Санкт-Петербургский государственный университет

ЛОНЯГИНА Юлия Евгеньевна

Выпускная квалификационная работа

Математическое моделирование пространственно–сетевых экономических отношений

Уровень образования: аспирантура

Направление 02.06.01 «Компьютерные и информационные науки»

Основная образовательная программа МК.3005.2018 «Математическая кибернетика»

Научный руководитель:
профессор кафедры математического моделирования
энергетических систем СПбГУ,
доктор физико-математических наук, доцент
Крылатов Александр Юрьевич

Рецензент:
старший научный сотрудник Института проблем
транспорта РАН, кандидат технических наук
Селиверстов Ярослав Александрович

Санкт-Петербург

2021

Содержание

Введение

На сегодняшний день торговля и бизнес являются неотъемлемой частью современного мира. А необходимость фирм после производства реализовывать свой товар вынуждает их налаживать операционную деятельность, организовывая системы товарных потоков и торговых связей, масштаб и сложность которых постоянно увеличиваются. Также перед участниками рынка возникают задачи оптимизации уже организованных цепей поставок, т.к. плохо организованная операционная деятельность приводит к убыткам или нереализованной прибыли. Кроме того, последние технологические достижения совместно с распространением Интернета создали высококонкурентную среду для всех участников торгово–рыночной сферы, что ставит в острие угла почти все аспекты торговых отношений: начиная от проблематики формирования рыночных связей, заканчивая ценообразованием и распределением ресурсов в сетях.

Операционное и промышленное моделирование торгово–рыночных связей, а также операционный менеджмент имеют давнюю историю, уходящую корнями к первой промышленной революции. Планирование производства, управление запасами, проектный менеджмент, контрольные диаграммы, статистические отчеты, опросники удовлетворенности клиентов, ранжирование и бенчмаркинг — вот лишь некоторые из инструментов, уже довольно давно используемых для улучшения операционной и промышленной деятельности. Но вместе с тем, как росли масштаб и сложность экономических отношений, существенно усложнялись логистические и операционные проблемы, и традиционные инструменты в свою очередь уже не могли покрыть весь спектр возникающих задач. Это привело к необходимости разработки новых методов управления, а также более комплексных подходов к моделированию: все чаще ощущалась потребность в комбинировании инструментария математического моделирования и экономических реалий в сфере сетей поставок, действующих в глобальном масштабе.

На протяжении последних десятилетий возможности и инструментарий прикладной математики значительно расширились, что позволяет строить модели, более приближенные к реальности, учитывать и/или находить новые закономерности и зависимости в процессах, частично удовлетворяя тем самым запросы современного рынка. В том числе, данная работа посвящена такой актуальной на сегодняшний день проблематике, как вопрос формирования оптимальных экономических связей и последующее определение наилучших параметров в построенной сети.

Целью данной работы является построение и изучение моделей пространственно–сетевых экономических отношений, для достижения которой последовательно решаются следующие задачи: а) установка предположений модели, б) выбор принципа отпимальности и в) нахождение наилучшего решения согласно данному принципу. Первая глава данной работы посвящена моделированию рынка с фиксированными спросом и предложением. Во второй главе исследуется рынок с эластичными спросом и предожением. Наконец, третья глава посвящена численному моделированию рассмотренных моделей рынков.

Постановка задачи

В рамках данной работы мы будем рассматривать однопродуктовый рынок, состоящий из некоторой совокупности поставщиков и некоторой совокупности потребителей (см. Рис. 1).

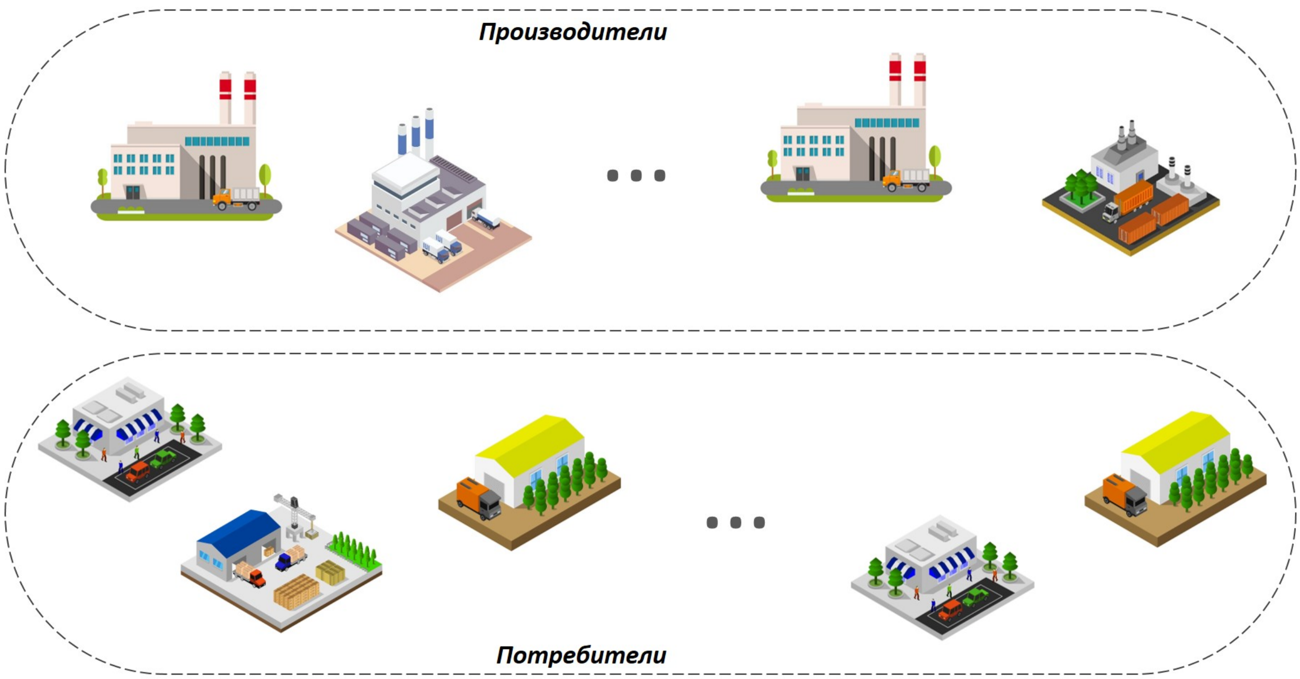

Рис. 1: Рынок

У каждого поставщика предполагается предельная мощность производства, больше которой произвести товара он не может, а также каждый производитель обозначает цену, по которой он готов отпускать единицу товара; в свою очередь каждый потребитель характеризуется величиной спроса — т.е. объем товара, который он желает приобрести — и ценой, которую он готов платить за единицу этого товара. При этом считается, что совокупный спрос всех потребителей полностью и без излишков покрывается совокупным объемом производства всех производителей, иными словами, мы предполагаем, что рынок сбалансирован — объем спроса равен объему предложения.

В данной работе мы также будем считать, что экономические связи возможны (но не обязательны) между любой парой поставщик–потребитель, кроме того, предполагается, что для каждой пары известна величина транзакционных издержек, связанных с транспортировкой товара от продавца покупателю, а именно мы будем предполагать, что величина транзакционных издержек линейно зависит от объема товарного потока между акторами, и коэффициенты этой линейной функции считаются заданными.

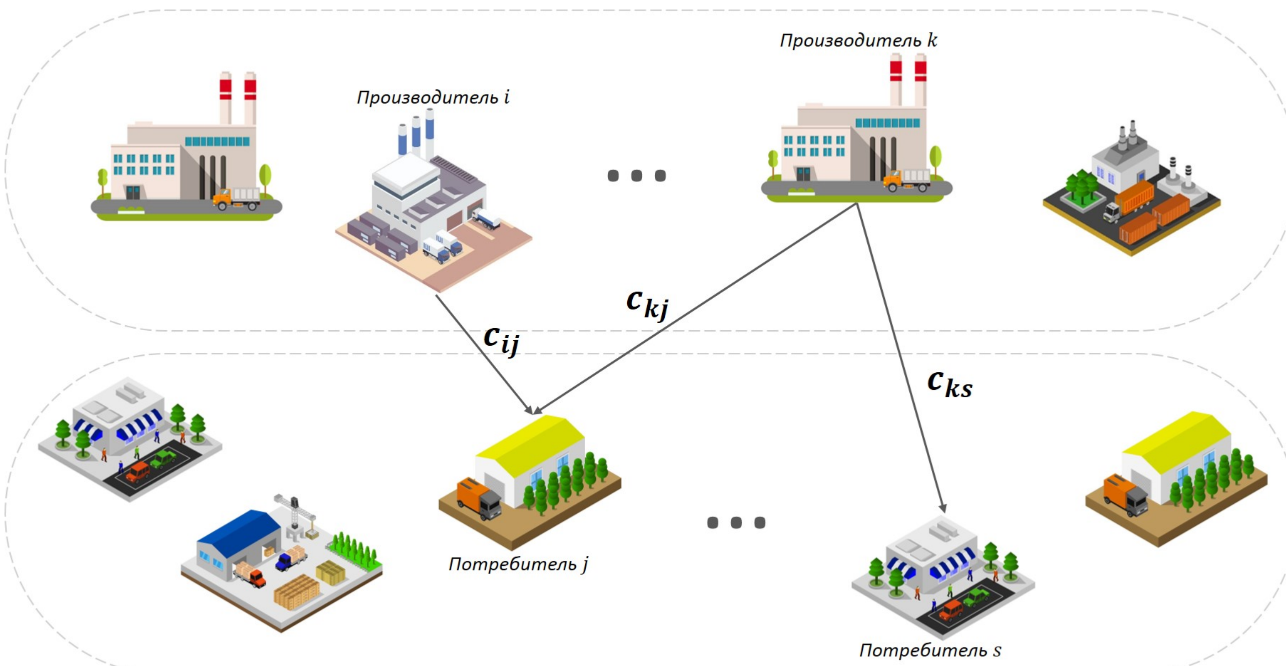

Рис. 2: Транзакционные издержки в модели рынка

Нашей задачей в рамках данной работы с учетом всех вышеизложенных предположений будет являтся, в первую очередь, исследование возможности и условий построения такого товарного потока между производителями и потребителями, который бы удовлетворял условию баланса рынка и минимизировал транспортные издержки. Иными словами, мы будем исследовать возможен ли товарный поток, удовлетворяющий условию равенства спроса предложению и минимизирующий транспортные издержки, и если такой поток возможен, то каковы при этом цены всех участников рынка.

В первой главе данной работы мы будем исследовать данную задачу в предположении, что спрос и предложение являются фиксированными величинами, во второй же главе мы будем предполагать, что обе эти величины являются эластичными, т.е. имеют вид функций.

Обзор литературы

Сети поставок повсеместно встречаются во всех сферах торговли и бизнеса, что делает их одним из самых популярных объектов для изучения у экономистов и ученых по всему миру. Впервые ввел такое понятие как менеджмент сетей поставок, а также рассмотрел задачу управления цепочками поставок как концепцию, которая заключается в интегрированном подходе к планированию и управлению услугами, информационными и товарными потоками, аналитик консалтинговой компании «Буз Аллен Гамильтон» Кейт Оливер [21] в 1982 году. Концепция была достаточно быстро принята и получила широкое распространение и развитие.

Первые работы в сфере менеджмента сетей поставок были посвящены изучению децентрализованных моделей, т.е. сетей поставок, где участники действуют независимо друг от друга. Примером таких работ могут служить статьи [36], [38] и [42].

Позднее акцент интереса ученых сместился к кооперации участников сети и управлению рисками. Кахон Г.П. [8] в своих работах исследовал вопрос влияния координирующих контрактов, а Кайя М. и Озер О. [15] — контрактирование сети для дележа рисков, прибыли и информации. Вместе с темой кооперации кроме того продолжало развиваться направление, связанное с изучением конкуренции в децентрализованной модели сети поставок. Например, работа [1] посвящена вопросами конкуренции с уклоном в исследование влияния дифференциации товаров и потребителей.

Большая работа была проделана в области управления спросом и реагирования на спрос для задач управления сетями электропередач и потоками в них. Основные механизмы ценообразования для систем с одним поставщиком и несколькими потребителями изучаются в [25], [37]. Распределенная генерация и хранение рассмотрены в [5], [6]. Формирование коалиции для локальных сетей с использованием методов кооперативной теории игр рассмотрено в различных сценариях в [2], [24]. Обобщенные равновесия в динамических играх с несколькими лидерами и ведомым изучаются в [28]–[30].

Первое рассмотрение проблемы пространственного равновесия цен было проведено в [33]. Основы для изучения пространственного производства, потребления и торговли товарами были даны в [35]. На сегодняшний день существует широкий спектр вычислительных методов для решения подобных задач [3, 14, 23, 27, 34]. Комплексные математические модели, касающиеся пространственного равновесия, изучаются в [16, 18, 31]. Модели пространственного равновесия обычно используются для решения задачи распределения трафика [13, 19, 20, 39]. Более того, его приложения можно найти на энергетических [4, 32] и телекоммуникационных рынках [12].

Глава 1

Моделирование рынка с фиксированными спросом и предложением

1.1 Построение модели

Рассмотрим совокупность поставщиков M, а также совокупность потребителей N, которые связаны с производством и распределением товара. Через s_i обозначим количество товара, поставляемое поставщиком $i \in M$, а через λ_i — цену за единицу поставляемого i-ым поставщиком товара. В свою очередь, d_j обозначает спрос потребителя $j \in N$, а μ_j — цену, по которой j–ый потребитель готов купить единицу товара. Наконец, $x_{ij} \geq 0$ — это товарный поток между парами $(i,\ j)$, а $c_{ij}(x_{ij})$ — стоимость единичной транзакции, которая может включать в себя стоимость транспортировки, налоги, субсидии и пр.

Также, введем индикаторные функции рыночных связей:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{для } x_{ij} > 0, \\ 0, & \text{для } x_{ij} = 0, \end{cases} \qquad \forall (i,\ j) \in M \times N,$$

а также введем множества: $N_i = \{j \in N \,|\, \delta_{ij} = 1\},\ i \in M$ и $M_j = \{i \in$

$M \mid \delta_{ij} = 1\},\ j \in N.$

Определение 1. *Товарный поток x является пространственным рыночным равновесием тогда и только тогда, когда*

$$\begin{array}{l} \lambda_i + c_{ij}(x_{ij}) = \mu_j \quad \text{для} \quad x_{ij} > 0, \\ \lambda_i + c_{ij}(x_{ij}) \geq \mu_j \quad \text{для} \quad x_{ij} = 0, \end{array} \quad \forall (i,\ j) \in M \times N. \tag{1.1}$$

Иными словами, если цена предложения поставщика i плюс транзакционные издержки $c_{ij}(x_{ij})$ равна цене спроса потребителя j, то между парой (i, j) образуются товарные отношения; в противном случае торговля между парами отсутствует. Товарный поток x^* такой, что

$$x^* = arg \min_x \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} \int\limits_0^{x_{ij}} c_{ij}(u) du \tag{1.2}$$

при ограничениях

$$\begin{array}{ll} \sum\limits_{j \in N} x_{ij} = s_i, & \forall\ i \in M, \\ \sum\limits_{i \in M} x_{ij} = d_j, & \forall\ j \in N, \\ x_{ij} \geq 0, & \forall\ i,\ j \in M \times N, \end{array} \tag{1.3}$$

будет являться пространственным рыночным равновесием согласно введеному определению 1 [26, 31].

1.2 Доказательство существования равновесия

В рамках данной работы мы будем предполагать, что функция издержек линейна. То есть:

$$c_{ij}(x_{ij}) = t^0_{ij} + k^t_{ij} x_{ij} : \quad t^0_{ij} \geq 0,\ k^t_{ij} > 0, \quad \forall (i,\ j) \in M \times N.$$

Лемма 1. *Пространственное рыночное равновесие в случае линейности транзакционных издержек определяется следующим товарным потоком*

$$x_{ij} = \begin{cases} \frac{\mu_j - \lambda_i - t^0_{ij}}{k^t_{ij}}, & \text{если } \mu_j - \lambda_i > t^0_{ij}, \\ 0, & \text{если } \mu_j - \lambda_i \leq t^0_{ij}, \end{cases} \qquad \forall i \in M,\ j \in N, \tag{1.4}$$

где $(\lambda,\ \mu)$ *таковы, что*

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{i \in M_1} \frac{1}{k^t_{i1}} & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & -B_\lambda & \\ 0 & \cdots & \sum\limits_{i \in M_n} \frac{1}{k^t_{in}} & & & \\ & & & -\sum\limits_{j \in N_1} \frac{1}{k^t_{1j}} & \cdots & 0 \\ & B_\mu & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & \cdots & -\sum\limits_{j \in N_m} \frac{1}{k^t_{mj}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} d_1 + \sum\limits_{i \in M_1} \frac{t^0_{i1}}{k^t_{i1}} \\ \vdots \\ d_n + \sum\limits_{i \in M_n} \frac{t^0_{in}}{k^t_{in}} \\ s_1 + \sum\limits_{j \in N_1} \frac{t^0_{1j}}{k^t_{1j}} \\ \vdots \\ s_m + \sum\limits_{j \in N_m} \frac{t^0_{mj}}{k^t_{mj}} \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

где

$$B_\mu = \begin{pmatrix} \frac{\delta_{11}}{k^t_{11}} & \cdots & \frac{\delta_{1n}}{k^t_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta_{m1}}{k^t_{m1}} & \cdots & \frac{\delta_{mn}}{k^t_{mn}} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B_\lambda = \begin{pmatrix} \frac{\delta_{11}}{k^t_{11}} & \cdots & \frac{\delta_{m1}}{k^t_{m1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta_{1n}}{k^t_{1n}} & \cdots & \frac{\delta_{mn}}{k^t_{mn}} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Рассмотрим Лагранжиан задачи (1.2)–(1.3):

$$L(x,\lambda,\mu,\alpha) = \sum_{i\in M}\sum_{j\in N}\int\limits_0^{x_{ij}} c_{ij}(u)du + \sum_{i\in M}\lambda_i\left(\sum_{j\in N}x_{ij} - s_i\right) +$$

$$\sum_{j\in N}\mu_j\left(-\sum_{i\in M}x_{ij} + d_j\right) + \sum_{i\in M}\sum_{j\in N}\alpha_{ij}(-x_{ij}).$$

Согласно условиям Куна-Таккера:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_{ij}} = c_{ij}(x_{ij}) + \lambda_i - \mu_j - \alpha_{ij} = 0, & \forall i \in M,\ j\in N, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = -\sum\limits_{j\in N} x_{ij} + s_i = 0, & \forall\ i\in M, \\ \frac{\partial L}{\partial \mu_j} = -\sum\limits_{i\in M} x_{ij} + d_j = 0, & \forall\ j\in N, \\ \alpha_{ij}(-x_{ij}) = 0, & \forall\ i\in M,\ j\in N. \end{cases}$$

Т.к. $\alpha_{ij}(-x_{ij}) = 0$ для всех $(i,\ j) \in M\times N$, то

$$\begin{matrix} \text{Если } x_{ij} > 0 \Rightarrow \alpha_{ij} = 0, \\ \text{Если } x_{ij} = 0 \Rightarrow \alpha_{ij} \geq 0, \end{matrix} \quad \forall\ (i,\ j)\in M\times N.$$

Таким образом,

$$c_{ij}(x_{ij}) \begin{cases} = \mu_j - \lambda_i, & \text{если } x_{ij} > 0, \\ \geq \mu_j - \lambda_i, & \text{если } x_{ij} = 0, \end{cases} \qquad \forall (i,\ j)\in M\times N$$

или что в случае линейности издержек примет вид:

$$t_{ij}^0 + k_{ij}^t x_{ij} \begin{cases} = \mu_j - \lambda_i, & \text{если } x_{ij} > 0, \\ \geq \mu_j - \lambda_i, & \text{если } x_{ij} = 0, \end{cases} \qquad \forall (i,\ j) \in M \times N$$

что приводит нас к

$$\begin{array}{ll} x_{ij} = \frac{\mu_j - \lambda_i - t_{ij}^0}{k_{ij}^t}, & \text{если } x_{ij} > 0, \\ t_{ij}^0 \geq \mu_j - \lambda_i, & \text{если } x_{ij} = 0, \end{array} \qquad \forall (i,\ j) \in M \times N,$$

следовательно, товарный поток между парой $(i,\ j)$ зависит от значения t_{ij}^0:

$$\begin{array}{l} \text{если } t_{ij}^0 \geq \mu_j - \lambda_i \Rightarrow x_{ij} = 0, \\ \text{если } t_{ij}^0 < \mu_j - \lambda_i \Rightarrow x_{ij} > 0, \end{array} \qquad \forall (i,\ j) \in M \times N,$$

таким образом выражение (1.4) выполнено.

Теперь подставим $x_{ij} = (\mu_j - \lambda_i - t_{ij}^0)/k_{ij}^t > 0$ в условия баланса, получим:

$$\begin{array}{ll} \sum\limits_{j \in N_i} \frac{\mu_j}{k_{ij}^t} - \sum\limits_{j \in N_i} \frac{\lambda_i}{k_{ij}^t} = \sum\limits_{j \in N_i} \frac{t_{ij}^0}{k_{ij}^t} + s_i, & \forall i \in M_j, \\ \sum\limits_{i \in M_j} \frac{\mu_j}{k_{ij}^t} - \sum\limits_{i \in M_j} \frac{\lambda_i}{k_{ij}^t} = \sum\limits_{i \in M_j} \frac{t_{ij}^0}{k_{ij}^t} + d_j, & \forall j \in N_i, \end{array}$$

что в матричном виде эквивалентно искомым выражениям (1.5). □

Согласно следующей лемме полученная система линейных уравнений (1.5) имеет бесконечно много решений.

Лемма 2. *Имеют место следующие утверждения:*

- *матрица системы* (1.5) *является вырожденной, и её ранг равен* $m+n-1$,
- *система линейных уравнений* (1.5) *разрешима.*

Доказательство. **I.** Просуммируем строки с первой до n в матрице из системы (1.5):

$$\left(\sum_{i\in M_1}\frac{1}{k^t_{i1}};\cdots;\sum_{i\in M_n}\frac{1}{k^t_{in}};-\frac{\delta_{11}}{k^t_{11}}-\cdots-\frac{\delta_{1n}}{k^t_{1n}};\cdots;-\frac{\delta_{m1}}{k^t_{m1}}-\cdots-\frac{\delta_{mn}}{k^t_{mn}}\right)$$

т.е.

$$\left(\sum_{i\in M_1}\frac{1}{k^t_{i1}};\cdots;\sum_{i\in M_n}\frac{1}{k^t_{in}};-\sum_{j\in N_1}\frac{1}{k^t_{1j}};\cdots;-\sum_{j\in N_m}\frac{1}{k^t_{mj}}\right)$$

также, в этой же матрице просуммируем строки с $n+1$ до m:

$$\left(\frac{\delta_{11}}{k^t_{11}}+\cdots+\frac{\delta_{m1}}{k^t_{m1}};\cdots;\frac{\delta_{1n}}{k^t_{1n}}+\cdots+\frac{\delta_{mn}}{k^t_{mn}};-\sum_{j\in N_1}\frac{1}{k^t_{1j}};\cdots-\sum_{j\in N_m}\frac{1}{k^t_{mj}}\right)$$

т.е.

$$\left(\sum_{i\in M_1}\frac{1}{k^t_{i1}};\cdots;\sum_{i\in M_n}\frac{1}{k^t_{in}};-\sum_{j\in N_1}\frac{1}{k^t_{1j}};\cdots;-\sum_{j\in N_m}\frac{1}{k^t_{mj}}\right).$$

Как можно видеть, полученные выражения равны. Таким образом, матрица системы (1.5) является вырожденной.

Однако очевидно, что первые n строк линейно независимы, кроме того строки с $n+1$ до m также линейно независимы. Но сумма первых n строк равна сумме последних m строк. Следовательно, метод Гаусса–Зейделя приведет матрицу к трапецевидной форме с размерностью $m+n-1$. Таким образом, ранг матрицы системы (1.5) равен $m+n-1$.

II. Согласно теореме Кронекера–Капелли, чтобы система была разрешимой необходимо и достаточно чтобы ранг её расширенной матрицы был равен рангу исходной матрицы. Построим расширенную матрицу системы:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i\in M_1} \frac{1}{k^t_{i1}} & \cdots & 0 & & & & d_1 + \sum\limits_{i\in M_1} \frac{t^0_{i1}}{k^t_{i1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & -B_\lambda & & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum\limits_{i\in M_n} \frac{1}{k^t_{in}} & & & & d_n + \sum\limits_{i\in M_n} \frac{t^0_{in}}{k^t_{in}} \\ & & & -\sum\limits_{j\in N_1} \frac{1}{k^t_{1j}} & \cdots & 0 & s_1 + \sum\limits_{j\in N_1} \frac{t^0_{1j}}{k^t_{1j}} \\ & B_\mu & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & \cdots & -\sum\limits_{j\in N_m} \frac{1}{k^t_{mj}} & s_m + \sum\limits_{j\in N_m} \frac{t^0_{mj}}{k^t_{mj}} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что rank $\bar{A} \leq m+n$, т.к. dim $\bar{A} = (m+n)\times(m+n+1)$. С другой стороны, согласно первой части теоремы, rank $\bar{A} \geq m+n-1$. Следовательно, $m+n-1 \leq$ rank $\bar{A} \leq m+n$. Просуммируем строки с первой до n в матрице $\bar{A}$:

$$\left(\sum_{i\in M_1} \frac{1}{k^t_{i1}}; \cdots ; \sum_{i\in M_n} \frac{1}{k^t_{in}}; -\sum_{j\in N_1} \frac{1}{k^t_{1j}}; \cdots ; -\sum_{j\in N_m} \frac{1}{k^t_{mj}}; d_1 + \sum_{i\in M_1} \frac{t^0_{i1}}{k^t_{i1}} + \cdots + d_n + \sum_{i\in M_n} \frac{t^0_{in}}{k^t_{in}}\right)$$

т.е.

$$\left(\sum_{i\in M_1} \frac{1}{k^t_{i1}}; \cdots ; \sum_{i\in M_n} \frac{1}{k^t_{in}}; -\sum_{j\in N_1} \frac{1}{k^t_{1j}}; \cdots ; -\sum_{j\in N_m} \frac{1}{k^t_{mj}}; \sum_{j\in N} d_j + \sum_{j\in N} \sum_{i\in M_j} \frac{t^0_{ij}}{k^t_{ij}}\right)$$

также просуммируем строки с $n+1$ до m в матрице $\bar{A}$:

$$\left(\sum_{i\in M_1} \frac{1}{k^t_{i1}}; \cdots ; \sum_{i\in M_n} \frac{1}{k^t_{in}}; -\sum_{j\in N_1} \frac{1}{k^t_{1j}}; \cdots ; -\sum_{j\in N_m} \frac{1}{k^t_{mj}}; s_1 + \sum_{j\in N_1} \frac{t^0_{1j}}{k^t_{1j}} + \cdots + s_m + \sum_{j\in N_m} \frac{t^0_{mj}}{k^t_{mj}}\right)$$

т.е.

$$\left(\sum_{i\in M_1} \frac{1}{k^t_{i1}}; \cdots ; \sum_{i\in M_n} \frac{1}{k^t_{in}}; -\sum_{j\in N_1} \frac{1}{k^t_{1j}}; \cdots ; -\sum_{j\in N_m} \frac{1}{k^t_{mj}}; \sum_{i\in M} s_i + \sum_{i\in M} \sum_{j\in N_i} \frac{t^0_{ij}}{k^t_{ij}}\right).$$

В виду того, что $\sum\limits_{i\in M} s_i = \sum\limits_{j\in N} d_j$ получаем, что сумма первых n строк равна сумме оставшихся строк. Т.е., rank $\bar{A} < m+n$ и, таким образом, rank $\bar{A} =$

$m + n - 1$. То есть, ранг расширенной матрицы системы (1.5) равен рангу исходной матрицы. $\square$

На основании доказанных лемм можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. *В рассматриваемой задаче имеется только одна независимая цена при определении ситуации равновесия на рынке.*

Доказательство. Согласно лемме 1, пространственное рыночное равновесие в случае линейности издержек выражается единственным образом в виде потока (1.4) с ценами спроса и предложения, которые удовлетворяют системе линейных уравнений (1.5). Согласно лемме 2, СЛАУ (1.5) разрешима относительно $m+n$ переменных (цен), в то время как ранг матрицы системы равен $m+n-1$. Т.е. имеется одна независимая переменная, а значения остальных определяются единственным образом относительно этой переменной. $\square$

Таким образом, при фиксированных величинах спроса и предложения равновесной является только та ситуация, при которой один из участников рынка задает цену, а остальные исходя из этого устанавливают свои цены.

1.3 Численный пример

Исследуем полученные ранее результаты на численном примере. Пусть значения параметров заданы следующим образом:

$$M = \{1, 2, 3, 4\}, \quad N = \{1, 2, 3\};$$

$$t^0 = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 7 \\ 5 & 10 & 3 \\ 8 & 8 & 8 \\ 4 & 10 & 12 \end{pmatrix}, \quad k^t = \begin{pmatrix} 0.18 & 0.16 & 0.08 \\ 0.06 & 0.17 & 0.05 \\ 0.15 & 0.07 & 0.1 \\ 0.12 & 0.03 & 0.11 \end{pmatrix};$$

$$s = (990; 700; 910; 615), \quad d = (1200; 1000; 1015).$$

Тогда система (1.5) для (λ, μ) примет вид:

$$\begin{pmatrix} 37.22 & 0 & 0 & -5.56 & -16.67 & -6.67 & -8.33 \\ 0 & 59.75 & 0 & -6.25 & -5.88 & -14.29 & -33.33 \\ 0 & 0 & 51.59 & -12.5 & -20 & -10 & -9.09 \\ 5.56 & 6.25 & 12.5 & -24.31 & 0 & 0 & 0 \\ 16.67 & 5.88 & 20 & 0 & -42.55 & 0 & 0 \\ 6.67 & 14.29 & 10 & 0 & 0 & -30.95 & 0 \\ 8.33 & 33.33 & 9.09 & 0 & 0 & 0 & -59.85 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1425.56 \\ 1531.44 \\ 1351.59 \\ 1158.06 \\ 902.16 \\ 1157.57 \\ 1090.76 \end{pmatrix}.$$

Пусть первый поставщик является модератором рынка и задает свою цену $\lambda_1 = 1000$. Тогда имеем систему:

$$
\begin{pmatrix}
37.22 & 0 & 0 & -16.67 & -6.67 & -8.33 \\
0 & 59.75 & 0 & -5.88 & -14.29 & -33.33 \\
0 & 0 & 51.29 & -20 & -10 & -9.09 \\
5.56 & 6.25 & 12.5 & 0 & 0 & 0 \\
16.67 & 5.88 & 20 & -42.55 & 0 & 0 \\
6.67 & 14.29 & 10 & 0 & -30.95 & 0 \\
8.33 & 33.33 & 9.09 & 0 & 0 & -59.85
\end{pmatrix} *
$$

$$
* \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6989,32 \\ 7781,44 \\ 13851,59 \\ 25463,61 \\ 902,16 \\ 1165,82 \\ 1090,76 \end{pmatrix}. \tag{1.6}
$$

И система (1.6) имеет решение:

$$
\mu_1 \approx 1058; \quad \mu_2 \approx 1046; \quad \mu_3 \approx 1044;
$$

$$
\lambda_1 = 1000; \quad \lambda_2 \approx 1029; \quad \lambda_3 \approx 1012; \quad \lambda_4 \approx 1026.
$$

И равновесный товарный поток между участниками равен:

$$
x \approx \begin{pmatrix} 266 & 260 & 464 \\ 407 & 42 & 251 \\ 294 & 372 & 244 \\ 233 & 326 & 56 \end{pmatrix}.
$$

Глава 2

Моделирование рынка с эластичными спросом и предложением

2.1 Построение модели

Как и ранее, мы будем рассматривать совокупность поставщиков M и совокупность потребителей N, участвующих в производстве и распределении товара, s_i — это объем товара, поставляемый поставщиком $i \in M$ по цене $\lambda_i = r_i(s_i)$ за единицу; d_j — спрос потребителя $j \in N$, $\mu_j = p_j(d_j)$ — цена, по которой j–ый потребитель готов купить единицу товара. Наконец, $x_{ij} \geq 0$ — это товарный поток между парами $(i,\ j)$, а $c_{ij}(x_{ij})$ — стоимость единичной транзакции между ними.

Рассмотрим функционал:

$$F(x, s, d) = \sum_{i \in M} \int\limits_0^{s_i} r_i(z)dz + \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} \int\limits_0^{x_{ij}} c_{ij}(z)dz - \sum_{j \in N} \int\limits_0^{d_j} p_j(z)dz \tag{2.1}$$

Согласно определению 1 равновесным будет такой поток, который приводит к минимуму функцинал (2.1) при выполнении условий баланса:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j \in N} x_{ij} = s_i, \quad i \in M; \\ \sum\limits_{i \in M} x_{ij} = d_j, \quad j \in N; \\ x_{ij} \geq 0, \quad i \in M, \quad j \in N. \end{cases} \tag{2.2}$$

Далее мы будем предполагать, что:

$$\begin{cases} c_{ij}(z) = t_{ij}^0 + k_{ij}^t z; \\ r_i(z) = r_i^0 + k_i^r z; \\ p_j(z) = p_j^0 - k_j^p z. \end{cases}$$

2.2 Построение равновесного потока в модели

Для поиска экстремума функционала (2.1) при ограничениях (2.2) построим Лагранжиан и воспользуемся теоремой Куна-Таккера:

$$L(x,s,d,\lambda,\mu,\alpha,\beta,\gamma)=\sum_{i\in M}\int\limits_0^{s_i}(r_i^0+k_i^r z)dz+\sum_{i\in M}\sum_{j\in N}\int\limits_0^{x_{ij}}(t_{ij}^0+k_{ij}^t z)dz-$$

$$-\sum_{j\in N}\int\limits_0^{d_j}(p_j^0-k_j^p z)dz+\sum_{i\in M}\lambda_i\left(\sum_{j\in N}x_{ij}-s_i\right)+\sum_{j\in N}\mu_j\left(-\sum_{i\in M}x_{ij}+d_j\right)+$$

$$+\sum_{i\in M}\sum_{j\in N}(-\alpha_{ij}x_{ij})+\sum_{i\in M}\beta_i(-s_i)+\sum_{j\in N}\gamma_j(-d_j);$$

$$\begin{cases}
\frac{\partial L}{\partial x_{ij}}=t_{ij}^0+k_{ij}^t x_{ij}+\lambda_i-\mu_j-\alpha_{ij}=0 & \forall(i,\ j)\in M\times N;\\
\frac{\partial L}{\partial s_i}=r_i^0+k_i^r s_i-\lambda_i-\beta_j=0 & \forall\ i\in M;\\
\frac{\partial L}{\partial d_j}=-(p_j^0-k_j^p d_j)+\mu_j-\gamma_j=0 & \forall\ j\in N;\\
\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}=\sum\limits_{j\in N}x_{ij}-s_i=0 & \forall\ i\in M;\\
\frac{\partial L}{\partial \mu_j}=-\sum\limits_{i\in M}x_{ij}+d_j=0 & \forall\ j\in N;\\
\alpha_{ij}x_{ij}=0 & \forall(i,\ j)\in M\times N;\\
\beta_i s_i=0 & \forall\ i\in M;\\
\gamma_j d_j=0 & \forall\ j\in N.
\end{cases}$$

Из последних трех равенств следует следующее:

$$\begin{cases}
x_{ij}>0\ \Rightarrow\ \alpha_{ij}=0;\\
s_i>0\ \Rightarrow\ \beta_i=0;\\
d_j>0\ \Rightarrow\ \gamma_j=0.
\end{cases}$$

Тогда имеем:

$$\begin{cases} x_{ij} = \frac{\mu_j - \lambda_i - t^0_{ij}}{k^t_{ij}}; \\ s_i = \frac{\lambda_i - r^0_i}{k^r_i}; \\ d_j = \frac{p^0_j - \mu_j}{k^p_j}. \end{cases}$$

И из условий баланса имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j \in N} \frac{\mu_j - \lambda_i - t^0_{ij}}{k^t_{ij}} \delta^t_{ij} = \frac{\lambda_i - r^0 s_i}{k^r_i} \delta^r_i, \quad i \in M; \\ \sum\limits_{i \in M} \frac{\mu_j - \lambda_i - t^0_{ij}}{k^t_{ij}} \delta^t_{ij} = \frac{p^0_j - \mu_j}{k^p_j} \delta^p_j, \quad j \in N. \end{cases}$$

В матричном виде:

$$\begin{pmatrix} B_r & B \\ -B^T & B_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = q \tag{2.3}$$

Где:

$$B_r = \begin{pmatrix} -\left(\sum\limits_{j \in N} \frac{\delta^t_{1j}}{k^t_{1j}} + \frac{\delta^r_1}{k^r_1} \right) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\left(\sum\limits_{j \in N} \frac{\delta^t_{2j}}{k^t_{2j}} + \frac{\delta^r_2}{k^r_2} \right) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\left(\sum\limits_{j \in N} \frac{\delta^t_{mj}}{k^t_{mj}} + \frac{\delta^r_m}{k^r_m} \right) \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\delta_{11}^t}{k_{11}^t} & \frac{\delta_{12}^t}{k_{12}^t} & \cdots & \frac{\delta_{1n}^t}{k_{1n}^t} \\ \frac{\delta_{21}^t}{k_{21}^t} & \frac{\delta_{22}^t}{k_{22}^t} & \cdots & \frac{\delta_{2n}^t}{k_{2n}^t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta_{m1}^t}{k_{m1}^t} & \frac{\delta_{m2}^t}{k_{m2}^t} & \cdots & \frac{\delta_{mn}^t}{k_{mn}^t} \end{pmatrix},$$

$$B_p = \begin{pmatrix} \sum_{i \in M} \frac{\delta_{i1}^t}{k_{i1}^t} + \frac{\delta_1^p}{k_1^p} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{i \in M} \frac{\delta_{i2}^t}{k_{i2}^t} + \frac{\delta_2^p}{k_2^p} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{i \in M} \frac{\delta_{in}^t}{k_{in}^t} + \frac{\delta_n^p}{k_n^p} \end{pmatrix},$$

$$q = \begin{pmatrix} \sum_{j \in N} \frac{t_{1j}^0 \delta_{1j}^t}{k_{1j}^t} - \frac{r_1^0 \delta_1^r}{k_1^r} \\ \sum_{j \in N} \frac{t_{2j}^0 \delta_{2j}^t}{k_{2j}^t} - \frac{r_2^0 \delta_2^r}{k_2^r} \\ \vdots \\ \sum_{j \in N} \frac{t_{mj}^0 \delta_{mj}^t}{k_{mj}^t} - \frac{r_m^0 \delta_m^r}{k_m^r} \\ \sum_{i \in M} \frac{t_{i1}^0 \delta_{i1}^t}{k_{i1}^t} + \frac{p_1^0 \delta_1^p}{k_1^p} \\ \sum_{i \in M} \frac{t_{i2}^0 \delta_{i2}^t}{k_{i2}^t} + \frac{p_2^0 \delta_2^p}{k_2^p} \\ \vdots \\ \sum_{i \in M} \frac{t_{in}^0 \delta_{in}^t}{k_{in}^t} + \frac{p_n^0 \delta_n^p}{k_n^p} \end{pmatrix}.$$

2.3 Частные случаи структуры рынков

В данном параграфе мы рассмотрим частные случаи рынков, когда $|M| + |N| = m + n = 3$ и $|M| + |N| = 4$. Перед тем, как приступить, важно отметить, что исходя из определения индикаторных переменных имеют место следующие равенства:

$$\delta_j^p = \begin{cases} 0, & \text{если } \sum_{i \in M} \delta_{ij}^t = 0, \\ 1, & \text{в противном случае,} \end{cases} \qquad \forall j \in N; \tag{2.4}$$

$$\delta_i^r = \begin{cases} 0, & \text{если } \sum_{j \in N} \delta_{ij}^t = 0, \\ 1, & \text{в противном случае,} \end{cases} \qquad \forall i \in M. \tag{2.5}$$

2.3.1 Один поставщик, два покупателя

Пусть $M = \{1\}, \quad N = \{1, 2\}$.

Тогда система (2.3) примет вид:

$$\begin{pmatrix} -\left(\frac{\delta_{11}^t}{k_{11}^t} + \frac{\delta_{12}^t}{k_{12}^t} + \frac{\delta_1^r}{k_1^r}\right) & \frac{\delta_{11}^t}{k_{11}^t} & \frac{\delta_{12}^t}{k_{12}^t} \\ -\frac{\delta_{11}^t}{k_{11}^t} & \frac{\delta_{11}^t}{k_{11}^t} + \frac{\delta_1^p}{k_1^p} & 0 \\ -\frac{\delta_{12}^t}{k_{12}^t} & 0 & \frac{\delta_{12}^t}{k_{12}^t} + \frac{\delta_2^p}{k_2^p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t_{11}^0 \delta_{11}^t}{k_{11}^t} + \frac{t_{12}^0 \delta_{12}^t}{k_{12}^t} - \frac{r_1^0 \delta_1^r}{k_1^r} \\ \frac{t_{11}^0 \delta_{11}^t}{k_{11}^t} + \frac{p_1^0 \delta_1^p}{k_1^p} \\ \frac{t_{12}^0 \delta_{12}^t}{k_{12}^t} + \frac{p_2^0 \delta_2^p}{k_2^p} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим случай, когда один из покупателей, для определенности предположим, что его номер $j = 1$ (для $j = 2$ аналогично), решил не покупать товар, т.е.:

$$\delta_{11}^t = 0 \overset{(2.4)}{\Rightarrow} \delta_1^p = 0.$$

Тогда система (2.3) принимает вид:

$$\begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{k_{12}^t}+\frac{1}{k_1^r}\right) & 0 & \frac{1}{k_{12}^t} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{k_{12}^t} & 0 & \frac{1}{k_{12}^t}+\frac{1}{k_2^p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t_{12}^0}{k_{12}^t}-\frac{r_1^0}{k_1^r} \\ 0 \\ \frac{t_{12}^0}{k_{12}^t}+\frac{p_2^0}{k_2^p} \end{pmatrix}$$

Таким образом, получается, что система свелась к системе с одним покупателем, на параметры которой незакупающийся покупатель влиять не может.

Рассмотрим случай, когда производитель решает не формировать товарных связей, т.е.:

$$\delta_{11}^t = \delta_{12}^t = 0 \overset{(2.5)}{\Rightarrow} \delta_1^r = 0.$$

В этом случае матрица системы вырождается в нулевую матрицу, а вектор свободных компонент — в нулевой вектор. Иными словами, рынок при таком решении единственного производителя не формируется вовсе.

Теперь рассмотрим случай, когда:

$$\delta_{1j}^t = 1, \quad \delta_j^p = 1, \quad j = \overline{1,2}; \quad \delta_1^r = 1.$$

Тогда система (2.3) примет вид:

$$\begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{k_{11}^t}+\frac{1}{k_{12}^t}+\frac{1}{k_1^r}\right) & \frac{1}{k_{11}^t} & \frac{1}{k_{12}^t} \\ -\frac{1}{k_{11}^t} & \frac{1}{k_{11}^t}+\frac{1}{k_1^p} & 0 \\ -\frac{1}{k_{12}^t} & 0 & \frac{1}{k_{12}^t}+\frac{1}{k_2^p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t_{11}^0}{k_{11}^t}+\frac{t_{12}^0}{k_{12}^t}-\frac{r_1^0}{k_1^r} \\ \frac{t_{11}^0}{k_{11}^t}+\frac{p_1^0}{k_1^p} \\ \frac{t_{12}^0}{k_{12}^t}+\frac{p_2^0}{k_2^p} \end{pmatrix}.$$

И её решение тогда:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k_1^r(k_{11}^t+k_1^p)(k_{12}^t+k_2^p)}{Z} & \frac{k_1^r k_1^p(k_{12}^t+k_2^p)}{Z} & \frac{k_1^r k_2^p(k_{11}^t+k_1^p)}{Z} \\ -\frac{k_1^r k_1^p(k_{12}^t+k_2^p)}{Z} & \frac{k_1^p(k_{11}^t k_{12}^t+k_{11}^t k_1^r+k_{12}^t k_1^r+k_{11}^t k_2^p+k_1^r k_2^p)}{Z} & \frac{k_1^r k_1^p k_2^p}{Z} \\ -\frac{k_1^r k_2^p(k_{11}^t+k_1^p)}{Z} & \frac{k_1^r k_1^p k_2^p}{Z} & \frac{k_2^p(k_{11}^t k_{12}^t+k_{11}^t k_1^r+k_{12}^t k_1^r+k_{12}^t k_1^p+k_1^r k_1^p)}{Z} \end{pmatrix} *$$

$$* \begin{pmatrix} \frac{t_{11}^0}{k_{11}^t} + \frac{t_{12}^0}{k_{12}^t} - \frac{r_1^0}{k_1^r} \\ \frac{t_{11}^0}{k_{11}^t} + \frac{p_1^0}{k_1^p} \\ \frac{t_{12}^0}{k_{12}^t} + \frac{p_2^0}{k_2^p} \end{pmatrix},$$

где $Z = k_{11}^t k_{12}^t + k_{11}^t k_1^r + k_{12}^t k_1^r + k_{11}^t k_2^p + k_{12}^t k_1^p + k_1^r k_1^p + k_1^r k_2^p + k_1^p k_2^p$.

Далее построим в явном виде условия формирования ненулевого товарного потока, т.е.:

$$x_{ij} \geq 0, \quad i \in M,\ j \in N.$$

Для полученного решения данные условия примут вид:

$$\begin{cases} x_{11} = \frac{\mu_1 - \lambda_1 - t_{11}^0}{k_{11}^t} = \frac{-\left(t_{11}^0 k_{12}^t + k_{12}^t r_1^0 + t_{11}^0 k_1^r - t_{12}^0 k_1^r - k_{12}^t p_1^0 - k_1^r p_1^0 + t_{11}^0 k_2^p + k_1^r p_2^0 + r_1^0 k_2^p - p_1^0 k_2^p\right)}{Z} \geq 0; \\ x_{12} = \frac{\mu_2 - \lambda_1 - t_{12}^0}{k_{12}^t} = \frac{-\left(t_{12}^0 k_{11}^t + k_{11}^t r_1^0 - t_{11}^0 k_1^r + t_{12}^0 k_1^r - k_{11}^t p_2^0 + k_1^r p_1^0 + t_{12}^0 k_1^p - k_1^r p_2^0 + r_1^0 k_1^p - p_2^0 k_1^p\right)}{Z} \geq 0. \end{cases}$$

Заметим, что $Z \geq 0$, следовательно, данные условия трансформируются в систему неравенств:

$$\begin{cases} t_{11}^0 k_{12}^t + k_{12}^t r_1^0 + t_{11}^0 k_1^r - t_{12}^0 k_1^r - k_{12}^t p_1^0 - k_1^r p_1^0 + t_{11}^0 k_2^p + k_1^r p_2^0 + r_1^0 k_2^p - p_1^0 k_2^p \leq 0; \\ t_{12}^0 k_{11}^t + k_{11}^t r_1^0 - t_{11}^0 k_1^r + t_{12}^0 k_1^r - k_{11}^t p_2^0 + k_1^r p_1^0 + t_{12}^0 k_1^p - k_1^r p_2^0 + r_1^0 k_1^p - p_2^0 k_1^p \leq 0. \end{cases}$$

Перегруппируем слагаемые:

$$\begin{cases} -k_{12}^t \left(p_1^0 - r_1^0 - t_{11}^0\right) - k_2^p \left(p_1^0 - r_1^0 - t_{11}^0\right) - k_1^r \left(t_{12}^0 - t_{11}^0 + p_1^0 - p_2^0\right) \leq 0; \\ -k_{11}^t \left(p_2^0 - r_1^0 - t_{12}^0\right) - k_1^p \left(p_2^0 - r_1^0 - t_{12}^0\right) - k_1^r \left(t_{11}^0 - t_{12}^0 + p_2^0 - p_1^0\right) \leq 0. \end{cases}$$

И окончательно:

$$\begin{cases} \left(p_1^0 - r_1^0 - t_{11}^0\right) \geq \frac{k_1^r}{k_{12}^t + k_2^p} \left(t_{11}^0 - t_{12}^0 + p_2^0 - p_1^0\right); \\ \left(p_2^0 - r_1^0 - t_{12}^0\right) \geq \frac{k_1^r}{k_{11}^t + k_1^p} \left(t_{12}^0 - t_{11}^0 + p_1^0 - p_2^0\right). \end{cases}$$

2.3.2 Один поставик, три покупателя

Пусть $M = \{1\}, \quad N = \{1, 2, 3\}$.

Сразу будем исследовать случай, когда:

$$\delta_{1j}^t = 1, \quad \delta_j^p = 1, \quad j = \overline{1,3}; \quad \delta_1^r = 1,$$

т.к. по аналогии с предыдущим разделом можно показать, что отказ кого–либо из покупателей закупать товар просто ведёт к редуцированию к модели без этого актора, а отказ производителя — ведет к отсутсвию рынка в целом.

В данной структуре рынка система (2.3) примет вид:

$$\begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{k_{11}^t} + \frac{1}{k_{12}^t} + \frac{1}{k_{13}^t} + \frac{1}{k_1^r}\right) & \frac{1}{k_{11}^t} & \frac{1}{k_{12}^t} & \frac{1}{k_{13}^t} \\ -\frac{1}{k_{11}^t} & \frac{1}{k_{11}^t} + \frac{1}{k_1^p} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{k_{12}^t} & 0 & \frac{1}{k_{12}^t} + \frac{1}{k_2^p} & 0 \\ -\frac{1}{k_{13}^t} & 0 & 0 & \frac{1}{k_{13}^t} + \frac{1}{k_3^p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t_{11}^0}{k_{11}^t} + \frac{t_{12}^0}{k_{12}^t} + \frac{t_{13}^0}{k_{13}^t} - \frac{r_1^0}{k_1^r} \\ \frac{t_{11}^0}{k_{11}^t} + \frac{p_1^0}{k_1^p} \\ \frac{t_{12}^0}{k_{12}^t} + \frac{p_2^0}{k_2^p} \\ \frac{t_{12}^0}{k_{13}^t} + \frac{p_3^0}{k_3^p} \end{pmatrix}$$

Опустим приведение решения данной системы здесь (см. стр. 68) и перейдем сразу к построению в явном виде условий формирования товарых потоков.

Для краткости введем обозначения: $E = k_1^p k_2^p k_3^p + k_1^p k_2^p k_1^r + k_1^p k_3^p k_1^r + k_2^p k_3^p k_1^r + k_1^p k_2^p k_{13}^t + k_1^p k_3^p k_{12}^t + k_2^p k_3^p k_{11}^t + k_1^p k_1^r k_{12}^t + k_2^p k_1^r k_{11}^t + k_1^p k_1^r k_{13}^t + k_3^p k_1^r k_{11}^t + k_2^p k_1^r k_{13}^t + k_3^p k_1^r k_{12}^t + k_1^p k_{12}^t k_{13}^t + k_2^p k_{11}^t k_{13}^t + k_3^p k_{11}^t k_{12}^t + k_1^r k_{11}^t k_{12}^t + k_1^r k_{11}^t k_{13}^t + k_1^r k_{12}^t k_{13}^t + k_{11}^t k_{12}^t k_{13}^t$.

Тогда

$$x_{11} = (k_2^p k_3^p p_1^0 + k_2^p k_1^r p_1^0 + k_3^p k_1^r p_1^0 - k_2^p k_1^r p_3^0 - k_3^p k_1^r p_2^0 + k_2^p k_{13}^t p_1^0 + k_3^p k_{12}^t p_1^0 +$$

$$+ k_1^r k_{12}^t p_1^0 + k_1^r k_{13}^t p_1^0 - k_1^r k_{12}^t p_3^0 - k_1^r k_{13}^t p_2^0 + k_{12}^t k_{13}^t p_1^0 - k_2^p k_3^p r_1^0 - k_2^p k_{13}^t r_1^0 -$$

$$- k_3^p k_{12}^t r_1^0 - k_{12}^t k_{13}^t r_1^0 - k_2^p k_3^p t_{11}^0 - k_2^p k_1^r t_{11}^0 - k_3^p k_1^r t_{11}^0 + k_2^p k_1^r t_{13}^0 + k_3^p k_1^r t_{12}^0 - k_2^p k_{13}^t t_{11}^0 -$$

$$- k_3^p k_{12}^t t_{11}^0 - k_1^r k_{12}^t t_{11}^0 - k_1^r k_{13}^t t_{11}^0 + k_1^r k_{12}^t t_{13}^0 + k_1^r k_{13}^t t_{12}^0 - k_{12}^t k_{13}^t t_{11}^0)/E \geq 0.$$

Заметим, что $E \geq 0$. И после преобразований числителя x_{11} получаем неравенство:

$$p_1^0 - r_1^0 - t_{11}^0 \geq \frac{k_1^r}{k_3^p + k_{13}^t}\left(p_3^0 - t_{13}^0 - p_1^0 + t_{11}^0\right) + \frac{k_1^r}{k_2^p + k_{12}^t}\left(p_2^0 - t_{12}^0 - p_1^0 + t_{11}^0\right).$$

Для x_{12} имеем:

$$x_{12} = (k_1^p k_3^p p_2^0 + k_1^p k_1^r p_2^0 - k_1^p k_1^r p_3^0 - k_3^p k_1^r p_1^0 + k_3^p k_1^r p_2^0 + k_1^p k_{13}^t p_2^0 + k_3^p k_{11}^t p_2^0 +$$

$$+ k_1^r k_{11}^t p_2^0 - k_1^r k_{11}^t p_3^0 - k_1^r k_{13}^t p_1^0 + k_1^r k_{13}^t p_2^0 + k_{11}^t k_{13}^t p_2^0 - k_1^p k_3^p r_1^0 - k_1^p k_{13}^t r_1^0 -$$

$$- k_3^p k_{11}^t r_1^0 - k_{11}^t k_{13}^t r_1^0 - k_1^p k_3^p t_{12}^0 - k_1^p k_1^r t_{12}^0 + k_1^p k_1^r t_{13}^0 + k_3^p k_1^r t_{11}^0 - k_3^p k_1^r t_{12}^0 - k_1^p k_{13}^t t_{12}^0 -$$

$$- k_3^p k_{11}^t t_{12}^0 - k_1^r k_{11}^t t_{12}^0 + k_1^r k_{11}^t t_{13}^0 + k_1^r k_{13}^t t_{11}^0 - k_1^r k_{13}^t t_{12}^0 - k_{11}^t k_{13}^t t_{12}^0)/E.$$

После преобразований получаем:

$$p_2^0 - r_1^0 - t_{12}^0 \geq \frac{k_1^r}{k_3^p + k_{13}^t} \left(p_3^0 - t_{13}^0 - p_2^0 + t_{12}^0\right) + \frac{k_1^r}{k_1^p + k_{11}^t} \left(p_1^0 - t_{11}^0 - p_2^0 + t_{12}^0\right).$$

Для x_{13} имеем:

$$x_{13} = (k_1^p k_2^p p_3^0 - k_1^p k_1^r p_2^0 - k_2^p k_1^r p_1^0 + k_1^p k_1^r p_3^0 + k_2^p k_1^r p_3^0 + k_1^p k_{12}^t p_3^0 + k_2^p k_{11}^t p_3^0 -$$

$$- k_1^r k_{11}^t p_2^0 - k_1^r k_{12}^t p_1^0 + k_1^r k_{11}^t p_3^0 + k_1^r k_{12}^t p_3^0 + k_{11}^t k_{12}^t p_3^0 - k_1^p k_2^p r_1^0 - k_1^p k_{12}^t r_1^0 - k_2^p k_{11}^t r_1^0 -$$

$$- k_{11}^t k_{12}^t r_1^0 - k_1^p k_2^p t_{13}^0 + k_1^p k_1^r t_{12}^0 + k_2^p k_1^r t_{11}^0 - k_1^p k_1^r t_{13}^0 - k_2^p k_1^r t_{13}^0 - k_1^p k_{12}^t t_{13}^0 - k_2^p k_{11}^t t_{13}^0 +$$

$$+ k_1^r k_{11}^t t_{12}^0 + k_1^r k_{12}^t t_{11}^0 - k_1^r k_{11}^t t_{13}^0 - k_1^r k_{12}^t t_{13}^0 - k_{11}^t k_{12}^t t_{13}^0)/E.$$

После преобразования получаем:

$$p_3^0 - r_1^0 - t_{13}^0 \geq \frac{k_1^r}{k_2^p + k_{12}^t} \left(p_2^0 - t_{12}^0 - p_3^0 + t_{13}^0\right) + \frac{k_1^r}{k_1^p + k_{11}^t} \left(p_1^0 - t_{11}^0 - p_3^0 + t_{13}^0\right).$$

.

Окончательно имеем систему:

$$\begin{cases} p_2^0 - r_1^0 - t_{12}^0 \geq \frac{k_1^r}{k_3^p + k_{13}^t} \left(p_3^0 - p_1^0 - t_{13}^0 + t_{11}^0\right) + \frac{k_1^r}{k_1^p + k_{11}^t} \left(p_2^0 - p_1^0 - t_{12}^0 + t_{11}^0\right); \\ p_2^0 - r_1^0 - t_{12}^0 \geq \frac{k_1^r}{k_3^p + k_{13}^t} \left(p_3^0 - p_2^0 - t_{13}^0 + t_{12}^0\right) + \frac{k_1^r}{k_1^p + k_{11}^t} \left(p_1^0 - p_2^0 - t_{11}^0 + t_{12}^0\right); \\ p_3^0 - r_1^0 - t_{13}^0 \geq \frac{k_1^r}{k_2^p + k_{12}^t} \left(p_2^0 - p_3^0 - t_{12}^0 - t_{13}^0\right) + \frac{k_1^r}{k_1^p + k_{11}^t} \left(p_1^0 - p_3^0 - t_{11}^0 + t_{13}^0\right). \end{cases}$$

2.3.3 Два поставщика, один покупатель

Пусть $M = \{1, 2\}, \quad N = \{1\}$.

$$\begin{pmatrix} -\left(\frac{\delta^t_{11}}{k^t_{11}} + \frac{\delta^r_1}{k^r_1}\right) & 0 & \frac{\delta^t_{11}}{k^t_{11}} \\ 0 & -\left(\frac{\delta^t_{21}}{k^t_{21}} + \frac{\delta^r_2}{k^r_2}\right) & \frac{\delta^t_{21}}{k^t_{21}} \\ -\frac{\delta^t_{11}}{k^t_{11}} & -\frac{\delta^t_{21}}{k^t_{21}} & \left(\frac{\delta^t_{11}}{k^t_{11}} + \frac{\delta^t_{21}}{k^t_{21}} + \frac{\delta^p_1}{k^p_1}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t^0_{11}\delta^t_{11}}{k^t_{11}} - \frac{r^0_1\delta^r_1}{k^r_1} \\ \frac{t^0_{21}\delta^t_{21}}{k^t_{21}} - \frac{r^0_2\delta^r_2}{k^r_2} \\ \frac{t^0_{11}\delta^t_{11}}{k^t_{11}} + \frac{t^0_{21}\delta^t_{21}}{k^t_{21}} + \frac{p^0_1\delta^p_1}{k^p_1} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим случай, когда один из поставщиков — для определенности его номер $i = 1$ (для $i = 2$ аналогично) — решает не выпускать свой товар на рынок. Иными словами, предположим, что:

$$\delta^t_{11} = 0.$$

Из отмеченного свойства (2.5) наше предположение влечет также, что

$$\delta^r_1 = 0.$$

Тогда система (2.3) примет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{\delta^t_{21}}{k^t_{21}} + \frac{\delta^r_2}{k^r_2}\right) & \frac{\delta^t_{21}}{k^t_{21}} \\ 0 & -\frac{\delta^t_{21}}{k^t_{21}} & \frac{\delta^t_{21}}{k^t_{21}} + \frac{\delta^p_1}{k^p_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{t^0_{21}\delta^t_{21}}{k^t_{21}} - \frac{r^0_2\delta^r_2}{k^r_2} \\ \frac{t^0_{21}\delta^t_{21}}{k^t_{21}} + \frac{p^0_1\delta^p_1}{k^p_1} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, система редуцируется к модели, на параметры которой невыпускающий ничего поставщик никак влиять не может.

Теперь рассмотрим случай, когда покупатель не строит никаких товарных потоков, т.е.:

$$\delta^t_{11} = \delta^t_{21} = 0 \overset{(2.4)}{\Rightarrow} \delta^p_1 = 0.$$

В этом случае матрица системы вырождается в нулевую, а вектор свободных компонент - в нулевой вектор. Таким образом, если на рынке нет ни одного покупателя, готового купить товар, рынок не формируется вовсе.

Теперь рассмотрим случай, когда:

$$\delta^t_{11} = 1; \quad \delta^t_{21} = 1; \quad \delta^p_1 = 1; \quad \delta^r_1 = 1; \quad \delta^r_2 = 1.$$

Тогда система (2.3) примет вид:

$$
\begin{pmatrix}
-\left(\frac{1}{k^t_{11}}+\frac{1}{k^r_1}\right) & 0 & \frac{1}{k^t_{11}} \\
0 & -\left(\frac{1}{k^t_{21}}+\frac{1}{k^r_2}\right) & \frac{1}{k^t_{21}} \\
-\frac{1}{k^t_{11}} & -\frac{1}{k^t_{21}} & \left(\frac{1}{k^t_{11}}+\frac{1}{k^t_{21}}+\frac{1}{k^p_1}\right)
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\frac{t^0_{11}}{k^t_{11}}-\frac{r^0_1}{k^r_1} \\
\frac{t^0_{21}}{k^t_{21}}-\frac{r^0_2}{k^r_2} \\
\frac{t^0_{11}}{k^t_{11}}+\frac{t^0_{21}}{k^t_{21}}+\frac{p^0_1}{k^p_1}
\end{pmatrix}.
$$

И её решение тогда:

$$
\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
-\frac{k^r_1(k^t_{11}k^t_{21}+k^t_{11}k^r_2+k^t_{11}k^p_1+k^t_{21}k^p_1+k^r_2k^p_1)}{Q} & -\frac{k^r_1k^r_2k^p_1}{Q} & \frac{k^r_1k^p_1(k^t_{21}+k^r_2)}{Q} \\
-\frac{k^r_1k^r_2k^p_1}{Q} & -\frac{k^r_2(k^t_{11}k^t_{21}+k^t_{21}k^r_1+k^t_{11}k^p_1+k^t_{21}k^p_1+k^r_1k^p_1)}{Q} & \frac{k^r_2k^p_1(k^t_{11}+k^r_1)}{Q} \\
-\frac{k^r_1k^p_1(k^t_{21}+k^r_2)}{Q} & -\frac{k^r_2k^p_1(k^t_{11}+k^r_1)}{Q} & \frac{k^p_1(k^t_{11}+k^r_1)(k^t_{21}+k^r_2)}{Q}
\end{pmatrix} *
$$

$$
*
\begin{pmatrix}
\frac{t^0_{11}}{k^t_{11}}-\frac{r^0_1}{k^r_1} \\
\frac{t^0_{21}}{k^t_{21}}-\frac{r^0_2}{k^r_2} \\
\frac{t^0_{11}}{k^t_{11}}+\frac{t^0_{21}}{k^t_{21}}+\frac{p^0_1}{k^p_1}
\end{pmatrix},
$$

где $Q = k^t_{11}k^t_{21} + k^t_{11}k^r_2 + k^t_{21}k^r_1 + k^r_1k^r_2 + k^t_{11}k^p_1 + k^t_{21}k^p_1 + k^r_1k^p_1 + k^r_2k^p_1$.

Найдем в явном виде условия формирования экономических свзяей, т.е. товарного потока:

$$x_{ij} \geq 0, \quad i \in M, j \in N.$$

Для полученного решения они примут вид:

$$
\begin{cases}
x_{11} = \frac{\mu_1-\lambda_1-t^0_{11}}{k^t_{11}} = \frac{-\left(t^0_{11}k^t_{21}+k^t_{21}r^0_1+t^0_{11}k^r_2-k^t_{21}p^0_1+r^0_1k^r_2+t^0_{11}k^p_1-t^0_{21}k^p_1-k^r_2p^0_1+r^0_1k^p_1-r^0_2k^p_1\right)}{Q} \geq 0; \\
x_{21} = \frac{\mu_1-\lambda_2-t^0_{21}}{k^t_{21}} = \frac{-\left(t^0_{21}k^t_{11}+k^t_{11}r^0_2+t^0_{21}k^r_1-k^t_{11}p^0_1+r^0_2k^r_1-t^0_{11}k^p_1-k^r_1p^0_1+t^0_{21}k^p_1-r^0_1k^p_1+r^0_2k^p_1\right)}{Q} \geq 0.
\end{cases}
$$

Отметим, что $Q \geq 0$, поэтому система выше эквивалентна системе:

$$
\begin{cases}
t^0_{11}k^t_{21} + k^t_{21}r^0_1 + t^0_{11}k^r_2 - k^t_{21}p^0_1 + r^0_1k^r_2 + t^0_{11}k^p_1 - t^0_{21}k^p_1 - k^r_2p^0_1 + r^0_1k^p_1 - r^0_2k^p_1 \leq 0; \\
t^0_{21}k^t_{11} + k^t_{11}r^0_2 + t^0_{21}k^r_1 - k^t_{11}p^0_1 + r^0_2k^r_1 - t^0_{11}k^p_1 - k^r_1p^0_1 + t^0_{21}k^p_1 - r^0_1k^p_1 + r^0_2k^p_1 \leq 0.
\end{cases}
$$

Перегруппируем слагаемые:

$$(t^0_{11} + r^0_1 - p^0_1)(k^t_{21} + k^r_2) + (t^0_{11} - t^0_{21} + r^0_1 - r^0_2)k^p_1 \leq 0;$$

$$(t^0_{21} + r^0_2 - p^0_1)(k^t_{11} + k^r_1) - (t^0_{11} - t^0_{21} + r^0_1 - r^0_2)k^p_1 \leq 0.$$

И окончательно приходим к системе:

$$\begin{cases} p_1^0 - r_1^0 - t_{11}^0 \geq \frac{k_1^p}{k_{21}^t + k_2^r}(r_1^0 - r_2^0 + t_{11}^0 - t_{21}^0); \\ p_1^0 - r_2^0 - t_{21}^0 \geq \frac{k_1^p}{k_{11}^t + k_1^r}(r_2^0 - r_1^0 + t_{21}^0 - t_{11}^0). \end{cases}$$

2.3.4 Три поставщика, один покупатель

Пусть $M = \{1, 2, 3\}, \quad N = \{1\}$.

Сразу будем исследовать случай, когда:

$$\delta_{i1}^t = 1; \quad \delta_i^r = 1; \quad i = \overline{1,3}; \quad \delta_1^p = 1,$$

т.к. как и ранее можно показать, что отказ кого–либо из поставщиков поставлять товар сводит к модели без этого поставщика, а отказ покупателя нивелирует весь рынок.

В данной структуре рынка система (2.3) примет вид:

$$\begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{k_{11}^t} + \frac{1}{k_1^r}\right) & 0 & 0 & \frac{1}{k_{11}^t} \\ 0 & -\left(\frac{1}{k_{21}^t} + \frac{1}{k_2^r}\right) & 0 & \frac{1}{k_{21}^t} \\ 0 & 0 & -\left(\frac{1}{k_{31}^t} + \frac{1}{k_3^r}\right) & \frac{1}{k_{31}^t} \\ -\frac{1}{k_{11}^t} & -\frac{1}{k_{21}^t} & -\frac{1}{k_{31}^t} & \frac{1}{k_{11}^t} + \frac{1}{k_{12}^t} + \frac{1}{k_{13}^t} + \frac{1}{k_1^p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \mu_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{t_{11}^0}{k_{11}^t} - \frac{r_1^0}{k_1^r} \\ \frac{t_{21}^0}{k_{21}^t} - \frac{r_2^0}{k_2^r} \\ \frac{t_{31}^0}{k_{31}^t} - \frac{r_3^0}{k_3^r} \\ \frac{t_{11}^0}{k_{11}^t} + \frac{t_{21}^0}{k_{21}^t} + \frac{t_{31}^0}{k_{31}^t} + \frac{p_1^0}{k_1^p} \end{pmatrix}.$$

Опустим приведение решения системы здесь (см. стр. 70), и сразу приступим к рассмотрению условий формирования рыночных связей. Введем обозначение:

$$W = k_1^p k_1^r k_2^r + k_1^p k_1^r k_3^r + k_1^p k_2^r k_3^r + k_1^p k_1^r k_{21}^t + k_1^p k_2^r k_{11}^t + k_1^p k_1^r k_{31}^t + k_1^p k_3^r k_{11}^t + k_1^p k_2^r k_{31}^t +$$

$$+ k_1^p k_3^r k_{21}^t + k_1^r k_2^r k_3^r + k_1^p k_{11}^t k_{21}^t + k_1^p k_{11}^t k_{31}^t + k_1^p k_{21}^t k_{31}^t + k_1^r k_2^r k_{31}^t + k_1^r k_3^r k_{21}^t + k_2^r k_3^r k_{11}^t +$$

$$k_1^r k_{21}^t k_{31}^t + k_2^r k_{11}^t k_{31}^t + k_3^r k_{11}^t k_{21}^t + k_{11}^t k_{21}^t k_{31}^t$$

Тогда

$$x_{11} = (k_2^r k_3^r p_1^0 + k_2^r k_{31}^t p_1^0 + k_3^r k_{21}^t p_1^0 + k_{21}^t k_{31}^t p_1^0 - k_1^p k_2^r r_1^0 - k_1^p k_3^r r_1^0 + k_1^p k_2^r r_3^0 +$$

$$+ k_1^p k_3^r r_2^0 - k_1^p k_{21}^t r_1^0 - k_1^p k_{31}^t r_1^0 + k_1^p k_{21}^t r_3^0 + k_1^p k_{31}^t r_2^0 - k_2^r k_3^r r_1^0 - k_2^r k_{31}^t r_1^0 - k_3^r k_{21}^t r_1^0 -$$

$$- k_{21}^t k_{31}^t r_1^0 - k_1^p k_2^r t_{11}^0 - k_1^p k_3^r t_{11}^0 + k_1^p k_2^r t_{31}^0 + k_1^p k_3^r t_{21}^0 - k_1^p k_{21}^t t_{11}^0 - k_1^p k_{31}^t t_{11}^0 + k_1^p k_{21}^t t_{31}^0 +$$

$$+k_1^p k_{31}^t t_{21}^0 - k_2^r k_3^r t_{11}^0 - k_2^r k_{31}^t t_{11}^0 - k_3^r k_{21}^t t_{11}^0 - k_{21}^t k_{31}^t t_{11}^0)/W \geq 0$$

Т.к. $W \geq 0$, то имеем неравенство:

$$k_2^r k_3^r (p_1^0 - r_1^0 - t_{11}^0) + k_2^r k_{31}^t (p_1^0 - r_1^0 - t_{11}^0) + k_3^r k_{21}^t (p_1^0 - r_1^0 - t_{11}^0) +$$

$$+k_{21}^t k_{31}^t (p_1^0 - r_1^0 - t_{11}^0) - k_1^p k_2^r (r_1^0 - r_3^0 + t_{11}^0 - t_{31}^0) -$$

$$-k_1^p k_3^r (r_1^0 - r_2^0 + t_{11}^0 - t_{21}^0) - k_1^p k_{21}^t (r_1^0 - r_3^0 + t_{11}^0 - t_{31}^0) - k_1^p k_{31}^t (r_1^0 - r_2^0 + t_{11}^0 - t_{21}^0) =$$

$$= \left(p_1^0 - r_1^0 - t_{11}^0\right) \left(k_2^r (k_3^r + k_{31}^t) + k_{21}^t (k_3^r + k_{31}^t)\right) - k_1^p (k_2^r + k_{21}^t)(r_1^0 - r_3^0 + t_{11}^0 - t_{31}^0) -$$

$$-k_1^p (k_3^r + k_{31}^t)(r_1^0 - r_2^0 + t_{11}^0 - t_{21}^0) \geq 0$$

То есть:

$$\left(p_1^0 - r_1^0 - t_{11}^0\right) \geq \frac{k_1^p}{(k_3^r + k_{31}^t)}(r_1^0 - r_3^0 + t_{11}^0 - t_{31}^0) + \frac{k_1^p}{(k_2^r + k_{21}^t)}(r_1^0 - r_2^0 + t_{11}^0 - t_{21}^0)$$

Теперь рассмотрим аналогично x_{21}:

$$x_{21} = (k_1^r k_3^r p_1^0 + k_1^r k_{31}^t p_1^0 + k_3^r k_{11}^t p_1^0 + k_{11}^t k_{31}^t p_1^0 - k_1^p k_1^r r_2^0 + k_1^p k_1^r r_3^0 + k_1^p k_3^r r_1^0 -$$

$$-k_1^p k_3^r r_2^0 - k_1^p k_{11}^t r_2^0 + k_1^p k_{11}^t r_3^0 + k_1^p k_{31}^t r_1^0 - k_1^p k_{31}^t r_2^0 - k_1^r k_3^r r_2^0 - k_1^r k_{31}^t r_2^0 -$$

$$-k_3^r k_{11}^t r_2^0 - k_{11}^t k_{31}^t r_2^0 - k_1^p k_1^r t_{21}^0 + k_1^p k_1^r t_{31}^0 + k_1^p k_3^r t_{11}^0 - k_1^p k_3^r t_{21}^0 - k_1^p k_{11}^t t_{21}^0 +$$

$$+k_1^p k_{11}^t t_{31}^0 + k_1^p k_{31}^t t_{11}^0 - k_1^p k_{31}^t t_{21}^0 - k_1^r k_3^r t_{21}^0 - k_1^r k_{31}^t t_{21}^0 - k_3^r k_{11}^t t_{21}^0 - k_{11}^t k_{31}^t t_{21}^0)/W.$$

После преобразования неравенства $x_{21} \geq 0$ имеем:

$$\left(p_1^0 - r_2^0 - t_{21}^0\right) \geq \frac{k_1^p}{(k_3^r + k_{31}^t)}(r_2^0 - r_3^0 + t_{21}^0 - t_{31}^0) + \frac{k_1^p}{(k_1^r + k_{11}^t)}(r_2^0 - r_1^0 + t_{21}^0 - t_{11}^0)$$

Аналогичными вычислениями для x_{31} получаем неравенство:

$$\left(p_1^0 - r_3^0 - t_{31}^0\right) \geq \frac{k_1^p}{(k_2^r + k_{21}^t)}(r_3^0 - r_2^0 + t_{31}^0 - t_{21}^0) + \frac{k_1^p}{(k_1^r + k_{11}^t)}(r_3^0 - r_1^0 + t_{31}^0 - t_{11}^0).$$

Таким образом, мы имеем систему:

$$\begin{cases} \left(p_1^0 - r_1^0 - t_{11}^0\right) \geq \frac{k_1^p}{(k_3^r + k_{31}^t)}(r_1^0 - r_3^0 + t_{11}^0 - t_{31}^0) + \frac{k_1^p}{(k_2^r + k_{21}^t)}(r_1^0 - r_2^0 + t_{11}^0 - t_{21}^0); \\ \left(p_1^0 - r_2^0 - t_{21}^0\right) \geq \frac{k_1^p}{(k_3^r + k_{31}^t)}(r_2^0 - r_3^0 + t_{21}^0 - t_{31}^0) + \frac{k_1^p}{(k_1^r + k_{11}^t)}(r_2^0 - r_1^0 + t_{21}^0 - t_{11}^0); \\ \left(p_1^0 - r_3^0 - t_{31}^0\right) \geq \frac{k_1^p}{(k_2^r + k_{21}^t)}(r_3^0 - r_2^0 + t_{31}^0 - t_{21}^0) + \frac{k_1^p}{(k_1^r + k_{11}^t)}(r_3^0 - r_1^0 + t_{31}^0 - t_{11}^0). \end{cases}$$

2.3.5 Два поставщика, два покупателя

Пусть $M = \{1, 2\}, \quad N = \{1, 2\}$.

Тогда система (2.3) примет вид:

$$\begin{pmatrix} -\left(\frac{\delta^t_{11}}{k^t_{11}} + \frac{\delta^t_{12}}{k^t_{12}} + \frac{\delta^r_1}{k^r_1}\right) & 0 & \frac{\delta^t_{11}}{k^t_{11}} & \frac{\delta^t_{12}}{k^t_{12}} \\ 0 & -\left(\frac{\delta^t_{21}}{k^t_{21}} + \frac{\delta^t_{22}}{k^t_{22}} + \frac{\delta^r_2}{k^r_2}\right) & \frac{\delta^t_{21}}{k^t_{21}} & \frac{\delta^t_{22}}{k^t_{22}} \\ -\frac{\delta^t_{11}}{k^t_{11}} & -\frac{\delta^t_{21}}{k^t_{21}} & \left(\frac{\delta^t_{11}}{k^t_{11}} + \frac{\delta^t_{21}}{k^t_{21}} + \frac{\delta^p_1}{k^p_1}\right) & 0 \\ -\frac{\delta^t_{12}}{k^t_{12}} & -\frac{\delta^t_{22}}{k^t_{22}} & 0 & \left(\frac{\delta^t_{12}}{k^t_{12}} + \frac{\delta^t_{22}}{k^t_{22}} + \frac{\delta^p_2}{k^p_2}\right) \end{pmatrix} *$$

$$* \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t^0_{11}\delta^t_{11}}{k^t_{11}} + \frac{t^0_{12}\delta^t_{12}}{k^t_{12}} - \frac{r^0_1\delta^r_1}{k^r_1} \\ \frac{t^0_{21}\delta^t_{21}}{k^t_{21}} + \frac{t^0_{22}\delta^t_{22}}{k^t_{22}} - \frac{r^0_2\delta^r_2}{k^r_2} \\ \frac{t^0_{11}\delta^t_{11}}{k^t_{11}} + \frac{t^0_{21}\delta^t_{21}}{k^t_{21}} + \frac{p^0_1\delta^p_1}{k^p_1} \\ \frac{t^0_{12}\delta^t_{12}}{k^t_{12}} + \frac{t^0_{22}\delta^t_{22}}{k^t_{22}} + \frac{p^0_2\delta^p_2}{k^p_2} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим случай, когда:

$$\begin{cases} \delta^t_{ij} = 1, & i = j; \\ \delta^t_{ij} = 0, & i \neq j; \end{cases} \quad \delta^p_j = 1, \quad \delta^r_i = 1, \quad i, j = \overline{1, 2}.$$

Тогда система примет вид:

$$\begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{k^t_{11}} + \frac{1}{k^r_1}\right) & 0 & \frac{1}{k^t_{11}} & 0 \\ 0 & -\left(\frac{1}{k^t_{22}} + \frac{1}{k^r_2}\right) & 0 & \frac{1}{k^t_{22}} \\ -\frac{1}{k^t_{11}} & 0 & \left(\frac{1}{k^t_{11}} + \frac{1}{k^p_1}\right) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{k^t_{22}} & 0 & \left(\frac{1}{k^t_{22}} + \frac{1}{k^p_2}\right) \end{pmatrix} *$$

$$* \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t^0_{11}}{k^t_{11}} - \frac{r^0_1}{k^r_1} \\ \frac{t^0_{22}}{k^t_{22}} - \frac{r^0_2}{k^r_2} \\ \frac{t^0_{11}}{k^t_{11}} + \frac{p^0_1}{k^p_1} \\ \frac{t^0_{22}}{k^t_{22}} + \frac{p^0_2}{k^p_2} \end{pmatrix}.$$

И её решение тогда:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k_1^r p_1^0 + k_1^p r_1^0 + k_{11}^t r_1^0 - k_1^r t_{11}^0}{k_1^p + k_1^r + k_{11}^t} \\ \\ \frac{k_2^r p_2^0 + k_2^p r_2^0 + k_{22}^t r_2^0 - k_2^r t_{22}^0}{k_2^p + k_2^r + k_{22}^t} \\ \\ \frac{k_1^r p_1^0 + k_{11}^t p_1^0 + k_1^p r_1^0 + k_1^p t_{11}^0}{k_1^p + k_1^r + k_{11}^t} \\ \\ \frac{k_2^r p_2^0 + k_{22}^t p_2^0 + k_2^p r_2^0 + k_2^p t_{22}^0}{k_2^p + k_2^r + k_{22}^t} \end{pmatrix}.$$

Тогда:

$$x_{11} \geq 0 \sim \frac{k_1^r p_1^0 + k_{11}^t p_1^0 + k_1^p r_1^0 + k_1^p t_{11}^0}{k_1^p + k_1^r + k_{11}^t} - \frac{k_1^r p_1^0 + k_1^p r_1^0 + k_{11}^t r_1^0 - k_1^r t_{11}^0}{k_1^p + k_1^r + k_{11}^t} - t_{11}^0 \geq 0.$$

Далее проведем цепочку преобразований:

$$\frac{k_1^r p_1^0 + k_{11}^t p_1^0 + k_1^p r_1^0 + k_1^p t_{11}^0 - k_1^r p_1^0 - k_1^p r_1^0 - k_{11}^t r_1^0 + k_1^r t_{11}^0 - t_{11}^0 \left(k_1^p + k_1^r + k_{11}^t\right)}{k_1^p + k_1^r + k_{11}^t} \geq 0.$$

$$k_1^r p_1^0 + k_{11}^t p_1^0 + k_1^p r_1^0 + k_1^p t_{11}^0 - k_1^r p_1^0 - k_1^p r_1^0 - k_{11}^t r_1^0 + k_1^r t_{11}^0 - t_{11}^0 k_1^p - t_{11}^0 k_1^r - t_{11}^0 k_{11}^t \geq 0.$$

$$k_{11}^t p_1^0 - k_{11}^t r_1^0 - k_{11}^t t_{11}^0 \geq 0.$$

Таким образом:

$$x_{11} \geq 0 \sim p_1^0 - r_1^0 - t_{11}^0 \geq 0.$$

Для x_{22}:

$$x_{22} \geq 0 \sim \frac{k_2^r p_2^0 + k_{22}^t p_2^0 + k_2^p r_2^0 + k_2^p t_{22}^0}{k_2^p + k_2^r + k_{22}^t} - \frac{k_2^r p_2^0 + k_2^p r_2^0 + k_{22}^t r_2^0 - k_2^r t_{22}^0}{k_2^p + k_2^r + k_{22}^t} - t_{22}^0 \geq 0.$$

Т.е.

$$p_2^0 - r_2^0 - t_{22}^0 \geq 0.$$

Таким образом, получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} p_1^0 - r_1^0 - t_{11}^0 \geq 0; \\ p_2^0 - r_2^0 - t_{22}^0 \geq 0. \end{cases}$$

Рассмотрим случай, когда:

$$\begin{cases} \delta_{ij}^t = 1, \quad i \leq j; \\ \delta_{ij}^t = 0, \quad i > j; \end{cases} \quad \delta_j^p = 1, \quad \delta_i^r = 1, \quad i, j = \overline{1, 2}.$$

Тогда система (2.3) примет вид:

$$\begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{k_{11}^t} + \frac{1}{k_1^r}\right) & 0 & \frac{1}{k_{11}^t} & 0 \\ 0 & -\left(\frac{1}{k_{21}^t} + \frac{1}{k_{22}^t} + \frac{1}{k_2^r}\right) & \frac{1}{k_{21}^t} & \frac{1}{k_{22}^t} \\ -\frac{1}{k_{11}^t} & -\frac{1}{k_{21}^t} & \left(\frac{1}{k_{11}^t} + \frac{1}{k_{21}^t} + \frac{1}{k_1^p}\right) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{k_{22}^t} & 0 & \left(\frac{1}{k_{22}^t} + \frac{1}{k_2^p}\right) \end{pmatrix} *$$

$$* \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t_{11}^0}{k_{11}^t} - \frac{r_1^0}{k_1^r} \\ \frac{t_{21}^0}{k_{21}^t} + \frac{t_{22}^0}{k_{22}^t} - \frac{r_2^0}{k_2^r} \\ \frac{t_{11}^0}{k_{11}^t} + \frac{t_{21}^0}{k_{21}^t} + \frac{p_1^0}{k_1^p} \\ \frac{t_{22}^0}{k_{22}^t} + \frac{p_2^0}{k_2^p} \end{pmatrix}.$$

Её решение:

$$\lambda_1 = (k_1^p k_1^r k_2^r p_2^0 + k_2^p k_1^r k_2^r p_1^0 + k_2^p k_1^r k_{21}^t p_1^0 + k_1^r k_2^r k_{21}^t p_1^0 + k_1^r k_2^r k_{22}^t p_1^0 + k_1^r k_{21}^t k_{22}^t p_1^0 + k_1^p k_2^p k_1^r r_2^0 +$$

$$+ k_1^p k_2^p k_2^r r_1^0 + k_1^p k_2^p k_{11}^t r_1^0 + k_1^p k_2^p k_{21}^t r_1^0 + k_1^p k_2^r k_{11}^t r_1^0 + k_2^p k_2^r k_{11}^t r_1^0 + k_1^p k_2^r k_{21}^t r_1^0 + k_1^p k_1^r k_{22}^t r_2^0 +$$

$$+ k_1^p k_2^r k_{22}^t r_1^0 + k_1^p k_{11}^t k_{22}^t r_1^0 + k_2^p k_{11}^t k_{21}^t r_1^0 + k_1^p k_{21}^t k_{22}^t r_1^0 + k_2^r k_{11}^t k_{21}^t r_1^0 + k_2^r k_{11}^t k_{22}^t r_1^0 +$$

$$+ k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t r_1^0 - k_1^p k_2^p k_1^r t_{11}^0 + k_1^p k_2^p k_1^r t_{21}^0 - k_1^p k_1^r k_2^r t_{11}^0 - k_2^p k_1^r k_2^r t_{11}^0 + k_1^p k_1^r k_2^r t_{21}^0 - k_1^p k_1^r k_2^r t_{22}^0 -$$

$$- k_1^p k_1^r k_{22}^t t_{11}^0 - k_2^p k_1^r k_{21}^t t_{11}^0 + k_1^p k_1^r k_{22}^t t_{21}^0 - k_1^r k_2^r k_{21}^t t_{11}^0 - k_1^r k_2^r k_{22}^t t_{11}^0 - k_1^r k_{21}^t k_{22}^t t_{11}^0)/(k_1^p k_2^p k_1^r +$$

$$+ k_1^p k_2^p k_2^r + k_1^p k_1^r k_2^r + k_2^p k_1^r k_2^r + k_1^p k_2^p k_{11}^t + k_1^p k_2^p k_{21}^t + k_1^p k_2^r k_{11}^t + k_2^p k_2^r k_{11}^t + k_1^p k_1^r k_{22}^t + k_1^p k_2^r k_{21}^t +$$

$$+ k_2^p k_1^r k_{21}^t + k_1^p k_2^r k_{22}^t + k_1^r k_2^r k_{21}^t + k_1^r k_2^r k_{22}^t + k_1^p k_{11}^t k_{22}^t + k_2^p k_{11}^t k_{21}^t + k_1^p k_{21}^t k_{22}^t +$$

$$k_2^r k_{11}^t k_{21}^t + k_2^r k_{11}^t k_{22}^t + k_1^r k_{21}^t k_{22}^t + k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t);$$

$$\lambda_2 = (k_1^p k_1^r k_2^r p_2^0 + k_2^p k_1^r k_2^r p_1^0 + k_1^p k_2^r k_{11}^t p_2^0 + k_2^p k_2^r k_{11}^t p_1^0 + k_1^p k_2^r k_{21}^t p_2^0 + k_1^r k_2^r k_{21}^t p_2^0 + k_1^r k_2^r k_{22}^t p_1^0 +$$

$$+ k_2^r k_{11}^t k_{21}^t p_2^0 + k_2^r k_{11}^t k_{22}^t p_1^0 + k_1^p k_2^p k_1^r r_2^0 + k_1^p k_2^p k_2^r r_1^0 + k_1^p k_2^p k_{11}^t r_2^0 + k_1^p k_2^p k_{21}^t r_2^0 + k_1^p k_1^r k_{22}^t r_2^0 +$$

$$+ k_1^p k_2^r k_{22}^t r_1^0 + k_2^p k_1^r k_{21}^t r_2^0 + k_1^p k_{11}^t k_{22}^t r_2^0 + k_2^p k_{11}^t k_{21}^t r_2^0 + k_1^p k_{21}^t k_{22}^t r_2^0 + k_1^r k_{21}^t k_{22}^t r_2^0 +$$

$$+ k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t r_2^0 + k_1^p k_2^p k_2^r t_{11}^0 - k_1^p k_2^p k_2^r t_{21}^0 - k_1^p k_1^r k_2^r t_{22}^0 - k_2^p k_1^r k_2^r t_{21}^0 - k_1^p k_2^r k_{11}^t t_{22}^0 + k_1^p k_2^r k_{22}^t t_{11}^0 -$$

$$- k_2^p k_2^r k_{11}^t t_{21}^0 - k_1^p k_2^r k_{21}^t t_{22}^0 - k_1^p k_2^r k_{22}^t t_{21}^0 - k_1^r k_2^r k_{21}^t t_{22}^0 - k_1^r k_2^r k_{22}^t t_{21}^0 - k_2^r k_{11}^t k_{21}^t t_{22}^0 -$$

$$- k_2^r k_{11}^t k_{22}^t t_{21}^0)/(k_1^p k_2^p k_1^r + k_1^p k_2^p k_2^r + k_1^p k_1^r k_2^r + k_2^p k_1^r k_2^r + k_1^p k_2^p k_{11}^t + k_1^p k_2^p k_{21}^t + k_1^p k_2^r k_{11}^t + k_2^p k_2^r k_{11}^t +$$

$$+ k_1^p k_1^r k_{22}^t + k_1^p k_2^r k_{21}^t + k_2^p k_1^r k_{21}^t + k_1^p k_2^r k_{22}^t + k_1^r k_2^r k_{21}^t + k_1^r k_2^r k_{22}^t + k_1^p k_{11}^t k_{22}^t + k_2^p k_{11}^t k_{21}^t +$$

$$+ k_1^p k_{21}^t k_{22}^t + k_2^r k_{11}^t k_{21}^t + k_2^r k_{11}^t k_{22}^t + k_1^r k_{21}^t k_{22}^t + k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t);$$

$$\mu_1 = (k_1^p k_1^r k_2^r p_2^0 + k_2^p k_1^r k_2^r p_1^0 + k_1^p k_2^r k_{11}^t p_2^0 + k_2^p k_2^r k_{11}^t p_1^0 + k_2^p k_1^r k_{21}^t p_1^0 + k_1^r k_2^r k_{21}^t p_1^0 + k_1^r k_2^r k_{22}^t p_1^0 +$$

$$+ k_2^p k_{11}^t k_{21}^t p_1^0 + k_2^r k_{11}^t k_{21}^t p_1^0 + k_2^r k_{11}^t k_{22}^t p_1^0 + k_1^r k_{21}^t k_{22}^t p_1^0 + k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t p_1^0 + k_1^p k_2^p k_1^r r_2^0 +$$

$$+ k_1^p k_2^p k_2^r r_1^0 + k_1^p k_2^p k_{11}^t r_2^0 + k_1^p k_2^p k_{21}^t r_1^0 + k_1^p k_2^r k_{21}^t r_1^0 + k_1^p k_1^r k_{22}^t r_2^0 + k_1^p k_2^r k_{22}^t r_1^0 + k_1^p k_{11}^t k_{22}^t r_2^0 +$$

$$+ k_1^p k_{21}^t k_{22}^t r_1^0 + k_1^p k_2^p k_2^r t_{11}^0 + k_1^p k_2^p k_1^r t_{21}^0 + k_1^p k_1^r k_2^r t_{21}^0 - k_1^p k_1^r k_2^r t_{22}^0 + k_1^p k_2^p k_{11}^t t_{21}^0 +$$

$$+ k_1^p k_2^p k_{21}^t t_{11}^0 + k_1^p k_2^r k_{11}^t t_{21}^0 + k_1^p k_2^r k_{21}^t t_{11}^0 - k_1^p k_2^r k_{11}^t t_{22}^0 + k_1^p k_2^r k_{22}^t t_{11}^0 + k_1^p k_1^r k_{22}^t t_{21}^0 +$$

$$+ k_1^p k_{11}^t k_{22}^t t_{21}^0 + k_1^p k_{21}^t k_{22}^t t_{11}^0)/(k_1^p k_2^p k_1^r + k_1^p k_2^p k_2^r + k_1^p k_1^r k_2^r + k_2^p k_1^r k_2^r + k_1^p k_2^p k_{11}^t + k_1^p k_2^p k_{21}^t +$$

$$+ k_1^p k_2^r k_{11}^t + k_2^p k_2^r k_{11}^t + k_1^p k_1^r k_{22}^t + k_1^p k_2^r k_{21}^t + k_2^p k_1^r k_{21}^t + k_1^p k_2^r k_{22}^t + k_1^r k_2^r k_{21}^t + k_1^r k_2^r k_{22}^t +$$

$$+ k_1^p k_{11}^t k_{22}^t + k_2^p k_{11}^t k_{21}^t + k_1^p k_{21}^t k_{22}^t + k_2^r k_{11}^t k_{21}^t + k_2^r k_{11}^t k_{22}^t + k_1^r k_{21}^t k_{22}^t + k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t);$$

$$\mu_2 = (k_1^p k_1^r k_2^r p_2^0 + k_2^p k_1^r k_2^r p_1^0 + k_1^p k_2^r k_{11}^t p_2^0 + k_2^p k_2^r k_{11}^t p_1^0 + k_1^p k_1^r k_{22}^t p_2^0 + k_1^p k_2^r k_{21}^t p_2^0 +$$

$$+ k_1^p k_2^r k_{22}^t p_2^0 + k_1^r k_2^r k_{21}^t p_2^0 + k_1^r k_2^r k_{22}^t p_2^0 + k_1^p k_{11}^t k_{22}^t p_2^0 + k_1^p k_{21}^t k_{22}^t p_2^0 + k_2^r k_{11}^t k_{21}^t p_2^0 +$$

$$+ k_2^r k_{11}^t k_{22}^t p_2^0 + k_1^r k_{21}^t k_{22}^t p_2^0 + k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t p_2^0 + k_1^p k_2^p k_1^r r_2^0 + k_1^p k_2^p k_2^r r_1^0 + k_1^p k_2^p k_{11}^t r_2^0 + k_1^p k_2^p k_{21}^t r_2^0 +$$

$$+ k_2^p k_1^r k_{21}^t r_2^0 + k_2^p k_{11}^t k_{21}^t r_2^0 + k_1^p k_2^p k_2^r t_{11}^0 + k_1^p k_2^p k_1^r t_{22}^0 - k_1^p k_2^p k_2^r t_{21}^0 + k_1^p k_2^p k_2^r t_{22}^0 - k_2^p k_1^r k_2^r t_{21}^0 +$$

$$+ k_2^p k_1^r k_2^r t_{22}^0 + k_1^p k_2^p k_{11}^t t_{22}^0 + k_1^p k_2^p k_{21}^t t_{22}^0 - k_2^p k_2^r k_{11}^t t_{21}^0 + k_2^p k_2^r k_{11}^t t_{22}^0 + k_2^p k_1^r k_{21}^t t_{22}^0 +$$

$$+k_2^p k_{11}^t k_{21}^t t_{22}^0)/(k_1^p k_2^p k_1^r + k_1^p k_2^p k_2^r + k_1^p k_1^r k_2^r + k_2^p k_1^r k_2^r + k_1^p k_2^p k_{11}^t + k_1^p k_2^p k_{21}^t + k_1^p k_2^r k_{11}^t + k_2^p k_2^r k_{11}^t +$$

$$+k_1^p k_1^r k_{22}^t + k_1^p k_2^r k_{21}^t + k_2^p k_1^r k_{21}^t + k_1^p k_2^r k_{22}^t + k_1^r k_2^r k_{21}^t + k_1^r k_2^r k_{22}^t + k_1^p k_{11}^t k_{22}^t + k_2^p k_{11}^t k_{21}^t + k_1^p k_{21}^t k_{22}^t +$$

$$k_2^r k_{11}^t k_{21}^t + k_2^r k_{11}^t k_{22}^t + k_1^r k_{21}^t k_{22}^t + k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t).$$

Тогда:

$$x_{11} \geq 0 \sim -k_1^p k_2^p r_1^0 + k_2^p k_2^r p_1^0 + k_2^p k_{21}^t p_1^0 + k_2^r k_{21}^t p_1^0 + k_2^r k_{22}^t p_1^0 + k_{21}^t k_{22}^t p_1^0 + k_1^p k_2^r p_2^0 + k_1^p k_2^p r_2^0 -$$

$$-k_1^p k_2^r r_1^0 - k_2^p k_2^r r_1^0 - k_1^p k_{22}^t r_1^0 - k_2^p k_{21}^t r_1^0 + k_1^p k_{22}^t r_2^0 - k_2^r k_{21}^t r_1^0 - k_2^r k_{22}^t r_1^0 - k_{21}^t k_{22}^t r_1^0 - k_1^p k_2^p t_{11}^0 +$$

$$+k_1^p k_2^p t_{21}^0 - k_1^p k_2^r t_{11}^0 - k_2^p k_2^r t_{11}^0 + k_1^p k_2^r t_{21}^0 - k_1^p k_2^r t_{22}^0 - k_1^p k_{22}^t t_{11}^0 - k_2^p k_{21}^t t_{11}^0 + k_1^p k_{22}^t t_{21}^0 -$$

$$-k_2^r k_{21}^t t_{11}^0 - k_2^r k_{22}^t t_{11}^0 - k_{21}^t k_{22}^t t_{11}^0 \geq 0$$

$$x_{21} \geq 0 \sim k_1^p k_2^r k_{11}^t p_2^0 + k_2^p k_2^r k_{11}^t p_1^0 - k_2^p k_1^r k_{21}^t p_1^0 + k_1^p k_1^r k_{22}^t p_2^0 + k_1^p k_2^r k_{21}^t p_2^0 + k_1^p k_2^r k_{22}^t p_2^0 -$$

$$-k_1^r k_2^r k_{21}^t p_1^0 + k_1^r k_2^r k_{21}^t p_2^0 - k_1^r k_2^r k_{22}^t p_1^0 + k_1^r k_2^r k_{22}^t p_2^0 + k_1^p k_{11}^t k_{22}^t p_2^0 + k_1^p k_{21}^t k_{22}^t p_2^0 +$$

$$+k_2^r k_{11}^t k_{21}^t p_2^0 + k_2^r k_{11}^t k_{22}^t p_2^0 - k_1^r k_{21}^t k_{22}^t p_1^0 + k_1^r k_{21}^t k_{22}^t p_2^0 + k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t p_2^0 - k_1^p k_2^p k_{11}^t r_1^0 +$$

$$+k_1^p k_2^p k_{11}^t r_2^0 - k_1^p k_2^p k_{21}^t r_1^0 + k_1^p k_2^p k_{21}^t r_2^0 - k_1^p k_2^r k_{11}^t r_1^0 - k_2^p k_2^r k_{11}^t r_1^0 - k_1^p k_2^r k_{21}^t r_1^0 - k_1^p k_1^r k_{22}^t r_2^0 -$$

$$-k_1^p k_2^r k_{22}^t r_1^0 + k_2^p k_1^r k_{21}^t r_2^0 - k_1^p k_{11}^t k_{22}^t r_1^0 - k_2^p k_{11}^t k_{21}^t r_1^0 + k_2^p k_{11}^t k_{21}^t r_2^0 - k_1^p k_{21}^t k_{22}^t r_1^0 -$$

$$-k_2^r k_{11}^t k_{21}^t r_1^0 - k_2^r k_{11}^t k_{22}^t r_1^0 - k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t r_1^0 + k_1^p k_2^p k_1^r t_{11}^0 + k_1^p k_2^p k_2^r t_{11}^0 - 2k_1^p k_2^p k_1^r t_{21}^0 +$$

$$+k_1^p k_2^p k_1^r t_{22}^0 - 2k_1^p k_2^p k_2^r t_{21}^0 + k_1^p k_2^p k_2^r t_{22}^0 + k_1^p k_1^r k_2^r t_{11}^0 + k_2^p k_1^r k_2^r t_{11}^0 - 2k_1^p k_1^r k_2^r t_{21}^0 +$$

$$+k_1^p k_1^r k_2^r t_{22}^0 - 2k_2^p k_1^r k_2^r t_{21}^0 + k_2^p k_1^r k_2^r t_{22}^0 - k_1^p k_2^p k_{11}^t t_{21}^0 + k_1^p k_2^p k_{11}^t t_{22}^0 - k_1^p k_2^p k_{21}^t t_{21}^0 +$$

$$+k_1^p k_2^p k_{21}^t t_{22}^0 + k_1^p k_1^r k_{22}^t t_{11}^0 - k_1^p k_2^r k_{11}^t t_{21}^0 + k_2^p k_1^r k_{21}^t t_{11}^0 - 2k_2^p k_2^r k_{11}^t t_{21}^0 + k_2^p k_2^r k_{11}^t t_{22}^0 -$$

$$-2k_1^p k_1^r k_{22}^t t_{21}^0 - k_1^p k_2^r k_{21}^t t_{21}^0 - k_2^p k_1^r k_{21}^t t_{21}^0 - k_1^p k_2^r k_{22}^t t_{21}^0 + k_2^p k_1^r k_{21}^t t_{22}^0 + k_1^r k_2^r k_{21}^t t_{11}^0 +$$

$$+k_1^r k_2^r k_{22}^t t_{11}^0 - k_1^r k_2^r k_{21}^t t_{21}^0 - k_1^r k_2^r k_{22}^t t_{21}^0 - k_1^p k_{11}^t k_{22}^t t_{21}^0 - k_2^p k_{11}^t k_{21}^t t_{21}^0 + k_2^p k_{11}^t k_{21}^t t_{22}^0 -$$

$$-k_1^p k_{21}^t k_{22}^t t_{21}^0 + k_1^r k_{21}^t k_{22}^t t_{11}^0 - k_2^r k_{11}^t k_{21}^t t_{21}^0 - k_2^r k_{11}^t k_{22}^t t_{21}^0 - k_1^r k_{21}^t k_{22}^t t_{21}^0 - k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t t_{21}^0 \geq 0$$

$$x_{22} \geq 0 \sim -k_1^r k_2^r p_1^0 + k_1^p k_2^r p_2^0 + k_1^p k_1^r p_2^0 + k_1^r k_2^r p_2^0 + k_1^p k_{11}^t p_2^0 + k_1^p k_{21}^t p_2^0 - k_2^r k_{11}^t p_1^0 + k_2^r k_{11}^t p_2^0 +$$

$$+k_1^r k_{21}^t p_2^0 + k_{11}^t k_{21}^t p_2^0 - k_1^p k_1^r r_2^0 - k_1^p k_2^r r_1^0 - k_1^p k_{11}^t r_2^0 - k_1^p k_{21}^t r_2^0 - k_1^r k_{21}^t r_2^0 - k_{11}^t k_{21}^t r_2^0 -$$

$$-k_1^p k_2^r t_{11}^0 - k_1^p k_1^r t_{22}^0 + k_1^p k_2^r t_{21}^0 - k_1^p k_2^r t_{22}^0 + k_1^r k_2^r t_{21}^0 - k_1^r k_2^r t_{22}^0 - k_1^p k_{11}^t t_{22}^0 - k_1^p k_{21}^t t_{22}^0 +$$
$$+ k_2^r k_{11}^t t_{21}^0 - k_2^r k_{11}^t t_{22}^0 - k_1^r k_{21}^t t_{22}^0 - k_{11}^t k_{21}^t t_{22}^0 \geq 0$$

После упрощения получаем:

$$x_{11} \geq 0 \sim \left(-r_1^0 + r_2^0 - t_{11}^0 + t_{21}^0\right)\left(k_1^p k_2^p + k_1^p k_{22}^t\right) +$$
$$\left(p_1^0 - r_1^0 - t_{11}^0\right)\left(k_2^p k_2^r + k_2^p k_{21}^t + k_2^r k_{21}^t + k_2^r k_{22}^t + k_{21}^t k_{22}^t\right) +$$
$$\left(p_2^0 - r_1^0 - t_{11}^0 + t_{21}^0 - t_{22}^0\right) k_1^p k_2^r \geq 0.$$

$$x_{21} \geq 0 \sim \left(-r_1^0 + r_2^0 - t_{21}^0 + t_{22}^0\right)\left(k_1^p k_2^p k_{11}^t + k_1^p k_2^p k_{21}^t + k_2^p k_{11}^t k_{21}^t\right)$$
$$\left(-p_1^0 + p_2^0 + t_{11}^0 - t_{21}^0\right)\left(k_1^r k_2^r k_{21}^t + k_1^r k_2^r k_{22}^t + k_1^r k_{21}^t k_{22}^t\right) +$$
$$\left(p_2^0 - r_1^0 - t_{21}^0\right)(k_1^r k_2^r k_{11}^t + k_1^r k_2^r k_{21}^t + k_1^r k_2^r k_{22}^t + k_1^p k_{11}^t k_{22}^t + k_1^p k_{21}^t k_{22}^t +$$
$$+ k_2^r k_{11}^t k_{21}^t + k_2^r k_{11}^t k_{22}^t + k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t) + \left(p_2^0 - r_2^0 + t_{11}^0 - t_{21}^0\right) k_1^p k_1^r k_{22}^t +$$
$$+ \left(p_1^0 - r_1^0 - 2t_{21}^0 + t_{22}^0\right) k_2^p k_2^r k_{11}^t + \left(-p_1^0 + r_2^0 + t_{11}^0 - t_{21}^0 + t_{22}^0\right) k_2^p k_1^r k_{21}^t \geq 0.$$

$$x_{22} \geq 0 \sim \left(-p_1^0 + p_2^0 + t_{21}^0 - t_{22}^0\right)\left(k_1^r k_2^r + k_2^r k_{11}^t\right) +$$
$$\left(p_2^0 - r_2^0 - t_{22}^0\right)\left(k_1^p k_1^r + k_1^p k_{11}^t + k_1^p k_{21}^t + k_1^r k_{21}^t + k_{11}^t k_{21}^t\right) +$$
$$\left(p_2^0 - r_1^0 - t_{11}^0 + t_{21}^0 - t_{22}^0\right) k_1^p k_2^r \geq 0.$$

Наконец, рассмотрим случай, когда:

$$\delta_{ij}^t = 1, \quad \delta_j^p = 1, \quad \delta_i^r = 1, \quad i, j = \overline{1, 2}.$$

Тогда система имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{k_{11}^t} + \frac{1}{k_{12}^t} + \frac{1}{k_1^r}\right) & 0 & \frac{1}{k_{11}^t} & \frac{1}{k_{12}^t} \\ 0 & -\left(\frac{1}{k_{21}^t} + \frac{1}{k_{22}^t} + \frac{1}{k_2^r}\right) & \frac{1}{k_{21}^t} & \frac{1}{k_{22}^t} \\ -\frac{1}{k_{11}^t} & -\frac{1}{k_{21}^t} & \left(\frac{1}{k_{11}^t} + \frac{1}{k_{21}^t} + \frac{1}{k_1^p}\right) & 0 \\ -\frac{1}{k_{12}^t} & -\frac{1}{k_{22}^t} & 0 & \left(\frac{1}{k_{12}^t} + \frac{1}{k_{22}^t} + \frac{1}{k_2^p}\right) \end{pmatrix} *$$

$$
\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t_{11}^0}{k_{11}^t} + \frac{t_{12}^0}{k_{12}^t} - \frac{r_1^0}{k_1^r} \\ \frac{t_{21}^0}{k_{21}^t} + \frac{t_{22}^0}{k_{22}^t} - \frac{r_2^0}{k_2^r} \\ \frac{t_{11}^0}{k_{11}^t} + \frac{t_{21}^0}{k_{21}^t} + \frac{p_1^0}{k_1^p} \\ \frac{t_{12}^0}{k_{12}^t} + \frac{t_{22}^0}{k_{22}^t} + \frac{p_2^0}{k_2^p} \end{pmatrix}.
$$

Её решение приведено на стр. 71. Условия существования товарных потоков принимают вид:

$$
x_{11} \geq 0 \sim k_1^p k_1^r k_2^r k_{11}^t p_2^0 + k_2^p k_1^r k_2^r k_{11}^t p_1^0 + k_1^p k_1^r k_2^r k_{12}^t p_2^0 + k_2^p k_1^r k_2^r k_{12}^t p_1^0 + k_1^p k_1^r k_2^r k_{21}^t p_2^0 +
$$

$$
+ k_2^p k_1^r k_2^r k_{21}^t p_1^0 + k_1^p k_1^r k_2^r k_{22}^t p_2^0 + k_2^p k_1^r k_2^r k_{22}^t p_1^0 + k_1^p k_2^r k_{11}^t k_{12}^t p_2^0 + k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{12}^t p_1^0 +
$$

$$
+ k_2^p k_1^r k_{11}^t k_{21}^t p_1^0 + k_2^p k_1^r k_{12}^t k_{21}^t p_1^0 + k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{21}^t p_1^0 + k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{22}^t p_1^0 + k_1^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t p_2^0 +
$$

$$
+ k_2^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t p_1^0 + k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{21}^t p_1^0 + k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{22}^t p_1^0 + k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{21}^t p_1^0 + k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{22}^t p_1^0 +
$$

$$
+ k_2^p k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t p_1^0 + k_2^p k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t p_1^0 + k_2^r k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t p_1^0 + k_2^r k_{11}^t k_{12}^t k_{22}^t p_1^0 + k_1^r k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t p_1^0 +
$$

$$
+ k_1^r k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t p_1^0 + k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t p_1^0 + k_1^p k_2^p k_1^r k_{11}^t r_2^0 + k_1^p k_2^p k_2^r k_{11}^t r_1^0 + k_1^p k_2^p k_1^r k_{12}^t r_2^0 +
$$

$$
+ k_1^p k_2^p k_2^r k_{12}^t r_1^0 + k_1^p k_2^p k_1^r k_{21}^t r_2^0 + k_1^p k_2^p k_2^r k_{21}^t r_1^0 + k_1^p k_2^p k_1^r k_{22}^t r_2^0 + k_1^p k_2^p k_2^r k_{22}^t r_1^0 +
$$

$$
+ k_1^p k_2^p k_{11}^t k_{12}^t r_2^0 + k_1^p k_2^p k_{12}^t k_{21}^t r_1^0 + k_1^p k_2^p k_{11}^t k_{22}^t r_2^0 + k_1^p k_2^p k_{21}^t k_{22}^t r_1^0 + k_1^p k_1^r k_{11}^t k_{22}^t r_2^0 +
$$

$$
+ k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{21}^t r_1^0 + k_1^p k_1^r k_{12}^t k_{22}^t r_2^0 + k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{22}^t r_1^0 + k_1^p k_{11}^t k_{12}^t k_{22}^t r_2^0 + k_1^p k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t r_1^0 +
$$

$$
+ k_1^p k_2^p k_2^r k_{11}^t t_{12}^0 + k_1^p k_2^p k_2^r k_{12}^t t_{11}^0 + k_1^p k_2^p k_1^r k_{11}^t t_{21}^0 + k_1^p k_2^p k_1^r k_{21}^t t_{11}^0 + k_1^p k_2^p k_1^r k_{12}^t t_{21}^0 -
$$

$$
- k_1^p k_2^p k_1^r k_{21}^t t_{12}^0 + k_1^p k_2^p k_2^r k_{11}^t t_{21}^0 + k_1^p k_2^p k_2^r k_{21}^t t_{11}^0 - k_1^p k_2^p k_2^r k_{11}^t t_{22}^0 + k_1^p k_2^p k_2^r k_{22}^t t_{11}^0 +
$$

$$
+ k_1^p k_2^p k_1^r k_{21}^t t_{22}^0 + k_1^p k_2^p k_1^r k_{22}^t t_{21}^0 + k_1^p k_1^r k_2^r k_{11}^t t_{21}^0 + k_1^p k_1^r k_2^r k_{21}^t t_{11}^0 - k_1^p k_1^r k_2^r k_{11}^t t_{22}^0 +
$$

$$
+ k_1^p k_1^r k_2^r k_{12}^t t_{21}^0 - k_1^p k_1^r k_2^r k_{21}^t t_{12}^0 + k_1^p k_1^r k_2^r k_{22}^t t_{11}^0 - k_1^p k_1^r k_2^r k_{12}^t t_{22}^0 - k_1^p k_1^r k_2^r k_{22}^t t_{12}^0 +
$$

$$
+ k_1^p k_2^p k_{11}^t k_{12}^t t_{21}^0 + k_1^p k_2^p k_{12}^t k_{21}^t t_{11}^0 + k_1^p k_2^p k_{11}^t k_{22}^t t_{21}^0 + k_1^p k_2^p k_{21}^t k_{22}^t t_{11}^0 + k_1^p k_2^r k_{11}^t k_{12}^t t_{21}^0 +
$$

$$
+ k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{21}^t t_{11}^0 - k_1^p k_2^r k_{11}^t k_{12}^t t_{22}^0 + k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{22}^t t_{11}^0 + k_1^p k_1^r k_{11}^t k_{22}^t t_{21}^0 + k_1^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t t_{11}^0 +
$$

$$
+ k_1^p k_1^r k_{12}^t k_{22}^t t_{21}^0 - k_1^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t t_{12}^0 + k_1^p k_{11}^t k_{12}^t k_{22}^t t_{21}^0 + k_1^p k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t t_{11}^0 -
$$

$$
- k_1^p k_1^r k_2^r k_{11}^t p_2^0 - k_2^p k_1^r k_2^r k_{11}^t p_1^0 - k_1^p k_1^r k_2^r k_{12}^t p_2^0 - k_2^p k_1^r k_2^r k_{12}^t p_1^0 - k_1^p k_1^r k_2^r k_{21}^t p_2^0 - k_2^p k_1^r k_2^r k_{21}^t p_1^0 -
$$

$$
- k_1^p k_1^r k_2^r k_{22}^t p_2^0 - k_2^p k_1^r k_2^r k_{22}^t p_1^0 - k_1^p k_1^r k_{11}^t k_{22}^t p_2^0 - k_2^p k_1^r k_{12}^t k_{21}^t p_1^0 - k_1^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t p_2^0 - k_2^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t p_1^0 -
$$

$$
- k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{21}^t p_2^0 - k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{21}^t p_1^0 - k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{22}^t p_2^0 - k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{22}^t p_1^0 - k_1^r k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t p_2^0 -
$$

$$
- k_1^r k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t p_1^0 - k_1^p k_2^p k_1^r k_{11}^t r_2^0 - k_1^p k_2^p k_2^r k_{11}^t r_1^0 - k_1^p k_2^p k_1^r k_{12}^t r_2^0 - k_1^p k_2^p k_2^r k_{12}^t r_1^0 - k_1^p k_2^p k_1^r k_{21}^t r_2^0 -
$$

$$-k_1^pk_2^pk_2^rk_{21}^tr_1^0 - k_1^pk_2^pk_1^rk_{22}^tr_2^0 - k_1^pk_2^pk_2^rk_{22}^tr_1^0 - k_1^pk_2^pk_{11}^tk_{12}^tr_1^0 - k_1^pk_2^pk_{11}^tk_{22}^tr_1^0-$$

$$-k_1^pk_2^pk_{12}^tk_{21}^tr_1^0 - k_1^pk_2^pk_{21}^tk_{22}^tr_1^0 - k_1^pk_2^rk_{11}^tk_{12}^tr_1^0 - k_2^pk_2^rk_{11}^tk_{12}^tr_1^0 - k_1^pk_2^rk_{12}^tk_{21}^tr_1^0-$$

$$-k_2^pk_1^rk_{11}^tk_{21}^tr_2^0 - k_2^pk_2^rk_{11}^tk_{21}^tr_1^0 - k_1^pk_1^rk_{12}^tk_{22}^tr_2^0 - k_1^pk_2^rk_{12}^tk_{22}^tr_1^0 - k_2^pk_2^rk_{11}^tk_{22}^tr_1^0-$$

$$-k_1^pk_{11}^tk_{12}^tk_{22}^tr_1^0 - k_2^pk_{11}^tk_{12}^tk_{21}^tr_1^0 - k_1^pk_{12}^tk_{21}^tk_{22}^tr_1^0 - k_2^pk_{11}^tk_{21}^tk_{22}^tr_1^0 - k_2^rk_{11}^tk_{12}^tk_{21}^tr_1^0-$$

$$-k_2^rk_{11}^tk_{12}^tk_{22}^tr_1^0 - k_{11}^tk_{12}^tk_{21}^tk_{22}^tr_1^0 + k_1^pk_2^pk_1^rk_{11}^tt_{12}^0 + k_1^pk_2^pk_1^rk_{12}^tt_{11}^0 - k_1^pk_2^pk_1^rk_{11}^tt_{22}^0-$$

$$-k_1^pk_2^pk_1^rk_{12}^tt_{21}^0 + k_1^pk_2^pk_1^rk_{21}^tt_{12}^0 + k_1^pk_2^pk_1^rk_{22}^tt_{11}^0 - k_1^pk_2^pk_1^rk_{21}^tt_{22}^0 - k_1^pk_2^pk_1^rk_{22}^tt_{21}^0+$$

$$+k_1^pk_1^rk_2^rk_{11}^tt_{12}^0 + k_1^pk_1^rk_2^rk_{12}^tt_{11}^0 + k_2^pk_1^rk_2^rk_{11}^tt_{12}^0 + k_2^pk_1^rk_2^rk_{12}^tt_{11}^0 - k_1^pk_1^rk_2^rk_{12}^tt_{21}^0+$$

$$+k_1^pk_1^rk_2^rk_{21}^tt_{12}^0 + k_2^pk_1^rk_2^rk_{11}^tt_{21}^0 + k_2^pk_1^rk_2^rk_{21}^tt_{11}^0 + k_1^pk_1^rk_2^rk_{12}^tt_{22}^0 + k_1^pk_1^rk_2^rk_{22}^tt_{12}^0-$$

$$-k_2^pk_1^rk_2^rk_{11}^tt_{22}^0 + k_2^pk_1^rk_2^rk_{22}^tt_{11}^0 + k_1^pk_1^rk_{11}^tk_{22}^tt_{12}^0 + k_1^pk_1^rk_{12}^tk_{22}^tt_{11}^0 + k_2^pk_1^rk_{11}^tk_{21}^tt_{12}^0+$$

$$+k_2^pk_1^rk_{12}^tk_{21}^tt_{11}^0 - k_1^pk_1^rk_{12}^tk_{22}^tt_{21}^0 + k_1^pk_1^rk_{21}^tk_{22}^tt_{12}^0 - k_2^pk_1^rk_{11}^tk_{21}^tt_{22}^0 + k_2^pk_1^rk_{21}^tk_{22}^tt_{11}^0+$$

$$+k_1^rk_2^rk_{11}^tk_{21}^tt_{12}^0 + k_1^rk_2^rk_{12}^tk_{21}^tt_{11}^0 + k_1^rk_2^rk_{11}^tk_{22}^tt_{12}^0 + k_1^rk_2^rk_{12}^tk_{22}^tt_{11}^0 + k_1^rk_{11}^tk_{21}^tk_{22}^tt_{12}^0+$$

$$+k_1^rk_{12}^tk_{21}^tk_{22}^tt_{11}^0 - k_1^pk_2^pk_1^rk_{11}^tt_{11}^0 - k_1^pk_2^pk_1^rk_{12}^tt_{11}^0 - k_1^pk_2^pk_2^rk_{11}^tt_{11}^0-$$

$$-k_1^pk_2^pk_2^rk_{12}^tt_{11}^0 - k_1^pk_2^pk_1^rk_{21}^tt_{11}^0 - k_1^pk_2^pk_1^rk_{22}^tt_{11}^0 - k_1^pk_2^pk_2^rk_{21}^tt_{11}^0 - k_1^pk_2^pk_2^rk_{22}^tt_{11}^0 - k_1^pk_1^rk_2^rk_{11}^tt_{11}^0-$$

$$-k_1^pk_1^rk_2^rk_{12}^tt_{11}^0 - k_2^pk_1^rk_2^rk_{11}^tt_{11}^0 - k_2^pk_1^rk_2^rk_{12}^tt_{11}^0 - k_1^pk_1^rk_2^rk_{21}^tt_{11}^0 - k_1^pk_1^rk_2^rk_{22}^tt_{11}^0 - k_2^pk_1^rk_2^rk_{21}^tt_{11}^0-$$

$$-k_2^pk_1^rk_2^rk_{22}^tt_{11}^0 - k_1^pk_2^pk_{11}^tk_{12}^tt_{11}^0 - k_1^pk_2^pk_{11}^tk_{22}^tt_{11}^0 - k_1^pk_2^pk_{12}^tk_{21}^tt_{11}^0 - k_1^pk_2^pk_{21}^tk_{22}^tt_{11}^0 - k_1^pk_2^rk_{11}^tk_{12}^tt_{11}^0-$$

$$-k_2^pk_2^rk_{11}^tk_{12}^tt_{11}^0 - k_1^pk_1^rk_{11}^tk_{22}^tt_{11}^0 - k_2^pk_1^rk_{11}^tk_{21}^tt_{11}^0 - k_1^pk_1^rk_{12}^tk_{22}^tt_{11}^0 - k_1^pk_2^rk_{12}^tk_{21}^tt_{11}^0 - k_2^pk_1^rk_{12}^tk_{21}^tt_{11}^0-$$

$$-k_2^pk_2^rk_{11}^tk_{21}^tt_{11}^0 - k_1^pk_2^rk_{12}^tk_{22}^tt_{11}^0 - k_2^pk_2^rk_{11}^tk_{22}^tt_{11}^0 - k_1^pk_1^rk_{21}^tk_{22}^tt_{11}^0 - k_2^pk_1^rk_{21}^tk_{22}^tt_{11}^0 - k_1^rk_2^rk_{11}^tk_{21}^tt_{11}^0-$$

$$-k_1^rk_2^rk_{11}^tk_{22}^tt_{11}^0 - k_1^rk_2^rk_{12}^tk_{21}^tt_{11}^0 - k_1^rk_2^rk_{12}^tk_{22}^tt_{11}^0 - k_1^pk_{11}^tk_{12}^tk_{22}^tt_{11}^0 - k_2^pk_{11}^tk_{12}^tk_{21}^tt_{11}^0 - k_1^pk_{12}^tk_{21}^tk_{22}^tt_{11}^0-$$

$$-k_2^pk_{11}^tk_{21}^tk_{22}^tt_{11}^0 - k_2^rk_{11}^tk_{12}^tk_{21}^tt_{11}^0 - k_2^rk_{11}^tk_{12}^tk_{22}^tt_{11}^0 - k_1^rk_{11}^tk_{21}^tk_{22}^tt_{11}^0 - k_1^rk_{12}^tk_{21}^tk_{22}^tt_{11}^0 - k_{11}^tk_{12}^tk_{21}^tk_{22}^tt_{11}^0 \geq 0.$$

Т.е.

$$\left(p_2^0 - r_1^0 - t_{11}^0 + t_{21}^0 - t_{22}^0\right) k_1^pk_2^rk_{12}^t+$$

$$+\left(-p_2^0 + r_2^0 - t_{11}^0 + t_{12}^0 + t_{21}^0\right) k_1^pk_1^rk_{22}^t+$$

$$+\left(-p_2^0 + p_1^0 - t_{11}^0 + t_{12}^0\right)\left(k_1^rk_2^rk_{21}^t + k_1^rk_2^rk_{22}^t + k_1^rk_{21}^tk_{22}^t\right)+$$

$$+\left(p_1^0 - r_1^0 - t_{11}^0\right)(k_2^pk_2^rk_{12}^t + k_2^pk_2^rk_{21}^t + k_2^pk_2^rk_{22}^t + k_2^pk_{12}^tk_{21}^t+$$

$$+k_2^pk_{12}^tk_{22}^t + k_2^rk_{12}^tk_{21}^t + k_2^rk_{12}^tk_{22}^t + k_{12}^tk_{21}^tk_{22}^t)+$$

$$+\left(p_1^0 - r_2^0 - t_{11}^0 + t_{12}^0 - t_{22}^0\right) k_2^pk_1^rk_{21}^t+$$

$$+\left(-r_1^0+r_2^0-t_{11}^0+t_{21}^0\right)\left(k_1^pk_2^pk_{12}^t+k_1^pk_2^pk_{22}^t+k_1^pk_{12}^tk_{22}^t\right)+$$
$$+\left(-t_{11}^0+t_{12}^0+t_{21}^0-t_{22}^0\right)\left(k_1^pk_2^pk_2^r+k_1^pk_2^pk_1^r+k_1^pk_1^rk_2^r+k_2^pk_1^rk_2^r\right)\geq 0.$$

Для x_{12}:

$$x_{12}\geq 0\sim k_1^pk_1^rk_2^rk_{11}^tp_2^0+k_2^pk_1^rk_2^rk_{11}^tp_1^0+k_1^pk_1^rk_2^rk_{12}^tp_2^0+k_2^pk_1^rk_2^rk_{12}^tp_1^0+k_1^pk_1^rk_2^rk_{21}^tp_2^0+$$
$$+k_2^pk_1^rk_2^rk_{21}^tp_1^0+k_1^pk_1^rk_2^rk_{22}^tp_2^0+k_2^pk_1^rk_2^rk_{22}^tp_1^0+k_1^pk_2^rk_{11}^tk_{12}^tp_2^0+k_2^pk_2^rk_{11}^tk_{12}^tp_1^0+$$
$$+k_2^pk_1^rk_{11}^tk_{21}^tp_1^0+k_2^pk_1^rk_{12}^tk_{21}^tp_1^0+k_2^pk_2^rk_{11}^tk_{21}^tp_1^0+k_2^pk_2^rk_{11}^tk_{22}^tp_1^0+k_1^pk_1^rk_{21}^tk_{22}^tp_2^0+$$
$$+k_2^pk_1^rk_{21}^tk_{22}^tp_1^0+k_1^rk_2^rk_{11}^tk_{21}^tp_1^0+k_1^rk_2^rk_{11}^tk_{22}^tp_1^0+k_1^rk_2^rk_{12}^tk_{21}^tp_1^0+k_1^rk_2^rk_{12}^tk_{22}^tp_1^0+$$
$$+k_2^pk_{11}^tk_{12}^tk_{21}^tp_1^0+k_2^pk_{11}^tk_{21}^tk_{22}^tp_1^0+k_2^rk_{11}^tk_{12}^tk_{21}^tp_1^0+k_2^rk_{11}^tk_{12}^tk_{22}^tp_1^0+k_1^rk_{11}^tk_{21}^tk_{22}^tp_1^0+$$
$$+k_1^rk_{12}^tk_{21}^tk_{22}^tp_1^0+k_{11}^tk_{12}^tk_{21}^tk_{22}^tp_1^0+k_1^pk_2^pk_1^rk_{11}^tr_2^0+k_1^pk_2^pk_2^rk_{11}^tr_1^0+k_1^pk_2^pk_1^rk_{12}^tr_2^0+$$
$$+k_1^pk_2^pk_2^rk_{12}^tr_1^0+k_1^pk_2^pk_1^rk_{21}^tr_2^0+k_1^pk_2^pk_2^rk_{21}^tr_1^0+k_1^pk_2^pk_1^rk_{22}^tr_2^0+k_1^pk_2^pk_2^rk_{22}^tr_1^0+$$
$$+k_1^pk_2^pk_{11}^tk_{12}^tr_2^0+k_1^pk_2^pk_{12}^tk_{21}^tr_1^0+k_1^pk_2^pk_{11}^tk_{22}^tr_2^0+k_1^pk_2^pk_{21}^tk_{22}^tr_1^0+k_1^pk_1^rk_{11}^tk_{22}^tr_2^0+$$
$$+k_1^pk_2^rk_{12}^tk_{21}^tr_1^0+k_1^pk_1^rk_{12}^tk_{22}^tr_2^0+k_1^pk_2^rk_{12}^tk_{22}^tr_1^0+k_1^pk_{11}^tk_{12}^tk_{22}^tr_2^0+k_1^pk_{12}^tk_{21}^tk_{22}^tr_1^0+$$
$$+k_1^pk_2^pk_2^rk_{11}^tt_{12}^0+k_1^pk_2^pk_2^rk_{12}^tt_{11}^0+k_1^pk_2^pk_1^rk_{11}^tt_{21}^0+k_1^pk_2^pk_1^rk_{21}^tt_{11}^0+k_1^pk_2^pk_1^rk_{12}^tt_{21}^0-$$
$$-k_1^pk_2^pk_1^rk_{21}^tt_{12}^0+k_1^pk_2^pk_2^rk_{11}^tt_{21}^0+k_1^pk_2^pk_2^rk_{21}^tt_{11}^0-k_1^pk_2^pk_2^rk_{11}^tt_{22}^0+k_1^pk_2^pk_2^rk_{22}^tt_{11}^0+$$
$$+k_1^pk_2^pk_1^rk_{21}^tt_{22}^0+k_1^pk_2^pk_1^rk_{22}^tt_{21}^0+k_1^pk_1^rk_2^rk_{11}^tt_{21}^0+k_1^pk_1^rk_2^rk_{21}^tt_{11}^0-k_1^pk_1^rk_2^rk_{11}^tt_{22}^0+$$
$$+k_1^pk_1^rk_2^rk_{12}^tt_{21}^0-k_1^pk_1^rk_2^rk_{21}^tt_{12}^0+k_1^pk_1^rk_2^rk_{22}^tt_{11}^0-k_1^pk_1^rk_2^rk_{12}^tt_{22}^0-k_1^pk_1^rk_2^rk_{22}^tt_{12}^0+$$
$$+k_1^pk_2^pk_{11}^tk_{12}^tt_{21}^0+k_1^pk_2^pk_{12}^tk_{21}^tt_{11}^0+k_1^pk_2^pk_{11}^tk_{22}^tt_{21}^0+k_1^pk_2^pk_{21}^tk_{22}^tt_{11}^0+k_1^pk_2^rk_{11}^tk_{12}^tt_{21}^0+$$
$$+k_1^pk_2^rk_{12}^tk_{21}^tt_{11}^0-k_1^pk_2^rk_{11}^tk_{12}^tt_{22}^0+k_1^pk_2^rk_{12}^tk_{22}^tt_{11}^0+k_1^pk_1^rk_{11}^tk_{22}^tt_{21}^0+k_1^pk_1^rk_{21}^tk_{22}^tt_{11}^0+$$
$$+k_1^pk_1^rk_{12}^tk_{22}^tt_{21}^0-k_1^pk_1^rk_{21}^tk_{22}^tt_{12}^0+k_1^pk_{11}^tk_{12}^tk_{22}^tt_{21}^0+k_1^pk_{12}^tk_{21}^tk_{22}^tt_{11}^0-$$
$$k_1^pk_1^rk_2^rk_{11}^tp_2^0-k_2^pk_1^rk_2^rk_{11}^tp_1^0-k_1^pk_1^rk_2^rk_{12}^tp_2^0-k_2^pk_1^rk_2^rk_{12}^tp_1^0-k_1^pk_1^rk_2^rk_{21}^tp_2^0-$$
$$-k_2^pk_1^rk_2^rk_{21}^tp_1^0-k_1^pk_1^rk_2^rk_{22}^tp_2^0-k_2^pk_1^rk_2^rk_{22}^tp_1^0-k_1^pk_2^rk_{11}^tk_{12}^tp_2^0-k_2^pk_2^rk_{11}^tk_{12}^tp_1^0-$$
$$-k_1^pk_2^rk_{12}^tk_{21}^tp_2^0-k_2^pk_2^rk_{11}^tk_{22}^tp_1^0-k_1^rk_2^rk_{11}^tk_{21}^tp_2^0-k_1^rk_2^rk_{11}^tk_{22}^tp_1^0-k_1^rk_2^rk_{12}^tk_{21}^tp_2^0-$$
$$-k_1^rk_2^rk_{12}^tk_{22}^tp_1^0-k_2^rk_{11}^tk_{12}^tk_{21}^tp_2^0-k_2^rk_{11}^tk_{12}^tk_{22}^tp_1^0-k_1^pk_2^pk_1^rk_{11}^tr_2^0-k_1^pk_2^pk_2^rk_{11}^tr_1^0-$$
$$-k_1^pk_2^pk_1^rk_{12}^tr_2^0-k_1^pk_2^pk_2^rk_{12}^tr_1^0-k_1^pk_2^pk_1^rk_{21}^tr_2^0-k_1^pk_2^pk_2^rk_{21}^tr_1^0-k_1^pk_2^pk_1^rk_{22}^tr_2^0-k_1^pk_2^pk_2^rk_{22}^tr_1^0-$$
$$-k_1^pk_2^pk_{11}^tk_{12}^tr_2^0-k_1^pk_2^pk_{11}^tk_{22}^tr_2^0-k_1^pk_2^pk_{12}^tk_{21}^tr_2^0-k_1^pk_2^pk_{21}^tk_{22}^tr_2^0-k_1^pk_1^rk_{11}^tk_{22}^tr_2^0-$$

$$-k_2^p k_1^r k_{11}^t k_{21}^t r_2^0 - k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{21}^t r_1^0 - k_1^p k_1^r k_{12}^t k_{22}^t r_2^0 - k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{22}^t r_1^0 - k_2^p k_1^r k_{12}^t k_{21}^t r_2^0 -$$

$$-k_1^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t r_2^0 - k_2^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t r_2^0 - k_1^p k_{11}^t k_{12}^t k_{22}^t r_2^0 - k_2^p k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t r_2^0 - k_1^p k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t r_2^0 -$$

$$-k_2^p k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t r_2^0 - k_1^r k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t r_2^0 - k_1^r k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t r_2^0 - k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t r_2^0 - k_1^p k_2^p k_2^r k_{11}^t t_{12}^0 -$$

$$-k_1^p k_2^p k_2^r k_{12}^t t_{11}^0 + k_1^p k_2^p k_2^r k_{11}^t t_{22}^0 + k_1^p k_2^p k_2^r k_{12}^t t_{21}^0 - k_1^p k_2^p k_2^r k_{21}^t t_{12}^0 - k_1^p k_2^p k_2^r k_{22}^t t_{11}^0 +$$

$$+k_1^p k_2^p k_2^r k_{21}^t t_{22}^0 + k_1^p k_2^p k_2^r k_{22}^t t_{21}^0 + k_1^p k_1^r k_2^r k_{11}^t t_{22}^0 - k_1^p k_1^r k_2^r k_{22}^t t_{11}^0 + k_2^p k_1^r k_2^r k_{11}^t t_{21}^0 +$$

$$+k_2^p k_1^r k_2^r k_{21}^t t_{11}^0 + k_1^p k_1^r k_2^r k_{12}^t t_{22}^0 + k_1^p k_1^r k_2^r k_{22}^t t_{12}^0 + k_2^p k_1^r k_2^r k_{12}^t t_{21}^0 - k_2^p k_1^r k_2^r k_{21}^t t_{12}^0 +$$

$$+k_1^p k_1^r k_2^r k_{21}^t t_{22}^0 + k_1^p k_1^r k_2^r k_{22}^t t_{21}^0 + k_2^p k_1^r k_2^r k_{21}^t t_{22}^0 + k_2^p k_1^r k_2^r k_{22}^t t_{21}^0 + k_1^p k_2^r k_{11}^t k_{12}^t t_{22}^0 -$$

$$-k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{22}^t t_{11}^0 + k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{12}^t t_{21}^0 - k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{21}^t t_{12}^0 + k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{21}^t t_{22}^0 + k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{22}^t t_{21}^0 +$$

$$+k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{21}^t t_{22}^0 + k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{22}^t t_{21}^0 + k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{21}^t t_{22}^0 + k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{22}^t t_{21}^0 + k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{21}^t t_{22}^0 +$$

$$+k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{22}^t t_{21}^0 + k_2^r k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t t_{22}^0 + k_2^r k_{11}^t k_{12}^t k_{22}^t t_{21}^0 -$$

$$-k_1^p k_2^p k_1^r k_{11}^t t_{12}^0 t_{12}^0 - k_1^p k_2^p k_1^r k_{12}^t t_{12}^0 - k_1^p k_2^p k_2^r k_{11}^t t_{12}^0 - k_1^p k_2^p k_2^r k_{12}^t t_{12}^0 - k_1^p k_2^p k_1^r k_{21}^t t_{12}^0 - k_1^p k_2^p k_1^r k_{22}^t t_{12}^0 -$$

$$-k_1^p k_2^p k_2^r k_{21}^t t_{12}^0 - k_1^p k_2^p k_2^r k_{22}^t t_{12}^0 - k_1^p k_1^r k_2^r k_{11}^t t_{12}^0 - k_1^p k_1^r k_2^r k_{12}^t t_{12}^0 - k_2^p k_1^r k_2^r k_{11}^t t_{12}^0 - k_2^p k_1^r k_2^r k_{12}^t t_{12}^0 -$$

$$-k_1^p k_1^r k_2^r k_{21}^t t_{12}^0 - k_1^p k_1^r k_2^r k_{22}^t t_{12}^0 - k_2^p k_1^r k_2^r k_{21}^t t_{12}^0 - k_2^p k_1^r k_2^r k_{22}^t t_{12}^0 - k_1^p k_2^p k_{11}^t k_{12}^t t_{12}^0 -$$

$$-k_1^p k_2^p k_{11}^t k_{22}^t t_{12}^0 - k_1^p k_2^p k_{12}^t k_{21}^t t_{12}^0 - k_1^p k_2^p k_{21}^t k_{22}^t t_{12}^0 - k_1^p k_2^r k_{11}^t k_{12}^t t_{12}^0 - k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{12}^t t_{12}^0 -$$

$$-k_1^p k_1^r k_{11}^t k_{22}^t t_{12}^0 - k_2^p k_1^r k_{11}^t k_{21}^t t_{12}^0 - k_1^p k_1^r k_{12}^t k_{22}^t t_{12}^0 - k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{21}^t t_{12}^0 - k_2^p k_1^r k_{12}^t k_{21}^t t_{12}^0 -$$

$$-k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{21}^t t_{12}^0 - k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{22}^t t_{12}^0 - k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{22}^t t_{12}^0 - k_1^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t t_{12}^0 - k_2^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t t_{12}^0 -$$

$$-k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{21}^t t_{12}^0 - k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{22}^t t_{12}^0 - k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{21}^t t_{12}^0 - k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{22}^t t_{12}^0 - k_1^p k_{11}^t k_{12}^t k_{22}^t t_{12}^0 - k_2^p k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t t_{12}^0 -$$

$$-k_1^p k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t t_{12}^0 - k_2^p k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t t_{12}^0 - k_2^r k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t t_{12}^0 - k_2^r k_{11}^t k_{12}^t k_{22}^t t_{12}^0 - k_1^r k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t t_{12}^0 -$$

$$-k_1^r k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t t_{12}^0 - k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t t_{12}^0 \geq 0.$$

T.e.

$$\left(p_1^0 - r_2^0 - t_{12}^0\right) (k_2^p k_1^r k_{11}^t k_{21}^t + k_2^p k_1^r k_{12}^t k_{21}^t + k_2^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t + k_2^p k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t +$$

$$+k_2^p k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t + k_1^r k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t + k_1^r k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t + k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t) +$$

$$+ \left(p_1^0 - r_1^0 - 2t_{12}^0 + t_{22}^0\right) k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{21}^t +$$

$$+ \left(p_2^0 - r_2^0 + t_{11}^0 - 2t_{12}^0\right) k_1^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t +$$

$$+ \left(p_1^0 - p_2^0 - t_{12}^0 + t_{22}^0\right) (k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{21}^t + k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{21}^t + k_2^r k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t) +$$

$$+\left(r_1^0-r_2^0+t_{11}^0-t_{12}^0\right)(k_1^pk_2^pk_{12}^tk_{21}^t+k_1^pk_2^pk_{21}^tk_{22}^t+k_1^pk_{12}^tk_{21}^tk_{22}^t)+$$

$$+\left(-p_2^0+r_1^0+t_{11}^0-t_{12}^0+t_{12}^0\right)k_1^pk_2^rk_{12}^tk_{21}^t+$$

$$+\left(t_{11}^0-2t_{12}^0+t_{22}^0\right)(k_1^pk_2^pk_1^rk_{21}^t+k_1^pk_2^pk_2^rk_{21}^t+k_1^pk_1^rk_2^rk_{21}^t+k_2^pk_1^rk_2^rk_{21}^t)+$$

$$+\left(t_{21}^0-t_{12}^0\right)(k_1^pk_2^pk_1^rk_{11}^t+k_1^pk_2^pk_1^rk_{12}^t+k_1^pk_2^pk_2^rk_{11}^t+k_1^pk_2^pk_1^rk_{22}^t+k_1^pk_1^rk_2^rk_{11}^t+$$

$$+k_1^pk_1^rk_2^rk_{12}^t+k_1^pk_1^rk_2^rk_{22}^t+k_1^pk_2^pk_{11}^tk_{12}^t+k_1^pk_2^pk_{11}^tk_{22}^t+k_1^pk_2^rk_{11}^tk_{12}^t+$$

$$+k_1^pk_1^rk_{11}^tk_{22}^t+k_1^pk_1^rk_{12}^tk_{22}^t+k_1^pk_{11}^tk_{12}^tk_{22}^t+k_1^pk_2^pk_2^rk_{12}^t+k_1^pk_2^pk_2^rk_{22}^t+$$

$$+k_2^pk_1^rk_2^rk_{11}^t+k_2^pk_1^rk_2^rk_{12}^t+k_2^pk_1^rk_2^rk_{22}^t+k_2^pk_2^rk_{11}^tk_{12}^t+k_1^pk_2^rk_{12}^tk_{22}^t+$$

$$+k_2^pk_2^rk_{11}^tk_{22}^t+k_1^rk_2^rk_{11}^tk_{22}^t+k_1^rk_2^rk_{12}^tk_{22}^t+k_2^rk_{11}^tk_{12}^tk_{22}^t)\geq 0.$$

Для x_{21}:

$$x_{21}\geq 0\sim k_1^pk_1^rk_2^rk_{11}^tp_2^0+k_2^pk_1^rk_2^rk_{11}^tp_1^0+k_1^pk_1^rk_2^rk_{12}^tp_2^0+k_2^pk_1^rk_2^rk_{12}^tp_1^0+k_1^pk_1^rk_2^rk_{21}^tp_2^0+$$

$$+k_2^pk_1^rk_2^rk_{21}^tp_1^0+k_1^pk_1^rk_2^rk_{22}^tp_2^0+k_2^pk_1^rk_2^rk_{22}^tp_1^0+k_1^pk_2^rk_{11}^tk_{12}^tp_2^0+k_2^pk_2^rk_{11}^tk_{12}^tp_1^0+$$

$$+k_1^pk_1^rk_{11}^tk_{22}^tp_2^0+k_1^pk_1^rk_{12}^tk_{22}^tp_2^0+k_1^pk_2^rk_{12}^tk_{21}^tp_2^0+k_1^pk_2^rk_{12}^tk_{22}^tp_2^0+k_1^pk_1^rk_{21}^tk_{22}^tp_2^0+$$

$$+k_2^pk_1^rk_{21}^tk_{22}^tp_1^0+k_1^rk_2^rk_{11}^tk_{21}^tp_2^0+k_1^rk_2^rk_{11}^tk_{22}^tp_2^0+k_1^rk_2^rk_{12}^tk_{21}^tp_2^0+k_1^rk_2^rk_{12}^tk_{22}^tp_2^0+$$

$$+k_1^pk_{11}^tk_{12}^tk_{22}^tp_2^0+k_1^pk_{12}^tk_{21}^tk_{22}^tp_2^0+k_2^rk_{11}^tk_{12}^tk_{21}^tp_2^0+k_2^rk_{11}^tk_{12}^tk_{22}^tp_2^0+k_1^rk_{11}^tk_{21}^tk_{22}^tp_2^0+$$

$$+k_1^rk_{12}^tk_{21}^tk_{22}^tp_2^0+k_{11}^tk_{12}^tk_{21}^tk_{22}^tp_2^0+k_1^pk_2^pk_1^rk_{11}^tr_2^0+k_1^pk_2^pk_2^rk_{11}^tr_1^0+k_1^pk_2^pk_1^rk_{12}^tr_2^0+$$

$$+k_1^pk_2^pk_2^rk_{12}^tr_1^0+k_1^pk_2^pk_1^rk_{21}^tr_2^0+k_1^pk_2^pk_2^rk_{21}^tr_1^0+k_1^pk_2^pk_1^rk_{22}^tr_2^0+k_1^pk_2^pk_2^rk_{22}^tr_1^0+$$

$$+k_1^pk_2^pk_{11}^tk_{12}^tr_2^0+k_1^pk_2^pk_{11}^tk_{22}^tr_1^0+k_1^pk_2^pk_{12}^tk_{21}^tr_2^0+k_1^pk_2^pk_{21}^tk_{22}^tr_1^0+k_2^pk_1^rk_{11}^tk_{21}^tr_2^0+$$

$$+k_2^pk_2^rk_{11}^tk_{21}^tr_1^0+k_2^pk_1^rk_{12}^tk_{21}^tr_2^0+k_2^pk_2^rk_{11}^tk_{22}^tr_1^0+k_2^pk_{11}^tk_{12}^tk_{21}^tr_2^0+k_2^pk_{11}^tk_{21}^tk_{22}^tr_1^0+$$

$$+k_1^pk_2^pk_2^rk_{11}^tt_{12}^0+k_1^pk_2^pk_2^rk_{12}^tt_{11}^0+k_1^pk_2^pk_1^rk_{11}^tt_{22}^0-k_1^pk_2^pk_1^rk_{22}^tt_{11}^0+k_1^pk_2^pk_1^rk_{12}^tt_{22}^0+$$

$$+k_1^pk_2^pk_1^rk_{22}^tt_{12}^0-k_1^pk_2^pk_2^rk_{12}^tt_{21}^0+k_1^pk_2^pk_2^rk_{21}^tt_{12}^0+k_1^pk_2^pk_2^rk_{12}^tt_{22}^0+k_1^pk_2^pk_2^rk_{22}^tt_{12}^0+$$

$$+k_1^pk_2^pk_1^rk_{21}^tt_{22}^0+k_1^pk_2^pk_1^rk_{22}^tt_{21}^0-k_2^pk_1^rk_2^rk_{11}^tt_{21}^0-k_2^pk_1^rk_2^rk_{21}^tt_{11}^0+k_2^pk_1^rk_2^rk_{11}^tt_{22}^0-$$

$$-k_2^pk_1^rk_2^rk_{12}^tt_{21}^0+k_2^pk_1^rk_2^rk_{21}^tt_{12}^0-k_2^pk_1^rk_2^rk_{22}^tt_{11}^0+k_2^pk_1^rk_2^rk_{12}^tt_{22}^0+k_2^pk_1^rk_2^rk_{22}^tt_{12}^0+$$

$$+k_1^pk_2^pk_{11}^tk_{12}^tt_{22}^0+k_1^pk_2^pk_{11}^tk_{22}^tt_{12}^0+k_1^pk_2^pk_{12}^tk_{21}^tt_{22}^0+k_1^pk_2^pk_{21}^tk_{22}^tt_{12}^0-k_2^pk_2^rk_{11}^tk_{12}^tt_{21}^0+$$

$$+k_2^pk_2^rk_{11}^tk_{21}^tt_{12}^0+k_2^pk_2^rk_{11}^tk_{12}^tt_{22}^0+k_2^pk_2^rk_{11}^tk_{22}^tt_{12}^0+k_2^pk_1^rk_{11}^tk_{21}^tt_{22}^0-k_2^pk_1^rk_{21}^tk_{22}^tt_{11}^0+$$

$$+k_2^pk_1^rk_{12}^tk_{21}^tt_{22}^0+k_2^pk_1^rk_{21}^tk_{22}^tt_{12}^0+k_2^pk_{11}^tk_{12}^tk_{21}^tt_{22}^0+k_2^pk_{11}^tk_{21}^tk_{22}^tt_{12}^0-$$

$$-k_1^p k_1^r k_2^r k_{11}^t p_2^0 - k_2^p k_1^r k_2^r k_{11}^t p_1^0 - k_1^p k_1^r k_2^r k_{12}^t p_2^0 - k_2^p k_1^r k_2^r k_{12}^t p_1^0 - k_1^p k_1^r k_2^r k_{21}^t p_2^0 - k_2^p k_1^r k_2^r k_{21}^t p_1^0 -$$

$$-k_1^p k_1^r k_2^r k_{22}^t p_2^0 - k_2^p k_1^r k_2^r k_{22}^t p_1^0 - k_1^p k_1^r k_{11}^t k_{22}^t p_2^0 - k_2^p k_1^r k_{12}^t k_{21}^t p_1^0 - k_1^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t p_2^0 - k_2^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t p_1^0 -$$

$$-k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{21}^t p_2^0 - k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{21}^t p_1^0 - k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{22}^t p_2^0 - k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{22}^t p_1^0 - k_1^r k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t p_2^0 -$$

$$k_1^r k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t p_1^0 - k_1^p k_2^p k_1^r k_{11}^t r_2^0 - k_1^p k_2^p k_2^r k_{11}^t r_1^0 - k_1^p k_2^p k_1^r k_{12}^t r_2^0 - k_1^p k_2^p k_2^r k_{12}^t r_1^0 - k_1^p k_2^p k_1^r k_{21}^t r_2^0 -$$

$$-k_1^p k_2^p k_2^r k_{21}^t r_1^0 - k_1^p k_2^p k_1^r k_{22}^t r_2^0 - k_1^p k_2^p k_2^r k_{22}^t r_1^0 - k_1^p k_2^p k_{11}^t k_{12}^t r_1^0 - k_1^p k_2^p k_{11}^t k_{22}^t r_1^0 -$$

$$-k_1^p k_2^p k_{12}^t k_{21}^t r_1^0 - k_1^p k_2^p k_{21}^t k_{22}^t r_1^0 - k_1^p k_2^r k_{11}^t k_{12}^t r_1^0 - k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{12}^t r_1^0 - k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{21}^t r_1^0 -$$

$$-k_2^p k_1^r k_{11}^t k_{21}^t r_2^0 - k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{21}^t r_1^0 - k_1^p k_1^r k_{12}^t k_{22}^t r_2^0 - k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{22}^t r_1^0 - k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{22}^t r_1^0 -$$

$$-k_1^p k_{11}^t k_{12}^t k_{22}^t r_1^0 - k_2^p k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t r_1^0 - k_1^p k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t r_1^0 - k_2^p k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t r_1^0 - k_2^r k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t r_1^0 -$$

$$-k_2^r k_{11}^t k_{12}^t k_{22}^t r_1^0 - k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t r_1^0 + k_1^p k_2^p k_1^r k_{11}^t t_{12}^0 + k_1^p k_2^p k_1^r k_{12}^t t_{11}^0 - k_1^p k_2^p k_1^r k_{11}^t t_{22}^0 -$$

$$-k_1^p k_2^p k_1^r k_{12}^t t_{21}^0 + k_1^p k_2^p k_1^r k_{21}^t t_{12}^0 + k_1^p k_2^p k_1^r k_{22}^t t_{11}^0 - k_1^p k_2^p k_1^r k_{21}^t t_{22}^0 - k_1^p k_2^p k_1^r k_{22}^t t_{21}^0 +$$

$$+k_1^p k_1^r k_2^r k_{11}^t t_{12}^0 + k_1^p k_1^r k_2^r k_{12}^t t_{11}^0 + k_2^p k_1^r k_2^r k_{11}^t t_{12}^0 + k_2^p k_1^r k_2^r k_{12}^t t_{11}^0 - k_1^p k_1^r k_2^r k_{12}^t t_{21}^0 +$$

$$+k_1^p k_1^r k_2^r k_{21}^t t_{12}^0 + k_2^p k_1^r k_2^r k_{11}^t t_{21}^0 + k_2^p k_1^r k_2^r k_{21}^t t_{11}^0 + k_1^p k_1^r k_2^r k_{12}^t t_{22}^0 + k_1^p k_1^r k_2^r k_{22}^t t_{12}^0 -$$

$$-k_2^p k_1^r k_2^r k_{11}^t t_{22}^0 + k_2^p k_1^r k_2^r k_{22}^t t_{11}^0 + k_1^p k_1^r k_{11}^t k_{22}^t t_{12}^0 + k_1^p k_1^r k_{12}^t k_{22}^t t_{11}^0 + k_2^p k_1^r k_{11}^t k_{21}^t t_{12}^0 +$$

$$+k_2^p k_1^r k_{12}^t k_{21}^t t_{11}^0 - k_1^p k_1^r k_{12}^t k_{22}^t t_{21}^0 + k_1^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t t_{12}^0 - k_2^p k_1^r k_{11}^t k_{21}^t t_{22}^0 + k_2^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t t_{11}^0 +$$

$$+k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{21}^t t_{12}^0 + k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{21}^t t_{11}^0 + k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{22}^t t_{12}^0 + k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{22}^t t_{11}^0 + k_1^r k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t t_{12}^0 +$$

$$+k_1^r k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t t_{11}^0 - k_1^p k_2^p k_1^r k_{11}^t t_{21}^0 t_{21}^0 - k_1^p k_2^p k_1^r k_{12}^t t_{21}^0 - k_1^p k_2^p k_2^r k_{11}^t t_{21}^0 - k_1^p k_2^p k_2^r k_{12}^t t_{21}^0 -$$

$$-k_1^p k_2^p k_1^r k_{21}^t t_{21}^0 - k_1^p k_2^p k_1^r k_{22}^t t_{21}^0 - k_1^p k_2^p k_2^r k_{21}^t t_{21}^0 - k_1^p k_2^p k_2^r k_{22}^t t_{21}^0 - k_1^p k_1^r k_2^r k_{11}^t t_{21}^0 -$$

$$-k_1^p k_1^r k_2^r k_{12}^t t_{21}^0 - k_2^p k_1^r k_2^r k_{11}^t t_{21}^0 - k_2^p k_1^r k_2^r k_{12}^t t_{21}^0 - k_1^p k_1^r k_2^r k_{21}^t t_{21}^0 - k_1^p k_1^r k_2^r k_{22}^t t_{21}^0 -$$

$$-k_2^p k_1^r k_2^r k_{21}^t t_{21}^0 - k_2^p k_1^r k_2^r k_{22}^t t_{21}^0 - k_1^p k_2^p k_{11}^t k_{12}^t t_{21}^0 - k_1^p k_2^p k_{11}^t k_{22}^t t_{21}^0 - k_1^p k_2^p k_{12}^t k_{21}^t t_{21}^0 -$$

$$-k_1^p k_2^p k_{21}^t k_{22}^t t_{21}^0 - k_1^p k_2^r k_{11}^t k_{12}^t t_{21}^0 - k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{12}^t t_{21}^0 - k_1^p k_1^r k_{11}^t k_{22}^t t_{21}^0 - k_2^p k_1^r k_{11}^t k_{21}^t t_{21}^0 -$$

$$-k_1^p k_1^r k_{12}^t k_{22}^t t_{21}^0 - k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{21}^t t_{21}^0 - k_2^p k_1^r k_{12}^t k_{21}^t t_{21}^0 - k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{21}^t t_{21}^0 - k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{22}^t t_{21}^0 -$$

$$-k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{22}^t t_{21}^0 - k_1^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t t_{21}^0 - k_2^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t t_{21}^0 - k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{21}^t t_{21}^0 - k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{22}^t t_{21}^0 -$$

$$-k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{21}^t t_{21}^0 - k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{22}^t t_{21}^0 - k_1^p k_{11}^t k_{12}^t k_{22}^t t_{21}^0 - k_2^p k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t t_{21}^0 -$$

$$-k_1^p k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t t_{21}^0 - k_2^p k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t t_{21}^0 - k_2^r k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t t_{21}^0 - k_2^r k_{11}^t k_{12}^t k_{22}^t t_{21}^0 -$$

$$-k_1^r k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t t_{21}^0 - k_1^r k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t t_{21}^0 - k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t t_{21}^0 \geq 0.$$

Т.е.

$$
\begin{gathered}
\left(p_2^0-r_1^0-t_{21}^0\right)\left(k_1^p k_2^r k_{11}^t k_{12}^t+k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{21}^t+k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{22}^t+k_1^p k_{11}^t k_{12}^t k_{22}^t+\right.\\
\left.+k_1^p k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t+k_2^r k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t+k_2^r k_{11}^t k_{12}^t k_{22}^t+k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t\right)+\\
\left(p_1^0-r_1^0-2t_{21}^0+t_{22}^0\right) k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{12}^t+\\
\left(p_2^0-r_2^0+t_{11}^0-2t_{21}^0\right) k_1^p k_1^r k_{12}^t k_{22}^t+\\
\left(p_2^0-p_1^0+t_{11}^0-t_{21}^0\right)\left(k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{21}^t+k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{22}^t+k_1^r k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t\right)+\\
\left(-r_1^0+r_2^0-t_{21}^0+t_{22}^0\right)\left(k_1^p k_2^p k_{11}^t k_{12}^t+k_1^p k_2^p k_{12}^t k_{21}^t+k_2^p k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t\right)+\\
\left(-p_1^0+r_2^0+t_{11}^0-t_{21}^0+t_{22}^0\right)\left(k_2^p k_1^r k_{12}^t k_{21}^t\right)+\\
\left(t_{11}^0-2t_{21}^0+t_{22}^0\right)\left(k_1^p k_2^p k_2^r k_{12}^t+k_1^p k_2^p k_1^r k_{12}^t+k_2^p k_1^r k_2^r k_{12}^t+k_1^p k_1^r k_2^r k_{12}^t\right)+\\
\left(t_{12}^0-t_{21}^0\right)\left(k_1^p k_2^p k_2^r k_{11}^t+k_1^p k_2^p k_1^r k_{22}^t+k_1^p k_2^p k_2^r k_{21}^t+k_1^p k_2^p k_2^r k_{22}^t+\right.\\
+k_2^p k_1^r k_2^r k_{11}^t+k_2^p k_1^r k_2^r k_{21}^t+k_2^p k_1^r k_2^r k_{22}^t+k_1^p k_2^p k_{11}^t k_{22}^t+k_1^p k_2^p k_{21}^t k_{22}^t+\\
+k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{21}^t+k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{22}^t+k_2^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t+k_2^p k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t+k_1^p k_2^p k_1^r k_{11}^t+\\
+k_1^p k_2^p k_1^r k_{21}^t+k_1^p k_1^r k_2^r k_{11}^t+k_1^p k_1^r k_2^r k_{21}^t+k_1^p k_1^r k_2^r k_{22}^t+k_1^p k_1^r k_{11}^t k_{22}^t+\\
\left.+k_2^p k_1^r k_{11}^t k_{21}^t+k_1^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t+k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{21}^t+k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{22}^t+k_1^r k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t\right) \geq 0.
\end{gathered}
$$

Для x_{22}:

$$
\begin{gathered}
x_{22} \geq 0 \sim k_1^p k_1^r k_2^r k_{11}^t p_2^0+k_2^p k_1^r k_2^r k_{11}^t p_1^0+k_1^p k_1^r k_2^r k_{12}^t p_2^0+k_2^p k_1^r k_2^r k_{12}^t p_1^0+k_1^p k_1^r k_2^r k_{21}^t p_2^0+\\
+k_2^p k_1^r k_2^r k_{21}^t p_1^0+k_1^p k_1^r k_2^r k_{22}^t p_2^0+k_2^p k_1^r k_2^r k_{22}^t p_1^0+k_1^p k_2^r k_{11}^t k_{12}^t p_2^0+k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{12}^t p_1^0+\\
+k_1^p k_1^r k_{11}^t k_{22}^t p_2^0+k_1^p k_1^r k_{12}^t k_{22}^t p_2^0+k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{21}^t p_2^0+k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{22}^t p_2^0+k_1^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t p_2^0+\\
+k_2^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t p_1^0+k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{21}^t p_2^0+k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{22}^t p_2^0+k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{21}^t p_2^0+k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{22}^t p_2^0+\\
+k_1^p k_{11}^t k_{12}^t k_{22}^t p_2^0+k_1^p k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t p_2^0+k_2^r k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t p_2^0+k_2^r k_{11}^t k_{12}^t k_{22}^t p_2^0+k_1^r k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t p_2^0+\\
+k_1^r k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t p_2^0+k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t p_2^0+k_1^p k_2^p k_1^r k_{11}^t r_2^0+k_1^p k_2^p k_2^r k_{11}^t r_1^0+k_1^p k_2^p k_1^r k_{12}^t r_2^0+\\
+k_1^p k_2^p k_2^r k_{12}^t r_1^0+k_1^p k_2^p k_1^r k_{21}^t r_2^0+k_1^p k_2^p k_2^r k_{21}^t r_1^0+k_1^p k_2^p k_1^r k_{22}^t r_2^0+k_1^p k_2^p k_2^r k_{22}^t r_1^0+\\
+k_1^p k_2^p k_{11}^t k_{12}^t r_2^0+k_1^p k_2^p k_{11}^t k_{22}^t r_1^0+k_1^p k_2^p k_{12}^t k_{21}^t r_2^0+k_1^p k_2^p k_{21}^t k_{22}^t r_1^0+k_2^p k_1^r k_{11}^t k_{21}^t r_2^0+\\
+k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{21}^t r_1^0+k_2^p k_1^r k_{12}^t k_{21}^t r_2^0+k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{22}^t r_1^0+k_2^p k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t r_2^0+k_2^p k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t r_1^0+
\end{gathered}
$$

$$+k_1^pk_2^pk_2^rk_{11}^tt_{12}^0+k_1^pk_2^pk_2^rk_{12}^tt_{11}^0+k_1^pk_2^pk_1^rk_{11}^tt_{22}^0-k_1^pk_2^pk_1^rk_{22}^tt_{11}^0+k_1^pk_2^pk_1^rk_{12}^tt_{22}^0+$$

$$+k_1^pk_2^pk_1^rk_{22}^tt_{12}^0-k_1^pk_2^pk_2^rk_{12}^tt_{21}^0+k_1^pk_2^pk_2^rk_{21}^tt_{12}^0+k_1^pk_2^pk_2^rk_{12}^tt_{22}^0+k_1^pk_2^pk_2^rk_{22}^tt_{12}^0+$$

$$+k_1^pk_2^pk_1^rk_{21}^tt_{22}^0+k_1^pk_2^pk_1^rk_{22}^tt_{21}^0-k_2^pk_1^rk_2^rk_{11}^tt_{21}^0-k_2^pk_1^rk_2^rk_{21}^tt_{11}^0+k_2^pk_1^rk_2^rk_{11}^tt_{22}^0-$$

$$-k_2^pk_1^rk_2^rk_{12}^tt_{21}^0+k_2^pk_1^rk_2^rk_{21}^tt_{12}^0-k_2^pk_1^rk_2^rk_{22}^tt_{11}^0+k_2^pk_1^rk_2^rk_{12}^tt_{22}^0+k_2^pk_1^rk_2^rk_{22}^tt_{12}^0+$$

$$+k_1^pk_2^pk_{11}^tk_{12}^tt_{22}^0+k_1^pk_2^pk_{11}^tk_{22}^tt_{12}^0+k_1^pk_2^pk_{12}^tk_{21}^tt_{22}^0+k_1^pk_2^pk_{21}^tk_{22}^tt_{12}^0-k_2^pk_2^rk_{11}^tk_{12}^tt_{21}^0+$$

$$+k_2^pk_2^rk_{11}^tk_{21}^tt_{12}^0+k_2^pk_2^rk_{11}^tk_{12}^tt_{22}^0+k_2^pk_2^rk_{11}^tk_{22}^tt_{12}^0+k_2^pk_1^rk_{11}^tk_{21}^tt_{22}^0-k_2^pk_1^rk_{21}^tk_{22}^tt_{11}^0+$$

$$+k_2^pk_1^rk_{12}^tk_{21}^tt_{22}^0+k_2^pk_1^rk_{21}^tk_{22}^tt_{12}^0+k_2^pk_{11}^tk_{12}^tk_{21}^tt_{22}^0+k_2^pk_{11}^tk_{21}^tk_{22}^tt_{12}^0-$$

$$-k_1^pk_1^rk_2^rk_{11}^tp_2^0-k_2^pk_1^rk_2^rk_{11}^tp_1^0-k_1^pk_1^rk_2^rk_{12}^tp_2^0-k_2^pk_1^rk_2^rk_{12}^tp_1^0-k_1^pk_1^rk_2^rk_{21}^tp_2^0-$$

$$-k_2^pk_1^rk_2^rk_{21}^tp_1^0-k_1^pk_1^rk_2^rk_{22}^tp_2^0-k_2^pk_1^rk_2^rk_{22}^tp_1^0-k_1^pk_2^rk_{11}^tk_{12}^tp_2^0-k_2^pk_2^rk_{11}^tk_{12}^tp_1^0-$$

$$-k_1^pk_2^rk_{12}^tk_{21}^tp_2^0-k_2^pk_2^rk_{11}^tk_{22}^tp_1^0-k_1^rk_2^rk_{11}^tk_{21}^tp_2^0-k_1^rk_2^rk_{11}^tk_{22}^tp_1^0-k_1^rk_2^rk_{12}^tk_{21}^tp_2^0-$$

$$-k_1^rk_2^rk_{12}^tk_{22}^tp_1^0-k_2^rk_{11}^tk_{12}^tk_{21}^tp_2^0-k_2^rk_{11}^tk_{12}^tk_{22}^tp_1^0-k_1^pk_2^pk_1^rk_{11}^tr_2^0-k_1^pk_2^pk_2^rk_{11}^tr_1^0-$$

$$-k_1^pk_2^pk_1^rk_{12}^tr_2^0-k_1^pk_2^pk_2^rk_{12}^tr_1^0-k_1^pk_2^pk_1^rk_{21}^tr_2^0-k_1^pk_2^pk_2^rk_{21}^tr_1^0-k_1^pk_2^pk_1^rk_{22}^tr_2^0-k_1^pk_2^pk_2^rk_{22}^tr_1^0-$$

$$-k_1^pk_2^pk_{11}^tk_{12}^tr_2^0-k_1^pk_2^pk_{11}^tk_{22}^tr_2^0-k_1^pk_2^pk_{12}^tk_{21}^tr_2^0-k_1^pk_2^pk_{21}^tk_{22}^tr_2^0-k_1^pk_1^rk_{11}^tk_{22}^tr_2^0-$$

$$-k_2^pk_1^rk_{11}^tk_{21}^tr_2^0-k_2^pk_2^rk_{11}^tk_{21}^tr_1^0-k_1^pk_1^rk_{12}^tk_{22}^tr_2^0-k_1^pk_2^rk_{12}^tk_{22}^tr_1^0-k_2^pk_1^rk_{12}^tk_{21}^tr_2^0-$$

$$-k_1^pk_1^rk_{21}^tk_{22}^tr_2^0-k_2^pk_1^rk_{21}^tk_{22}^tr_2^0-k_1^pk_{11}^tk_{12}^tk_{22}^tr_2^0-k_2^pk_{11}^tk_{12}^tk_{21}^tr_2^0-k_1^pk_{12}^tk_{21}^tk_{22}^tr_2^0-$$

$$-k_2^pk_{11}^tk_{21}^tk_{22}^tr_2^0-k_1^rk_{11}^tk_{21}^tk_{22}^tr_2^0-k_1^rk_{12}^tk_{21}^tk_{22}^tr_2^0-k_{11}^tk_{12}^tk_{21}^tk_{22}^tr_2^0-k_1^pk_2^pk_2^rk_{11}^tt_{12}^0-$$

$$-k_1^pk_2^pk_2^rk_{12}^tt_{11}^0+k_1^pk_2^pk_2^rk_{11}^tt_{22}^0+k_1^pk_2^pk_2^rk_{12}^tt_{21}^0-k_1^pk_2^pk_2^rk_{21}^tt_{12}^0-k_1^pk_2^pk_2^rk_{22}^tt_{11}^0+$$

$$+k_1^pk_2^pk_2^rk_{21}^tt_{22}^0+k_1^pk_2^pk_2^rk_{22}^tt_{21}^0+k_1^pk_1^rk_2^rk_{11}^tt_{22}^0-k_1^pk_1^rk_2^rk_{22}^tt_{11}^0+k_2^pk_1^rk_2^rk_{11}^tt_{21}^0+$$

$$+k_2^pk_1^rk_2^rk_{21}^tt_{11}^0+k_1^pk_1^rk_2^rk_{12}^tt_{22}^0+k_1^pk_1^rk_2^rk_{22}^tt_{12}^0+k_2^pk_1^rk_2^rk_{12}^tt_{21}^0-k_2^pk_1^rk_2^rk_{21}^tt_{12}^0+$$

$$+k_1^pk_1^rk_2^rk_{21}^tt_{22}^0+k_1^pk_1^rk_2^rk_{22}^tt_{21}^0+k_2^pk_1^rk_2^rk_{21}^tt_{22}^0+k_2^pk_1^rk_2^rk_{22}^tt_{21}^0+k_1^pk_2^rk_{11}^tk_{12}^tt_{22}^0-$$

$$-k_1^pk_2^rk_{12}^tk_{22}^tt_{11}^0+k_2^pk_2^rk_{11}^tk_{12}^tt_{21}^0-k_2^pk_2^rk_{11}^tk_{21}^tt_{12}^0+k_1^pk_2^rk_{12}^tk_{21}^tt_{22}^0+k_1^pk_2^rk_{12}^tk_{22}^tt_{21}^0+$$

$$+k_2^pk_2^rk_{11}^tk_{21}^tt_{22}^0+k_2^pk_2^rk_{11}^tk_{22}^tt_{21}^0+k_1^rk_2^rk_{11}^tk_{21}^tt_{22}^0+k_1^rk_2^rk_{11}^tk_{22}^tt_{21}^0+k_1^rk_2^rk_{12}^tk_{21}^tt_{22}^0+$$

$$+k_1^rk_2^rk_{12}^tk_{22}^tt_{21}^0+k_2^rk_{11}^tk_{12}^tk_{21}^tt_{22}^0+k_2^rk_{11}^tk_{12}^tk_{22}^tt_{21}^0-$$

$$-k_1^pk_2^pk_1^rk_{11}^tt_{22}^0-k_1^pk_2^pk_1^rk_{12}^tt_{22}^0-k_1^pk_2^pk_2^rk_{11}^tt_{22}^0-k_1^pk_2^pk_2^rk_{12}^tt_{22}^0-k_1^pk_2^pk_1^rk_{21}^tt_{22}^0-k_1^pk_2^pk_1^rk_{22}^tt_{22}^0-$$

$$-k_1^pk_2^pk_2^rk_{21}^tt_{22}^0-k_1^pk_2^pk_2^rk_{22}^tt_{22}^0-k_1^pk_1^rk_2^rk_{11}^tt_{22}^0-k_1^pk_1^rk_2^rk_{12}^tt_{22}^0-k_2^pk_1^rk_2^rk_{11}^tt_{22}^0-k_2^pk_1^rk_2^rk_{12}^tt_{22}^0-$$

$$-k_1^p k_1^r k_2^r k_{21}^t t_{22}^0 - k_1^p k_1^r k_2^r k_{22}^t t_{22}^0 - k_2^p k_1^r k_2^r k_{21}^t t_{22}^0 - k_2^p k_1^r k_2^r k_{22}^t t_{22}^0 - k_1^p k_2^p k_{11}^t k_{12}^t t_{22}^0 -$$

$$-k_1^p k_2^p k_{11}^t k_{22}^t t_{22}^0 - k_1^p k_2^p k_{12}^t k_{21}^t t_{22}^0 - k_1^p k_2^p k_{21}^t k_{22}^t t_{22}^0 - k_1^p k_2^r k_{11}^t k_{12}^t t_{22}^0 - k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{12}^t t_{22}^0 -$$

$$-k_1^p k_1^r k_{11}^t k_{22}^t t_{22}^0 - k_2^p k_1^r k_{11}^t k_{21}^t t_{22}^0 - k_1^p k_1^r k_{12}^t k_{22}^t t_{22}^0 - k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{21}^t t_{22}^0 - k_2^p k_1^r k_{12}^t k_{21}^t t_{22}^0 -$$

$$-k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{21}^t t_{22}^0 - k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{22}^t t_{22}^0 - k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{22}^t t_{22}^0 - k_1^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t t_{22}^0 - k_2^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t t_{22}^0 -$$

$$-k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{21}^t t_{22}^0 - k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{22}^t t_{22}^0 - k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{21}^t t_{22}^0 - k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{22}^t t_{22}^0 - k_1^p k_{11}^t k_{12}^t k_{22}^t t_{22}^0 - k_2^p k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t t_{22}^0 -$$

$$-k_1^p k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t t_{22}^0 - k_2^p k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t t_{22}^0 - k_2^r k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t t_{22}^0 - k_2^r k_{11}^t k_{12}^t k_{22}^t t_{22}^0 - k_1^r k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t t_{22}^0 -$$

$$-k_1^r k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t t_{22}^0 - k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t t_{22}^0 \geq 0.$$

T.e.

$$\left(p_2^0 - r_2^0 - t_{22}^0\right)\left(k_1^p k_1^r k_{11}^t + k_1^p k_1^r k_{12}^t + k_1^p k_1^r k_{21}^t + k_1^p k_{11}^t k_{12}^t +\right.$$

$$\left. + k_1^p k_{12}^t k_{21}^t + k_1^r k_{11}^t k_{21}^t + k_1^r k_{12}^t k_{21}^t + k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t\right) +$$

$$\left(p_2^0 - r_1^0 - t_{11}^0 + t_{21}^0 - t_{22}^0\right) k_1^p k_2^r k_{12}^t +$$

$$\left(p_1^0 - r_2^0 - t_{11}^0 + t_{12}^0 - t_{22}^0\right) k_2^p k_1^r k_{21}^t +$$

$$\left(-p_1^0 + p_2^0 + t_{21}^0 - t_{22}^0\right)\left(k_1^r k_2^r k_{11}^t + k_1^r k_2^r k_{12}^t + k_2^r k_{11}^t k_{12}^t\right) +$$

$$\left(r_1^0 - r_2^0 + t_{12}^0 - t_{22}^0\right)\left(k_1^p k_2^p k_{11}^t + k_1^p k_2^p k_{21}^t + k_2^p k_{11}^t k_{21}^t\right) +$$

$$\left(-p_1^0 + r_1^0 + t_{12}^0 + t_{21}^0 - t_{22}^0\right) k_2^p k_2^r k_{11}^t +$$

$$\left(-t_{11}^0 + t_{12}^0 + t_{21}^0 - t_{22}^0\right)\left(k_1^p k_2^p k_1^r + k_1^p k_2^p k_2^r + k_2^p k_1^r k_2^r + k_1^p k_1^r k_2^r\right) \geq 0.$$

Глава 3

Численное моделирование

3.1 Модель с фиксированными спросом и предложением

Рассмотрим подробнее модель рынка со следующей структурой: $M = \{1\}, \quad N = \{1, 2\}$.

3.1.1 Исследование чувствительности к величине удельных издержек в случае, когда модератором рынка является покупатель

Пусть значения параметров в модели принимают следующие значения:

$$\begin{gathered} t_{11}^0 = 1500, \quad t_{12}^0 = 1500; \\ d_1 = 500, \quad d_2 = 510; \\ \mu_1 = 2000. \end{gathered}$$

Параметры k_{11}^t и k_{12}^t будем варьировать в диапазоне от 0.1 до 2 с шагом в 0.1 с целью изучения поведения цен в модели.

Результаты эксперимента:

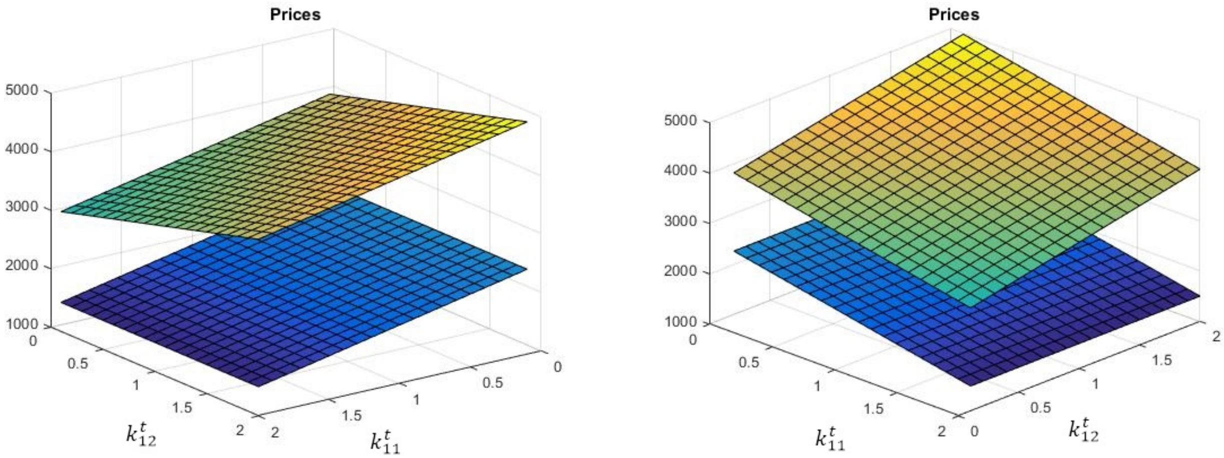

Рис. 3.1: Цены

Поверхность синего цвета — это цена предложения λ_1, желто-зелёного – цена спроса второго покупателя μ_2. Анализируя полученный график заметим, что:

1. Оптимизация величин удельных издержек второго покупателя k_{12}^t влечет за собой снижение равновесных цен;
2. В то время как оптимизация удельных издержек модератора рынка – первого покупателя – ведет к увеличению равновесных цен.

3.1.2 Исследование чувствительности к величине удельных издержек в случае, когда модератором рынка является продавец

Пусть значения параметров в модели принимают следующие значения:

$$t_{11}^0 = 1500, \quad t_{12}^0 = 1500;$$
$$d_1 = 500, \quad d_2 = 510;$$
$$\lambda_1 = 4000.$$

Параметры k_{11}^t и k_{12}^t будем варьировать в диапазоне от 0.1 до 2 с шагом в 0.1 с целью изучения поведения цен в модели.

Результаты эксперимента:

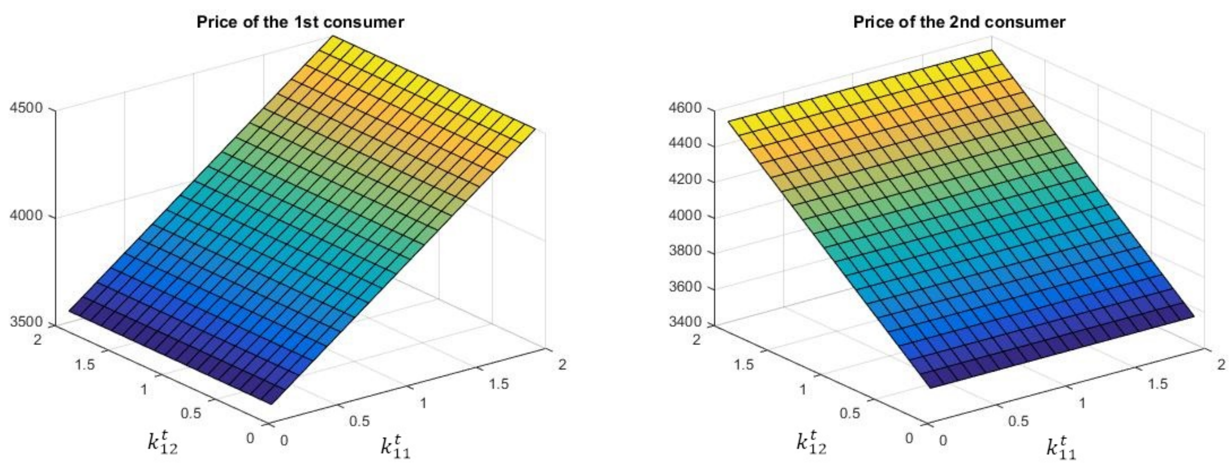

Рис. 3.2: Слева — цена первого покупателя, справа — цена второго покупателя

Анализируя полученные графики заметим следующее:

1. Цены обоих покупателей взаимно нечувствительны к изменению удельных издержек друг друга;

2. Оптимизация удельных издержек каждого из покупателей ожидаемо приводит к снижению его цены спроса.

3.2 Модель с эластичными спросом и предложением

3.2.1 Исследование чувствительности к величине удельных издержек

Пусть значения параметров в модели принимают следующие значения:

$$
\begin{gathered}
t_{11}^0 = 1500, \quad t_{12}^0 = 1700; \\
r_1^0 = 3000; \\
k_1^r = 0.5; \\
p_1^0 = 5000, \quad p_2^0 = 6000; \\
k_1^p = 0.9, \quad k_2^p = 0.89.
\end{gathered}
$$

Параметры k_{11}^t и k_{12}^t будем варьировать в диапазоне от 0.1 до 2 с шагом в 0.1 с целью изучения поведения цен и объема товарных поток в модели.

Результаты эксперимента:

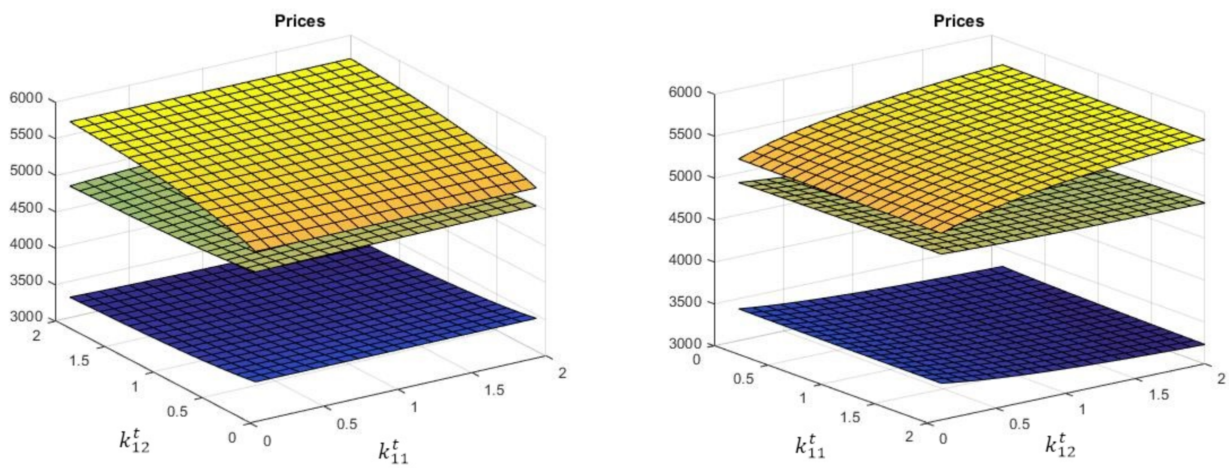

Рис. 3.3: Цены

Поверхность синего цвета — это цена предложения λ_1, зелёного — цена спроса первого покупателя μ_1, желто–оранжевого — цена спроса второго покупателя μ_2. Анализируя полученный график заметим, что:

1. при варьировании параметра k_{11}^t существенных изменений ни одной из цен не происходит;

2. варьирование параметра k_{12}^t приводит к изменениям цены предложения и цены спроса второго покупателя;

3. варьирование параметра k_{12}^t также не приводит к существенным изменениям цены спроса первого покупателя.

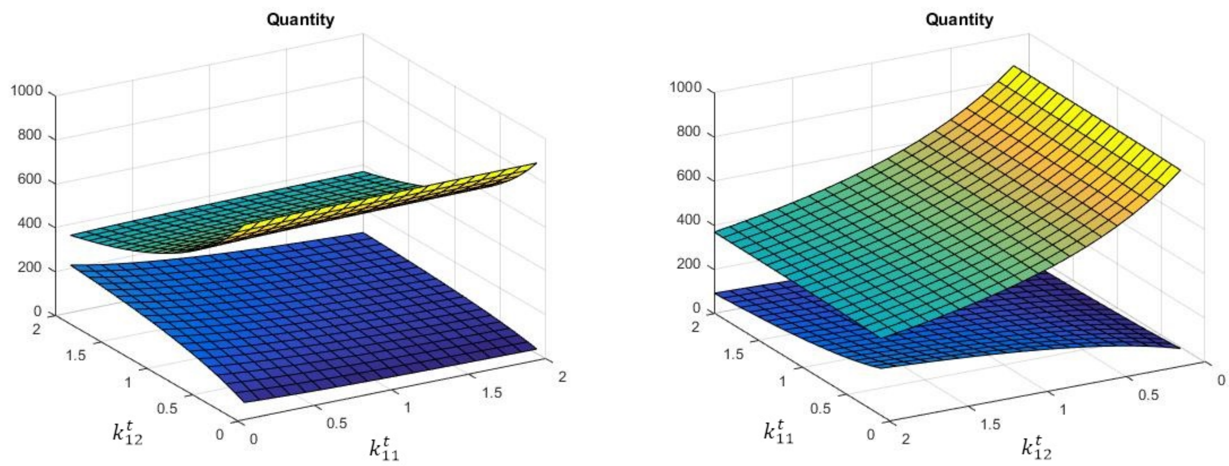

Рис. 3.4: Объемы

Поверхность синего цвета — количество товара, покупаемого первым покупателем d_1, желто–зеленая — вторым покупателем d_2. Из данных графиков отметим следующее:

1. количество товара второго покупателя, в целом, нечувствительно к изменению параметра k_{11}^t;

2. количество товара первого покупателя чувствительно к изменению обоих параметров: и k_{11}^t, и k_{12}^t;

3. количество товара, покупаемого вторым покупателем значительно больше, чем первого, однако среднее относительное изменение показателя x_{11} относительно k_{11}^t сопоставимо со средним относительным изменением показателя x_{12} относительно k_{12}^t.

Таким образом, глядя на два получившихся графика, можно сделать следующие общие выводы:

1. в получившейся модели к значению параметров $k_{1j}^t, j = 1, 2$, которые характеризуют удельные транзакционные издержки, в большей степени чувствительны величины товарных потоков между поставщиком и покупателями, чем цены спроса и предложения;

2. первый покупатель в равновесном состоянии покупает на порядок меньше товара, чем второй покупатель, но по цене, ненамного меньшей, чем цена второго покупателя;

3. оптимизация удельных транспортных издержек между продавцом и первым покупателем позволяет несколько увеличить товарный поток по этому направлению, но не может коренным образом повлиять ни на соотношение объемов между покупателями, ни на равновесные цены;

4. оптимизация удельных транспортных издержек между продавцом и вторым покупателем позволяет не только ощутимо снизить цену, но и значительно увеличивает спрос на этом направлении.

3.2.2 Исследование чувствительности спроса

Пусть значения параметров в модели принимают следующие значения:

$$t_{11}^0 = 1500, \quad t_{12}^0 = 1700;$$
$$k_{11}^t = 0.8, \quad k_{12}^t = 0.8;$$
$$r_1^0 = 3000;$$
$$k_1^r = 0.5;$$
$$p_1^0 = 5000, \quad p_2^0 = 6000.$$

Параметры k_{11}^p и k_{12}^p будем варьировать в диапазоне от 0.1 до 2 с шагом в 0.1 с целью изучения поведения цен и объема товарных поток в модели.

Результаты эксперимента:

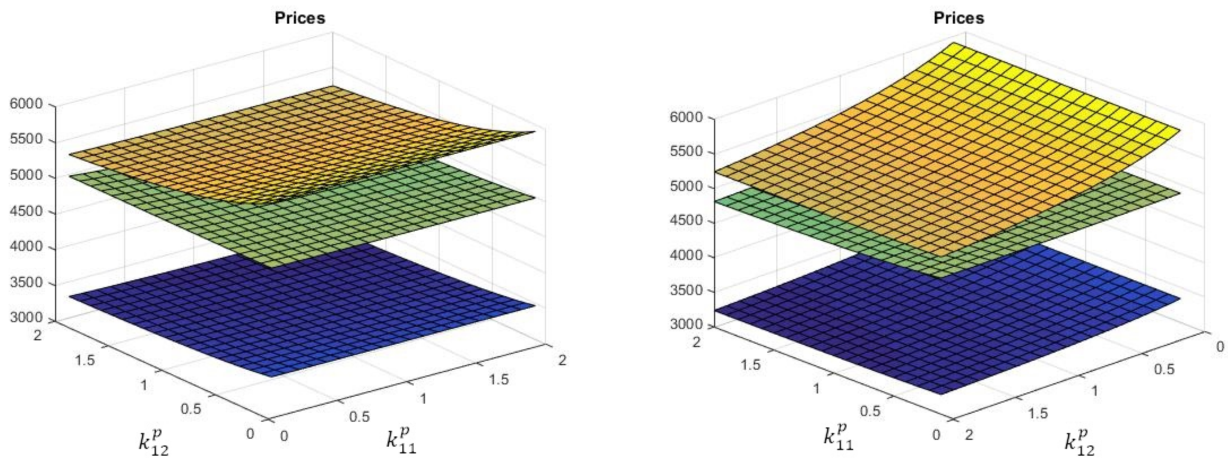

Рис. 3.5: Цены

Поверхность синего цвета — это цена предложения λ_1, зелёного — цена спроса первого покупателя μ_1, желто–оранжевого — цена спроса второго покупателя μ_2. Анализируя полученный график заметим, что:

1. при изменении параметра k_1^p существенных изменений ни одной из цен не происходит;

2. варьирование параметра k_2^p приводит к изменению цены спроса второго покупателя;

3. цена предложения, в целом, мало чувствительна к изменению обоих параметров.

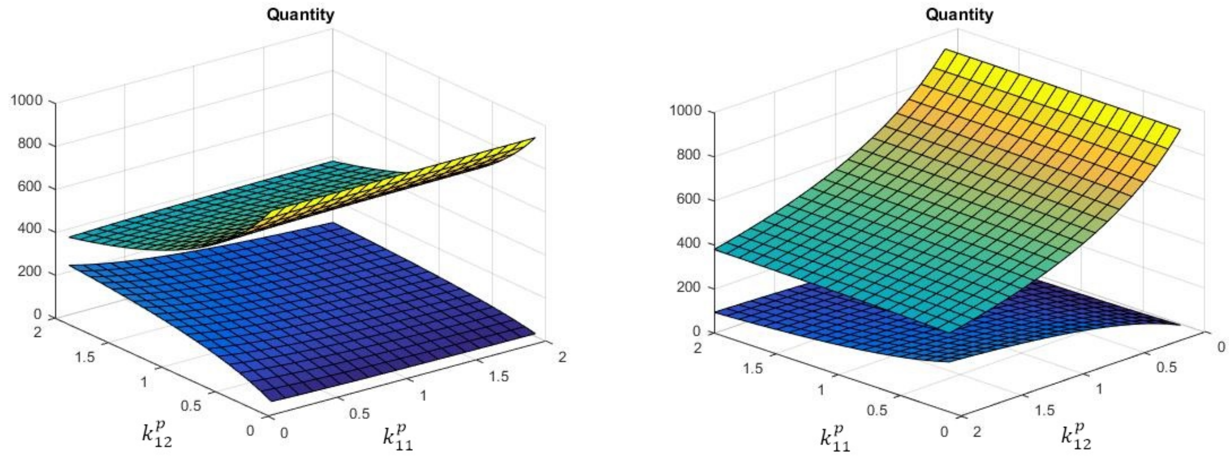

Рис. 3.6: Объемы

Поверхность синего цвета — количество товара, покупаемого первым покупателем d_1, желто–зеленая — вторым покупателем d_2. Из данных графиков можно сделать следующие выводы:

1. количество товара второго покупателя, в целом, нечувствительно к изменению параметра k_1^p;
2. количество товара первого покупателя чувствительно к изменению обоих параметров: и k_1^p и k_2^p;
3. количество товара, покупаемого вторым покупателем значительно больше, чем первого;
4. среднее относительное изменение показателя x_{11} относительно k_1^p сопоставимо со средним относительным изменением показателя x_{12} относительно k_2^p.

3.2.3 Исследование чувствительности спроса при равных издержках

Пусть значения параметров в модели принимают следующие значения:

$$
\begin{gathered}
t_{11}^0 = 1500, \quad t_{12}^0 = 1500; \\
k_{11}^t = 0.8, \quad k_{12}^t = 0.8; \\
r_1^0 = 3000; \\
k_1^r = 0.5; \\
p_1^0 = 5000, \quad p_2^0 = 6000.
\end{gathered}
$$

Так же как и ранее параметры k_1^p и k_2^p будем варьировать в диапазоне от 0.1 до 2 с шагом в 0.1.

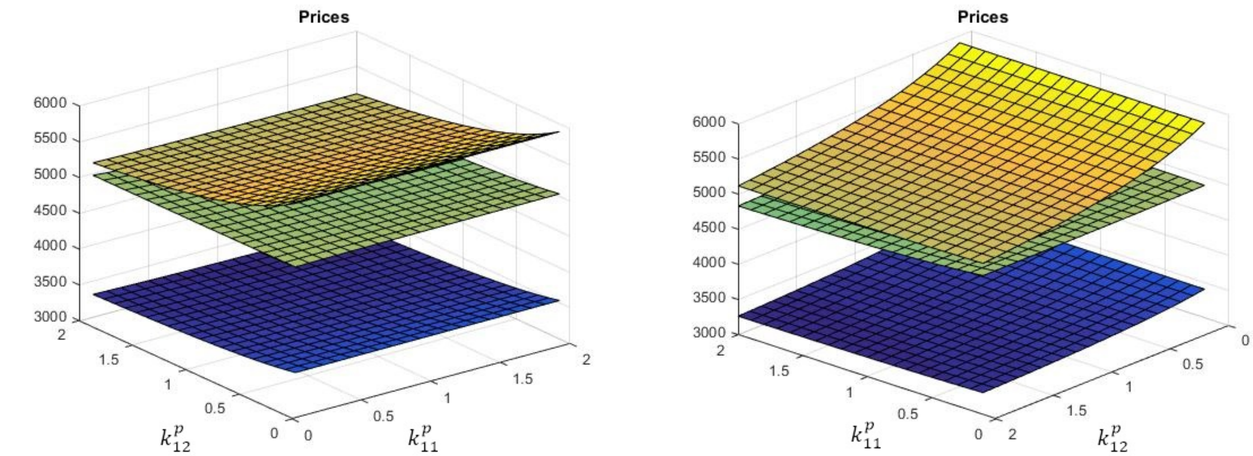

Рис. 3.7: Цены

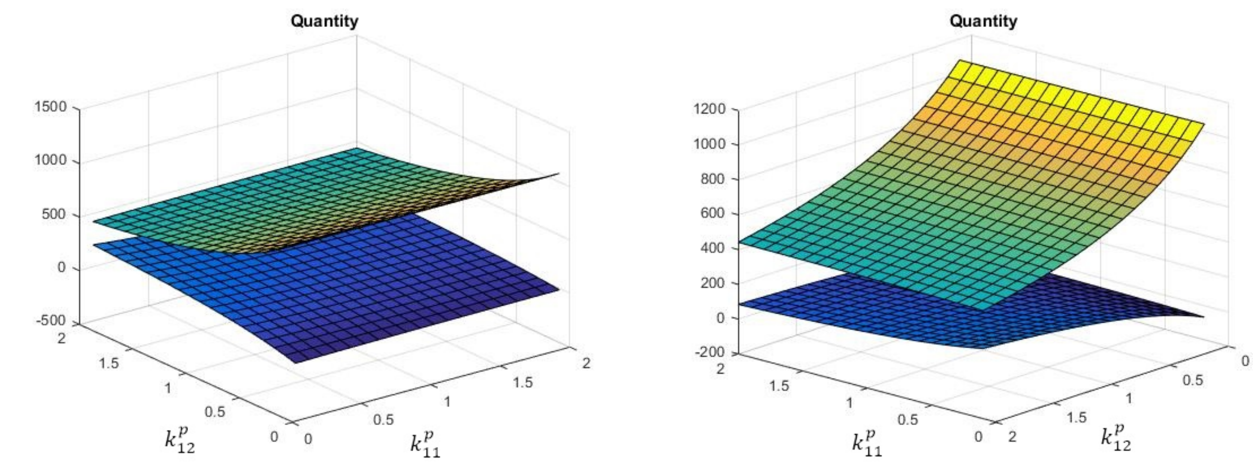

Рис. 3.8: Объемы

Результаты данного эксперимента в совокупности с результатами предыдущего эксперимента позволяют нам сделать вывод о том, что на взаимное расположение цен и объемов покупателей в большей степени влияют соотношения свободных членов функций спроса (т.е. параметров p_1^0 и p_2^0) нежели соотношения весовых коэффициентов этих же функций (т.е. параметров k_1^p и k_2^p).

3.2.4 Исследование чувствительности предложения

Пусть значения параметров в модели принимают следующие значения:

$$t_{11}^0 = 1500, \quad t_{12}^0 = 1700;$$
$$k_{11}^t = 0.8, \quad k_{12}^t = 0.8;$$
$$r_1^0 = 3000;$$
$$p_1^0 = 5000, \quad p_2^0 = 6000;$$
$$k_1^p = 0.9, \quad k_2^p = 0.89.$$

Параметр k_1^r будем варьировать в диапазоне от 0.1 до 1 с шагом в 0.1 с целью изучения поведения цен и объема товарных поток в модели.

Результаты эксперимента:

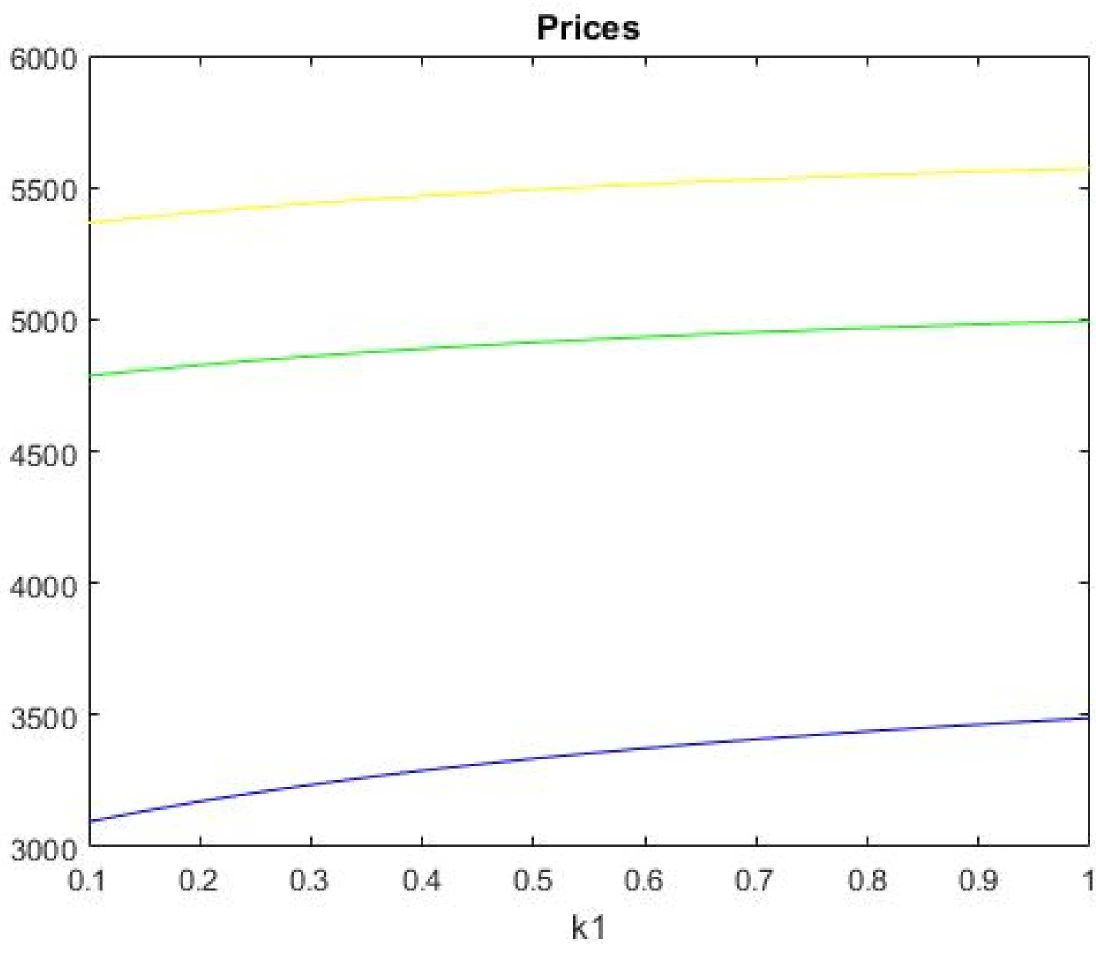

Рис. 3.9: Цены

Линия синего цвета — это цена предложения λ_1, зелёного — цена спроса первого покупателя μ_1, желтого — цена спроса второго покупателя μ_2. На данном графике мы видим, что при увеличении параметра k_1^r происходит монотонный рост как цены предложения, так и цен спроса обоих покупателей, при чем последние возрастают практически параллельно.

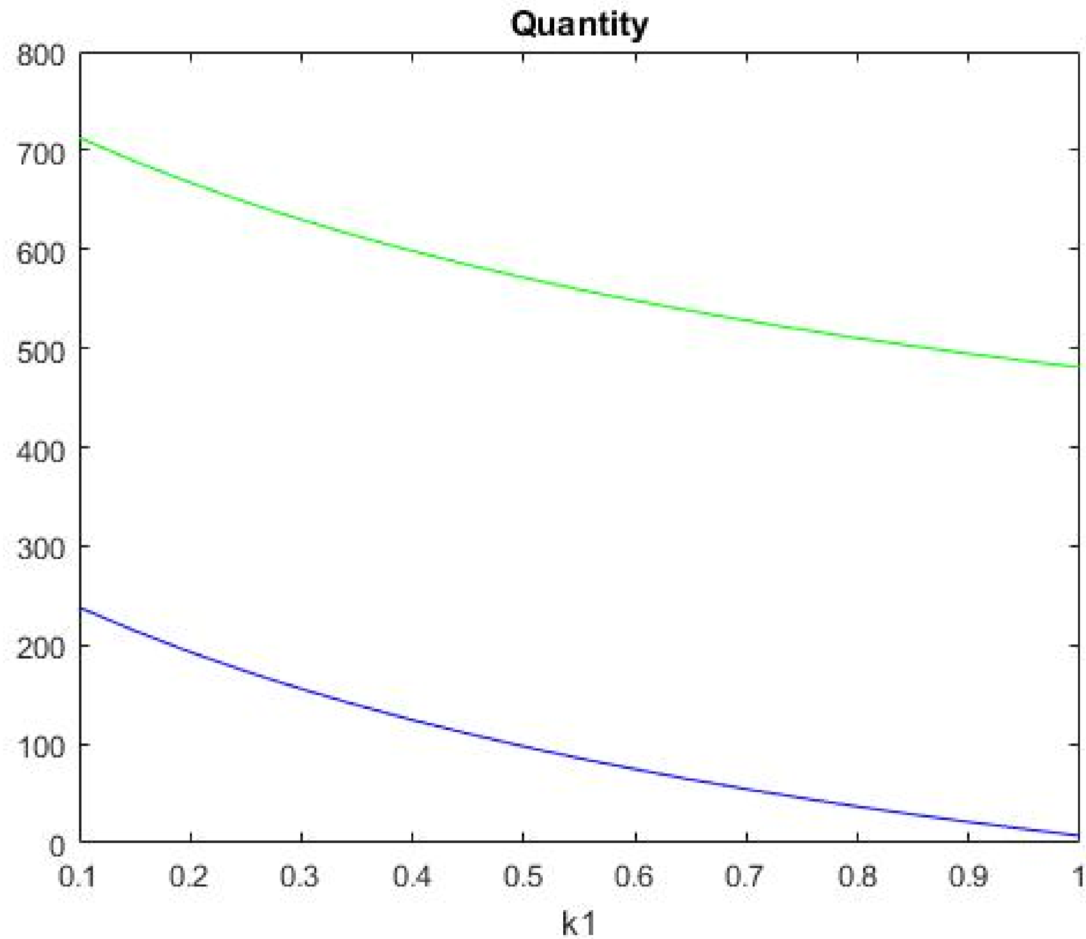

Рис. 3.10: Объемы

График синего цвета — количество товара, покупаемого первым покупателем d_1, зелёного — вторым покупателем d_2. На этом графике мы видим стабильное, практически параллельное уменьшение объемов при возрастании параметра k_1^r. При этом также отметим, что при значении параметра k_1^r более единицы первый покупатель уходит с рынка.

Выводы

В рамках данной работы мы исследовали пространственное рыночное равновесие и апробировали его построение для случая линейных транзакционных издержек. Полученные результаты показывают, что двойственные переменные, являющиеся множителями Лагранжа, отражают цены спроса и предложения. Таким образом, одновременно с равновесным распределением товарных потоков определяются также равновесные цены.

Кроме того, в первой главе, посвященной случаю фиксировнных спроса и предложения, мы обнаружили, что для получения абсолютного значения равновесных цен кто-то из акторов рынка (т.е. фактически модератор рынка) должен указать базовую рыночную цену. После того, как указана базовая рыночная цена, другие цены корректируются в соответствии с пространственным рыночным равновесием.

В рамках второй главы этой работы мы изучили пространственное рыночное равновесие в случае эластичных спроса и предложения, а именно представляющих собой линейные функции. Проблема была сформулирована в виде задачи нелинейной оптимизации с двойственными переменными, отражающими цены спроса и предложения. Нами было показано, что распределение равновесных потоков определяется явно через равновесные цены. Более того, для простых сетей из трех и четырех узлов нам удалось получить явные условия идентификации активных товарных потоков. Другими словами, как только параметры спроса–предложения заданы, можно явно идентифицировать активные товарные потоки.

В третьей главе нами было проведено численное моделирование рынка с фиксированными и эластичными спросом и предложением на примере простых сетей из трех узлов, для которых проведен анализ на чувствительность.

Заключение

Результаты, полученные в рамках данной работы (и частично опубликованные в виде статьи [17]) представляют научную ценность с точки зрения дальнейших исследований пространственно-сетевого развития: сформулированные здесь выводы и выражения могут быть использованы в эвристических процедурах для последующего обобщения на рынки большей размерности и оценки активных товарных потоков в сетях с произвольным количеством акторов. В частности, с учетом данных результатов планируется рассмотрение рынков, на которых спрос фиксирован,а предложение — эластично, и наоборот; а также исследование равновесия на дефицитных и профицитных рынках.

Список литературы

[1] Adida, E., DeMiguel, V. Supply Chain competition with multiple manufacturers and retailers. Operation Research, 2011. Vol. 59, №1. pp. 156–172.

[2] Alam, M., Ramchurn, S.D., Rogers, A. Cooperative energy exchange for the efficient use of energy and resources in remote communities. In: Proceedings of the 2013 international conference on autonomous agents and multi–agent systems, pp. 731–738.

[3] Allevi, E., Gnudi, A., Konnov, I.V. Combined methods for dynamic spatial auction market models. Optimization and Engineering, 2012. Vol. 13, pp. 401–416.

[4] Anderson, E. J., Philpott, A.B. Optimal offer construction in electricity markets. Mathematics of Operations Research, 2002. Vol. 27, pp. 82–100.

[5] Atzeni, I., Ordóñez, L.G., Scutari, G., Palomar, D.P., Fonollosa, J.R. Demand–side management via distributed energy generation and storage optimization, 2013. IEEE Trans Smart Grid 4(2), pp. 866–876.

[6] Atzeni, I., Ordóñez, L.G., Scutari, G., Palomar, D.P., Fonollosa, J.R. Noncooperative and cooperative optimization of distributed energy generation and storage in the demand–side of the smart grid, 2013. IEEE Trans Signal Process 61(10), pp. 2454–2472.

[7] Berezinets, I., Loniagina, Y., Nikolchenko, N., Zenkevich, E. Coordination versus competition in supply chains. Contributions to game theory and management, 2018. Vol. 11, pp. 22–41.

[8] Cachon, G.P. Supply chain coordination with contracts. Handbooks in Operations Research & Management Science, 2003. Vol. 11, pp. 227–339.

[9] Carr, M.S., Karmarkar, U.S. Competition in multi-echelon assembly supply chains. Management Science, 2005. Vol. 51, pp. 45–59.

[10] Cho, S.–H. Horizontal mergers in multi-tier decentralized chains. Management Science, 2014. Vol. 51, pp. 45–59.

[11] Corbett, C., Karmarkar, U.S. Competition and structure in serial supply chains with deterministic demand. Management science, 2001. Vol. 47, pp. 966–978.

[12] Courcoubetis, C., Weber, R.: Pricing communications networks: Economics, technology and modelling. Wiley, 2003.

[13] Dafermos, S.: Traffic equilibrium and variational inequalities. Transportation Science, 1980. Vol. 14, pp. 42–54.

[14] Guder, F., Morris, J. G., Yoon, S. H.: Parallel and serial successive overrelaxation for multicommodity spatial price equilibrium problem. Transportation Science, 1992. Vol. 26, pp. 48–58.

[15] Kaya, M., Ozer, O. Pricing in business–to–business contracts: sharing risk, profit and information. The Oxford Handbook of Pricing Management. Oxford: Oxford University Press, 2012. PP. 738–783.

[16] Konnov, I.: Equilibrium Models and Variational Inequalities. Elsevier, 2007.

[17] Krylatov A., Lonyagina Y., Golubev R. Spatial market equilibrium under linear transaction costs. Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes, 2020. Vol. 16, iss. 4, pp. 447–454.

[18] Krylatov, A., Zakharov, V., Tuovinen, T.: Optimization Models and Methods for Equilibrium Traffic Assignment. Springer International Publishing, 2020. Doi: 10.1007/978-3-030-34102-2.

[19] Krylatov, A.Y., Zakharov, V.V.: Competitive Traffic Assignment in a Green Transit Network. International Game Theory Review, 2016. Doi: 10.1142/S021919891640003X.

[20] Krylatov, A.Y., Zakharov, V.V., Malygin, I.G.: Competitive Traffic Assignment in Road Networks. Transport and Telecommunication, 2016. Vol. 17 (3), pp. 212–221.

[21] Laseter, T., Oliver, K. When will supply chain management grow up?. Strategy+business, 2003. Issue 32.

[22] Lonyagina, Y., Nikolchenko, N., Zenkevich, N. Competitive and cooperative behavior in distribution networks. Contributions to Game Theory and Management, 2018. Vol. 11, pp. 73–102.

[23] Migdalas, A., Pardalos, P., Storoy, S.: Parallel computing in optimization. Kluwer Academic Publishers. The Netherlands, 1997.

[24] Mihailescu, R.-C., Vasirani, M., Ossowski, S. Dynamic coalition adaptation for efficient agent based virtual power plants. In: Multiagent system technologies, 2011. PP. 101–112.

[25] Mohsenian-Rad, A.-H., Wong, V.W., Jatskevich, J., Schober, R., Leon-Garcia, A. Autonomous demand–side management based on game–theoretic energy consumption scheduling for the future smart grid, 2010. IEEE Trans Smart Grid 1(3), pp. 320–331.

[26] Nagurney, A.: Network economics: a variational inequality approach. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1993.

[27] Nagurney, A., Nicholson, C. F., Bishop, P. M.: Massively parallel computation of large–scale spatial price equilibrium models with discriminatory ad valorem tariffs. Annals of Operations Research, 1996. Vol. 68, pp. 281–300.

[28] Nie, P.-Y. Discrete time dynamic multi-leader–follower games with feedback perfect information. International Journal of Systems Science, 2007. Vol. 38(3), pp. 247–255.

[29] Nie, P.-Y. Dynamic discrete-time multi-leader–follower games with leaders in turn. Computers & Mathematics with Applications, 2011. Vol. 61(8), pp. 2039–2043.

[30] Pang, J.-S., Fukushima, M. Quasi–variational inequalities, generalized Nash equilibria, and multileader–follower games. Computational Management Science, 2002. Vol. 2(1), pp. 21–56.

[31] Patriksson, M.: The Traffic Assignment Problem: Models and Methods. Dover Publications, 1994.

[32] Popov, I., Krylatov, A., Zakharov, V., Ivanov, D.: Competitive energy consumption under transmission constraints in a multi–supplier power grid system. International Journal of Systems Science, 2017. Vol. 48(5), pp. 994–1001.

[33] Samuelson, P.: Spatial price equilibrium and linear programming. American Economic Review, 1952. Vol. 42, pp. 283–303.

[34] Sharpe, W.F.: Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. Journal of Finance, 1964. Vol. 19, pp. 425–443.

[35] Takayama, T., Judge, G.G.: Spatial and Tempoml Price and Allocation Models. North–Holland Pub. Co., Amsterdam, 1971.

[36] Tyagi, R.K. On the effect of downstream entry. Management science, 1999. Vol. 45, pp. 59–73.

[37] Veit, A., Xu, Y., Zheng, R., Chakraborty, N., Sycara, K.P. Multiagent coordination for energy consumption scheduling in consumer cooperatives. In: 27th AAAI conference on artifficial intelligence, 2013, pp. 1362–1368.

[38] Vickers, J. Competition and regulation and vertically related markets. Review of economics study, 1995. Vol. 62, pp. 1–17.

[39] Zakharov, V., Krylatov, A.: Transit Network Design for Green Vehicles Routing. Advances in Intelligent Systems and Computing, 2015. Vol. 360, pp. 449–458.

[40] Zenkevich, E., Lonyagina, Y., Fattakhova, M. Coordination in Multilevel Supply Chain. Contributions to Game Theory and Management, 2017. Vol 10, pp. 350–374.

[41] Zhou, D., Karmarkar, U.S., Jiang, B. Competition in multi-echelon distributive supply chains with linear demand. International Journal of Production Research, 2015. Vol. 53(22), pp. 6787–6807.

[42] Ziss, S. Vertical separation and horizontal mergers. Journal of industrial economics, 1995. Vol. 43, pp. 63–75.

Приложения

Решение 1

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \mu_1\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}
\frac{-k_1^r A_{11}}{W} & \frac{-k_1^p k_1^r k_2^r (k_3^r+k_{31}^t)}{W} & -k_3^r \frac{k_1^p k_1^r k_2^r + k_1^p k_1^r k_{21}^t}{W} & \frac{k_1^p (k_3^r+k_{31}^t)(k_1^r k_2^r + k_1^r k_{21}^t)}{W} \\
\frac{-k_1^p k_1^r k_2^r (k_3^r+k_{31}^t)}{W} & \frac{-k_2^r A_{22}}{W} & \frac{-k_1^p k_2^r k_3^r (k_1^r+k_{11}^t)}{W} & \frac{k_1^p k_2^r (k_1^r+k_{11}^t)(k_3^r+k_{31}^t)}{W} \\
-k_1^r \frac{k_1^p k_2^r k_3^r + k_1^p k_3^r k_{21}^t}{W} & -k_2^r \frac{k_1^p k_1^r k_3^r + k_1^p k_3^r k_{11}^t}{W} & \frac{-k_3^r A_{33}}{W} & k_1^p \frac{k_1^r k_2^r k_3^r + k_1^r k_3^r k_{21}^t + k_2^r k_3^r k_{11}^t + k_3^r k_{11}^t k_{21}^t}{W} \\
\frac{-k_1^p k_1^r (k_2^r+k_{21}^t)(k_3^r+k_{31}^t)}{W} & \frac{-k_1^p k_2^r (k_1^r+k_{11}^t)(k_3^r+k_{31}^t)}{W} & \frac{-k_1^p k_3^r (k_1^r+k_{11}^t)(k_2^r+k_{21}^t)}{W} & \frac{k_1^p (k_1^r+k_{11}^t)(k_2^r+k_{21}^t)(k_3^r+k_{31}^t)}{W}
\end{pmatrix} *$$

$$* \begin{pmatrix}
\frac{t_{11}^0 \delta_{11}^t}{k_{11}^t} - \frac{r_1^0 \delta_1^r}{k_1^r} \\
\frac{t_{21}^0 \delta_{21}^t}{k_{21}^t} - \frac{r_2^0 \delta_2^r}{k_2^r} \\
\frac{t_{31}^0 \delta_{31}^t}{k_{31}^t} - \frac{r_3^0 \delta_3^r}{k_3^r} \\
\frac{t_{11}^0 \delta_{11}^t}{k_{11}^t} + \frac{t_{21}^0 \delta_{21}^t}{k_{21}^t} + \frac{t_{31}^0 \delta_{31}^t}{k_{31}^t} + \frac{p_1^0 \delta_1^p}{k_1^p}
\end{pmatrix}.$$

Где:

$$A_{11} = k_1^p k_2^r k_3^r + k_1^p k_2^r k_{11}^t + k_1^p k_3^r k_{11}^t + k_1^p k_2^r k_{31}^t + k_1^p k_3^r k_{21}^t + k_1^p k_{11}^t k_{21}^t + k_1^p k_{11}^t k_{31}^t + k_1^p k_{21}^t k_{31}^t +$$

$$+ k_2^r k_3^r k_{11}^t + k_2^r k_{11}^t k_{31}^t + k_3^r k_{11}^t k_{21}^t + k_{11}^t k_{21}^t k_{31}^t$$

$$A_{22} = k_1^p k_1^r k_3^r + k_1^p k_1^r k_{21}^t + k_1^p k_1^r k_{31}^t + k_1^p k_3^r k_{11}^t + k_1^p k_3^r k_{21}^t + k_1^p k_{11}^t k_{21}^t + k_1^p k_{11}^t k_{31}^t + k_1^p k_{21}^t k_{31}^t +$$

$$+ k_1^r k_3^r k_{21}^t + k_1^r k_{21}^t k_{31}^t + k_3^r k_{11}^t k_{21}^t + k_{11}^t k_{21}^t k_{31}^t$$

$$A_{33} = k_1^p k_1^r k_2^r + k_1^p k_1^r k_{21}^t + k_1^p k_2^r k_{11}^t + k_1^p k_1^r k_{31}^t + k_1^p k_2^r k_{31}^t + k_1^p k_{11}^t k_{21}^t + k_1^p k_{11}^t k_{31}^t + k_1^p k_{21}^t k_{31}^t +$$

$$+ k_1^r k_2^r k_{31}^t + k_1^r k_{21}^t k_{31}^t + k_2^r k_{11}^t k_{31}^t + k_{11}^t k_{21}^t k_{31}^t$$

$$W = k_1^p k_1^r k_2^r + k_1^p k_1^r k_3^r + k_1^p k_2^r k_3^r + k_1^p k_1^r k_{21}^t + k_1^p k_2^r k_{11}^t + k_1^p k_1^r k_{31}^t + k_1^p k_3^r k_{11}^t + k_1^p k_2^r k_{31}^t +$$
$$+ k_1^p k_3^r k_{21}^t + k_1^r k_2^r k_3^r + k_1^p k_{11}^t k_{21}^t + k_1^p k_{11}^t k_{31}^t + k_1^p k_{21}^t k_{31}^t + k_1^r k_2^r k_{31}^t + k_1^r k_3^r k_{21}^t + k_2^r k_3^r k_{11}^t +$$
$$k_1^r k_{21}^t k_{31}^t + k_2^r k_{11}^t k_{31}^t + k_3^r k_{11}^t k_{21}^t + k_{11}^t k_{21}^t k_{31}^t$$

Решение 2

$$
\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \mu_1 \end{pmatrix} =
$$

$$
\begin{pmatrix}
\frac{-k_1^r A_{11}}{W} & \frac{-k_1^p k_1^r k_2^r (k_3^r + k_{31}^t)}{W} & -k_3^r \frac{k_1^p k_1^r k_2^r + k_1^p k_1^r k_{21}^t}{W} & \frac{k_1^p (k_3^r + k_{31}^t)(k_1^r k_2^r + k_1^r k_{21}^t)}{W} \\
\frac{-k_1^p k_1^r k_2^r (k_3^r + k_{31}^t)}{W} & \frac{-k_2^r A_{22}}{W} & \frac{-k_1^p k_2^r k_3^r (k_1^r + k_{11}^t)}{W} & \frac{k_1^p k_2^r (k_1^r + k_{11}^t)(k_3^r + k_{31}^t)}{W} \\
-k_1^r \frac{k_1^p k_2^r k_3^r + k_1^p k_3^r k_{21}^t}{W} & -k_2^r \frac{k_1^p k_1^r k_3^r + k_1^p k_3^r k_{11}^t}{W} & \frac{-k_3^r A_{33}}{W} & k_1^p \frac{k_1^r k_2^r k_3^r + k_1^r k_3^r k_{21}^t + k_2^r k_3^r k_{11}^t + k_3^r k_{11}^t k_{21}^t}{W} \\
\frac{-k_1^p k_1^r (k_2^r + k_{21}^t)(k_3^r + k_{31}^t)}{W} & \frac{-k_1^p k_2^r (k_1^r + k_{11}^t)(k_3^r + k_{31}^t)}{W} & \frac{-k_1^p k_3^r (k_1^r + k_{11}^t)(k_2^r + k_{21}^t)}{W} & \frac{k_1^p (k_1^r + k_{11}^t)(k_2^r + k_{21}^t)(k_3^r + k_{31}^t)}{W}
\end{pmatrix} *
$$

$$
* \begin{pmatrix}
\frac{t_{11}^0 \delta_{11}^t}{k_{11}^t} - \frac{r_1^0 \delta_1^r}{k_1^r} \\
\frac{t_{21}^0 \delta_{21}^t}{k_{21}^t} - \frac{r_2^0 \delta_2^r}{k_2^r} \\
\frac{t_{31}^0 \delta_{31}^t}{k_{31}^t} - \frac{r_3^0 \delta_3^r}{k_3^r} \\
\frac{t_{11}^0 \delta_{11}^t}{k_{11}^t} + \frac{t_{21}^0 \delta_{21}^t}{k_{21}^t} + \frac{t_{31}^0 \delta_{31}^t}{k_{31}^t} + \frac{p_1^0 \delta_1^p}{k_1^p}
\end{pmatrix}. \tag{1}
$$

Где:

$$
A_{11} = k_1^p k_2^r k_3^r + k_1^p k_2^r k_{11}^t + k_1^p k_3^r k_{11}^t + k_1^p k_2^r k_{31}^t + k_1^p k_3^r k_{21}^t + k_1^p k_{11}^t k_{21}^t + k_1^p k_{11}^t k_{31}^t + k_1^p k_{21}^t k_{31}^t +
$$
$$
+ k_2^r k_3^r k_{11}^t + k_2^r k_{11}^t k_{31}^t + k_3^r k_{11}^t k_{21}^t + k_{11}^t k_{21}^t k_{31}^t
$$

$$
A_{22} = k_1^p k_1^r k_3^r + k_1^p k_1^r k_{21}^t + k_1^p k_1^r k_{31}^t + k_1^p k_3^r k_{11}^t + k_1^p k_3^r k_{21}^t + k_1^p k_{11}^t k_{21}^t + k_1^p k_{11}^t k_{31}^t + k_1^p k_{21}^t k_{31}^t +
$$
$$
+ k_1^r k_3^r k_{21}^t + k_1^r k_{21}^t k_{31}^t + k_3^r k_{11}^t k_{21}^t + k_{11}^t k_{21}^t k_{31}^t
$$

$$
A_{33} = k_1^p k_1^r k_2^r + k_1^p k_1^r k_{21}^t + k_1^p k_2^r k_{11}^t + k_1^p k_1^r k_{31}^t + k_1^p k_2^r k_{31}^t + k_1^p k_{11}^t k_{21}^t + k_1^p k_{11}^t k_{31}^t + k_1^p k_{21}^t k_{31}^t +
$$
$$
+ k_1^r k_2^r k_{31}^t + k_1^r k_{21}^t k_{31}^t + k_2^r k_{11}^t k_{31}^t + k_{11}^t k_{21}^t k_{31}^t
$$

$$
W = k_1^p k_1^r k_2^r + k_1^p k_1^r k_3^r + k_1^p k_2^r k_3^r + k_1^p k_1^r k_{21}^t + k_1^p k_2^r k_{11}^t + k_1^p k_1^r k_{31}^t + k_1^p k_3^r k_{11}^t + k_1^p k_2^r k_{31}^t +
$$
$$
+ k_1^p k_3^r k_{21}^t + k_1^r k_2^r k_3^r + k_1^p k_{11}^t k_{21}^t + k_1^p k_{11}^t k_{31}^t + k_1^p k_{21}^t k_{31}^t + k_1^r k_2^r k_{31}^t + k_1^r k_3^r k_{21}^t + k_2^r k_3^r k_{11}^t +
$$
$$
k_1^r k_{21}^t k_{31}^t + k_2^r k_{11}^t k_{31}^t + k_3^r k_{11}^t k_{21}^t + k_{11}^t k_{21}^t k_{31}^t
$$

Решение 3

$$\lambda_1 = (k_1^p k_1^r k_2^r k_{11}^t p_2^0 + k_2^p k_1^r k_2^r k_{11}^t p_1^0 + k_1^p k_1^r k_2^r k_{12}^t p_2^0 + k_2^p k_1^r k_2^r k_{12}^t p_1^0 + k_1^p k_1^r k_2^r k_{21}^t p_2^0 + k_2^p k_1^r k_2^r k_{21}^t p_1^0 +$$

$$+ k_1^p k_1^r k_2^r k_{22}^t p_2^0 + k_2^p k_1^r k_2^r k_{22}^t p_1^0 + k_1^p k_1^r k_{11}^t k_{22}^t p_2^0 + k_2^p k_1^r k_{12}^t k_{21}^t p_1^0 + k_1^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t p_2^0 + k_2^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t p_1^0 +$$

$$+ k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{21}^t p_2^0 + k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{21}^t p_1^0 + k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{22}^t p_2^0 + k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{22}^t p_1^0 + k_1^r k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t p_2^0 +$$

$$k_1^r k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t p_1^0 + k_1^p k_2^p k_1^r k_{11}^t r_2^0 + k_1^p k_2^p k_2^r k_{11}^t r_1^0 + k_1^p k_2^p k_1^r k_{12}^t r_2^0 + k_1^p k_2^p k_2^r k_{12}^t r_1^0 + k_1^p k_2^p k_1^r k_{21}^t r_2^0 +$$

$$+ k_1^p k_2^p k_2^r k_{21}^t r_1^0 + k_1^p k_2^p k_1^r k_{22}^t r_2^0 + k_1^p k_2^p k_2^r k_{22}^t r_1^0 + k_1^p k_2^p k_{11}^t k_{12}^t r_1^0 + k_1^p k_2^p k_{11}^t k_{22}^t r_1^0 +$$

$$+ k_1^p k_2^p k_{12}^t k_{21}^t r_1^0 + k_1^p k_2^p k_{21}^t k_{22}^t r_1^0 + k_1^p k_2^r k_{11}^t k_{12}^t r_1^0 + k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{12}^t r_1^0 + k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{21}^t r_1^0 +$$

$$+ k_2^p k_1^r k_{11}^t k_{21}^t r_2^0 + k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{21}^t r_1^0 + k_1^p k_1^r k_{12}^t k_{22}^t r_2^0 + k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{22}^t r_1^0 + k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{22}^t r_1^0 +$$

$$+ k_1^p k_{11}^t k_{12}^t k_{22}^t r_1^0 + k_2^p k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t r_1^0 + k_1^p k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t r_1^0 + k_2^p k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t r_1^0 + k_2^r k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t r_1^0 +$$

$$+ k_2^r k_{11}^t k_{12}^t k_{22}^t r_1^0 + k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t r_1^0 - k_1^p k_2^p k_1^r k_{11}^t t_{12}^0 - k_1^p k_2^p k_1^r k_{12}^t t_{11}^0 + k_1^p k_2^p k_1^r k_{11}^t t_{22}^0 +$$

$$+ k_1^p k_2^p k_1^r k_{12}^t t_{21}^0 - k_1^p k_2^p k_1^r k_{21}^t t_{12}^0 - k_1^p k_2^p k_1^r k_{22}^t t_{11}^0 + k_1^p k_2^p k_1^r k_{21}^t t_{22}^0 + k_1^p k_2^p k_1^r k_{22}^t t_{21}^0 -$$

$$- k_1^p k_1^r k_2^r k_{11}^t t_{12}^0 - k_1^p k_1^r k_2^r k_{12}^t t_{11}^0 - k_2^p k_1^r k_2^r k_{11}^t t_{12}^0 - k_2^p k_1^r k_2^r k_{12}^t t_{11}^0 + k_1^p k_1^r k_2^r k_{12}^t t_{21}^0 -$$

$$- k_1^p k_1^r k_2^r k_{21}^t t_{12}^0 - k_2^p k_1^r k_2^r k_{11}^t t_{21}^0 - k_2^p k_1^r k_2^r k_{21}^t t_{11}^0 - k_1^p k_1^r k_2^r k_{12}^t t_{22}^0 - k_1^p k_1^r k_2^r k_{22}^t t_{12}^0 +$$

$$+ k_2^p k_1^r k_2^r k_{11}^t t_{22}^0 - k_2^p k_1^r k_2^r k_{22}^t t_{11}^0 - k_1^p k_1^r k_{11}^t k_{22}^t t_{12}^0 - k_1^p k_1^r k_{12}^t k_{22}^t t_{11}^0 - k_2^p k_1^r k_{11}^t k_{21}^t t_{12}^0 -$$

$$- k_2^p k_1^r k_{12}^t k_{21}^t t_{11}^0 + k_1^p k_1^r k_{12}^t k_{22}^t t_{21}^0 - k_1^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t t_{12}^0 + k_2^p k_1^r k_{11}^t k_{21}^t t_{22}^0 - k_2^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t t_{11}^0 -$$

$$- k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{21}^t t_{12}^0 - k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{21}^t t_{11}^0 - k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{22}^t t_{12}^0 - k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{22}^t t_{11}^0 - k_1^r k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t t_{12}^0 -$$

$$- k_1^r k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t t_{11}^0)/$$

$$(k_1^p k_2^p k_1^r k_{11}^t + k_1^p k_2^p k_1^r k_{12}^t + k_1^p k_2^p k_2^r k_{11}^t + k_1^p k_2^p k_2^r k_{12}^t + k_1^p k_2^p k_1^r k_{21}^t + k_1^p k_2^p k_1^r k_{22}^t + k_1^p k_2^p k_2^r k_{21}^t +$$

$$+ k_1^p k_2^p k_2^r k_{22}^t + k_1^p k_1^r k_2^r k_{11}^t + k_1^p k_1^r k_2^r k_{12}^t + k_2^p k_1^r k_2^r k_{11}^t + k_2^p k_1^r k_2^r k_{12}^t + k_1^p k_1^r k_2^r k_{21}^t + k_1^p k_1^r k_2^r k_{22}^t +$$

$$+ k_2^p k_1^r k_2^r k_{21}^t + k_2^p k_1^r k_2^r k_{22}^t + k_1^p k_2^p k_{11}^t k_{12}^t + k_1^p k_2^p k_{11}^t k_{22}^t + k_1^p k_2^p k_{12}^t k_{21}^t + k_1^p k_2^p k_{21}^t k_{22}^t +$$

$$+ k_1^p k_2^r k_{11}^t k_{12}^t + k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{12}^t + k_1^p k_1^r k_{11}^t k_{22}^t + k_2^p k_1^r k_{11}^t k_{21}^t + k_1^p k_1^r k_{12}^t k_{22}^t + k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{21}^t + +$$

$$+ k_2^p k_1^r k_{12}^t k_{21}^t + k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{21}^t + k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{22}^t + k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{22}^t + k_1^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t + k_2^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t +$$

$$+ k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{21}^t + k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{22}^t + k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{21}^t + k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{22}^t + k_1^p k_{11}^t k_{12}^t k_{22}^t + k_2^p k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t +$$

$$+ k_1^p k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t + k_2^p k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t + k_2^r k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t + k_2^r k_{11}^t k_{12}^t k_{22}^t + k_1^r k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t +$$

$$+k_1^r k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t + k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t)$$

$$\lambda_2 = (k_1^p k_1^r k_2^r k_{11}^t p_2^0 + k_2^p k_1^r k_2^r k_{11}^t p_1^0 + k_1^p k_1^r k_2^r k_{12}^t p_2^0 + k_2^p k_1^r k_2^r k_{12}^t p_1^0 + k_1^p k_1^r k_2^r k_{21}^t p_2^0 +$$
$$+ k_2^p k_1^r k_2^r k_{21}^t p_1^0 + k_1^p k_1^r k_2^r k_{22}^t p_2^0 + k_2^p k_1^r k_2^r k_{22}^t p_1^0 + k_1^p k_2^r k_{11}^t k_{12}^t p_2^0 + k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{12}^t p_1^0 +$$
$$+ k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{21}^t p_2^0 + k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{22}^t p_1^0 + k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{21}^t p_2^0 + k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{22}^t p_1^0 + k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{21}^t p_2^0 +$$
$$+ k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{22}^t p_1^0 + k_2^r k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t p_2^0 + k_2^r k_{11}^t k_{12}^t k_{22}^t p_1^0 + k_1^p k_2^p k_1^r k_{11}^t r_2^0 + k_1^p k_2^p k_2^r k_{11}^t r_1^0 +$$
$$+ k_1^p k_2^p k_1^r k_{12}^t r_2^0 + k_1^p k_2^p k_2^r k_{12}^t r_1^0 + k_1^p k_2^p k_1^r k_{21}^t r_2^0 + k_1^p k_2^p k_2^r k_{21}^t r_1^0 + k_1^p k_2^p k_1^r k_{22}^t r_2^0 + k_1^p k_2^p k_2^r k_{22}^t r_1^0 +$$
$$+ k_1^p k_2^p k_{11}^t k_{12}^t r_2^0 + k_1^p k_2^p k_{11}^t k_{22}^t r_2^0 + k_1^p k_2^p k_{12}^t k_{21}^t r_2^0 + k_1^p k_2^p k_{21}^t k_{22}^t r_2^0 + k_1^p k_1^r k_{11}^t k_{22}^t r_2^0 +$$
$$+ k_2^p k_1^r k_{11}^t k_{21}^t r_2^0 + k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{21}^t r_1^0 + k_1^p k_1^r k_{12}^t k_{22}^t r_2^0 + k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{22}^t r_1^0 + k_2^p k_1^r k_{12}^t k_{21}^t r_2^0 +$$
$$+ k_1^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t r_2^0 + k_2^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t r_2^0 + k_1^p k_{11}^t k_{12}^t k_{22}^t r_2^0 + k_2^p k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t r_2^0 + k_1^p k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t r_2^0 +$$
$$+ k_2^p k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t r_2^0 + k_1^r k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t r_2^0 + k_1^r k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t r_2^0 + k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t r_2^0 + k_1^p k_2^p k_2^r k_{11}^t t_{12}^0 +$$
$$+ k_1^p k_2^p k_2^r k_{12}^t t_{11}^0 - k_1^p k_2^p k_2^r k_{11}^t t_{22}^0 - k_1^p k_2^p k_2^r k_{12}^t t_{21}^0 + k_1^p k_2^p k_2^r k_{21}^t t_{12}^0 + k_1^p k_2^p k_2^r k_{22}^t t_{11}^0 -$$
$$- k_1^p k_2^p k_2^r k_{21}^t t_{22}^0 - k_1^p k_2^p k_2^r k_{22}^t t_{21}^0 - k_1^p k_1^r k_2^r k_{11}^t t_{22}^0 + k_1^p k_1^r k_2^r k_{22}^t t_{11}^0 - k_2^p k_1^r k_2^r k_{11}^t t_{21}^0 -$$
$$- k_2^p k_1^r k_2^r k_{21}^t t_{11}^0 - k_1^p k_1^r k_2^r k_{12}^t t_{22}^0 - k_1^p k_1^r k_2^r k_{22}^t t_{12}^0 - k_2^p k_1^r k_2^r k_{12}^t t_{21}^0 + k_2^p k_1^r k_2^r k_{21}^t t_{12}^0 -$$
$$- k_1^p k_1^r k_2^r k_{21}^t t_{22}^0 - k_1^p k_1^r k_2^r k_{22}^t t_{21}^0 - k_2^p k_1^r k_2^r k_{21}^t t_{22}^0 - k_2^p k_1^r k_2^r k_{22}^t t_{21}^0 - k_1^p k_2^r k_{11}^t k_{12}^t t_{22}^0 +$$
$$+ k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{22}^t t_{11}^0 - k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{12}^t t_{21}^0 + k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{21}^t t_{12}^0 - k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{21}^t t_{22}^0 - k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{22}^t t_{21}^0 -$$
$$- k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{21}^t t_{22}^0 - k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{22}^t t_{21}^0 - k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{21}^t t_{22}^0 - k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{22}^t t_{21}^0 - k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{21}^t t_{22}^0 -$$
$$- k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{22}^t t_{21}^0 - k_2^r k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t t_{22}^0 - k_2^r k_{11}^t k_{12}^t k_{22}^t t_{21}^0)/(k_1^p k_2^p k_1^r k_{11}^t + k_1^p k_2^p k_1^r k_{12}^t +$$
$$+ k_1^p k_2^p k_2^r k_{11}^t + k_1^p k_2^p k_2^r k_{12}^t + k_1^p k_2^p k_1^r k_{21}^t + k_1^p k_2^p k_1^r k_{22}^t + k_1^p k_2^p k_2^r k_{21}^t + k_1^p k_2^p k_2^r k_{22}^t + k_1^p k_1^r k_2^r k_{11}^t +$$
$$k_1^p k_1^r k_2^r k_{12}^t + k_2^p k_1^r k_2^r k_{11}^t + k_2^p k_1^r k_2^r k_{12}^t + k_1^p k_1^r k_2^r k_{21}^t + k_1^p k_1^r k_2^r k_{22}^t + k_2^p k_1^r k_2^r k_{21}^t + k_2^p k_1^r k_2^r k_{22}^t +$$
$$+ k_1^p k_2^p k_{11}^t k_{12}^t + k_1^p k_2^p k_{11}^t k_{22}^t + k_1^p k_2^p k_{12}^t k_{21}^t + k_1^p k_2^p k_{21}^t k_{22}^t + k_1^p k_2^r k_{11}^t k_{12}^t + k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{12}^t +$$
$$+ k_1^p k_1^r k_{11}^t k_{22}^t + k_2^p k_1^r k_{11}^t k_{21}^t + k_1^p k_1^r k_{12}^t k_{22}^t + k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{21}^t + k_2^p k_1^r k_{12}^t k_{21}^t + k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{21}^t +$$
$$+ k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{22}^t + k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{22}^t + k_1^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t + k_2^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t + k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{21}^t + k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{22}^t +$$
$$+ k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{21}^t + k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{22}^t + k_1^p k_{11}^t k_{12}^t k_{22}^t + k_2^p k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t + k_1^p k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t + k_2^p k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t +$$
$$+ k_2^r k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t + k_2^r k_{11}^t k_{12}^t k_{22}^t + k_1^r k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t + k_1^r k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t + k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t)$$

$$\mu_1 = (k_1^p k_1^r k_2^r k_{11}^t p_2^0 + k_2^p k_1^r k_2^r k_{11}^t p_1^0 + k_1^p k_1^r k_2^r k_{12}^t p_2^0 + k_2^p k_1^r k_2^r k_{12}^t p_1^0 + k_1^p k_1^r k_2^r k_{21}^t p_2^0 +$$

$$+ k_2^p k_1^r k_2^r k_{21}^t p_1^0 + k_1^p k_1^r k_2^r k_{22}^t p_2^0 + k_2^p k_1^r k_2^r k_{22}^t p_1^0 + k_1^p k_2^r k_{11}^t k_{12}^t p_2^0 + k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{12}^t p_1^0 +$$

$$+ k_2^p k_1^r k_{11}^t k_{21}^t p_1^0 + k_2^p k_1^r k_{12}^t k_{21}^t p_1^0 + k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{21}^t p_1^0 + k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{22}^t p_1^0 + k_1^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t p_2^0 +$$

$$+ k_2^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t p_1^0 + k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{21}^t p_1^0 + k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{22}^t p_1^0 + k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{21}^t p_1^0 + k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{22}^t p_1^0 +$$

$$+ k_2^p k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t p_1^0 + k_2^p k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t p_1^0 + k_2^r k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t p_1^0 + k_2^r k_{11}^t k_{12}^t k_{22}^t p_1^0 + k_1^r k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t p_1^0 +$$

$$+ k_1^r k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t p_1^0 + k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t p_1^0 + k_1^p k_2^p k_1^r k_{11}^t r_2^0 + k_1^p k_2^p k_2^r k_{11}^t r_1^0 + k_1^p k_2^p k_1^r k_{12}^t r_2^0 +$$

$$+ k_1^p k_2^p k_2^r k_{12}^t r_1^0 + k_1^p k_2^p k_1^r k_{21}^t r_2^0 + k_1^p k_2^p k_2^r k_{21}^t r_1^0 + k_1^p k_2^p k_1^r k_{22}^t r_2^0 + k_1^p k_2^p k_2^r k_{22}^t r_1^0 +$$

$$+ k_1^p k_2^p k_{11}^t k_{12}^t r_2^0 + k_1^p k_2^p k_{12}^t k_{21}^t r_1^0 + k_1^p k_2^p k_{11}^t k_{22}^t r_2^0 + k_1^p k_2^p k_{21}^t k_{22}^t r_1^0 + k_1^p k_1^r k_{11}^t k_{22}^t r_2^0 +$$

$$+ k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{21}^t r_1^0 + k_1^p k_1^r k_{12}^t k_{22}^t r_2^0 + k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{22}^t r_1^0 + k_1^p k_{11}^t k_{12}^t k_{22}^t r_2^0 + k_1^p k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t r_1^0 +$$

$$+ k_1^p k_2^p k_2^r k_{11}^t t_{12}^0 + k_1^p k_2^p k_2^r k_{12}^t t_{11}^0 + k_1^p k_2^p k_1^r k_{11}^t t_{21}^0 + k_1^p k_2^p k_1^r k_{21}^t t_{11}^0 + k_1^p k_2^p k_1^r k_{12}^t t_{21}^0 -$$

$$- k_1^p k_2^p k_1^r k_{21}^t t_{12}^0 + k_1^p k_2^p k_2^r k_{11}^t t_{21}^0 + k_1^p k_2^p k_2^r k_{21}^t t_{11}^0 - k_1^p k_2^p k_2^r k_{11}^t t_{22}^0 + k_1^p k_2^p k_2^r k_{22}^t t_{11}^0 +$$

$$+ k_1^p k_2^p k_1^r k_{21}^t t_{22}^0 + k_1^p k_2^p k_1^r k_{22}^t t_{21}^0 + k_1^p k_1^r k_2^r k_{11}^t t_{21}^0 + k_1^p k_1^r k_2^r k_{21}^t t_{11}^0 - k_1^p k_1^r k_2^r k_{11}^t t_{22}^0 +$$

$$+ k_1^p k_1^r k_2^r k_{12}^t t_{21}^0 - k_1^p k_1^r k_2^r k_{21}^t t_{12}^0 + k_1^p k_1^r k_2^r k_{22}^t t_{11}^0 - k_1^p k_1^r k_2^r k_{12}^t t_{22}^0 - k_1^p k_1^r k_2^r k_{22}^t t_{12}^0 +$$

$$+ k_1^p k_2^p k_{11}^t k_{12}^t t_{21}^0 + k_1^p k_2^p k_{12}^t k_{21}^t t_{11}^0 + k_1^p k_2^p k_{11}^t k_{22}^t t_{21}^0 + k_1^p k_2^p k_{21}^t k_{22}^t t_{11}^0 + k_1^p k_2^r k_{11}^t k_{12}^t t_{21}^0 +$$

$$+ k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{21}^t t_{11}^0 - k_1^p k_2^r k_{11}^t k_{12}^t t_{22}^0 + k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{22}^t t_{11}^0 + k_1^p k_1^r k_{11}^t k_{22}^t t_{21}^0 + k_1^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t t_{11}^0 +$$

$$+ k_1^p k_1^r k_{12}^t k_{22}^t t_{21}^0 - k_1^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t t_{12}^0 + k_1^p k_{11}^t k_{12}^t k_{22}^t t_{21}^0 + k_1^p k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t t_{11}^0)/(k_1^p k_2^p k_1^r k_{11}^t +$$

$$+ k_1^p k_2^p k_1^r k_{12}^t + k_1^p k_2^p k_2^r k_{11}^t + k_1^p k_2^p k_2^r k_{12}^t + k_1^p k_2^p k_1^r k_{21}^t + k_1^p k_2^p k_1^r k_{22}^t + k_1^p k_2^p k_2^r k_{21}^t + k_1^p k_2^p k_2^r k_{22}^t +$$

$$+ k_1^p k_1^r k_2^r k_{11}^t + k_1^p k_1^r k_2^r k_{12}^t + k_2^p k_1^r k_2^r k_{11}^t + k_2^p k_1^r k_2^r k_{12}^t + k_1^p k_1^r k_2^r k_{21}^t + k_1^p k_1^r k_2^r k_{22}^t + k_2^p k_1^r k_2^r k_{21}^t +$$

$$+ k_2^p k_1^r k_2^r k_{22}^t + k_1^p k_2^p k_{11}^t k_{12}^t + k_1^p k_2^p k_{11}^t k_{22}^t + k_1^p k_2^p k_{12}^t k_{21}^t + k_1^p k_2^p k_{21}^t k_{22}^t + k_1^p k_2^r k_{11}^t k_{12}^t +$$

$$+ k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{12}^t + k_1^p k_1^r k_{11}^t k_{22}^t + k_2^p k_1^r k_{11}^t k_{21}^t + k_1^p k_1^r k_{12}^t k_{22}^t + k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{21}^t + k_2^p k_1^r k_{12}^t k_{21}^t +$$

$$+ k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{21}^t + k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{22}^t + k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{22}^t + k_1^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t + k_2^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t + k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{21}^t +$$

$$+ k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{22}^t + k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{21}^t + k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{22}^t + k_1^p k_{11}^t k_{12}^t k_{22}^t + k_2^p k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t + k_1^p k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t +$$

$$+ k_2^p k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t + k_2^r k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t + k_2^r k_{11}^t k_{12}^t k_{22}^t + k_1^r k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t + k_1^r k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t + k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t)$$

$$
\begin{aligned}
\mu_2 = (&k_1^p k_1^r k_2^r k_{11}^t p_2^0 + k_2^p k_1^r k_2^r k_{11}^t p_1^0 + k_1^p k_1^r k_2^r k_{12}^t p_2^0 + k_2^p k_1^r k_2^r k_{12}^t p_1^0 + k_1^p k_1^r k_2^r k_{21}^t p_2^0 + \\
&+ k_2^p k_1^r k_2^r k_{21}^t p_1^0 + k_1^p k_1^r k_2^r k_{22}^t p_2^0 + k_2^p k_1^r k_2^r k_{22}^t p_1^0 + k_1^p k_2^r k_{11}^t k_{12}^t p_2^0 + k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{12}^t p_1^0 + \\
&+ k_1^p k_1^r k_{11}^t k_{22}^t p_2^0 + k_1^p k_1^r k_{12}^t k_{22}^t p_2^0 + k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{21}^t p_2^0 + k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{22}^t p_2^0 + k_1^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t p_2^0 + \\
&+ k_2^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t p_1^0 + k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{21}^t p_2^0 + k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{22}^t p_2^0 + k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{21}^t p_2^0 + k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{22}^t p_2^0 + \\
&+ k_1^p k_{11}^t k_{12}^t k_{22}^t p_2^0 + k_1^p k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t p_2^0 + k_2^r k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t p_2^0 + k_2^r k_{11}^t k_{12}^t k_{22}^t p_2^0 + k_1^r k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t p_2^0 + \\
&+ k_1^r k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t p_2^0 + k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t p_2^0 + k_1^p k_2^p k_1^r k_{11}^t r_2^0 + k_1^p k_2^p k_2^r k_{11}^t r_1^0 + k_1^p k_2^p k_1^r k_{12}^t r_2^0 + \\
&+ k_1^p k_2^p k_2^r k_{12}^t r_1^0 + k_1^p k_2^p k_1^r k_{21}^t r_2^0 + k_1^p k_2^p k_2^r k_{21}^t r_1^0 + k_1^p k_2^p k_1^r k_{22}^t r_2^0 + k_1^p k_2^p k_2^r k_{22}^t r_1^0 + \\
&+ k_1^p k_2^p k_{11}^t k_{12}^t r_2^0 + k_1^p k_2^p k_{11}^t k_{22}^t r_1^0 + k_1^p k_2^p k_{12}^t k_{21}^t r_2^0 + k_1^p k_2^p k_{21}^t k_{22}^t r_1^0 + k_2^p k_1^r k_{11}^t k_{21}^t r_2^0 + \\
&+ k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{21}^t r_1^0 + k_2^p k_1^r k_{12}^t k_{21}^t r_2^0 + k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{22}^t r_1^0 + k_2^p k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t r_2^0 + k_2^p k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t r_1^0 + \\
&+ k_1^p k_2^p k_2^r k_{11}^t t_{12}^0 + k_1^p k_2^p k_2^r k_{12}^t t_{11}^0 + k_1^p k_2^p k_1^r k_{11}^t t_{22}^0 - k_1^p k_2^p k_1^r k_{22}^t t_{11}^0 + k_1^p k_2^p k_1^r k_{12}^t t_{22}^0 + \\
&+ k_1^p k_2^p k_1^r k_{22}^t t_{12}^0 - k_1^p k_2^p k_2^r k_{12}^t t_{21}^0 + k_1^p k_2^p k_2^r k_{21}^t t_{12}^0 + k_1^p k_2^p k_2^r k_{12}^t t_{22}^0 + k_1^p k_2^p k_2^r k_{22}^t t_{12}^0 + \\
&+ k_1^p k_2^p k_1^r k_{21}^t t_{22}^0 + k_1^p k_2^p k_1^r k_{22}^t t_{21}^0 - k_2^p k_1^r k_2^r k_{11}^t t_{21}^0 - k_2^p k_1^r k_2^r k_{21}^t t_{11}^0 + k_2^p k_1^r k_2^r k_{11}^t t_{22}^0 - \\
&- k_2^p k_1^r k_2^r k_{12}^t t_{21}^0 + k_2^p k_1^r k_2^r k_{21}^t t_{12}^0 - k_2^p k_1^r k_2^r k_{22}^t t_{11}^0 + k_2^p k_1^r k_2^r k_{12}^t t_{22}^0 + k_2^p k_1^r k_2^r k_{22}^t t_{12}^0 + \\
&+ k_1^p k_2^p k_{11}^t k_{12}^t t_{22}^0 + k_1^p k_2^p k_{11}^t k_{22}^t t_{12}^0 + k_1^p k_2^p k_{12}^t k_{21}^t t_{22}^0 + k_1^p k_2^p k_{21}^t k_{22}^t t_{12}^0 - k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{12}^t t_{21}^0 + \\
&+ k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{21}^t t_{12}^0 + k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{12}^t t_{22}^0 + k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{22}^t t_{12}^0 + k_2^p k_1^r k_{11}^t k_{21}^t t_{22}^0 - k_2^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t t_{11}^0 + \\
&+ k_2^p k_1^r k_{12}^t k_{21}^t t_{22}^0 + k_2^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t t_{12}^0 + k_2^p k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t t_{22}^0 + k_2^p k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t t_{12}^0)/(k_1^p k_2^p k_1^r k_{11}^t + \\
&+ k_1^p k_2^p k_1^r k_{12}^t + k_1^p k_2^p k_2^r k_{11}^t + k_1^p k_2^p k_2^r k_{12}^t + k_1^p k_2^p k_1^r k_{21}^t + k_1^p k_2^p k_1^r k_{22}^t + k_1^p k_2^p k_2^r k_{21}^t + k_1^p k_2^p k_2^r k_{22}^t + \\
&+ k_1^p k_1^r k_2^r k_{11}^t + k_1^p k_1^r k_2^r k_{12}^t + k_2^p k_1^r k_2^r k_{11}^t + k_2^p k_1^r k_2^r k_{12}^t + k_1^p k_1^r k_2^r k_{21}^t + k_1^p k_1^r k_2^r k_{22}^t + k_2^p k_1^r k_2^r k_{21}^t + \\
&+ k_2^p k_1^r k_2^r k_{22}^t + k_1^p k_2^p k_{11}^t k_{12}^t + k_1^p k_2^p k_{11}^t k_{22}^t + k_1^p k_2^p k_{12}^t k_{21}^t + k_1^p k_2^p k_{21}^t k_{22}^t + k_1^p k_2^r k_{11}^t k_{12}^t + \\
&+ k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{12}^t + k_1^p k_1^r k_{11}^t k_{22}^t + k_2^p k_1^r k_{11}^t k_{21}^t + k_1^p k_1^r k_{12}^t k_{22}^t + k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{21}^t + k_2^p k_1^r k_{12}^t k_{21}^t + \\
&+ k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{21}^t + k_1^p k_2^r k_{12}^t k_{22}^t + k_2^p k_2^r k_{11}^t k_{22}^t + k_1^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t + k_2^p k_1^r k_{21}^t k_{22}^t + k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{21}^t + \\
&+ k_1^r k_2^r k_{11}^t k_{22}^t + k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{21}^t + k_1^r k_2^r k_{12}^t k_{22}^t + k_1^p k_{11}^t k_{12}^t k_{22}^t + k_2^p k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t + k_1^p k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t + \\
&+ k_2^p k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t + k_2^r k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t + k_2^r k_{11}^t k_{12}^t k_{22}^t + k_1^r k_{11}^t k_{21}^t k_{22}^t + k_1^r k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t + k_{11}^t k_{12}^t k_{21}^t k_{22}^t)
\end{aligned}
$$