Текст разделен на три главы, в каждой из которой рассматривается своя алгебраическая структура и соответствующая теория (ко)гомологий: первая глава посвящена группам когомологий Хохшильда серии ассоциативных алгебр ручного типа представления , вторая — гомологиям классифицирующих пространств абелевых групп с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, а в последней изучаются гомологии алгебр Ли.

Все результаты предоставленной работы опубликованы в 2016–2020 годах в [53], [54], [55], [56].

2. Когомологии Хохшильда алгебр серии $SD(2\mathcal{B})_1$

Алгебры полудиэдрального типа, введенные К. Эрдманн в работах [20], [21], являются естественным обобщением групповых блоков с полудиэдральной дефектной группой. Они, наряду с алгебрами диэдрального и кватернионного типов, возникли при классификации блоков групповых алгебр над алгебраически замкнутыми полями, имеющих ручной тип представления. Производной эквивалентностью алгебр называется эквивалентность производных категорий как триангулированных категорий, построенных по категориям ограниченных комплексов модулей над этими алгебрами. Производная эквивалентность конечномерных алгебр тесно связана с теорией представлений и с теорией наклонений, и сохраняет многие интересные свойства исходных алгебр([39], [25], [26], [27], [16], [1]). Одним из важных инвариантов производной эквивалентности является $\mathbb{Z}$-градуированная алгебра когомологий Хохшильда, которая, в частности, включает в себя центр алгебры в качестве нулевого члена. Вычисление центра алгебры и размерностей групп когомологий Хохшильда уже использовалось ранее в [30], [31] для вывода того, что алгебры не являются производно эквивалентными. Алгебра когомологий Хохшильда может быть интересна и сама по себе, так как несет в себе много информации об исходной алгебре. В [30] была представлена классификация алгебр полудиэдрального типа с точностью до производной эквивалентности. В частности было показано, что любая алгебра полудиэдрального типа над алгебраически замкнутым полем имеющая два простых модуля производно эквивалентна алгебре из серии $SD(2\mathcal{B})_1$ или из серии $SD(2\mathcal{B})_2$. Тем не менее остался открытым вопрос, могут ли алгебры из первой и второй серии быть производно эквивалентными. В работах [49], [50], [51], [52] были вычислены размерности групп когомологий для второй из этих двух серий(см. в частности таблицу 2). В данной главе исследуется первая серия, а именно строятся минимальные бимодульные проективные резольвенты для алгебр серии $SD(2\mathcal{B})_1$ и с их помощью вычисляются размерности групп когомологий Хохшильда этих алгебр.

Алгебры $SD(2\mathcal{B})_1(k,s,c)$ над алгебраически замкнутым полем K произвольной характеристики p определяются как алгебры путей колчана с соотношениями:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, shift left, "\beta"] & 1 \arrow[l, shift left, "\gamma"] \arrow[loop right, "\eta"] \end{tikzcd}$$

$$\left.\begin{array}{c} \beta\gamma = \gamma\eta = \eta\beta = 0, \quad \alpha^2 = \gamma\beta(\alpha\gamma\beta)^{k-1} + c(\alpha\gamma\beta)^k, \\ \eta^s = (\beta\alpha\gamma)^k, \quad (\gamma\beta\alpha)^k = (\alpha\gamma\beta)^k, \end{array}\right\}$$

где $k \geqslant 1, s \geqslant 2, c \in \mathrm{K}$ (композицию путей записываем справа налево).

Основной результат данной главы — это следующее описание групп когомологий Хохшильда $HH^n(R)$ для алгебр из серии $SD(2\mathcal{B})_1$.

Теорема 2.1. *Пусть $R = SD(2\mathcal{B})_1(k,s,c)$, где $k \geqslant 1$, $s \geqslant 2$, $c \in \mathrm{K}$, $p = \mathrm{char}\,\mathrm{K}$. Тогда размерности групп когомологий $\dim_{\mathrm{K}} \mathrm{HH}^n(R)$ для $n \leqslant 4$ соответствуют таблице 1.*

Замечание 2.2. *Сравнение размерностей младших групп когомологий Хохшильда алгебр серий $SD(2\mathcal{B})_1$ (вычисленных в [49], [50], [51], [52], см. таблицу 2) и $SD(2\mathcal{B})_2$, показывает что алгебры из первой серии не могут быть производно эквивалентны алгебрам из второй серии, имеющим те же параметры.*

Теорема 2.3. *Пусть $R = SD(2\mathcal{B})_1(k,s,c)$, где $k \geqslant 1$, $s \geqslant 2$, и $c \in \mathrm{K}$.*

(I) *Пусть $\mathrm{char}\,\mathrm{K} = 2$, тогда для любого $n \geqslant 5$*

$$\dim_{\mathrm{K}} \mathrm{HH}^n(R) - \dim_{\mathrm{K}} \mathrm{HH}^{n-4}(R) = \begin{cases} 2, & n \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 3), \\ 3, & n \not\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 3). \end{cases}$$

Таблица 1. Размерности младших групп когомологий Хохшильда алгебр $R = SD(2\mathcal{B})_1(k,s,c)$.

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="5">$\dim_{\mathrm{K}} \mathrm{HH}^n(R)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">n</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$p=2$</td><td>$k \equiv s \equiv 0 \pmod 2$</td><td rowspan="3">$k+s+2$</td><td colspan="3">$k+s+3$</td><td>$k+s+4$</td></tr>
<tr><td>$c \neq 0,\ k \equiv s \equiv 1 \pmod 2$</td><td colspan="2">$k+s+1$</td><td>$k+s+2$</td><td rowspan="2">$k+s+3$</td></tr>
<tr><td>в остальных случаях</td><td colspan="3">$k+s+2$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$p=3$</td><td>$k \equiv s \equiv 0 \pmod 3$</td><td rowspan="3">$k+s+2$</td><td colspan="4">$k+s+2$</td></tr>
<tr><td>$k \cdot s \not\equiv 0 \pmod 3$</td><td colspan="4">$k+s$</td></tr>
<tr><td>в остальных случаях</td><td colspan="4">$k+s+1$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$p \neq 2,3$</td><td>$k \equiv s \equiv 0 \pmod p$</td><td rowspan="3">$k+s+2$</td><td colspan="2">$k+s+1$</td><td colspan="2">$k+s+2$</td></tr>
<tr><td>$k \cdot s \not\equiv 0 \pmod p$</td><td colspan="4">$k+s$</td></tr>
<tr><td>в остальных случаях</td><td colspan="2">$k+s$</td><td colspan="2">$k+s+1$</td></tr>
</table>

Таблица 2. Размерности младших групп когомологий Хохшильда алгебр $R = SD(2\mathcal{B})_1(k,t,c)$.

<table>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="5">$\dim_{\mathrm{K}} \mathrm{HH}^n(R)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">n</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="7">$p=2$</td><td rowspan="4">$c=0$</td><td>$k \equiv t \equiv 0 \pmod 2$</td><td rowspan="4">$k+t+2$</td><td>$k+t+3$</td><td>$k+t+4$</td><td>$k+t+7$</td><td>$k+t+10$</td></tr>
<tr><td>$k=1, t \equiv 0 \pmod 2$</td><td colspan="2">$k+t$</td><td rowspan="2">$k+t+4$</td><td rowspan="2">$k+t+6$</td></tr>
<tr><td>$k=1, t \equiv 1 \pmod 2$</td><td colspan="2">$k+t+2$</td></tr>
<tr><td>в остальных случаях</td><td>$k+t+2$</td><td>$k+t+3$</td><td>$k+t+6$</td><td>$k+t+9$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$c \neq 0$</td><td>$k \equiv t \equiv 0 \pmod 2$</td><td rowspan="3">$k+t+2$</td><td colspan="2">$k+t+2$</td><td>$k+t+3$</td><td>$k+t+4$</td></tr>
<tr><td>$k \equiv t \equiv 1 \pmod 2$</td><td colspan="2">$k+t$</td><td rowspan="2">$k+t+2$</td><td rowspan="2">$k+t+3$</td></tr>
<tr><td>в остальных случаях</td><td colspan="2">$k+t+1$</td></tr>
<tr><td rowspan="3" colspan="2">$p \neq 2$</td><td>$k \equiv t \equiv 0 \pmod p$</td><td rowspan="3">$k+t+2$</td><td colspan="2">$k+t+2$</td><td>$k+t+3$</td><td>$k+t+4$</td></tr>
<tr><td>$k \cdot t \not\equiv 0 \pmod p$</td><td colspan="2">$k+t$</td><td rowspan="2">$k+t+2$</td><td rowspan="2">$k+t+3$</td></tr>
<tr><td>в остальных случаях</td><td colspan="2">$k+t+1$</td></tr>
</table>

(II) *Пусть* $\operatorname{char} \mathrm{K} \neq 2$, *тогда для любого* $n \geqslant 5$

$$\dim_{\mathrm{K}} \mathrm{HH}^n(R) - \dim_{\mathrm{K}} \mathrm{HH}^{n-4}(R) = \begin{cases} 1, & n \equiv 1 \pmod 6 \ \text{\textit{или}}\ n \equiv 3 \pmod 6, \\ 2, & n \equiv 2 \pmod 3, \\ 0, & \text{\textit{в остальных случаях.}} \end{cases}$$

Следствие 2.4. *Пусть* $R = SD(2\mathcal{B})_1(k,s,c)$, *где* $k \geqslant 1$, $s \geqslant 2$, *и* $c \in \mathrm{K}$. *Тогда для любого* $n \geqslant 13$

$$\dim_{\mathrm{K}} \mathrm{HH}^n(R) - \dim_{\mathrm{K}} \mathrm{HH}^{n-12}(R) = \begin{cases} 8, & p = 2, \\ 2, & p \neq 2. \end{cases}$$

Заметим, что теоремы 2.1 и 2.3 вместе дают описание размерностей всех групп когомологий $\mathrm{HH}^n(R)$.

2.1. **Построение резольвенты.** Пусть $R = SD(2\mathcal{B})_1(k,s,c)$, и пусть $\Lambda = R \otimes R^{\mathrm{op}}$ — обертывающая алгебра алгебры R. Через $e_i, i \in \{0,1\}$, обозначим идемпотенты алгебры R, соответствующие вершинам колчана. Тогда Λ-модули

$$P_{ij} = \Lambda(e_i \otimes e_j), \quad i,j \in \{0,1\},$$

составляют полное множество представителей главных неразложимых левых Λ-модулей.

Умножение справа на элемент $\omega \in \Lambda$ индуцирует эндоморфизм ω^* левого Λ-модуля Λ. Кроме того, если $\omega \in (e_i \otimes e_j)\Lambda(e_k \otimes e_l)$, то ω^* индуцирует гомоморфизм $\omega^* : P_{ij} \to P_{kl}$. В дальнейшем, ради простоты, гомоморфизм ω^* будем обозначать просто через ω.

Определим комплекс $Q_\bullet$ следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_0 &:= P_{00} \oplus P_{11} \\ Q_1 &:= P_{00} \oplus P_{11} \oplus P_{01} \oplus P_{10} \\ Q_2 &:= P_{00} \oplus P_{11}^2 \oplus P_{10} \oplus P_{01} \\ Q_3 &:= P_{11} \oplus P_{01} \oplus P_{10} \oplus P_{00} \oplus P_{11}^2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

и далее по индукции для $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} Q_{3n+1} &:= Q_{3n-3} \oplus P_{11} \oplus P_{10} \oplus P_{01} \oplus P_{11} \oplus P_{01} \oplus P_{10} \\ Q_{3n+2} &:= Q_{3n-2} \oplus P_{00} \oplus P_{11}^3 \oplus P_{10} \oplus P_{01} \\ Q_{3n+3} &:= Q_{3n-1} \oplus P_{11} \oplus P_{01} \oplus P_{10} \oplus P_{00} \oplus P_{11}^2 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Для определения дифференциалов введем вспомогательные матрицы:

$$L_0 = \begin{pmatrix} 0 & \eta^{s-1} \otimes e_1 & -e_1 \otimes \eta^{s-1} \\ e_0 \otimes g^{k-1}\beta\alpha & 0 & g^{k-1}\beta\alpha \otimes e_1 \\ \alpha\gamma g^{k-1} \otimes e_0 & -e_1 \otimes \alpha\gamma g^{k-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\gamma g^{k-1} \otimes e_1 & e_1 \otimes g^{k-1}\beta\alpha \\ e_1 \otimes \alpha\gamma g^{k-1} & 0 & \eta^{s-1} \otimes e_0 \\ g^{k-1}\beta\alpha \otimes e_1 & e_0 \otimes \eta^{s-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0 & g^{k-1}\beta\alpha \otimes e_0 & -e_0 \otimes \alpha\gamma g^{k-1} \\ -e_1 \otimes \eta^{s-1} & 0 & \alpha\gamma g^{k-1} \otimes e_1 \\ \eta^{s-1} \otimes e_1 & e_1 \otimes g^{k-1}\beta\alpha & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_3 = \begin{pmatrix} 0 & \eta^{s-1} \otimes e_1 & e_1 \otimes \eta^{s-1} \\ e_0 \otimes g^{k-1}\beta\alpha & 0 & g^{k-1}\beta\alpha \otimes e_1 \\ \alpha\gamma g^{k-1} \otimes e_0 & e_1 \otimes \alpha\gamma g^{k-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_4 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\gamma g^{k-1} \otimes e_1 & e_1 \otimes g^{k-1}\beta\alpha \\ -e_1 \otimes \alpha\gamma g^{k-1} & 0 & \eta^{s-1} \otimes e_0 \\ g^{k-1}\beta\alpha \otimes e_1 & -e_0 \otimes \eta^{s-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_5 = \begin{pmatrix} 0 & g^{k-1}\beta\alpha \otimes e_0 & e_0 \otimes \alpha\gamma g^{k-1} \\ e_1 \otimes \eta^{s-1} & 0 & \alpha\gamma g^{k-1} \otimes e_1 \\ \eta^{s-1} \otimes e_1 & e_1 \otimes g^{k-1}\beta\alpha & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 & g^{k-1}\beta\alpha \otimes e_0 & -e_0 \otimes \alpha\gamma g^{k-1} \\ -e_1 \otimes \eta^{s-1} & 0 & \alpha\gamma g^{k-1} \otimes e_1 \\ \eta^{s-1} \otimes e_1 & -e_1 \otimes g^{k-1}\beta\alpha & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & \eta^{s-1} \otimes e_1 & e_1 \otimes \eta^{s-1} \\ -e_0 \otimes g^{k-1}\beta\alpha & 0 & g^{k-1}\beta\alpha \otimes e_1 \\ \alpha\gamma g^{k-1} \otimes e_0 & e_1 \otimes \alpha\gamma g^{k-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\gamma g^{k-1} \otimes e_1 & -e_1 \otimes g^{k-1}\beta\alpha \\ -e_1 \otimes \alpha\gamma g^{k-1} & 0 & \eta^{s-1} \otimes e_0 \\ g^{k-1}\beta\alpha \otimes e_1 & -e_0 \otimes \eta^{s-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_3 = \begin{pmatrix} 0 & g^{k-1}\beta\alpha \otimes e_0 & e_0 \otimes \alpha\gamma g^{k-1} \\ e_1 \otimes \eta^{s-1} & 0 & \alpha\gamma g^{k-1} \otimes e_1 \\ \eta^{s-1} \otimes e_1 & -e_1 \otimes g^{k-1}\beta\alpha & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_4 = \begin{pmatrix} 0 & \eta^{s-1} \otimes e_1 & -e_1 \otimes \eta^{s-1} \\ -e_0 \otimes g^{k-1}\beta\alpha & 0 & g^{k-1}\beta\alpha \otimes e_1 \\ \alpha\gamma g^{k-1} \otimes e_0 & -e_1 \otimes \alpha\gamma g^{k-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_5 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\gamma g^{k-1} \otimes e_1 & -e_1 \otimes g^{k-1}\beta\alpha \\ e_1 \otimes \alpha\gamma g^{k-1} & 0 & \eta^{s-1} \otimes e_0 \\ g^{k-1}\beta\alpha \otimes e_1 & e_0 \otimes \eta^{s-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_0 = \begin{pmatrix} 0 & -e_0 \otimes \gamma & \beta \otimes e_0 \\ -\eta \otimes e_1 & 0 & -e_1 \otimes \beta \\ e_1 \otimes \eta & \gamma \otimes e_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \begin{pmatrix} 0 & e_1 \otimes \beta & \gamma \otimes e_1 \\ -\beta \otimes e_1 & 0 & -e_0 \otimes \eta \\ -e_1 \otimes \gamma & -\eta \otimes e_0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & e_1 \otimes \eta & \eta \otimes e_1 \\ \gamma \otimes e_0 & 0 & -e_1 \otimes \gamma \\ -e_0 \otimes \beta & -\beta \otimes e_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_3 = \begin{pmatrix} 0 & -e_0 \otimes \gamma & -\beta \otimes e_0 \\ \eta \otimes e_1 & 0 & e_1 \otimes \beta \\ -e_1 \otimes \eta & -\gamma \otimes e_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_4 = \begin{pmatrix} 0 & -e_1 \otimes \beta & -\gamma \otimes e_1 \\ \beta \otimes e_1 & 0 & e_0 \otimes \eta \\ -e_1 \otimes \gamma & \eta \otimes e_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_5 = \begin{pmatrix} 0 & -e_1 \otimes \eta & -\eta \otimes e_1 \\ -\gamma \otimes e_0 & 0 & -e_1 \otimes \gamma \\ e_0 \otimes \beta & \beta \otimes e_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Замечание 2.5. *Отметим, что если* $\operatorname{char} \mathrm{K} = 2$, *то* $R_i = R_{i+3}$, $D_i = D_{i+3}$, *а также* $D_i = L_{i+2}$, *где индексы* i *рассматриваются по модулю* 6.

Рассмотрим гомоморфизмы $d_i \in \mathrm{Hom}(Q_{i+1}, Q_i), 0 \leqslant i \leqslant 4$, определяемые матрицами:

$$d_0 = \begin{pmatrix} \alpha\otimes e_0 - e_0\otimes\alpha & 0 & -e_0\otimes\gamma & \beta\otimes e_0 \\ 0 & e_1\otimes\eta-\eta\otimes e_1 & \gamma\otimes e_1 & -e_1\otimes\beta \end{pmatrix},$$

$$d_1 = \left(\begin{array}{cc|c} A_{11} & \sum\limits_{i=0}^{k-1} g^i\beta\otimes\gamma g^{k-i-1} & \mathrm{O} \\ \hline 0 & \sum\limits_{i=0}^{s-1} \eta^i\otimes\eta^{s-i-1} & \\ A_{31} & \sum\limits_{i=0}^{k-1} g^i\beta\alpha\otimes g^{k-i-1} & R_1 \\ A_{41} & \sum\limits_{i=0}^{k-1} g^i\otimes\alpha\gamma g^{k-i-1} & \end{array}\right),$$

где

$$A_{11} = -\alpha\otimes e_0 - e_0\otimes\alpha + \sum_{j=0}^{k-2} a^j\gamma\beta\otimes\gamma\beta b^{k-j-2} + c\sum_{i=0}^{k-1} b^i\otimes\gamma\beta b^{k-i-1},$$
$$A_{31} = \sum_{i=0}^{k-1} a^i\otimes\beta b^{k-i-1} + c\sum_{i=0}^{k-1} b^i\alpha\otimes\beta b^{k-i-1},$$
$$A_{41} = \sum_{i=0}^{k-1} a^i\gamma\otimes b^{k-i-1} + c\sum_{i=0}^{k-1} b^i\alpha\gamma\otimes b^{k-i-1},$$

$$d_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & B_{12} & B_{13} & \mathrm{O} \\ e_1\otimes\eta-\eta\otimes e_1 & \gamma\otimes e_1 & -e_1\otimes\beta & \\ \hline \multicolumn{3}{c|}{D_2} & R_2 \end{array}\right),$$

где

$$B_{12} = \alpha\otimes\gamma - e_0\otimes\alpha\gamma + c\alpha\otimes\alpha\gamma - c\alpha^2\otimes\gamma - c^2\alpha^2\otimes\alpha\gamma + c^2\alpha^3\otimes\gamma + c^3\alpha^3\otimes\alpha\gamma,$$
$$B_{13} = \beta\alpha\otimes e_0 - \beta\otimes\alpha + c\beta\alpha\otimes\alpha,$$

$$d_3 = \left(\begin{array}{cc|c|c} 0 & \sum\limits_{i=0}^{s-1} \eta^i\otimes\eta^{s-i-1} & -R_4 & \mathrm{O} \\ C_{21} & \sum\limits_{i=0}^{k-1} g^i\beta\alpha\otimes g^{k-i-1} & & \\ C_{31} & \sum\limits_{i=0}^{k-1} g^i\otimes\alpha\gamma g^j & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\mathrm{O}} & D_3 & R_3 \end{array}\right),$$

где

$$C_{21} = \sum_{i=0}^{k-1} b^i\alpha\otimes\beta b^{k-i-1} + \sum_{i=0}^{k-1} a^i\otimes g^{k-i-1}\beta\alpha,$$
$$C_{31} = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha\gamma g^i\otimes b^{k-i-1} + \sum_{i=0}^{k-1} a^i\gamma\otimes\alpha a^{k-i-1} - ca^{k-1}\gamma\otimes\alpha^2 + c^2a^{k-1}\gamma\otimes\alpha^3,$$

$$d_4=\left(\begin{array}{cc|c|c} \multicolumn{2}{c|}{d_0} & \mathrm{O} & \mathrm{O} \\ \hline \begin{matrix} E_{31} \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & L_4 & -R_5 & \mathrm{O} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\mathrm{O}} & D_4 & R_4 \end{array}\right),$$

где

$$E_{31}=a^{k-1}\gamma\otimes\beta b^{k-1}++c\alpha a^{k-1}\gamma\otimes\beta b^{k-1}$$

Наконец, для $n\geqslant 5$ определим дифференциалы по индукции следующим образом:

$$d_n=\left(\begin{array}{c|c|c|c} \multicolumn{2}{c|}{d_{n-4}} & \mathrm{O} & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & L_n & -R_{n+1} & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{O} & D_n & R_n \end{array}\right).$$

Рассмотрим также пополняющее отображение $\mu: Q_0=P_{00}\oplus P_{11}\to R$, индуцированное умножением в R: $\mu(r\otimes s)=rs$.

Теорема 2.6. *Пусть $R=SD(2\mathcal{B})(k,s,c)$, где $k\geqslant 1$, $s\geqslant 2$, $c\in\mathrm{K}$. Тогда построенная выше последовательность $Q_\bullet=(Q_n,d_n)_{n\geqslant 0}$ вместе с пополняющим отображением $\mu: Q_0\to R$ является минимальной Λ-проективной резольвентой алгебры R.*

Доказательство. Прямыми вычислениями проверяется, что $(Q_n,d_n)_{n\geqslant 0}$ — является комплексом, а также, что $\mu\cdot d_0=0$. Для доказательства ацикличности полученного комплекса воспользуемся [47, теорема 1]. Нам достаточно доказать, что после тензорного умножения комплекса $\mu: Q_\bullet\to R$ на каждый простой R-модуль S_i получаются соответствующие минимальные проективные резольвенты модулей S_i, описанные в [46]. Это также проверяется прямыми проверками. □

2.2. **Младшие группы когомологий.** Пусть по-прежнему $R=SD(2\mathcal{B})(k,s,c)$. Для вычисления когомологий $\mathrm{HH}^n(R)$ будем использовать комплекс

$$\left(Hom_\Lambda(Q_n,R),\quad \delta^n=Hom_\Lambda(d_n^Q,R)\right)_{n\geqslant 0},$$

полученный применением функтора $Hom_\Lambda(-,R)$ к построенной выше бимодульной резольвенте $\mu: Q_\bullet\to R$. Как и в [49], любой Λ-гомоморфизм $f: Q_n\to R$ отождествляется с набором своих значений на соответствующих образующих $e_i\otimes e_j$ тех $P_{ij}=\Lambda\cdot(e_i\otimes e_j)$, которые входят в разложение модуля Q_n; при этом $f(e_i\otimes e_j)\in e_iRe_j$.

Стандартным базисом алгебры R будем называть множество

$$\mathcal{B}=\mathcal{B}_{00}\cup\mathcal{B}_{01}\cup\mathcal{B}_{11}\cup\mathcal{B}_{10},$$

где

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{00}&=\left\{a^{i+1},\ b^i,\ \alpha a^i,\ \gamma\beta b^i\mid 0\leqslant i\leqslant k-1\right\},\\
\mathcal{B}_{01}&=\left\{\gamma g^i,\ \alpha\gamma g^i\mid 0\leqslant i\leqslant k-1\right\},\\
\mathcal{B}_{11}&=\left\{\eta^t\mid 1\leqslant t\leqslant s\right\}\cup\left\{g^i\mid 0\leqslant i\leqslant k-1\right\},\\
\mathcal{B}_{10}&=\left\{\beta b^i,\ \beta\alpha a^i\mid 0\leqslant i\leqslant k-1\right\}.
\end{aligned}$$

Предложение 2.7. $\dim_{\mathrm{K}} \mathrm{HH}^0(R) = k+s+2$, $\dim_{\mathrm{K}} \mathrm{Im}\,\delta^0 = 4k-2$.

Доказательство. Посмотрев на образ стандартного базиса $e_0Re_0 \bigoplus e_1Re_1$ получаем порождающее множество образа δ^0, из которого, убирая линейно зависимые элементы, получаем базис $\mathrm{Im}\,\delta^0$:

$$\begin{aligned}
&(\alpha a^i, \mathrm{O}_2, -\beta b^i) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_2, \gamma g^i, -\beta b^i) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(b^i - a^i, \mathrm{O}_3) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_2, -\alpha\gamma g^i, \beta\alpha a^i) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1.
\end{aligned}$$

Используя соотношение $\dim_{\mathrm{K}} \mathsf{Ker}\,\delta^i = \dim_{\mathrm{K}} \mathit{Hom}_\Lambda(Q_i, R) - \dim_{\mathrm{K}} \mathrm{Im}\,\delta^i$, получаем

$$\dim_{\mathrm{K}} \mathrm{HH}^0(R) = \dim_{\mathrm{K}} \mathsf{Ker}\,\delta^0 = k+s+2.$$

□

Замечание 2.8. *Пространство $\mathsf{Ker}\,\delta^0$ является нулевой группой когомологий и центром алгебры, и допускает в качестве базиса множество*

$$\{a^i + b^i + g^i \mid 1 \leqslant i \leqslant k-1\} \cup \{\eta^i \mid 1 \leqslant i \leqslant s\} \cup \{1, \gamma\beta b^{k-1}, a^k\}.$$

Дифференциал

$$\delta^1 : \mathit{Hom}_\Lambda(Q_1, R) \to \mathit{Hom}_\Lambda(Q_2, R)$$

описывается следующим образом: для $r_{ij} \in e_iRe_j,\ i,j \in \{0,1\}$, выполнено

$$\delta^1(r_{00}, r_{11}, r_{01}, r_{10}) = (s_{00}, s_{11}, t_{11}, t_{10}, t_{01}),$$

где

$$\begin{aligned}
s_{00} =& -\alpha r_{00} - r_{00}\alpha + \sum_{u=0}^{k-2} a^u\gamma\beta r_{00}\gamma\beta b^{k-u-2} + \sum_{i=0}^{k-1} a^i r_{01}\beta b^{k-i-1} + \sum_{i=0}^{k-1} a^i\gamma r_{10} b^{k-i-1} + \\
&+ c\cdot\left(\sum_{i=0}^{k-1} b^i r_{00}\gamma\beta b^{k-i-1} + \sum_{i=0}^{k-1} b^i\alpha r_{01}\beta b^{k-i-1} + \sum_{i=0}^{k-1} b^i\alpha\gamma r_{10} b^{k-i-1}\right),\\
s_{11} =& \sum_{i=0}^{k-1} g^i\beta r_{00}\gamma g^{k-i-1} + \sum_{i=0}^{s-1} \eta^i r_{11}\eta^{s-i-1} + \sum_{i=0}^{k-1} g^i\beta\alpha r_{01} g^{k-i-1} + \sum_{i=0}^{k-1} g^i r_{10}\alpha\gamma g^{k-i-1},\\
t_{11} =& -\beta r_{01} - r_{10}\gamma,\\
t_{10} =& r_{11}\beta - \eta r_{10},\\
t_{01} =& \gamma r_{11} - r_{01}\eta.
\end{aligned}$$

Предложение 2.9. (1) *Пусть $p = 2$, тогда*

$$\dim_{\mathrm{K}} \mathrm{Im}\,\delta^1 = \begin{cases} 4k-1, & \text{если } k,\ s \text{ четные},\\ 4k+1, & \text{если } c \neq 0,\ k,\ s \text{ нечетные},\\ 4k, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

(2) *Пусть* $p = 3$, *тогда*

$$\dim_{\mathrm{K}} \operatorname{Im} \delta^1 = \begin{cases} 4k, & \text{если } k,\ s \text{ делятся на } 3, \\ 4k+2, & \text{если } k,\ s \text{ не делятся на } 3, \\ 4k+1, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(3) *Пусть* $p \neq 2$ *и* $p \neq 3$, *тогда*

$$\dim_{\mathrm{K}} \operatorname{Im} \delta^1 = \begin{cases} 4k+1, & \text{если } k,\ s \text{ делятся на } p, \\ 4k+2, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. Применив δ^1 к базису $Hom_\Lambda(Q_1, R)$, получаем порождающее множество для образа δ^1 :

$$\begin{aligned} &(\alpha a^i, \mathrm{O}_4) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1; \\ &(\mathrm{O}_3, \beta b^i, \gamma g^i) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1; \\ &(a^i + b^i, \mathrm{O}_4) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k; \\ &(\mathrm{O}_2, g^i, \mathrm{O}_2) \text{ для } 2 \leqslant i \leqslant k; \\ &(0, s\eta^{s-1}, 0, \beta, \gamma),\ (a^k, 0, -\beta\alpha\gamma, \mathrm{O}_2), \\ &(3\gamma\beta b^{k-1}, \mathrm{O}_4)\ (-2\alpha + c\gamma\beta b^{k-1}, \mathrm{O}_4), \\ &(0, s\eta^s, \mathrm{O}_3),\ (k\alpha^2, kg^k, \mathrm{O}_3). \end{aligned}$$

Выбирая максимальные линейно независимые подмножества, получаем заявленные размерности $\operatorname{Im} \delta^1$. □

Следствие 2.10. (1) *Пусть* $p = 2$, *тогда:*

$$\dim_{\mathrm{K}} \mathsf{Ker}\, \delta^1 = \begin{cases} 5k+s+1, & \text{если } k,\ s \text{ четные}, \\ 5k+s-1, & \text{если } c \neq 0,\ k,\ s \text{ нечетные}, \\ 5k+s, & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$\dim_{\mathrm{K}} \mathrm{HH}^1(R) = \begin{cases} k+s+3, & \text{если } k,\ s \text{ четные}, \\ k+s+1, & \text{если } c \neq 0,\ k,\ s \text{ нечетные}, \\ k+s+2, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(2) *Пусть* $p = 3$, *тогда:*

$$\dim_{\mathrm{K}} \mathsf{Ker}\, \delta^1 = \begin{cases} 5k+s, & \text{если } k,\ s \text{ делятся на } 3, \\ 5k+s-2, & \text{если } k,\ s \text{ не делятся на } 3, \\ 5k+s-1, & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$\dim_{\mathrm{K}} \mathrm{HH}^1(R) = \begin{cases} k+s+2, & \text{если } k,\ s \text{ делятся на } 3, \\ k+s, & \text{если } k,\ s \text{ не делятся на } 3, \\ k+s+1, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(3) *Пусть $p \neq 2$ и $p \neq 3$, тогда:*

$$\dim_{\mathrm{K}} \mathsf{Ker}\,\delta^1 = \begin{cases} 5k+s-1, & \textit{если } k,\ s \textit{ делятся на } p,\\ 5k+s-2, & \textit{в остальных случаях;}\end{cases}$$

$$\dim_{\mathrm{K}} \mathrm{HH}^1(R) = \begin{cases} k+s+1, & \textit{если } k,\ s \textit{ делятся на } p,\\ k+s, & \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Доказательство. Утверждения о размерности $\mathsf{Ker}\,\delta^1$ следуют из предложения 2.9 с учетом того, что $\dim_{\mathrm{K}} Hom_\Lambda(Q_1, R) = 9k+s$, а утверждения о размерности $\mathrm{HH}^1(R)$ получаются с помощью предложения 2.7. □

Продолжим использовать метод и опишем образы следующих дифференциалов.

Предложение 2.11. *Для любых p и c* $\dim_{\mathrm{K}} \mathrm{Im}\,\delta^2 = 5k+s-2$.

Доказательство. Посмотрев на образ базиса $Hom(Q_2, R)$ можно проверить, что пространство $\mathrm{Im}\,\delta^2$ допускает в качестве K-базиса следующее множество:

$$\begin{aligned}
&(0, \alpha\gamma g^i, \beta\alpha a^i, \mathrm{O}_3) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_3, \gamma\beta b^i, \mathrm{O}_2) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_3, b^i, g^i, 0) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k;\\
&(\mathrm{O}_3, a^i, 0, -g^i) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_4, \eta^i, \eta^i) \text{ для } 2 \leqslant i \leqslant s;\\
&(0, \gamma g^i, -\beta b^i, \mathrm{O}_3) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\eta^s, \mathrm{O}_2, -\gamma\beta, \mathrm{O}_2),\ (0, 2\alpha\gamma g^{k-1}, 0, \eta, \eta).
\end{aligned}$$

□

Следствие 2.12. *Для любых p и c* $\dim_{\mathrm{K}} \mathrm{HH}^1(R) = \dim_{\mathrm{K}} \mathrm{HH}^2(R)$.

Доказательство. Так как $\dim_{\mathrm{K}} Hom_\Lambda(Q_2, R) = 10k+2s$, то

$$\dim_{\mathrm{K}} \mathsf{Ker}\,\delta^2 = \dim_{\mathrm{K}} Hom_\Lambda(Q_2, R) - \dim_{\mathrm{K}} \mathrm{Im}\,\delta^2 = 5k+s+2.$$

С другой стороны

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathrm{K}} \mathrm{Im}\,\delta^1 &= \dim_{\mathrm{K}} Hom_\Lambda(Q_1, R) - \dim_{\mathrm{K}} \mathsf{Ker}\,\delta^1 =\\
&= \dim_{\mathrm{K}} Hom_\Lambda(Q_1, R) - \dim_{\mathrm{K}} \mathrm{HH}^1(R) - \dim_{\mathrm{K}} \mathrm{Im}\,\delta^0 =\\
&= (9k+s) - \dim_{\mathrm{K}} \mathrm{HH}^1(R) - (4k-2),
\end{aligned}$$

откуда вытекает требуемое утверждение. □

Предложение 2.13. *(1) Пусть $p = 2$. Тогда*

$$\dim_{\mathrm{K}} \mathrm{Im}\,\delta^3 = \begin{cases} 5k+s-1, & \textit{если } k,\ s \textit{ четные,}\\ 5k+s, & \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$$

(2) Пусть $p \neq 2$. Тогда

$$\dim_{\mathrm{K}} \mathrm{Im}\,\delta^3 = \begin{cases} 5k+s, & \textit{если } k,\ s \textit{ делятся на } p,\\ 5k+s+2, & \textit{если } k,\ s \textit{ не делятся на } p,\\ 5k+s+1, & \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим порождающее множество образа δ^3 :

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{O}_3, \beta b^i, \gamma g^i, \mathrm{O}_3) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_6, \gamma g^i, 0) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_7, \beta b^i) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_5, \eta^i, \mathrm{O}_2) \text{ для } 2 \leqslant i \leqslant s;\\
&(\mathrm{O}_6, \alpha\gamma g^i, \beta\alpha a^i) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_2, g^i, \mathrm{O}_5) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k;\\
&(0, s\eta^{s-1}, 0, \beta, \gamma, \mathrm{O}_3),\\
&(\mathrm{O}_2, \eta^{s-1}, 0, \alpha\gamma g^{k-1}, \eta, 0, \beta),\\
&(\mathrm{O}_2, \eta^{s-1}, -g^{k-1}\beta\alpha, 0, -\eta, -\gamma, 0),\\
&(2ka^k, kg^k, \mathrm{O}_6),\ (0, s\eta^s, \mathrm{O}_6),\ (\mathrm{O}_5, 2\eta, 2\gamma, 2\beta).
\end{aligned}$$

Выбирая максимальные линейно независимые множества для различных параметров, получаем заявленные результаты. □

Следствие 2.14. *(1) Пусть $p = 2$. Тогда:*

(a) $\dim_{\mathrm{K}} \mathsf{Ker}\,\delta^3 = \begin{cases} 6k+2s+1, & \text{если } k,\ s \text{ четны},\\ 6k+2s, & \text{в остальных случаях;}\end{cases}$

(b) $\dim_{\mathrm{K}} \mathrm{HH}^3(R) = \begin{cases} k+s+3, & \text{если } k,\ s \text{ четны},\\ k+s+2, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$

(2) Пусть $p \neq 2$. Тогда:

(a) $\dim_{\mathrm{K}} \mathsf{Ker}\,\delta^3 = \begin{cases} 6k+2s, & \text{если } k,\ s \text{ делятся на } p,\\ 6k+2s-2, & \text{если } k,\ s \text{ не делятся на } p,\\ 6k+2s-1, & \text{в остальных случаях;}\end{cases}$

(b) $\dim_{\mathrm{K}} \mathrm{HH}^3(R) = \begin{cases} k+s+2, & \text{если } k,\ s \text{ делятся на } p,\\ k+s, & \text{если } k,\ s \text{ не делятся на } p,\\ k+s+1, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$

Доказательство. Необходимо учесть, что $\dim_{\mathrm{K}} Hom_\Lambda(Q_3, R) = 11k + 3s$. □

2.3. **Старшие группы когомологий.**

Рассмотрим подкомплекс $X_\bullet$ комплекса $Q_\bullet$, такой что при $n \geqslant 4$ модуль X_n соответствует последним шести неразложимым прямым слагаемым в разложении Q_n в (2.2), и $X_n = Q_n$ для $0 \leqslant n \leqslant 3$. Тогда имеется короткая точная последовательность комплексов:

$$0 \to X_\bullet \xrightarrow{i} Q_\bullet \xrightarrow{\pi} Q_\bullet[-4] \to 0, \tag{2.8}$$

расщепляющаяся в каждой степени.

Рассмотрим комплекс $\mathcal{X}^\bullet := Hom_\Lambda(X_\bullet, R)$. Как и выше отождествим элементы $f \in Hom_\Lambda(X_n, R) \subseteq Hom_\Lambda(Q_n, R)$ с соответствующими наборами значений $f(e_i \otimes e_j)$. Кроме того, для индуцированных дифференциалов подкомплекса $X_\bullet$ и комплекса $\mathcal{X}^\bullet$ будем использовать обозначения d_n^X и $\delta_{\mathcal{X}}^n = Hom_\Lambda(d_n^X, R)$ соответственно.

Применяя функтор $Hom_\Lambda(-, R)$ к последовательности (2.8), получаем короткую точную последовательность комплексов

$$0 \to Hom_\Lambda(Q_\bullet[-4], R) \xrightarrow{\pi^*} Hom_\Lambda(Q_\bullet, R) \xrightarrow{i^*} \mathcal{X}^\bullet \to 0,$$

которая, в свою очередь, приводит к длинной точной когомологической последовательности:

$$0 \longrightarrow \mathrm{HH}^3(R) \xrightarrow{i^*} \mathrm{H}^3(\mathcal{X}^\bullet) \xrightarrow{\Delta^3} \mathrm{HH}^0(R) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{HH}^4(R) \xrightarrow{i^*} \dots$$
$$\dots \xrightarrow{\Delta^{n-1}} \mathrm{HH}^{n-4}(R) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{HH}^n(R) \xrightarrow{i^*} \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) \xrightarrow{\Delta^n} \dots.$$

Из точности этой последовательности, для $n \geqslant 4$, получаем соотношение

$$\dim_{\mathrm{K}} \mathrm{HH}^n(R) = \dim_{\mathrm{K}} \mathsf{Ker}\,\Delta^n + \dim_{\mathrm{K}} \mathrm{HH}^{n-4}(R) - \dim_{\mathrm{K}} \mathrm{Im}\,\Delta^{n-1}, \tag{2.9}$$

а также для $n = 4$

$$\dim_{\mathrm{K}} \mathrm{HH}^4(R) = \dim_{\mathrm{K}} \mathsf{Ker}\,\Delta^4 + \dim_{\mathrm{K}} \mathrm{HH}^0(R) - \dim_{\mathrm{K}} \mathrm{H}^3(\mathcal{X}^\bullet) + \dim_{\mathrm{K}} \mathrm{HH}^3(R). \tag{2.10}$$

Прежде, чем использовать соотношение 2.9, вычислим когомологии вспомогательного комплекса $\mathcal{X}^\bullet$. При этом надо отметить, что этот комплекс 6-периодичен при $n \geqslant 3$, а именно

$$\delta_{\mathcal{X}}^n = \delta_{\mathcal{X}}^{n+6},$$

и, следовательно, при $n \geqslant 4$

$$\mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) \cong \mathrm{H}^{n+6}(\mathcal{X}^\bullet).$$

Более того, ввиду замечания 2.5 при $p = 2$ комплекс $\mathcal{X}^\bullet$ 3-периодичен при $n \geqslant 3$, и потому при $n \geqslant 4$

$$\mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) \cong \mathrm{H}^{n+3}(\mathcal{X}^\bullet).$$

Предложение 2.15. *(1) В зависимости от p группа $\mathrm{H}^3(\mathcal{X}^\bullet)$ имеет размерность*

$$\dim_{\mathrm{K}} \mathrm{H}^3(\mathcal{X}^\bullet) = \begin{cases} k+s+3, & p = 2 \\ k+s+2, & p \neq 2 \end{cases}$$

(2) Пусть $p = 2$. Тогда группы когомологий $\mathcal{X}^\bullet$ имеют следующие базисы при $n \geqslant 0$

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^{3n+4}(\mathcal{X}^\bullet):&\quad (\eta^{s-1}, \mathrm{O}_2, \eta, \mathrm{O}_2), (\mathrm{O}_3, \eta, \gamma, \beta);\\
\mathrm{H}^{3n+5}(\mathcal{X}^\bullet):&\quad (\mathrm{O}_3, \eta^{s-1}, \beta\alpha a^{k-1}, \alpha\gamma g^{k-1}), (e_0, e_1, e_1, \mathrm{O}_3), (a^k, \mathrm{O}_5);\\
\mathrm{H}^{3n+6}(\mathcal{X}^\bullet):&\quad (\eta, \mathrm{O}_5), (\mathrm{O}_3, e_0, e_1, e_1), (\mathrm{O}_5, \eta^s).
\end{aligned}$$

(3) Пусть $p \neq 2$. Тогда группы когомологий $\mathcal{X}^\bullet$ имеют следующие базисы при $n \geqslant 0$

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^{6n+5}(\mathcal{X}^\bullet):&\quad (e_0, e_1, e_1, \mathrm{O}_3);\\
\mathrm{H}^{6n+6}(\mathcal{X}^\bullet):&\quad (\eta, \mathrm{O}_5), (\mathrm{O}_3, e_0, e_1, e_1);\\
\mathrm{H}^{6n+7}(\mathcal{X}^\bullet):&\quad (\eta^{s-1}, \mathrm{O}_2, \eta, \mathrm{O}_2), (\mathrm{O}_3, \eta, -\gamma, -\beta);\\
\mathrm{H}^{6n+8}(\mathcal{X}^\bullet):&\quad (\mathrm{O}_3, \eta^{s-1}, \beta\alpha a^{k-1}, \alpha\gamma g^{k-1}), (a^k, \mathrm{O}_5);\\
\mathrm{H}^{6n+9}(\mathcal{X}^\bullet):&\quad (\mathrm{O}_3, e_0, e_1, e_1);
\end{aligned}$$

а группы $\mathrm{H}^{6n+4}(\mathcal{X}^\bullet) = 0$.

Доказательство. Отметим сначала, что при $n \geqslant 3$ имеем

$$d_n^X = \left(\begin{array}{c|c} -R_{n+1} & \mathrm{O} \\ \hline D_n & R_n \end{array}\right).$$

Теперь не сложно выписать базисы пространств $\mathrm{Im}\,\delta_{\mathcal{X}}^n$ и $\mathsf{Ker}\,\delta_{\mathcal{X}}^n$; приведем такие базисы без детальных вычислений.

(a) Если $p \neq 2$, то в качестве базиса $\mathsf{Ker}\,\delta^3_{\mathcal{X}}$ можно выбрать следующее множество:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{O}_3, a^i, 0, -g^i) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_3, b^i, g^i, 0) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(0, \gamma g^i, \mathrm{O}_4) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_2, \beta b^i, \mathrm{O}_3) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(0, \alpha\gamma g^i, \beta\alpha a^i, \mathrm{O}_3) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_3, \gamma\beta b^i, \mathrm{O}_2) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_4, \eta^i, \eta^i) \text{ для } 2 \leqslant i \leqslant s;\\
&(\eta^i, \mathrm{O}_5) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant s;\\
&(\mathrm{O}_3, a^k, \mathrm{O}_2),\ (\mathrm{O}_5, \eta^s),\ (0, 2\alpha\gamma g^{k-1}, 0, \eta, \eta);
\end{aligned}$$

а если $p = 2$, то для получения базиса $\mathsf{Ker}\,\delta^3_{\mathcal{X}}$ к этому множеству нужно добавить элемент $(\mathrm{O}_3, e_0, e_1, e_1)$.

Соответственно для $\mathrm{Im}\,\delta^3_{\mathcal{X}}$ при $p = 2$ следующее множество является базисом

$$\begin{aligned}
&(g^i, \mathrm{O}_5) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k;\\
&(0, \beta b^i, \gamma g^i, \mathrm{O}_3) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_4, \alpha\gamma g^i, \beta\alpha a^i) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_4, \gamma g^i, 0) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_5, \beta b^i) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_3, \eta^i, \mathrm{O}_2) \text{ для } 2 \leqslant i \leqslant s;\\
&(0, \beta\alpha a^{k-1}, \alpha\gamma g^{k-1}, 0, -\gamma, -\beta),\\
&(\eta^{s-1}, -\beta\alpha a^{k-1}, 0, -\eta, -\gamma, 0);
\end{aligned}$$

а если $p \neq 2$, то базис $\mathrm{Im}\,\delta^3_{\mathcal{X}}$ получается добавлением к этому множеству элемента $(\eta^{s-1}, 0, \alpha\gamma g^{k-1}, \eta, 0, \beta)$.
Учитывая предложение 2.11, получаем размерности $\dim_{\mathrm{K}} \mathrm{H}^3(\mathcal{X}^\bullet)$ в соответствии с пунктом (a).

(b) Если $p \neq 2$, то следующее множество является базисом $\mathsf{Ker}\,\delta^4_{\mathcal{X}}$:

$$\begin{aligned}
&(g^i, \mathrm{O}_5) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k;\\
&(0, \beta b^i, \gamma g^i, \mathrm{O}_3) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_4, \alpha\gamma g^i, \beta\alpha a^i) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_4, \gamma g^i, 0) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_5, \beta b^i) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_3, \eta^i, \mathrm{O}_2) \text{ для } 2 \leqslant i \leqslant s;\\
&(\mathrm{O}_3, \eta, \gamma, \beta),\ (0, \beta\alpha a^{k-1}, \alpha\gamma g^{k-1}, \eta, \mathrm{O}_2),\\
&(\eta^{s-1}, -\beta\alpha a^{k-1}, \mathrm{O}_3, \beta);
\end{aligned}$$

а если $p = 2$, то базис $\mathsf{Ker}\,\delta^4_{\mathcal{X}}$ получается добавлением к этому множеству элемента $(\eta^{s-1}, \beta\alpha a^{k-1}, \alpha\gamma g^{k-1}, \mathrm{O}_3)$.

Если $p=2$, то следующее множество является базисом пространства $\operatorname{Im}\delta^4_{\mathcal{X}}$:

$$
\begin{aligned}
&(a^i, 0, g^i, \mathrm{O}_3) \text{ для } 1 \leqslant j \leqslant k;\\
&(b^i, g^i, \mathrm{O}_4) \text{ для } 1 \leqslant j \leqslant k;\\
&(\mathrm{O}_3, g^i, \mathrm{O}_2) \text{ для } 1 \leqslant j \leqslant k;\\
&(\mathrm{O}_4, \beta b^i, \gamma g^i) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\gamma\beta b^i, \mathrm{O}_5) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(0, \eta^i, \eta^i, \mathrm{O}_3) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant s-1;\\
&(0, \eta^{s-1}, -\eta^{s-1}, 0, -\beta, -\gamma);
\end{aligned}
$$

а если $p \neq 2$, то базис получается добавлением к этому множеству элемента (a^k, O_5).

(c) Если $p \neq 2$, то следующее множество является базисом пространства $\mathsf{Ker}\,\delta^5_{\mathcal{X}}$:

$$
\begin{aligned}
&(a^i, 0, g^i, \mathrm{O}_3) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k;\\
&(b^i, g^i, \mathrm{O}_4) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k;\\
&(\mathrm{O}_3, g^i, \mathrm{O}_2) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k;\\
&(\mathrm{O}_4, \beta b^i, \gamma g^i) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\gamma\beta b^i, \mathrm{O}_5) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(0, \eta^i, \eta^i, \mathrm{O}_3) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant s-1;\\
&(a^k, \mathrm{O}_5),\ (e_0, e_1, e_1, \mathrm{O}_3),\ (\mathrm{O}_2, 2\eta^{s-1}, 0, \beta, \gamma);
\end{aligned}
$$

а если $p=2$, то базис пространства $\mathsf{Ker}\,\delta^5_{\mathcal{X}}$ получается добавлением к этому множеству элемента $(\mathrm{O}_3, \eta^{s-1}, \beta\alpha a^{k-1}, \alpha\gamma g^{k-1})$.

Если $p=2$, то следующее множество является базисом пространства $\operatorname{Im}\delta^5_{\mathcal{X}}$:

$$
\begin{aligned}
&(0, \gamma g^i, \mathrm{O}_4) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_2, \beta b^i, \mathrm{O}_3) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(0, -\alpha\gamma g^i, \beta\alpha a^i, \mathrm{O}_3) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_3, \gamma\beta b^i, \mathrm{O}_2) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_3, a^i, 0, g^i) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k;\\
&(\mathrm{O}_3, b^i, g^i, 0) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k;\\
&(\mathrm{O}_4, \eta^i, \eta^i) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant s-1;\\
&(\eta^i, \mathrm{O}_5) \text{ для } 2 \leqslant i \leqslant s;\\
&(\eta, 0, \beta, \mathrm{O}_3),\ (0, -\gamma, \beta, \mathrm{O}_3);
\end{aligned}
$$

а если $p \neq 2$, то базис пространства $\operatorname{Im}\delta^5_{\mathcal{X}}$ получается добавлением к этому множеству элемента (O_5, η^s).

(d) При любом p следующее множество является базисом пространства $\mathsf{Ker}\,\delta^6_{\mathcal{X}}$:

$$\begin{aligned}
&(0, \gamma g^i, \mathrm{O}_4) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_2, \beta b^i, \mathrm{O}_3) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(0, \alpha\gamma g^i, -\beta\alpha a^i, \mathrm{O}_3) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_3, \gamma\beta b^i, \mathrm{O}_2) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_3, a^i, 0, g^i) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k;\\
&(\mathrm{O}_3, b^i, g^i, 0) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k;\\
&(\eta^i, \mathrm{O}_5) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant s;\\
&(\mathrm{O}_4, \eta^i, \eta^i) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant s-1;\\
&(\mathrm{O}_3, e_0, e_1, e_1),\ (\mathrm{O}_5, \eta^s);
\end{aligned}$$

а базисом пространства $\mathrm{Im}\,\delta^6_{\mathcal{X}}$ является следующее множество:

$$\begin{aligned}
&(g^i, \mathrm{O}_5), \text{ для } 1 \leqslant j \leqslant k;\\
&(\mathrm{O}_4, \gamma g^i, 0) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_5, \beta b^i) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(0, \beta b^i, \gamma g^i, \mathrm{O}_3) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_4, -\alpha\gamma g^i, \beta\alpha a^i) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_3, \eta^i, \mathrm{O}_2) \text{ для } 2 \leqslant i \leqslant s;\\
&(0, \beta\alpha a^{k-1}, -\alpha\gamma g^{k-1}, 0, -\gamma, \beta),\\
&(\eta^{s-1}, -\beta\alpha a^{k-1}, 0, \eta, \gamma, 0);
\end{aligned}$$

(e) При любом p следующее множество является базисом пространства $\mathsf{Ker}\,\delta^7_{\mathcal{X}}$:

$$\begin{aligned}
&(g^i, \mathrm{O}_5) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k;\\
&(\mathrm{O}_4, \gamma g^i, 0) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_5, \beta b^i) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(0, \beta b^i, \gamma g^i, \mathrm{O}_3) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_4, \alpha\gamma g^i, -\beta\alpha a^i) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_3, \eta^i, \mathrm{O}_2) \text{ для } 2 \leqslant i \leqslant s;\\
&(\eta^{s-1}, \mathrm{O}_2, \eta, \mathrm{O}_2),\ (\mathrm{O}_2, \alpha\gamma g^{k-1}, \mathrm{O}_2, -\beta);\\
&(0, \beta\alpha a^{k-1}, \mathrm{O}_2, -\gamma, 0),\ (\mathrm{O}_3, \eta, -\gamma, -\beta);
\end{aligned}$$

а базисом пространства $\mathrm{Im}\,\delta^7_{\mathcal{X}}$ является следующее множество:

$$\begin{aligned}
&(a^i, 0, -g^i, \mathrm{O}_3) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k;\\
&(b^i, g^i, \mathrm{O}_4) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k;\\
&(\mathrm{O}_3, g^i, \mathrm{O}_2) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k;\\
&(\mathrm{O}_4, \beta b^i, \gamma g^i) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\gamma\beta b^i, \mathrm{O}_5) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(0, \eta^i, \eta^i, \mathrm{O}_3) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant s-1;
\end{aligned}$$

(f) Если $p \neq 2$, то следующее множество является базисом пространства $\mathsf{Ker}\,\delta^8_{\mathcal{X}}$:

$$
\begin{aligned}
&(a^i, 0, -g^i, \mathrm{O}_3) 1 \leqslant i \leqslant k;\\
&(b^i, g^i, \mathrm{O}_4) 1 \leqslant i \leqslant k;\\
&(\mathrm{O}_3, g^i, \mathrm{O}_2) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k;\\
&(\gamma\beta b^i, \mathrm{O}_5) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_4, \beta b^i, \gamma g^i) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(0, \eta^i, \eta^i, \mathrm{O}_3) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant s-1;\\
&(a^k, \mathrm{O}_5), (\mathrm{O}_3, \eta^{s-1}, \beta\alpha a^{k-1}, \alpha\gamma g^{k-1});
\end{aligned}
$$

а базисом пространства $\mathrm{Im}\,\delta^8_{\mathcal{X}}$ является следующее множество:

$$
\begin{aligned}
&(0, \gamma g^i, \mathrm{O}_4) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_2, \beta b^i, \mathrm{O}_3) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(0, \alpha\gamma g^i, \beta\alpha a^i, \mathrm{O}_3) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_3, \gamma\beta b^i, \mathrm{O}_2) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_3, a^i, 0, -g^i) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_3, b^i, g^i, 0) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\eta^i, \mathrm{O}_5) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant s;\\
&(\mathrm{O}_4, \eta^i, \eta^i) \text{ для } 2 \leqslant i \leqslant s;\\
&(\mathrm{O}_3, a^k, 0, -\eta^s),\ (\mathrm{O}_2, -2\beta\alpha a^{k-1}, 0, \eta, \eta).
\end{aligned}
$$

С учетом того, что $\delta^9_{\mathcal{X}} = \delta^3_{\mathcal{X}}$ и $\delta^2_{\mathcal{X}} = \delta^2$, требуемое утверждение следует непосредственно из приведенного описания базисов $\mathsf{Ker}\,\delta^n_{\mathcal{X}}$ и $\mathrm{Im}\,\delta^n_{\mathcal{X}}$. ☐

Предложение 2.16. *(1) Пусть $p = 2$. Тогда гомоморфизмы Δ^n при $n \geqslant 4$ равны нулю.*
(2) Если $p \neq 2$, то при $n \geqslant 4$

$$
\dim_{\mathrm{K}} \mathrm{Im}\,\Delta^n = \begin{cases} 1, & \text{если } n \equiv 0 \text{ или } 5 \pmod 6\\ 0, & \text{в остальных случаях,}\end{cases}
$$

Доказательство. Воспользуемся описанием связывающих гомоморфизмов из доказательства леммы 3.13 в [50]. Введем дополнительные обозначения $X_n =: X'_n \oplus X''_n$, где X'_n (соответственно X''_n) — это сумма первых трех (соответственно последних трех) неразложимых прямых слагаемых в разложении X_n (см. обозначения из (2.2)). Используя блочно-треугольный вид дифференциалов d_n при $n \geqslant 4$, мы рассмотрим отображение $L_n : X''_{n-3} \to X'_n$, определяемое относительно соответствующих прямых разложений матрицей L_n, а затем индуцированное отображение

$$
l^n = Hom_\Lambda(L_n, R) : Hom_\Lambda(X'_n, R) \to Hom_\Lambda(X''_{n-3}, R).
$$

Пусть

$$
u = (u', u'') \in \mathcal{X}^n = Hom_\Lambda(X'_n, R) \oplus Hom_\Lambda(X''_n, R),
$$

и пусть $\delta^n_{\mathcal{X}}(u) = 0$. Для $\tilde{u} := (\mathrm{O}, u) \in Hom_\Lambda(Q_n, R)$ получаем, что $\delta^n(\tilde{(u)}) = (\mathrm{O}, l^n(u'), \mathrm{O}_6)$, и тогда $\Delta(\mathrm{cl}\,u) = \mathrm{cl}\,(\mathrm{O}, l^n(u'))$.

(1) Предположим, что $n \equiv 5 \pmod 6$. Рассмотрим этот случай более подробно; остальные случаи рассматриваются аналогично в зависимости от вида матрицы L_n. В виду описания базиса $\mathrm{H}^5(\mathcal{X}^\bullet)$ надо рассмотреть $u = (e_1, e_2, e_3, \mathrm{O}_3)$ (при любом p). Тогда $l^5(u') = 2(\eta^{s-1}, g^{k-1}\beta\alpha, \alpha\gamma g^{k-1})$, и если $p \neq 2$, то замечаем, что элемент $(\mathrm{O}_3, \eta^{s-1}, g^{k-1}\beta\alpha, \alpha\gamma g^{k-1}) \in Hom(Q_{n-3}, R)$ не лежит в $\mathrm{Im}\,\delta^{n-4}$, и, следовательно,

$\Delta^n(\operatorname{cl} u) \neq 0$. Если же $p = 2$, то образ $\Delta^n(u)$ равен нулю, как и образы оставшихся двух элементов базиса $(\mathrm{O}_3, \eta^{s-1}, \beta\alpha a^{k-1}, \alpha\gamma g^{k-1})$ и (a^k, O_5). Таким образом при $n \equiv 5 \pmod 6$ формулы для $\operatorname{Im}\Delta^n$ доказаны.

(2) Пусть $n \equiv 0 \pmod 6$. В этом случае достаточно рассмотреть образ элемента $u = (\eta, \mathrm{O}_5)$. Для него $l^0(u') = (0, \eta^s, -\eta^s)$, и потому $\delta^n(\tilde{u}) = (\mathrm{O}, \eta^s, -\eta^s, \mathrm{O}_6)$. Остается заметить, что элемент $(\mathrm{O}, \eta^s, -\eta^s) \in \mathit{Hom}_\Lambda(Q_{n-3}, R)$ лежит в $\operatorname{Im}\delta^{n-4}$ только при $p = 2$.

(3) В остальных случаях при $n \not\equiv 0,\ 5 \pmod 6$, $n \geqslant 4$, легко видеть, что для всех базисных элементов $\mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet)$ соответствующие образы l^n равны нулю.

□

Следствие 2.17. *Если $p \neq 2$, то при $n \geqslant 5$*

$$\dim_{\mathrm{K}} \mathsf{Ker}\,\Delta^n - \dim_{\mathrm{K}} \operatorname{Im}\Delta^{n-1} = \begin{cases} 1, & \text{если } n \equiv 1 \text{ или } n \equiv 3 \pmod 6 \\ 2, & \text{если } n \equiv 2 \pmod 6 \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

Окончание доказательств теорем 2.1 и 2.3. Размерности в таблице 1 являются собранием результатов утверждений 2.7, 2.10, 2.12, 2.14 и формулы 2.10. Утверждение теоремы 2.3 следует из формулы 2.9 с учетом следствия 2.17 и предложения 2.15. □

3. Гомологии абелевых групп

Пусть K — поле, A — абелева группа. Тогда гомоморфизм сложения $A \oplus A \to A$, $(a, b) \mapsto a+b$ индуцирует произведение Понтрягина $H_*(A, K) \otimes H_*(A, K) \to H_*(A, K)$, которое задает структуру градуированной суперкоммутативной алгебры на $H_*(A, K)$ (см [11, Ch. V]). Более того, диагональное отображение $A \to A \oplus A$ и отображение смены знака $A \to A$ индуцируют коумножение и антипод на $H_*(A, K)$, задающие структуру градуированной алгебры Хопфа на $H_*(A, K)$. Для простого p введем обозначения

$$A/p := A/pA \cong A \otimes \mathbb{Z}/p, \qquad {}_pA := \{a \in A \mid pa = 0\} \cong \mathit{Tor}(A, \mathbb{Z}/p).$$

Для векторного пространства V обозначим через $V[n]$ градуированное векторное пространство, сосредоточенное в степени n. В работе А. Картана [13] доказано (и подробно изложено позже в [12], см. также [11, Гл. V. Теорема. 6.6]), что для простого $p \neq 2$ существует естественный изоморфизм градуированных алгебр

$$H_*(A, \mathbb{F}_p) \cong \Lambda(A/p[1]) \otimes \Gamma({}_pA[2]), \tag{3.1}$$

где Λ обозначает внешнюю алгебру над $\mathbb{F}_p$, а Γ обозначает алгебру разделенных степеней над $\mathbb{F}_p$. Фактически, этот изоморфизм является естественный изоморфизмом алгебр Хопфа. Поскольку для конечно порожденных абелевых групп когомологии двойственны гомологиям, то получаем, что существует изоморфизм

$$H^*(A, \mathbb{F}_p) \cong \Lambda((A/p)^\vee[1]) \otimes \mathsf{Sym}(({}_pA)^\vee[2]),$$

где $(-)^\vee$ обозначает двойственное векторное пространство. В частности, для каждой группы гомологий существует естественный изоморфизм

$$H_n(A, \mathbb{F}_p) \cong \bigoplus_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \Lambda^{n-2i}(A/p) \otimes \Gamma^i({}_pA), \tag{3.2}$$

а в случае конечно порожденных групп для каждой группы когомологий:

$$H^n(A, \mathbb{F}_p) \cong \bigoplus_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \Lambda^{n-2i}((A/p)^\vee) \otimes \mathsf{Sym}^i(({}_pA)^\vee).$$

Изоморфизм (3.1) означает, что алгебра гомологий $H_*(A,\mathbb{F}_p)$ может быть естественным образом восстановлена из двух векторных пространств A/p и ${}_pA$ как градуированная алгебра Хопфа. Неформально говоря, пара векторных пространств $(A/p, {}_pA)$ представляет «минимальную информацию» про A, необходимую для естественного описания алгебры гомологий в случае $p \neq 2$. Более формально, если обозначить через $Vect^2$ категорию пар $\mathbb{F}_p$-векторных пространств, а через $t : Ab \to Vect^2$ - функтор $A \mapsto (A/p, {}_pA)$, то происходит факторизация функтора $H_*(-,\mathbb{F}_p)$ в категорию градуированных алгебр Хопфа через функтор t. В частности, для каждой группы гомологий существует соответствующая факторизация.

$$
\begin{tikzcd}
Ab \arrow[rr, "H_n(-{,}\mathbb{F}_p)"] \arrow[dr, "t"'] & & Vect \\
& Vect^2 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\tag{3.3}
$$

Изоморфизм (3.2) дает простую формулу для $H_2(A,\mathbb{F}_p)$, когда $p \neq 2$:

$$H_2(A,\mathbb{F}_p) \cong \Lambda^2(A/p) \oplus {}_pA.$$

Однако для $p = 2$ у нас есть только короткая точная последовательность

$$0 \longrightarrow \Lambda^2(A/2) \longrightarrow H_2(A,\mathbb{F}_2) \longrightarrow {}_2A \longrightarrow 0,$$

которая не расщепляется естественным образом [35, §3]. Таким образом, поведение $H_*(A,\mathbb{F}_p)$ в случае $p = 2$ более сложное.

Цель данной главы — проработать ситуацию для $p = 2$, и, в частности, дать естественное описание градуированной алгебры Хопфа $H_*(A,\mathbb{F}_2)$ для произвольной абелевой группы A, а также предъявить естественное описание алгебры $H^*(A,\mathbb{F}_2)$ для конечно порожденной группы A. Более того, в качестве неформальной цели, хочется дать описание, использующее некоторую «минимальную информацию» про A, позволяющее естественным образом восстановить алгебру гомологий. Попутно в данной главе мы получаем естественную фильтрацию на $H_n(A,\mathbb{F}_2)$, факторы которой равны $\Lambda^i(A/2)\otimes\Gamma^j({}_2A)$, и, двойственно, в случае конечно порожденной группы A, получаем естественную фильтрацию на $H^n(A,\mathbb{F}_2)$, факторы которой равны $\Lambda^i((A/2)^\vee)\otimes\mathsf{Sym}^j(({}_2A)^\vee)$. Подобная фильтрация является аналогом разложения (3.2) в случае $p = 2$.

Более того, мы доказываем, что не существует такой факторизации, как (3.3) для любого $n \geqslant 2$ при $p = 2$ (см. предложение 3.13). Таким образом, пары векторных пространств $(A/2, {}_2A)$ недостаточно для естественного восстановления алгебр Хопфа $H_*(A,\mathbb{F}_2)$ и $H^*(A,\mathbb{F}_2)$, или даже группы $H_n(A,\mathbb{F}_2)$ для каждого $n \geqslant 2$. Однако достаточно добавить линейное отображение между этими двумя векторными пространствами, чтобы получить информацию, достаточную для естественного восстановления алгебры гомологий. А именно, нужно добавить отображение

$$\tilde\beta : {}_2A \longrightarrow A/2$$

которое является композицией вложения ${}_2A \hookrightarrow A$ и проекции $A \twoheadrightarrow A/2$.

Мы даем следующее описание алгебры когомологий конечно порожденной абелевой группы A. Обозначим через

$$T(A) = (A/2)^\vee[1] \oplus ({}_2A)^\vee[2]$$

и докажем, что существует естественный изоморфизм

$$H^*(A,\mathbb{F}_2) \cong \mathsf{Sym}(T(A))/I,$$

где I — идеал, порожденный множеством $\{x^2 - \tilde\beta^\vee(x) \mid x \in (A/2)^\vee\}$. Также показываем, что существует короткая точная последовательность бикоммутативных алгебр Хопфа

$$\mathbb{F}_2 \longrightarrow \mathsf{Sym}(({}_2A)^\vee) \longrightarrow H^*(A,\mathbb{F}_2) \longrightarrow \Lambda((A/2)^\vee) \longrightarrow \mathbb{F}_2.$$

Более того, мы доказываем, что функтор $H^n(A,\mathbb{F}_2)$ естественно изоморфен коядру отображения

$$\bigoplus_{2k+l+2m=n;\ k\geqslant 1} \mathsf{Sym}^k(A/2^\vee)\otimes \mathsf{Sym}^l(A/2^\vee)\otimes \mathsf{Sym}^m({}_2A^\vee) \longrightarrow \bigoplus_{i+2j=n} \mathsf{Sym}^i(A/2^\vee)\otimes \mathsf{Sym}^j({}_2A^\vee)$$

и что существует естественная фильтрация функтора $H^n(A,\mathbb{F}_2)$ подфункторами Φ^i такая, что $\Phi^i/\Phi^{i+1}\cong \Lambda^{n-2i}((A/2)^\vee)\otimes \mathsf{Sym}^i(({}_2A)^\vee)$. Все результаты можно обобщить на случай произвольной абелевой группы A, если рассматривать когомологии $(A/2)^\vee$ и $({}_2A)^\vee$ как проконечные векторные пространства и заменить все конструкции на их проконечные версии.

Для алгебры гомологий абелевой группы A (не обязательно конечно порожденной) получается следующее описание: следующий квадрат является декартовым в категории бикоммутативных алгебр Хопфа

$$\begin{array}{ccc} H_*(A,\mathbb{F}_2) & \longrightarrow & \Gamma({}_2A[2]) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \Gamma(\tilde\beta)} \\ \Gamma(A/2[1]) & \xrightarrow{\ \mathcal{V}\ } & \Gamma(A/2[2]), \end{array}$$

где $\mathcal{V}$ обозначает Verschiebung. Также доказывается, что существует короткая точная последовательность градуированных бикоммутативных алгебр Хопфа

$$\mathbb{F}_2 \longrightarrow \Lambda(A/2) \longrightarrow H_*(A,\mathbb{F}_2) \longrightarrow \Gamma({}_2A) \longrightarrow \mathbb{F}_2.$$

Кроме того, доказывается, что функтор $H_n(A,\mathbb{F}_2)$ естественно изоморфен ядру естественного преобразования

$$\bigoplus_{i+2j=n} \Gamma^i(A/2)\otimes\Gamma^j({}_2A) \longrightarrow \bigoplus_{2k+l+2m=n;\ k\geqslant 1} \Gamma^k(A/2)\otimes\Gamma^l(A/2)\otimes\Gamma^m({}_2A),$$

и существует естественная фильтрация функтора $H_n(A,\mathbb{F}_2)$ подфункторами Ψ_i такая, что

$$\Psi_i/\Psi_{i-1}\cong \Lambda^{n-2i}(A/2)\otimes\Gamma^i({}_2A).$$

В качестве вспомогательного результата мы докажем, что для короткой точной последовательности градуированных связных бикоммутативных алгебр Хопфа

$$K \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow K$$

над полем K и для любого $n\geqslant 0$ существует изоморфизм

$$\mathcal{A}_+^n\mathcal{B}/\mathcal{A}_+^{n+1}\mathcal{B}\cong \mathcal{A}_+^n/\mathcal{A}_+^{n+1}\otimes\mathcal{C},$$

который зависит только от короткой точной последовательности (без линейного разбиения). Более того, изоморфизм естественен по короткой точной последовательности. Заметим, что факторы зависят только от $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$ и не зависят от короткой точной последовательности.

3.1. **Фильтрация алгебры Хопфа, ассоциированная с короткой точной последовательностью.** В этом разделе мы доказываем, что короткая точная последовательность градуированных связных бикоммутативных алгебр Хопфа $K\to\mathcal{A}\to\mathcal{B}\to\mathcal{C}\to K$ над полем K обеспечивает естественную фильтрацию на $\mathcal{B}$, частные которого зависят только от $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$ и не зависят от короткой точной последовательности.

Пусть $\alpha:\mathcal{A}\to\tilde{\mathcal{A}}$ — морфизм аугментированных алгебр. Предположим, что V — векторное пространство, а M — $\tilde{\mathcal{A}}$-модуль. Тогда для линейного отображения $f:V\to M$ через $\bar f$ обозначим гомоморфизм $\mathcal{A}$-модулей

$$\bar f:\mathcal{A}\otimes V\longrightarrow M,\qquad \bar f(a\otimes v)=\alpha(a)f(v).$$

Легко видеть, что $\bar{f}(\mathcal{A}_+^n \otimes V) \subseteq \tilde{\mathcal{A}}_+^n M$. Тогда отображение f индуцирует отображение на факторах

$$f_n' : \mathcal{A}_+^n/\mathcal{A}_+^{n+1} \otimes V \longrightarrow \tilde{\mathcal{A}}_+^n M/\tilde{\mathcal{A}}_+^{n+1} M.$$

Лемма 3.1. *Если* $\mathsf{Im}(f) \subseteq \tilde{\mathcal{A}}_+ M$, *тогда* $f_n' = 0$ *для любого* $n \geqslant 0$.

Доказательство. Поскольку $\mathsf{Im}(f) \subseteq \tilde{\mathcal{A}}_+ M$, то $\mathsf{Im}(\bar{f}) \subseteq \tilde{\mathcal{A}}_+ M$. Используя, что $\bar{f}$ гомоморфизм A-модулей, получаем, что $\bar{f}(\tilde{\mathcal{A}}_+^n \otimes V) \subseteq \alpha(\tilde{\mathcal{A}}_+^n) \cdot \mathsf{Im}(\bar{f}) \subseteq \tilde{\mathcal{A}}_+^{n+1} M$. Из чего следует утверждение леммы. □

Предположим теперь, что у нас есть короткая точная последовательность в категории бикоммутативных алгебр Хопфа

$$K \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{i} \mathcal{B} \xrightarrow{\pi} \mathcal{C} \longrightarrow K. \tag{3.4}$$

и $\tilde{A} = \mathcal{A}, \alpha = id_{\mathcal{A}}$. Тогда $\mathcal{B}$ имеет естественную структуру $\mathcal{A}$-модуля и для любого линейного отображения $f : C \to \mathcal{B}$ мы получаем $\mathcal{A}$-модульный гомоморфизм

$$\bar{f} : \mathcal{A} \otimes \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}.$$

Лемма 3.2. *Пусть последовательность* (3.4) *— короткая точная последовательность градуированных связных коммутативных и кокоммутативных алгебр Хопфа. Предположим, что* $f : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ *- линейное градуированное отображение такое, что* $\pi f = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$. *Тогда*

$$\bar{f} : \mathcal{A} \otimes \mathcal{C} \xrightarrow{\cong} \mathcal{B}, \qquad a \otimes c \mapsto a \cdot f(c)$$

является изоморфизмом $\mathcal{A}$*-модулей.*

Доказательство. Это следует из предложения 1.7 статьи [37]. См. также доказательство теоремы 4.4 и предложения 4.9 в [37]. □

Теорема 3.3. *Для короткой точной последовательности градуированных связных бикоммутативных алгебр Хопфа*

$$K \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{i} \mathcal{B} \xrightarrow{\pi} \mathcal{C} \longrightarrow K$$

и для любого $n \geqslant 0$ *существует изоморфизм*

$$\mathcal{A}_+^n \mathcal{B}/\mathcal{A}_+^{n+1}\mathcal{B} \cong \mathcal{A}_+^n/\mathcal{A}_+^{n+1} \otimes \mathcal{C}, \tag{3.5}$$

который зависит только от короткой точной последовательности (не зависит от линейного расщепления). Более того, изоморфизм естественен по короткой точной последовательности.

Доказательство. Если мы возьмем любое градуированное линейное разбиение $f : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ эпиморфизма $\pi : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, то по лемме 3.2 получаем, что $\bar{f} : \mathcal{A} \otimes \mathcal{C} \cong \mathcal{B}$ является изоморфизмом $\mathcal{A}$-модулей. Отсюда следует, что f_n' является изоморфизмом вида (3.5). Докажем, что этот изоморфизм не зависит от выбора разбиения f. Разница двух таких разбиений - это отображение $g : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ такое, что $\mathsf{Im}\, g \subseteq \mathsf{Ker}\, \pi$. Тогда достаточно доказать, что для любого линейного отображения $g : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ такого, что $\mathsf{Im}\, g \subseteq \mathsf{Ker}\, \pi = \mathcal{A}_+\mathcal{B}$ имеем $g_n' = 0$. Это следует из леммы 3.1. Таким образом, изоморфизм (3.5) не зависит от выбора f. Теперь покажем естественность этого изоморфизма по короткой точной последовательности. Предположим, что у нас есть морфизм коротких точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccccc}
K & \longrightarrow & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{B} & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{C} & \longrightarrow & K \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{\mathcal{A}}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{\mathcal{B}}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{\mathcal{C}}} & & \\
K & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{A}} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{B}} & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \tilde{\mathcal{C}} & \longrightarrow & K
\end{array}$$

Зафиксируем разбиение f на π и разбиение g на $\tilde{\pi}$. Положим $h=\alpha_{\mathcal{B}}f-g\alpha_{\mathcal{C}}$. Мы утверждаем, что $\mathsf{Im}(h)\subseteq\mathsf{Ker}\,\tilde{\pi}$. Действительно, это следует из $\mathsf{Im}(h)=\mathsf{Im}(h\pi)$ и $\tilde{\pi}h\pi=\tilde{\pi}\alpha_{\mathcal{B}}f\pi-\tilde{\pi}g\alpha_{\mathcal{C}}\pi=\alpha_{\mathcal{C}}\pi h\pi-\tilde{\pi}g\tilde{\pi}\alpha_{\mathcal{B}}=\alpha_{\mathcal{C}}\pi-\tilde{\pi}\alpha_{\mathcal{B}}=0$. Тогда $\mathsf{Im}(h)\subseteq\tilde{\mathcal{A}}_+\tilde{\mathcal{B}}$. По лемме 3.1 $h'_n=0$. Отсюда следует, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{A}_+^n/\mathcal{A}_+^{n+1})\otimes\mathcal{C} \arrow[r, "f'_n"] \arrow[d] & \mathcal{A}_+^n\mathcal{B}/\mathcal{A}_+^{n+1}\mathcal{B} \arrow[d] \\
(\tilde{\mathcal{A}}_+^n/\tilde{\mathcal{A}}_+^{n+1})\otimes\tilde{\mathcal{C}} \arrow[r, "g'_n"] & \tilde{\mathcal{A}}_+^n\tilde{\mathcal{B}}/\tilde{\mathcal{A}}_+^{n+1}\tilde{\mathcal{B}}
\end{tikzcd}$$

коммутативна, что завершает доказательство. □

3.2. **Общие сведения о гомоморфизме Бокштейна и теореме об универсальных коэффициентах.** Для пространства X обозначим через

$$\beta: H_n(X,\mathbb{Z}/p)\longrightarrow H_{n-1}(X,\mathbb{Z}/p)$$

гомоморфизм Бокштейна. Короткая точная последовательность $\mathbb{Z}\xrightarrow{\cdot p}\mathbb{Z}\twoheadrightarrow\mathbb{Z}/p$ индуцирует граничное отображение $\beta':H_n(X,\mathbb{Z}/p)\to H_{n-1}(X,\mathbb{Z})$, композиция которого с отображением $H_{n-1}(X,\mathbb{Z})\to H_{n-1}(X,\mathbb{Z}/p)$ равна β [29, §3E]. Теорема об универсальных коэффициентах утверждает, что существует короткая точная последовательность

$$0\longrightarrow H_n(X,\mathbb{Z})/p\xrightarrow{\theta_n}H_n(X,\mathbb{Z}/p)\xrightarrow{\tau_n}{}_pH_{n-1}(X,\mathbb{Z})\longrightarrow 0,$$

где отображение τ_n построено как ограничение β' на свой образ.

$$\begin{tikzcd}
H_n(X,\mathbb{Z}/p) \arrow[rr, "\beta'"] \arrow[dr, dashed, "\tau_n"'] & & H_{n-1}(X,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\cdot p"] & H_{n-1}(X,\mathbb{Z}) \\
& {}_pH_{n-1}(X,\mathbb{Z}) \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd}$$

Отсюда следует, что β равняется следующей композиции

$$\beta:\quad H_n(X,\mathbb{Z}/p)\xrightarrow{\tau_n}{}_pH_{n-1}(X,\mathbb{Z})\hookrightarrow H_{n-1}(X,\mathbb{Z})\to H_{n-1}(X,\mathbb{Z}/p).$$

Последний гомоморфизм раскладывается как $H_{n-1}(X,\mathbb{Z})\twoheadrightarrow H_{n-1}(X,\mathbb{Z})/p\xrightarrow{\theta_{n-1}}H_{n-1}(X,\mathbb{Z}/p)$. Из этих рассуждений следует лемма:

Лемма 3.4. *Гомоморфизм Бокштейна β пропускается через гомоморфизмы из теоремы об универсальных коэффициентах следующим образом*

$$\begin{tikzcd}
H_n(X,\mathbb{Z}/p) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, two heads, "\tau_n"] & H_{n-1}(X,\mathbb{Z}/p) \\
{}_pH_{n-1}(X,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\tilde{\beta}"] & H_{n-1}(X,\mathbb{Z})/p, \arrow[u, hook, "\theta_{n-1}"']
\end{tikzcd} \tag{3.6}$$

где $\tilde{\beta}$ — композиция вложения ${}_pH_{n-1}(X,\mathbb{Z})\hookrightarrow H_{n-1}(X,\mathbb{Z})$ и проекции $H_{n-1}(X,\mathbb{Z})\twoheadrightarrow H_{n-1}(X,\mathbb{Z})/p$.

3.3. **Когомологии конечно порожденных абелевых групп.** Для абелевой группы A введем обозначения $T(A)=(A/2)^\vee[1]\oplus({}_2A)^\vee[2]$.

Теорема 3.5. *Пусть A — конечно порожденная абелева группа. Тогда*

(a) *существует естественный изоморфизм градуированных алгебр Хопфа*

$$H^*(A,\mathbb{F}_2)\cong\mathsf{Sym}(T(A))/I, \tag{3.7}$$

где I — идеал, порожденный множеством $\{x^2-\tilde{\beta}^\vee(x)\mid x\in(A/2)^\vee\}$.

(b) *Следующий квадрат одновременно декартов и кодекартов в категории градуированных бикоммутативных алгебр Хопфа*

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{Sym}((A/2)^\vee[2]) \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "\mathsf{Sym}(\tilde\beta^\vee)"] & \mathsf{Sym}((A/2)^\vee[1]) \arrow[d] \\
\mathsf{Sym}(({}_2A)^\vee[2]) \arrow[r] & H^*(A,\mathbb{F}_2),
\end{tikzcd}
\tag{3.8}
$$

где $\mathcal{F}$ — это гомоморфизм Фробениуса.

Доказательство теоремы 3.5. Переходя к когомологическому варианту теоремы об универсальных коэффициентах, получаем короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow ({}_2H_{n-1}(A,\mathbb{Z}))^\vee \xrightarrow{\tau^n} H^n(A,\mathbb{F}_2) \xrightarrow{\theta^n} (H_n(A,\mathbb{Z})/2)^\vee \longrightarrow 0.$$

Отождествляя $H_1(A,\mathbb{Z}) = A$, получаем морфизмы

$$(\theta^1)^{-1} : (A/2)^\vee \xrightarrow{\cong} H^1(A,\mathbb{F}_2), \qquad \tau^2 : ({}_2A)^\vee \rightarrowtail H^2(A,\mathbb{F}_2). \tag{3.9}$$

Эти отображения естественны по A. Из диаграммы естественности этих морфизмов относительно гомоморфизма сложения $A \oplus A \to A$ следует, что образы отображений (3.9) состоят из примитивных элементов. Поэтому они индуцируют морфизмы алгебр Хопфа из соответствующих симметрических алгебр

$$\mathsf{Sym}((A/2)^\vee[1]) \to H^*(A,\mathbb{F}_2), \qquad \mathsf{Sym}(({}_2A)^\vee[2]) \to H^*(A,\mathbb{F}_2). \tag{3.10}$$

Так как гомоморфизм Бокштейна для первой степени $\beta : H^1(A,\mathbb{F}_2) \to H^2(A,\mathbb{F}_2)$ совпадает с гомоморфизмом Фробениуса, то из леммы 3.4 следует, что следующая диаграмма коммутативна.

$$
\begin{tikzcd}
(A/2)^\vee \arrow[r, "\tilde\beta^\vee"] \arrow[d, "\cong"] & ({}_2A)^\vee \arrow[d, tail] \\
H^1(A,\mathbb{F}_2) \arrow[r, "x\mapsto x^2"] & H^2(A,\mathbb{F}_2).
\end{tikzcd}
$$

Следовательно, квадрат алгебр Хопфа (3.8) коммутативен. Известно([38, Th. 4.4], [44, Cor. 4.16]), что категория бикоммутативных алгебр Хопфа абелева, прямая сумма задается тензорным произведением, а коядро морфизма $\alpha : C \to D$ определяется как $D/\alpha(C_+)D$, где C_+ — аугментационный идеал C. Легко проверить, что коммутативный квадрат в категории бикоммутативных градуированных алгебр Хопфа кодекартов тогда и только тогда, когда он является кодекартовым в категории бикоммутативных (неградуированных) алгебр Хопфа. Следовательно, расслоенное копроизведение морфизмов $\mathcal{F}$ и $\mathsf{Sym}(\tilde\beta)$ на диаграмме (3.8) совпадает с $\mathsf{Sym}(T(A))/I$ (здесь мы используем то, что в произвольной абелевой категории расслоенное копроизведение двух отображений — это соответствующий фактор их прямой суммы, а также то, что $\mathsf{Sym}(T(A)) \cong \mathsf{Sym}((A/2)^\vee[1]) \otimes \mathsf{Sym}(({}_2A)^\vee[2])$). Таким образом, мы получаем естественный морфизм градуированных алгебр Хопфа

$$\mathsf{Sym}(T(A))/I \to H^*(A,\mathbb{F}_2)$$

и квадрат (3.8) кодекартов тогда и только тогда, когда этот морфизм является изоморфизмом.

Все функторы в диаграмме (3.8) аддитивны как функторы из категории абелевых групп в категорию бикоммутативных алгебр Хопфа (они переводят прямые суммы в тензорные произведения). Отсюда следует, что для доказательства кодекартовости квадрата для конечно порожденных абелевых групп, достаточно доказать, что квадрат является кодекартовым для циклических групп $A = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p^n$, где p простое и $n \geqslant 1$. Если $p \neq 2$ и $n \geqslant 1$, то все алгебры в квадрате тривиальны. Случай $A = \mathbb{Z}$ следует из стандартного факта, что

$H^*(\mathbb{Z},\mathbb{F}_2)\cong \mathbb{F}_2[x]/(x^2)$. Остальные случаи $\mathbb{Z}/2$ и $\mathbb{Z}/2^n$ для $n\geqslant 2$ следуют из изоморфизмов $H^*(\mathbb{Z}/2,\mathbb{F}_2)\cong\mathbb{F}_2[x]$, $H^*(\mathbb{Z}/2^n,\mathbb{F}_2)\cong \mathbb{F}_2[x,y]/(x^2)$, где $\mathsf{deg}(x)=1$ и $\mathsf{deg}(y)=2$ (см. [23, §3.2]).

Напомним, что квадрат в абелевой категории является кодекартовым (декартовым) тогда и только тогда, когда его тотализация представляет собой точную справа (слева) последовательность. Таким образом, кодекартов квадрат является декартовым тогда и только тогда, когда первая стрелка его тотализации является мономорфизмом. Поэтому декартовость квадрата (3.8) следует из того, что гомоморфизм Фробениуса $\mathsf{Sym}((A/2)^\vee)\to\mathsf{Sym}((A/2)^\vee)$ в данном случае является мономорфизмом.

$\square$

Следствие 3.6. *Для конечно порожденной абелевой группы A существует естественная короткая точная последовательность алгебр Хопфа*

$$\mathbb{F}_2\longrightarrow \mathsf{Sym}(({}_2A)^\vee)\longrightarrow H^*(A,\mathbb{F}_2)\longrightarrow \Lambda((A/2)^\vee)\longrightarrow\mathbb{F}_2.$$

Доказательство. Это следует из того, что последовательность $\mathbb{F}_2\to\mathsf{Sym}(V)\xrightarrow{\mathcal{F}}\mathsf{Sym}(V)\to\Lambda(V)\to\mathbb{F}_2$ является короткой точной последовательностью в категории бикоммутативных алгебр Хопфа для любого векторного пространства V, с учетом кодекартовости квадрата (3.8) из теоремы 3.5. $\square$

Следствие 3.7. *Для конечно порожденной абелевой группы A существует естественная фильтрация функтора $H^n(A,\mathbb{F}_2)$ подфункторами $H^n(A,\mathbb{F}_2)=\Phi^0\supseteq\Phi^1\supseteq\dots\supseteq\Phi^{\lfloor n/2\rfloor+1}=0$ такая что*

$$\Phi^i/\Phi^{i+1}\cong\Lambda^{n-2i}((A/2)^\vee)\otimes\mathsf{Sym}^i(({}_2A)^\vee).$$

Доказательство. Это следует из Следствия 3.6 и Теоремы 3.3. $\square$

Следствие 3.8. *Для конечно порожденной абелевой группы A группа $H^n(A,\mathbb{F}_2)$ естественным образом изоморфна коядру отображения*

$$\bigoplus_{2k+l+2m=n;\ k\geqslant 1}\mathsf{Sym}^k(A/2^\vee)\otimes\mathsf{Sym}^l(A/2^\vee)\otimes\mathsf{Sym}^m({}_2A^\vee)\longrightarrow\bigoplus_{i+2j=n}\mathsf{Sym}^i(A/2^\vee)\otimes\mathsf{Sym}^j({}_2A^\vee).$$

В частности, следующие две последовательности функторов является короткими точными

$$0\longrightarrow(A/2)^\vee\longrightarrow\mathsf{Sym}^2(A/2^\vee)\oplus{}_2A^\vee\longrightarrow H^2(A,\mathbb{F}_2)\longrightarrow 0,$$

где первое отображение сопоставляет $x\mapsto(x^2,\tilde\beta^\vee(x))$, *и последовательность*

$$0\longrightarrow(A/2)^\vee\otimes(A/2)^\vee\longrightarrow\mathsf{Sym}^3((A/2)^\vee)\oplus(A/2)^\vee\otimes({}_2A)^\vee\longrightarrow H^3(A,\mathbb{F}_2)\longrightarrow 0,$$

где в первом отображении $x\otimes y\mapsto(x^2y,y\otimes\tilde\beta^\vee(x))$.

Доказательство. Из теоремы 3.5 следует, что $H^*(A,\mathbb{F}_2)$ является коядром соответствующего морфизма $\mathsf{Sym}((A/2)^\vee[2])\to\mathsf{Sym}((A/2)^\vee[1])\otimes\mathsf{Sym}(({}_2A)^\vee[2])$ в категории бикоммутативных алгебр Хопфа, из чего следует требуемое утверждение. $\square$

3.4. **Гомологии абелевых групп.** В этом разделе представлены двойственные результаты соответствующие гомологиям. Более того, верны они и в более общем случае: для произвольной абелевой группы, а не только для конечно порожденной. Причина такого расширения контекста заключается в том, что функторы гомологий, разделенных степеней, тензорных произведений и все другие встречающиеся в утверждениях функторы коммутируют с фильтрованными копределами. Доказательство всех утверждений следующее: сначала мы докажем соответствующие результаты для конечно порожденных абелевых групп, дуализирующие результаты для когомологий; а затем представим абелеву группу как копредел ее конечно порожденных подгрупп и воспользуемся тем, что все функторы коммутируют с фильтрованными копределами.

Для векторного пространства V обозначим через $\Gamma(V)=\bigoplus\Gamma^n(V)$ алгебру разделенных степеней алгебры V. В данном контексте эта алгебра определяется как подалгебра шафл алгебры $\mathsf{Sh}(V)$, такая что $\Gamma^n(V)$ — это инвариантное подпространство $V^{\otimes n}$ относительно действия симметрической группы. Хорошо известно, что если V конечномерно, то $\Gamma(V)=\mathsf{Sym}(V^\vee)^\vee$.

Теорема 3.9. *Пусть A — абелева группа (не обязательно конечно порожденная). Тогда следующий квадрат декартов в категории градуированных бикоммутативных алгебр Хопфа*

$$\begin{tikzcd}
H_*(A,\mathbb{F}_2) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma({}_2A[2]) \arrow[d, "\Gamma(\tilde\beta)"] \\
\Gamma(A/2[1]) \arrow[r, "\mathcal{V}"] & \Gamma(A/2[2]),
\end{tikzcd}$$

где $\mathcal{V}$ обозначает Verschiebung.

Следствие 3.10. *Для абелевой группы A существует короткая точная последовательность градуированных бикоммутативных алгебр Хопфа*

$$\mathbb{F}_2\longrightarrow\Lambda(A/2)\longrightarrow H_*(A,\mathbb{F}_2)\longrightarrow\Gamma({}_2A)\longrightarrow\mathbb{F}_2.$$

Следствие 3.11. *Для абелевой группы A существует естественная фильтрация функтора $H_n(A,\mathbb{F}_2)$ подфункторами $0=\Psi_{-1}\subseteq\Psi_0\subseteq\cdots\subseteq\Psi_{\lfloor n/2\rfloor}=H_n(A,\mathbb{F}_2)$ такая что*

$$\Psi_i/\Psi_{i-1}\cong\Lambda^{n-2i}(A/2)\otimes\Gamma^i({}_2A).$$

Следствие 3.12. *Для абелевой группы A группа $H_n(A,\mathbb{F}_2)$ естественным образом изоморфна ядру отображения*

$$\bigoplus_{i+2j=n}\Gamma^i(A/2)\otimes\Gamma^j({}_2A)\longrightarrow\bigoplus_{2k+l+2m=n;\ k\geqslant 1}\Gamma^k(A/2)\otimes\Gamma^l(A/2)\otimes\Gamma^m({}_2A).$$

В частности, есть короткая точная последовательность функторов

$$0\longrightarrow H_2(A,\mathbb{F}_2)\longrightarrow\Gamma^2(A/2)\oplus{}_2A\longrightarrow A/2\longrightarrow 0,$$

и короткая точная последовательность функторов

$$0\longrightarrow H_3(A,\mathbb{F}_2)\longrightarrow\Gamma^3(A/2)\oplus A/2\otimes{}_2A\longrightarrow A/2\otimes A/2\longrightarrow 0.$$

3.5. **Не существование факторизации функтора (ко)гомологий через пару векторных пространств.**

Предложение 3.13. *Пусть $Vect^2$ — категория пар векторных пространств над $\mathbb{F}_2$ и пусть $t:Ab\to Vect^2$ — функтор $t(A)=(A/2,{}_2A)$. Предположим, что $n\geqslant 2$. Тогда не существует функтора $\Phi:Vect^2\to Vect$ такого, что $\Phi\circ t\cong H_n(-,\mathbb{F}_2)$.*

$$H_n(A,\mathbb{F}_2)\ncong\Phi(A/2,{}_2A).$$

Более того, такого функтора не существует, даже если мы ограничимся функторами на категории конечно порожденных абелевых групп или даже функторами на категории конечномерных векторных пространств.

Доказательство. В доказательстве мы используем теорию квадратичных функторов из категории свободных конечно порожденных абелевых групп $\mathsf{fAb}\to\mathsf{Ab}$ и квадратичных модулей, а точнее, воспользуемся эквивалентностью этих двух категорий (см. [3], [28], [35]).

Сначала докажем предложение для $n=2$. Допустим противное, пусть существует такой функтор $\Phi:Vect^2\to Vect$, для которого есть естественный изоморфизм $H_2(A,\mathbb{F}_2)\cong\Phi(A/2,{}_2A)$. Возьмем свободную конечно порожденную абелеву группу F. Тогда есть изоморфизм $\Phi(F/2,0)\cong H_2(F,\mathbb{F}_2)\cong\Lambda^2(F/2)$, естественный по F. Отметим, что стандартный изоморфизм $\mathsf{Sym}((F/2)^\vee) \cong H^*(F/2, \mathbb{F}_2)$ влечет существование естественного изоморфизма $H_*(F/2, \mathbb{F}_2) \cong \Gamma(F/2)$. Из этого следует, что $H_2(F/2, \mathbb{F}_2) \cong \Gamma^2(F/2)$.

Следовательно, $\Phi(F/2, F/2) \cong \Gamma^2(F/2)$. Поскольку $(F/2, F/2) = (F/2, 0) \oplus (0, F/2)$ в категории Vect^2, получаем, что $\Phi(F/2, 0) \cong \Lambda^2(F/2)$ — естественный ретракт $\Phi(F/2, F/2) \cong \Gamma^2(F/2)$. С другой стороны, легко вычислить квадратичный $\mathbb{Z}$-модуль $\Lambda^2(F/2) : 0 \to \mathbb{Z}/2 \to 0$, квадратичный $\mathbb{Z}$-модуль $\Gamma^2(F/2) : \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{1} \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2$, и заметить, что первый модуль не является ретрактом второго, получаем противоречие. Итак, мы доказали предложение для $n = 2$.

Для $n > 2$ докажем по индукции. Из теоремы Кюннета следует, что $H_n(A \times \mathbb{Z}, \mathbb{F}_2) = H_n(A, \mathbb{F}_2) \oplus H_{n-1}(A, \mathbb{F}_2)$, откуда $H_{n-1}(A, \mathbb{F}_2) = \mathit{Coker}(H_n(A, \mathbb{F}_2) \to H_n(A \times \mathbb{Z}, \mathbb{F}_2))$. Из этого следует, что существование подобного функтора Φ для H_n влечет существование такого функтора для H_{n-1}, это доказывает утверждение предложения. $\square$

4. Парасвободные алгебры Ли

В 1960-е годы Г. Баумслаг ввел класс парасвободных групп [4], [5], [6], [7]. Напомним, что группа G называется *парасвободной*, если G нильпотентно аппроксимируема и существуют гомоморфизм из свободной группы F в G, индуцирующий изоморфизмы на факторах нижних центральных рядов $F/\gamma_i(F) \simeq G/\gamma_i(G),\ i \geqslant 1$. Основной мотивацией введения и изучения парасвободных групп был вопрос, как охарактеризовать класс групп когомологической размерности один. Г. Баумслаг называл парасвободные группы "почти свободными" и надеялся, что некоторые из них могут дать примеры несвободных групп когомологической размерности один. В конце 1960-х годов появились результаты Дж. Столлингса и Р. Свона [41], [43]. По теореме Столлингса-Свона группы когомологической размерности один свободны, следовательно, несвободные парасвободные группы, построенные в [4], [5], имеют когомологическую размерность не менее двух. Несмотря на это, парасвободные группы имеют ряд общих со свободными группами свойств. Г. Баумслаг на протяжении многих лет изучал эти свойства и поставил ряд естественных проблем о парасвободных группах. Основная гипотеза о гомологических свойствах парасвободных групп известна как *парасвободная гипотеза(Parafree Conjecture)*: *для конечно порожденной парасвободной группы* G, $H_2(G, \mathbb{Z}) = 0$. Существует также дополнительная сильная форма гипотезы: *для конечно порожденной парасвободной группы* G, $H_2(G, \mathbb{Z}) = 0$ *и когомологическая размерность* G *равна* ≤ 2. Формулировки этих гипотез см. в [17], см. также [18] для обсуждения топологических приложений парасвободных групп. Т. Кокран писал следующее: «Некоторые (включая Баумслага) считают, что все конечно порожденные парасвободные группы имеют когомологическую размерность не более 2 и имеют тривиальное значение H_2». В [17] парасвободная гипотеза сформулирована только для конечно порожденных групп и является следствием результата А.К. Боусфилд [9]: *для нециклической конечно порожденной свободной группы* F *и ее пронильпотентного пополнения* $\hat{F} := \mathsf{lim}\ F/\gamma_i(F)$, $H_2(\hat{F}, \mathbb{Z})$ — *несчетно*. Пронильпотентное пополнение $\hat{F}$ является парасвободным, поэтому оно дает пример несвободной парасвободной группы с $H_2 \neq 0$. Отметим, что первоначальный интерес Г. Баумслага заключался не только в конечно порожденных парасвободных группах, но в парасвободных группах вообще, в частности, он построил локально свободные несвободные парасвободные группы в [7], и проблема разделения свойств парасвободных и свободных групп сначала была сформулирована в общем случае, а не только для конечно порожденных групп. Одним из интересных вопросов является построение примеров счетных (вообще говоря, не конечно порожденных) парасвободных групп с ненулевой H_2 и (или) когомологической размерностью больше двух. В данной главе мы делаем шаг в этом направлении, строя явные примеры счетных парасвободных алгебр Ли с $H_2 \neq 0$, а также пример парасвободной алгебры Ли когомологической длины больше двух.

Концепция парасвободности естественным образом распространяется с групп на другие алгебраические категории, такие как алгебры Ли или аугментированные ассоциативные алгебры. Точно так же, как и для групп, естественно возникают следующие вопросы: *какие общие свойства у свободных и парасвободных объектов*? Можно ли построить конечно порожденный, но не конечно представимый парасвободный объект? Что можно сказать о гомологической и когомологической размерности парасвободных объектов?

Парасвободные алгебры Ли рассматриваются в [8]. Пусть R — коммутативное ассоциативное кольцо. Для алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над R обозначим через $\gamma_i(\mathfrak{g})$ нижний центральный ряд $\mathfrak{g}$. Мы также обозначим через $\gamma_\omega(\mathfrak{g})$ соответствующее пересечение:

$$\gamma_\omega(\mathfrak{g}) = \bigcap_{i \geq 1} \gamma_i(\mathfrak{g}).$$

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется парасвободной, если $\gamma_\omega(\mathfrak{g}) = 0$ и существует свободная алгебра Ли $\mathfrak{f}$ (над R) с таким гомоморфизмом $\mathfrak{f} \to \mathfrak{g}$, который индуцирует изоморфизмы $\mathfrak{f}/\gamma_i(\mathfrak{f}) \simeq \mathfrak{g}/\gamma_i(\mathfrak{g})$ для всех $i = 1, 2, \ldots$

Для алгебры Ли $\mathfrak{g}$ *пронильпотентное пополнение* $\hat{\mathfrak{g}}$ определяется как обратный предел $\varprojlim \mathfrak{g}/\gamma_i(\mathfrak{g})$. Непосредственно из определения следует, что для парасвободной алгебра Ли $\mathfrak{g}$ существует изоморфизм пронильпотентных пополнений $\hat{\mathfrak{f}} \cong \hat{\mathfrak{g}}$, где $\mathfrak{f}$ — свободная алгебра Ли.

Основными результатами данной главы являются теоремы A и B, сформулированные ниже. Обозначим через K поле характеристики 2 и через $\mathfrak{b}$ алгебру Ли над K, порожденную элементами $a, b, \{x_i\}, \{y_i\}$ для $i \geqslant 1$ со следующими соотношениями[1]:

$$\begin{aligned} &x_1 = [a, b, b] + [x_2, b, b], \quad y_1 = [a, b, a] + [y_2, b, b], \\ &\ldots \\ &x_i = [a, b, b] + [x_{i+1}, {}_{2^i} b], \quad y_i = [a, b, a] + [y_{i+1}, {}_{2^i} b], \quad \text{для всех } i \geq 1. \end{aligned}$$

Теорема A. *Алгебра Ли* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}/\gamma_\omega(\mathfrak{b})$ *парасвободна и* $H_2(\mathfrak{a}, K) \neq 0$.

Теорема B. *Пусть* $\mathfrak{f}$ *— свободная алгебра Ли над* $\mathbb{Z}$ *ранга два. Тогда вторая группа гомологий пронильпотентного пополнения* $H_2(\hat{\mathfrak{f}}, \mathbb{Z})$ *содержит 2-делимый элемент. Следовательно, когомологическая размерность* $\hat{\mathfrak{f}}$ *больше двух.*

Доказательства основаны на методе, использованном при решении задачи Боусфилда [33], [34]. Все результаты в [33], [34] предназначены для групп, здесь мы докажем их аналоги для алгебр Ли. В частности, мы вводим лиевский аналог $\mathfrak{l}_R$ группы мигающих лампочек. Мы показываем, что некоторые элементы второй группы гомологий $H_2(\hat{\mathfrak{f}}_R, R)$ отличны от нуля, проецируя их на элементы из $H_2(\hat{\mathfrak{l}}_R, R)$. Основной инструмент для доказательства того, что элемент в $H_2(\hat{\mathfrak{l}}_R, R)$ отличен от нуля, дается следствием 4.8: нетривиальность элемента в гомологиях следует из нерациональности определенного формального степенной ряд.

4.1. **Доказательства.** На протяжении этой главы через R будем обозначать коммутативное ассоциативное кольцо. Обозначим через $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_R(X)$ свободную над R алгебру Ли, порожденную множеством X. Отметим, что свободная алгебра Ли $\mathfrak{f}$ обладает естественной градуировкой $\mathfrak{f} = \oplus_{n \geqslant 1} \mathfrak{f}_n$, и что элемент x из $\hat{\mathfrak{f}}$ можно рассматривать как бесконечный ряд $x = \sum x_n$, где $x_n \in \mathfrak{f}_n$.

Для алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над R i-я группа гомологий определяется как $H_i(\mathfrak{g}, -) = Tor_i^{U(\mathfrak{g})}(R, -)$, где $U(\mathfrak{g})$ — универсальная обертывающая алгебра, а R рассматривается как тривиальный

[1] Для элементов алгебр Ли мы будем использовать обозначения $[a_1, \ldots, a_i] := [[a_1, \ldots, a_{i-1}], a_i]$ и следующие обозначения для коммутаторов Энгеля $[a,_0 b] := a$ и $[a,_{i+1} b] := [[a,_i b], b]$ для $i \geqslant 0$.

модуль над $U(\mathfrak{g})$. В доказательствах мы часто будем использовать также описание второй группы гомологий через неабелевый внешний квадрат алгебр Ли. Изначально подобное описание было найдено для групп Миллером [36], а затем Эллис предложил соответствующий аналог для алгебр Ли [19].

Определение 4.1 ([19])**.** *Внешний квадрат $\mathfrak{g} \tilde{\wedge} \mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над R — это алгебра Ли, подлежащий R-модуль которой — это* $\mathrm{Coker}(\varphi : \mathfrak{g} \wedge_R \mathfrak{g} \wedge_R \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \wedge_R \mathfrak{g})$, *где φ задается как*

$$\varphi(m \wedge n \wedge k) = [m, n] \wedge k + [n, k] \wedge m + [k, m] \wedge n,$$

а скобка Ли определяется формулой

$$[m \wedge n, m' \wedge n'] = [m, n] \wedge [m', n'].$$

Для $m \wedge n \in \mathfrak{g} \wedge_R \mathfrak{g}$ обозначим его представителя в $\mathfrak{g} \tilde{\wedge} \mathfrak{g}$ через $m \tilde{\wedge} n$.

Отметим, что отображение, определенное по формуле $m \tilde{\wedge} n \mapsto [m, n]$, задает каноническое отображение $\mathfrak{g} \tilde{\wedge} \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$.

Предложение 4.2 ([19])**.** *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над R. Тогда существует естественный изоморфизм*

$$H_2(\mathfrak{g}, R) \cong \mathrm{Ker}(\mathfrak{g} \tilde{\wedge} \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}).$$

Следствие 4.3. *Если $\mathfrak{g}$ — абелева алгебра Ли, то $H_2(\mathfrak{g}, R) \cong \mathfrak{g} \tilde{\wedge} \mathfrak{g} \cong \mathfrak{g} \wedge_R \mathfrak{g}$.*

4.2. **Гомологии пронильпотентного пополнения свободной алгебры Ли.** В [9], а затем в [33] было показано, что $H_2(\hat{F}_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$ несчетны, где $\hat{F}_{\mathbb{Z}}$ - пронильпотентное пополнение свободной группы с двумя образующими. В данной секции мы приведем аналог этого результата для свободной алгебры Ли $\mathfrak{f}_R$ ранга два, используя методы из [33] и [34].

Определение 4.4. *Обозначим через $\mathfrak{l}_R$ полупрямую сумму абелевых алгебр Ли $R[x] \rtimes Q$, где $Q = Rt$ — свободный R-модуль ранга 1, порожденный элементом t, и образующая $t \in Q$ действует на многочлен $p \in R[x]$ следующим образом:*

$$[p, t] = px.$$

Это полупрямое произведение вводится как некоторый аналог группы мигающих лампочек.

Через $R[\![x]\!]$ обозначим кольцо формальных степенных рядов над R, будем рассматривать его как абелеву алгебру Ли.

Лемма 4.5. *Пронильпотентным пополнением $\hat{\mathfrak{l}}_R$ является полупрямая сумма $R[\![x]\!] \rtimes Q$ с соответствующим действием*

$$[f, t] = fx$$

для ряда $f \in R[\![x]\!]$ и образующей $t \in Q$.

Доказательство. Поскольку $\gamma_n(\mathfrak{l}_R) = x^n R[x]$ и $\mathfrak{l}_R/\gamma_n(\mathfrak{l}_R) = R[x]/(x^n) \rtimes Q$ — полупрямое произведение с аналогичным действием, то утверждение леммы следует из того факта, что $\varprojlim R[x]/(x^n) = R[\![x]\!]$. $\square$

Лемма 4.6. *Группу вторых гомологий $H_2(\hat{\mathfrak{l}}_R, R)$ можно описать следующим образом*

$$(R[\![x]\!] \wedge_R R[\![x]\!])_Q \cong H_2(\hat{\mathfrak{l}}_R, R),$$

где изоморфизм индуцирован включением $R[\![x]\!] \to \hat{\mathfrak{l}}_R$, и действие Q на $R[\![x]\!] \wedge_R R[\![x]\!]$ задается формулой

$$(f \wedge g) \cdot t = fx \wedge g + f \wedge gx.$$

Доказательство. Рассмотрим короткую точную последовательность $R[\![x]\!] \rightarrowtail \hat{\mathfrak{l}}_R \twoheadrightarrow Q$ и связанную с ней спектральную последовательность Линдона-Хохшильдая-Серра

$$E^2_{i,j} = H_i(Q, H_j(R[\![x]\!], R)) \implies H_{i+j}(\hat{\mathfrak{l}}_R, R),$$

где R — тривиальный $\hat{\mathfrak{l}}_R$-модуль. Поскольку Q — свободная алгебра Ли ранга один, то $H_n(Q, -) = 0$ для $n \geqslant 2$. Отсюда следует, что $E^2_{i,j} = 0$ для $i \geqslant 2$, и, следовательно, мы получаем короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow E^2_{0,2} \longrightarrow H_2(\hat{\mathfrak{l}}_R, R) \longrightarrow E^2_{1,1} \longrightarrow 0.$$

Так как действие Q на $R[\![x]\!]$ не имеет инвариантов, то $E^2_{1,1} = H_1(Q, R[\![x]\!]) \cong R[\![x]\!]^Q = 0$, и поэтому включение

$$H_2(R[\![x]\!], R)_Q = E^2_{0,2} \longrightarrow H_2(\hat{\mathfrak{l}}_R, R)$$

является изоморфизмом. Поскольку $R[\![x]\!]$ абелева, $H_2(R[\![x]\!], R) \cong R[\![x]\!] \wedge_R R[\![x]\!]$, что завершает доказательство. □

Лемма 4.7. *Пусть $\sigma : R[\![x]\!] \to R[\![x]\!]$ — инволюция, заданная формулой*

$$\sigma(\sum_{i\geqslant 0} q_i x^i) = \sum_{i\geqslant 0} (-1)^i q_i x^i.$$

Тогда существует изоморфизм

$$\eta : (R[\![x]\!] \wedge_R R[\![x]\!])_Q \xrightarrow{\sim} R[\![x]\!] \wedge_{R[x]} R[\![x]\!]$$

заданный формулой $\eta(\overline{f \wedge g}) = f \wedge \sigma(g)$, $\eta^{-1}(f \wedge g) = \overline{f \wedge \sigma(g)}$.

Доказательство. Используя свойство сигмы $\sigma(gx) = -x\sigma(g)$, легко проверить, что приведенные выше отображения корректно определены. Кроме того, эти отображения очевидно противоположны друг другу.

□

В дальнейших утверждениях в качестве R мы рассматриваем не произвольное коммутативное кольцо, а область целостности.

Лемма 4.8. *Пусть R — область целостности и $p \in R[\![x]\!]$. Если $p \wedge 1 = 0 \in R[\![x]\!] \wedge_{R[x]} R[\![x]\!]$, то p - рациональная функция над R.*

Доказательство. Обозначим через $R(x)$ поле рациональных функций над R, и через $R(\!(x)\!) = R[\![x]\!] \otimes_{R[x]} R(x)$ — поле степенных рядов Лорана. Тогда следующая диаграмма $R[x]$-модулей коммутативна

$$\begin{tikzcd}
R[\![x]\!] \arrow[r] \arrow[d, tail] & R[\![x]\!] \wedge_{R[x]} R[\![x]\!] \arrow[d] \\
R(\!(x)\!) \arrow[r] & R(\!(x)\!) \wedge_{R(x)} R(\!(x)\!).
\end{tikzcd}$$

Поскольку $R[\![x]\!]$ является областью целостности, мы можем рассматривать ее как подкольцо в $R(\!(x)\!)$. Следовательно

$$\operatorname{Ker}\left(R[\![x]\!] \to R[\![x]\!] \wedge_{R[x]} R[\![x]\!]\right) \subseteq \operatorname{Ker}\left(R(\!(x)\!) \to R(\!(x)\!) \wedge_{R(x)} R(\!(x)\!)\right)$$

и достаточно показать, что если p находится в правом ядре, то он находится в $R(x)$. Действительно, если $p \wedge 1 = 0$ для $p \in R(\!(x)\!)$, тогда p и 1 коллинеарны над $R(x)$, поэтому $p \in R(x)$.

□

Лемма 4.9. *Пусть R — область целостности, а $p = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in R[\![x]\!] \setminus R[x]$ — степенной ряд, не являющийся многочленом, и такой, что для любого $n \geqslant 1$ существует такое $k \geqslant 0$, что $a_k \neq 0$ и $a_{k+1} = \dots = a_{k+n} = 0$. Тогда p не рациональный.*

Доказательство. Рассмотрим многочлен $q = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$. Поскольку p не является многочленом, существует бесконечно много чисел k таких, что $a_k \neq 0$ и $a_{k+1} = \dots = a_{k+n} = 0$. Тогда для любого такого k, $k+n$-ый коэффициент при $p \cdot q$ равен $a_k b_n$. Следовательно, $p \cdot q$ не является многочленом. $\square$

Для последовательности $\alpha = (\alpha_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ введем обозначение p_α для следующего степенного ряда

$$p_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^{2^n}$$

Лемма 4.10. *Пусть R — область целостности. Тогда образ отображения*

$$R[\![x]\!] \to R[\![x]\!] \wedge_{R[x]} R[\![x]\!]$$

заданного по правилу $p \mapsto p \wedge 1$, несчетен. Кроме того, множество

$$\{p_\alpha \wedge 1 \in R[\![x]\!] \wedge_{R[x]} R[\![x]\!] \mid \alpha \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}\}$$

несчетно.

Доказательство. Рассмотрим отношение эквивалентности $\sim$ на множестве всех последовательностей $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, такое что $(\alpha_n) \sim (\beta_n)$ тогда и только тогда, когда множество $\{n \mid \alpha_n \neq \beta_n\}$ конечно. Каждый класс эквивалентности этого отношения имеет лишь счетное число представителей. Следовательно, фактор-множество $\{0,1\}^{\mathbb{N}}/\sim$ несчетно. Возьмем набор $A \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, который содержит по одному представителю каждого класса эквивалентности, тогда A несчетно. Из леммы 4.9 следует, что $p_\alpha - p_\beta$ не является рациональной функцией ни для каких двух различных представителей $\alpha, \beta \in A$. Тогда, из леммы 4.8 следует, что $p_\alpha \wedge 1 \neq p_\beta \wedge 1 \in R[\![x]\!] \wedge_{R[x]} R[\![x]\!]$, откуда следует заявленное утверждение. $\square$

Пусть R — область целостности, а $\mathfrak{f}_R = \mathfrak{f}_R(a,b)$ - свободная алгебра Ли ранга два над R. Обозначим через

$$\varphi : \mathfrak{f}_R \to \mathfrak{l}_R$$

гомоморфизм алгебры Ли, заданный на образующих как $a \mapsto 1_{R[\![x]\!]}$ и $b \mapsto t$. Тогда φ индуцирует отображение $H_2(\hat{\mathfrak{f}}_R, R) \to H_2(\hat{\mathfrak{l}}_R, R)$.

Теорема 4.11. *Образ отображения*

$$H_2(\hat{\mathfrak{f}}_R, R) \to H_2(\hat{\mathfrak{l}}_R, R)$$

несчетен.

Доказательство. Положим $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_R$ и $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_R$. Вторые группы гомологий алгебры Ли $\mathfrak{g}$ мы отождествляем с $\mathrm{Ker}(\mathfrak{g} \mathbin{\tilde\wedge} \mathfrak{g} \to \mathfrak{g})$ в соответствии с описанием 4.2. Тогда индуцированное отображение на гомологиях — это отображение $\hat\varphi \mathbin{\tilde\wedge} \hat\varphi$, где $\hat\varphi : \hat{\mathfrak{f}} \to \hat{\mathfrak{l}}$ естественно индуцированно φ. Обозначим через r_{2n}, s_{2n} следующие элементы из $\mathfrak{f}$

$$r_{2n} = [a, {}_{2n}b], \quad s_{2n} = \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^i [[a, {}_{2n-i}b], [a, {}_{i-1}b]] \right),$$

и для любого $\alpha \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ обозначим через R_α, S_α следующие элементы из $\hat{\mathfrak{f}}$

$$R_\alpha = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n r_{2n}, \quad S_\alpha = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n s_{2n}.$$

В [33, Lemma 4.1] показано, что в любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ для любых $x, y \in \mathfrak{g}$ и для любого $n \geqslant 1$ верны следующие тождества:

$$[[x, {}_{2n}y], x] = \left[\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i [[x, {}_{2n-1-i}y], [x, {}_i y]], y\right].$$

Следовательно, получаем, что $[r_{2n}, a] + [s_{2n}, b] = 0$, и, кроме того, получаем $[R_\alpha, a] + [S_\alpha, b] = 0$. Из этого следует, что $R_\alpha \tilde{\wedge} a + S_\alpha \tilde{\wedge} b \in \mathrm{Ker}(\hat{\mathfrak{f}} \tilde{\wedge} \hat{\mathfrak{f}} \to \hat{\mathfrak{f}})$, и поэтому представляет некоторый элемент во вторых гомологиях. Образ $\hat{\varphi}(R_\alpha) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n x^{2n}$, а $S_\alpha \in \mathrm{Ker}(\hat{\varphi})$. Следовательно

$$(\hat{\varphi} \tilde{\wedge} \hat{\varphi})\,(R_\alpha \tilde{\wedge} a + S_\alpha \tilde{\wedge} b) = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n x^{2n}\right) \wedge 1_{R[\![x]\!]}.$$

Заметим, что изоморфизм $H_2(\hat{\mathfrak{l}}, R) \cong R[\![x]\!] \wedge_{R[x]} R[\![x]\!]$, построенный в 4.6 и 4.7 переводит элемент $\sum_i p_i \tilde{\wedge} q_i$ в $\sum_i p_i \wedge \sigma(q_i)$. Обозначив через $\widetilde{\varphi}$ композицию $\hat{\varphi} \tilde{\wedge} \hat{\varphi}$ с этим отождествлением, получаем, что

$$\widetilde{\varphi}(R_\alpha \tilde{\wedge} a + S_\alpha \tilde{\wedge} b) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n x^{2n} \wedge 1.$$

Тогда по 4.10 образ несчетен. □

4.3. **Доказательство теоремы** A**.** На протяжении этого доказательства через K мы обозначаем поле характеристики 2.

Лемма 4.12. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над K и $a, b, c \in \mathfrak{g}$. Тогда выполняется следующие тождества*

$$[[a, {}_{2^n}b], [c, {}_{2^n}b]] = [a, {}_{2^{n+1}}b, c] + [a, {}_{2^n}b, c, {}_{2^n}b]$$

для $n \geqslant 0$. Следовательно, для любых $a, b \in \mathfrak{g}$

$$[a, {}_{2^{n+1}}b, a] = [a, {}_{2^n}b, a, {}_{2^n}b], \qquad [a, {}_{2^{n+1}}b, a] = [a, b, a, {}_{2^{n+1}-1}b].$$

Доказательство. Случай $n = 0$ следует из тождества Якоби. Обозначим через

$$a_1 = [a, {}_{2^n}b], \quad c_1 = [c, {}_{2^n}b], \quad a_2 = [a, {}_{2^{n+1}}b].$$

По предположению индукции имеем

$$\begin{aligned}
&[[a, {}_{2^{n+1}}b], [c, {}_{2^{n+1}}b]] = [a_1, {}_{2^{n+1}}b, c_1] + [a_1, {}_{2^n}b, c_1, {}_{2^n}b],\\
&[a_1, {}_{2^{n+1}}b, c_1] = [a_2, {}_{2^{n+1}}b, c] + [a_2, {}_{2^n}b, c, {}_{2^n}b],\\
&[a_1, {}_{2^n}b, c_1, {}_{2^n}b] = [a_1, {}_{2^{n+1}}b, c, {}_{2^n}b] + [a_1, {}_{2^n}b, c, {}_{2^{n+1}}b]
\end{aligned}$$

Элементы $[a_1, {}_{2^{n+1}}b, c, {}_{2^n}b]$ и $[a_2, {}_{2^{n+1}}b, c]$ равны, поэтому они сокращаются. На этом шаг индукции завершен. Подставляя $c = a$, получаем

$$0 = [[a, {}_{2^k}b], [a, {}_{2^k}b]] = [a, {}_{2^{k+1}}b, a] + [a, {}_{2^k}b, a, {}_{2^k}b],$$

так что $[a, {}_{2^{k+1}}b, a] = [a, {}_{2^k}b, a, {}_{2^k}b]$ для всех $k \geqslant 0$, и последняя часть утверждения получается применением данного тождества n раз. □

Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{b}$, определенную во введении.

Лемма 4.13. *Вторая группа гомологий $H_2(\mathfrak{b}, K) = 0$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{e} = \mathfrak{f}_K(\{a, b\} \cup \{x_i, y_i \mid i \in \mathbb{N}\})$ и положим $\alpha_i = x_i - [a - x_{i+1}, b, b]$, $\beta_i = y_i - [a, b, a] - [y_{i+1}, {}_{2^i}b]$ для $i \geqslant 1$. Тогда есть следующая короткая точная последовательность

$$0 \to \mathfrak{r} \to \mathfrak{e} \to \mathfrak{b} \to 0,$$

где $\mathfrak{r}$ — идеал, порожденный множеством $\{\alpha_i, \beta_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Поскольку

$$\mathfrak{r} = \sum_{i\in\mathbb{N}} [\alpha_i, \mathfrak{e}] + \sum_{i\in\mathbb{N}} [\beta_i, \mathfrak{e}] + \sum_{i\in\mathbb{N}} K\alpha_i + \sum_{i\in\mathbb{N}} K\beta_i,$$

и $\alpha_i \equiv x_i,\ \beta_i \equiv y_i \pmod{[\mathfrak{e}, \mathfrak{e}]}$, то выполнено

$$\mathfrak{r} \cap [\mathfrak{e}, \mathfrak{e}] = \sum_{i\in\mathbb{N}} [\alpha_i, \mathfrak{e}] + \sum_{i\in\mathbb{N}} [\beta_i, \mathfrak{e}] = [\mathfrak{r}, \mathfrak{e}]$$

и утверждение следует из формулы Хопфа. □

Гомоморфизм R-алгебр Ли $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ называется *2-связным*, если он индуцирует изоморфизм $H_1(\mathfrak{g}, R) \cong H_1(\mathfrak{h}, R)$ и эпиморфизм $H_2(\mathfrak{g}, R) \twoheadrightarrow H_2(\mathfrak{h}, R)$. Следующая теорема является версией теоремы Столлингса [40, Theorem 3.4] для алгебр Ли, доказательство которой аналогично доказательству Столлингса.

Теорема 4.14 (Теорема Столлингса для алгебр Ли, cf. [40])**.** *Пусть R — ассоциативное коммутативное кольцо, а $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ — 2-связный гомоморфизм алгебр Ли над R. Тогда f индуцирует изоморфизмы*

$$\mathfrak{g}/\gamma_n(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{h}/\gamma_n(\mathfrak{h})$$

для любых $n \geqslant 1$.

Доказательство. Для простоты в этом доказательстве мы используем обозначение $H_i(\mathfrak{g}) := H_i(\mathfrak{g}, R)$. Доказательство проводится по индукции. Для $n = 1$ утверждение очевидно. При $n = 2$ утверждение следует из изоморфизма $H_1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}/\gamma_2(\mathfrak{g})$. Предположим теперь, что $n \geqslant 3$. Заметим, что $H_1(\gamma_{n-1}(\mathfrak{g})) = \gamma_{n-1}(\mathfrak{g})/[\gamma_{n-1}(\mathfrak{g}), \gamma_{n-1}(\mathfrak{g})]$ и

$$H_0(\mathfrak{g}/\gamma_{n-1}, H_1(\gamma_{n-1}(\mathfrak{g}))) = H_0(\mathfrak{g}, H_1(\gamma_{n-1}(\mathfrak{g}))) = \gamma_{n-1}(\mathfrak{g})/\gamma_n(\mathfrak{g}).$$

По предположению индукции f индуцирует изоморфизм $\mathfrak{g}/\gamma_{n-1}(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{h}/\gamma_{n-1}(\mathfrak{h})$. Короткая точная последовательность $0 \to \gamma_{n-1}(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\gamma_{n-1}(\mathfrak{g}) \to 0$ индуцирует следующую 5-членную точную последовательность спектральной последовательности Линдона-Хохшильда-Серра

$$H_2(\mathfrak{g}) \to H_2(\mathfrak{g}/\gamma_{n-1}(\mathfrak{g})) \to \gamma_{n-1}(\mathfrak{g})/\gamma_n(\mathfrak{g}) \to H_1(\mathfrak{g}) \to H_1(\mathfrak{g}/\gamma_{n-1}(\mathfrak{g})) \to 0.$$

Если сравнить две такие пятичленные точные последовательности для $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$, воспользоваться предположением индукции и 5-леммой, то мы получим, что f индуцирует изоморфизм $\gamma_{n-1}(\mathfrak{g})/\gamma_n(\mathfrak{g}) \cong \gamma_{n-1}(\mathfrak{h})/\gamma_n(\mathfrak{h})$. Учитывая изоморфизм $\mathfrak{g}/\gamma_{n-1}(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{h}/\gamma_{n-1}(\mathfrak{h})$, получаем изоморфизм $\mathfrak{g}/\gamma_n(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{h}/\gamma_n(\mathfrak{h})$. □

Лемма 4.15. *Алгебра Ли $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}/\gamma_\omega(\mathfrak{b})$ парасвободна.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_K(\{a, b\})$, и рассмотрим отображение $\varphi : \mathfrak{f} \to \mathfrak{b}$, которое тождественно на a и b. Поскольку φ индуцирует изоморфизм на $H_1(\mathfrak{f}, K) \to H_1(\mathfrak{b}, K)$, а также индуцирует сюръективное отображение на второй группе гомологий по лемме 4.13, то оно индуцирует изоморфизмы $\mathfrak{f}/\gamma_n(\mathfrak{f}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{b}/\gamma_n(\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}/\gamma_n(\mathfrak{a})$ по теореме 4.14, и, следовательно, индуцирует изоморфизмы на пронильпотентных пополнениях. □

Следующую лемму легко доказать по индукции.

Лемма 4.16. *В $\mathfrak{a}/\gamma_{2^n}(\mathfrak{a})$ выполнены следующие тождества*

$$x_k \equiv [a, b, b] + \sum_{i=k+1}^{n} [a, {}_{2^i - 2^k + 2}b] \pmod{\gamma_{2^n}(\mathfrak{a})},$$

$$y_k \equiv [a, b, a] + \sum_{i=k+1}^{n} [a, b, a, {}_{2^i - 2^k}b] \pmod{\gamma_{2^n}(\mathfrak{a})}.$$

Следовательно, элементы x_1 и y_1 при включении $\mathfrak{a} \to \hat{\mathfrak{a}}$ имеют следующие образы:

$$x_1 = [a, b, b] + \sum_{i \geqslant 2} [a, {}_{2^i} b], \quad y_1 = [a, b, a] + \sum_{i \geqslant 2} [a, b, a, {}_{2^i - 2} b].$$

Из лемм 4.12 и 4.16 следует, что

$$[x_1, a] + [y_1, b] = 0 \in \hat{\mathfrak{a}},$$

и поскольку $\mathfrak{a}$ вложено в $\hat{\mathfrak{a}}$, элемент $x_1 \tilde{\wedge} a + y_1 \tilde{\wedge} b$ лежит в $\mathrm{Ker}(\mathfrak{a} \tilde{\wedge} \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}) \cong H_2(\mathfrak{a}, K)$. Мы собираемся показать, что этот элемент представляет нетривиальный элемент в гомологиях, что завершает доказательство теоремы A.

Обозначим через $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_K(\{a, b\})$ и рассмотрим отображение $\psi : \mathfrak{a} \to \hat{\mathfrak{l}}_K$, которое является композицией вложения $\mathfrak{a} \to \hat{\mathfrak{a}} \cong \hat{\mathfrak{f}}$ и отображения $\hat{\varphi} : \hat{\mathfrak{f}} \to \hat{\mathfrak{l}}_K$ из теоремы 4.11. Заметим, что для индуцированного отображения $\hat{\psi} : \hat{\mathfrak{a}} \to \hat{\mathfrak{l}}_K$

$$\hat{\psi}(x_1) = x^2 + \sum_{i \geqslant 2} x^{2i}, \quad \hat{\psi}(y_1) = 0.$$

Отождествляя $H_2(\hat{\mathfrak{l}}_K, K)$ с $K[\![x]\!] \wedge_{K[x]} K[\![x]\!]$ как и раньше, получаем, что образ $x_1 \tilde{\wedge} a + y_1 \tilde{\wedge} b$ равен $\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} x^{2^i}\right) \wedge 1$. По лемме 4.9 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x^{2^i}$ не рационально, и, следовательно, образ не является тривиальным по 4.8.

4.4. **Доказательство теоремы** B**.** Мы следуем обозначениям теоремы 4.11 для $R = \mathbb{Z}$. Пусть $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_{\mathbb{Z}}(a, b)$. Как и в доказательстве теоремы 4.11, рассмотрим следующие элементы

$$r_{2^n} = [a, {}_{2^n} b], \quad s_{2^n} = \left(\sum_{i=1}^{2^{n-1}} (-1)^i [[a, {}_{2^n - i} b], [a, {}_{i-1} b]] \right) \in \mathfrak{f}$$

$$t_{2^n} = r_{2^n} \wedge a + s_{2^n} \wedge b \in \mathfrak{f} \wedge \mathfrak{f}$$

для $n = 1, 2, \ldots$ Тогда $\sum_n 2^n t_{2^n}$ определяет цикл в

$$\hat{\mathfrak{f}} \wedge \hat{\mathfrak{f}} \wedge \hat{\mathfrak{f}} \longrightarrow \hat{\mathfrak{f}} \wedge \hat{\mathfrak{f}} \xrightarrow{[\ ,\ ]} \hat{\mathfrak{f}},$$

и представляет собой элемент в гомологиях (в соответствии с описанием 4.2). Степенной ряд $\sum_n 2^n x^{2^n}$ не является рациональной функцией по лемме 4.9. Тогда образ $\sum_n 2^n t_{2^n}$

$$\widetilde{\varphi} \left(\sum_{i=1}^{\infty} 2^n t_{2^n} \right) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} 2^n x^{2^n} \right) \wedge 1$$

нетривиален по лемме 4.8, где $\widetilde{\varphi}$ было определено в доказательстве теоремы 4.11. Следовательно, $\sum_n 2^n t_{2^n}$ определяет нетривиальный элемент в $H_2(\hat{\mathfrak{f}}, \mathbb{Z})$.

Заметим, что элемент $\sum_n 2^n t_{2^n}$ — 2-делимый. Действительно, конечная сумма вида $\sum_{n=1}^k 2^n t_{2^n}$ определяет элемент из ядра отображения $[\ ,\ ] : \mathfrak{f} \tilde{\wedge} \mathfrak{f} \longrightarrow \mathfrak{f}$ и, поскольку вторые гомологии свободной алгебры Ли тривиальны, эта конечная сумма $\sum_{n=1}^k 2^n t_{2^n} \in \mathfrak{f} \tilde{\wedge} \mathfrak{f}$ представляет нулевой элемент. Следовательно, мы имеем $\sum_{n \geqslant 1} 2^n t_{2^n} = 2^k \sum_{n \geqslant k+1} 2^{n-k} t_{2^n} \in \mathfrak{f} \tilde{\wedge} \mathfrak{f}$. Поскольку элемент $\sum_{n \geqslant k+1} 2^{n-k} t_{2^n}$ определяет ненулевой элемент в гомологиях, мы заключаем, что элемент $\sum 2^n t_{2^n}$ является 2^k -делимым для каждого k. Таким образом мы построили 2-делимый элемент в $H_2(\hat{\mathfrak{f}}, \mathbb{Z})$.

Наконец, докажем, что когомологическая размерность $\hat{\mathfrak{f}}$ не меньше 3. Допустим противное, что $\mathrm{cd}(\hat{\mathfrak{f}}) \leq 2$. Рассмотрим проективную резольвенту $P_\bullet \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ над обертывающей алгеброй $U(\hat{\mathfrak{f}})$. Положим $\Omega^n = \operatorname{Coker}(P_{n+1} \to P_n)$ для $n \geqslant 0$. Тогда длинная точная последовательность, полученная из короткой точной последовательности $\Omega^{n+1} \rightarrowtail P_n \twoheadrightarrow \Omega^n$, показывает, что

$$\operatorname{Ext}^m(\Omega^{n+1}, \cdot\,) = \operatorname{Ext}^{m+1}(\Omega^n, \cdot\,), \qquad H^m(\hat{\mathfrak{f}}, \Omega^{n+1}) = H^{m+1}(\hat{\mathfrak{f}}, \Omega^n)$$

для $m \geqslant 1$ и существует мономорфизм

$$H^1(\hat{\mathfrak{f}}, \Omega^n) \rightarrowtail H^0(\hat{\mathfrak{f}}, \Omega^{n+1}).$$

Следовательно, $\operatorname{Ext}^1(\Omega^2, \cdot\,) = \operatorname{Ext}^3(\mathbb{Z}, \cdot\,) = H^3(\hat{\mathfrak{f}}, \cdot\,) = 0$. Отсюда следует, что Ω^2 проективен. С другой стороны, у нас есть мономорфизм $H_2(\hat{\mathfrak{f}}, \mathbb{Z}) = H_1(\hat{\mathfrak{f}}, \Omega^1) \hookrightarrow H_0(\hat{\mathfrak{f}}, \Omega^2)$. Поскольку Ω^2 проективен, $H_0(\hat{\mathfrak{f}}, \Omega^2)$ — свободная абелева группа, а значит, $H_2(\hat{\mathfrak{f}}, \mathbb{Z})$ — свободная абелева группа. Это противоречит тому, что $H_2(\hat{\mathfrak{f}}, \mathbb{Z})$ имеет нетривиальный 2-делимый элемент.

Список литературы

[1] M. Auslander and I. Reiten, Representation theory of artin algebras, **III** and **IV**, *Comm. Algebra* **3** (1975), 239–294 and **5** (1977), 443–518.

[2] M. Auslander, I. Reiten, and S. O. Smalø, Representation theory of Artin algebras, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics* vol. **36**, Cambridge University Press, Cambridge, 1997, Corrected reprint of the 1995 original.

[3] H.-J. Baues: Quadratic functors and metastable homotopy, *J. Pure Appl. Algebra* **91** (1994), no. 1-3, 49-–107.

[4] G. Baumslag: Some groups that are just about free, *Bull. Amer. Math. Soc.* **73** (1967), 621–622.

[5] G. Baumslag: Groups with the same lower central sequence as a relatively free group. I. The groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **129** (1967), 308-–321.

[6] G. Baumslag: Groups with the same lower central series as a relatively-free group, II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **142** (1969), 507-–538.

[7] G. Baumslag: More groups that are just about free, *Bull. Amer. Math. Soc.* **74** (1968), 752-–754.

[8] H. Baur, U. Stammbach: A note on parafree lie algebras, *Comm. Alg.* **8** (1980), 953-–960.

[9] A.K. Bousfield: Homological localization towers for groups and π-modules, *Mem. Amer. Math. Soc* **186** (1977).

[10] A. K. Bousfield: On the p-Adic Completions of Nonnilpotent Spaces, *Transactions of the American Mathematical Society* **331**, no. 1 (May, 1992), 335–359.

[11] K.S.Brown: Cohomology of Groups, *Graduate Texts in Mathematics* **87**, Springer Verlag (1982, 1994).

[12] H. Cartan: Algèbre d'Eilenberg–MacLane et homotopie, *Matematika* 3:5 (1959), 3-–50.

[13] H. Cartan: Sur les groupes d'Eilenberg-MacLane $H(\pi, n)$, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **40** (1954). 467–471 and 704–707.

[14] H. Cartan and S. Eilenberg, Homological algebra. *Princeton University Press*, Princeton, N. J. (1956).

[15] C. Chevalley, S. Eilenberg, Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* **63** (1948), 85-–124.

[16] E. Cline, B. Parshall and L. Scott, Derived categories and Morita theory, *J. Algebra* **104** (1986), 397–409.

[17] T. Cochran: Link concordance invariants and homotopy theory, *Invent. Math.* **90** (1987), 635–645.

[18] T. Cochran and K. Orr: Stability of lower central series of compact 3-Manifold groups, *Topology* **37** (1998), 497–526.

[19] G. J. Ellis: Nonabelian exterior products of Lie algebras and an exact sequence in the homology of Lie algebras, *J. Pure Appl. Algebra* **46** (1987), 111–115.

[20] K. Erdmann, Algebras and semidihedral defect groups, **I**, *Proc. London Math. Soc.* **57**, No. 1 (1988), 109–150.

[21] K. Erdmann, Algebras and semidihedral defect groups, **II**, *Proc. London Math. Soc.* **60**, No. 1 (1990), 123–165.

[22] K. Erdmann, Blocks of Tame Representation Type and Related Algebras, *Springer Lecture Notes in Mathematics* **1428** (1990).

[23] L. Evens: The cohomology ring of a finite group, *Trans. Amer. Math. Soc.* **101** (1961), 224-–239.

[24] E. Farjoun, K. Orr, S. Shelah: Bousfield localization as an algebraic closure of groups, *Israel J. Math.* **66** (1989), 143–153.

[25] D. Happel, Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite-Dimensional Algebras, *London Math. Soc. Lecture Notes* **119**, University Press, Cambridge (1987).

[26] D. Happel and C. M. Ringel, Tilted algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* **274** (1982), 399–443.

[27] D. Happel, On the derived category of a finite dimensional algebra, *Comment. Math. Helv.* **62** (1987), 339–389.

[28] M. Hartl, C. Vespa: Quadratic functors on pointed categories, *Adv. Math.* **226** (2011), 3927— 4010.

[29] A. Hatcher, Algebraic topology, *Cambridge University Press* (2002).

[30] Th. Holm, Derived equivalence classification of algebras of dihegral, semidihedral, and quaternion type, *J. Algebra* **211**, No. 1 (1999), 159–205.

[31] Th. Holm: Blocks of tame representation type and related algebras: derived equivalences and Hochschild cohomology, Habilitationsschrift (2001) Universität Magdeburg.

[32] S.O. Ivanov: On Bousfield's problem for solvable groups of finite Prüfer rank, *Journal of Algebra* **501** (2018), 473–502.

[33] S. Ivanov, R. Mikhailov: A finite $\mathbb{Q}$–bad space, *Geom. Topol.*, **23** (2019), 1237–1249.

[34] S. Ivanov, R. Mikhailov: On discrete homology of a free pro-p-group, *Compositio Mathematica*, **154(10)** (2018), 2195–2204.
[35] R. Mikhailov: Polynomial functors and homotopy theory, *Progress in Math* **311** (2016), arXiv: 1202.0586
[36] C. Miller: The second homology group of a group, *Proc. Amer. Math. Soc.* **3** (1952), 588–595.
[37] J. Milnor and J.C. Moore: On the structure of Hopf algebras, *Ann. of Math.* (2) **81** (1965), 211–264.
[38] K. Newman: A correspondence between bi-ideals and sub-Hopf algebras in cocommutative Hopf algebras, *Journal of Algebra* **36** (1) (1975), 1—15.
[39] J. Rickard, Derived categories and stable equivalence, *J. Pure Appl. Algebra* **61** (1989), 303–317.
[40] J. Stallings: Homology and central series of groups, *J. Algebra* **2** (1965), 170—181.
[41] J. Stallings: On torsion-free groups with infinitely many ends, *Ann. Math.* **88** (1968), 312-–334.
[42] N.E. Steenrod and D.B.A. Epstein: Cohomology operations, *Ann. of Math. Studies* **50**, Princeton University Press (1962).
[43] R. Swan: Groups of cohomological dimension one, *J.Algebra* **12** (1969), 585-–610.
[44] M. Takeuchi: A correspondence between Hopf ideals and sub-Hopf algebras, *Manuscripta Math.* **7** (1972), 251—270.
[45] C. A. Weibel, An Introduction to Homological Algebra, *Cambridge University Press* (1994).
[46] М. А. Антипов, А. И. Генералов, Когомологии алгебр полудиэдрального типа, **II**, *Зап. научн. сем. ПОМИ* **289** (2002), 9–36.
[47] Ю. В. Волков, А. И. Генералов, С. О. Иванов, О построении бимодульных резольвент с помощью леммы Хаппеля. *Зап. научн. сем. ПОМИ* **375** (2010), 61–70.
[48] С. И. Гельфанд, Ю. И. Манин, Методы гомологической алгебры, *Наука* **1** (1988).
[49] А. И. Генералов, Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа. **III**. Серия $SD(2\mathcal{B})_2$ в характеристике 2, *Зап. научн. сем. ПОМИ* **400** (2012), 133–157.
[50] А. И. Генералов, Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа. **VI**. Серия $SD(2\mathcal{B})_2$ в характеристике, отличной от 2, *Зап. научн. сем. ПОМИ* **443** (2016), 61–77.
[51] А. И. Генералов, Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа. **VII**. Алгебры с малым параметром, *Зап. научн. сем. ПОМИ* **452** (2016), 52–69.
[52] А. И. Генералов, Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа. **IV**. Алгебра когомологий для серии $SD(2\mathcal{B})_2(k,t,c)$ при $c=0$, *Зап. научн. сем. ПОМИ* **413** (2013), 45–92.
[53] А. И. Генералов, А. А. Зайковский, О производной эквивалентности алгебр полудиэдрального типа с двумя простыми модулями, *Зап. научн. сем. ПОМИ* **452** (2016), 70–85.
[54] А. И. Генералов, А. А. Зайковский, Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа. **VIII**. Серия $SD(2\mathcal{B})_1$, *Зап. научн. сем. ПОМИ* **460** (2017), 35–52.
[55] С. О. Иванов, А. А. Зайковский, Mod-2-(ко)гомологии абелевых групп, *Зап. научн. сем. ПОМИ* **484** (2019), 72–85.
[56] S.O. Ivanov, R. Mikhailov, A. Zaikovskii, Homological properties of parafree Lie algebras, *J. Algebra* **560** (2020), 1092–1106.