На правах рукописи

Волкова Марина Владимировна

Рандомизированные алгоритмы оценивания параметров инкубационных процессов в условиях неопределенностей и конечного числа наблюдений

Специальность 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2018

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном университете.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Граничин Олег Николаевич
Официальные оппоненты:	Яковис Леонид Моисеевич, доктор технических наук, старший научный сотрудник, ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет Петра Великого», профессор кафедры механики и процессов управления
	Мельников Александр Алексеевич, кандидат физико-математических наук, ООО «ЦРТ-инновации», научный сотрудник
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН»

Защита состоится “30” мая 2018 года в 16 часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.29 на базе Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199178, Санкт-Петербург, 10 линия В.О., д. 33/35, ауд. 74.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9 и на сайте https://disser.spbu.ru/disser/soiskatelyu-uchjonoj-stepeni/dis-list/form/14/1647.html.

Автореферат разослан “____” ________ 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.232.29,
доктор физико-математических наук,
профессор В. М. Нежинский

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Решения большого количества практически важных задач адаптивного управления, машинного обучения, определения неявных характеристик систем, материалов и т. п. опираются на методы восстановления неизвестной зависимости по наблюдаемым экспериментальным данным. Их развитие можно найти в работах В. Н. Вапника, А. Я. Червоненскиса, В. Н. Фомина, А. Л. Фрадкова, В. А. Якубовича и других. Использование математических методов неразрывно связано с формированием моделей исследуемых явлений. Типичным подходом является выбор математической модели с включением в нее различных *помех*, относящихся, с одной стороны, к грубости математической модели и, с другой стороны, характеризующих неконтролируемые внешние возмущения объекта или системы.

При рассмотрении проблем оптимизации стохастическая постановка задачи часто является не только наиболее адекватной реальным процессам, но и, как правило, позволяет предлагать обоснованные алгоритмы решения для вычислительно сложных или плохо обусловленных задач. В последнее время в работах Б. Т. Поляка, Д. Калафиоре, Р. Темпо, М. Кампи, Ф. Даббене, М. Вадисагара и многих других активно развиваются *рандомизированные* методы решения. Они обладают существенными достоинствами в сравнении с детерминированными методами. С одной стороны, в задачах требующих большого объема “перебора” вариантов алгоритмы, основанные на случайном выборе, позволяют за ограниченное время добиваться хороших результатов с определенной вероятностью. С другой стороны, возможность рандомизации процессов наблюдений позволяет во многих случаях избавиться от негативного влияния систематических погрешностей.

Теория оценивания неизвестных параметров при статистических неопределенностях достаточно хорошо развита в работах Л. Льюнга, Я. З. Цыпкина, Г. Кушнера, Д. Ина, Д. Спала и многих других. При случайной природе неопределенностей типичным подходом является оценивание неизвестных параметров системы на основе минимизации функционала среднего риска. В случае достаточно большого числа наблюдений системы со случайными параметрами возможно применение традиционного подхода, основанного на оценке методом наименьших квадратов. При этом для случайных помех результат имеет математическое обоснование, базирующееся на законе больших чисел и центральной предельной теореме.

Однако, существуют ситуации, когда нет возможности провести достаточное число наблюдений, обеспечивающее корректные условия применимости традиционных алгоритмов. Например, в работах С. В. Емельянова, В. И. Уткина, О. Н. Граничина и других в задачах адаптивного управления в условиях изменяющейся со временем структуры пространства состояний для оценки текущих значений неизвестных параметров системы есть только короткий промежуток времени, достаточный для того, чтобы провести небольшое количество наблюдений. Похожая ситуация может наблюдаться и при очень трудоемких испытаниях, проведение которых требует большого количества временны́х или материальных затрат. Еще одна проблема, с которой сталкиваются при синтезе законов управления,— недостаточная *вариативность* последовательности наблюдений. Например, если цель адаптивного управления состоит в минимизации отклонения вектора состояния системы от заданной траектории, то это часто приводит к вырожденной последовательности наблюдений, в то время как для успешного проведения идентификации неизвестных параметров системы должно быть обеспечено “разнообразие” наблюдений. Однако, в условиях неопределенностей при адаптивном управлении гибридными системами, системами с переключениями и, в более общем случае, при адаптивном управлении в условиях переменной структуры пространства состояний часто приходится принимать решение о текущих параметрах системы на основании конечного (и даже малого) набора наблюдений. Таким образом, необходимо разрабатывать методы оценивания неизвестных параметров систем, которые работоспособны при небольшом количестве данных наблюдений.

Одним из таких методов является метод знако-возмущенных сумм (Sign Perturbed Sums, SPS), позволяющий по малому числу наблюдений с заданной доверительной вероятностью получать доверительное множество для искомого параметра. Метод знако-возмущенных сумм сформулирован Б. Касаи, М. Кампи и Э. Вейером для многомерного линейного случая. Однако, для целого ряда практически важных задач актуально рассмотрение нелинейной зависимости.

В любом измерении присутствует не только случайная погрешность, но также и ошибка самого измерительного процесса — систематическая погрешность. При коротком интервале наблюдений в изменяющихся условиях трудно провести валидацию модели измерений для проведения “чистого” эксперимента без систематической погрешности. Существенным ограничением применимости метода знако-возмущенных сумм является предположение о симметричности относительно нуля вероятностного распределения случайных помех. Это актуализирует разработку алгоритмов оценивания, работоспособных в условиях произвольных внешних помех. В работах А. А. Сенова, О. Н. Граничина и других за счет рандомизации входных воздействий удалось в линейном случае ослабить условия независимости и симметричности помех наблюдения.

Практическая значимость состоит в том, что методы оценки неизвестных истинных значений параметров модели наблюдаемого процесса являются неотъемлемой частью стандартизации новых теоретических подходов для их последующего применения на практике. В частности, в задачах механики динамического разрушения в работах Н. Ф. Морозова, Ю. В. Петрова, А. А. Уткина изучается проблема определения значений параметра инкубационного времени разрушения материалов, позволяющего описывать прочность при динамических воздействиях, сила которых превосходит силу статического разрушения. Отличительной особенностью динамических испытаний является их большая трудоемкость, поэтому обычно для анализа имеется небольшое количество наблюдений, по которым нужно дать оценку значений целевых параметров.

Цели и задачи исследования. Целью работы является развитие методов оценивания неизвестных параметров систем, работоспособных при небольшом количестве наблюдений. Для достижения этой цели были поставлены и решены следующие задачи:

1) обобщить метод знако-возмущенных сумм построения по последовательности наблюдений доверительного множества с заданной доверительной вероятностью на многомерный нелинейный случай с симметричными независимыми внешними помехами и установить условия его применимости;

2) обобщить модифицированный метод знако-возмущенных сумм на нелинейный случай при произвольных внешних помехах и установить условия, при которых модифицированный обобщенный метод дает результирующее доверительное множество с заданной доверительной вероятностью;

3) для динамических задач механики разрушения применить и обосновать работоспособность обобщенного метода знако-возмущенных сумм при малом наборе экспериментальных данных для расчетов доверительного интервала параметра инкубационного времени разрушения материала, установить условия, при которых этот метод дает результирующий доверительный интервал с заданной априори доверительной вероятностью.

Методы исследования. В диссертации используются методы теорий оптимизации и оценивания, вероятности и математической статистики, а также методы механики разрушения сплошных сред, основанные на структурно-временном подходе; применяются рандомизированные алгоритмы.

Основные результаты и положения, выносимые на защиту:

1) метод знако-возмущенных сумм обобщен на нелинейный случай с симметричными независимыми внешними помехами и установлены условия, при которых обобщенный метод дает результирующее доверительное множество с задаваемой априори доверительной вероятностью;

2) модифицированный метод знако-возмущенных сумм обобщен на нелинейный случай при произвольных внешних помехах и установлены условия, при которых обобщенный метод дает результирующее доверительное множество с задаваемой априори доверительной вероятностью;

3) при малом наборе экспериментальных данных предложено и обосновано применение обобщенного метода знако-возмущенных сумм для расчетов доверительного интервала параметра инкубационного времени разрушения материала в динамических задачах механики разрушения, установлены условия, при которых предложенный метод дает результирующий доверительный интервал с задаваемой априори доверительной вероятностью.

Научная новизна. Все основные научные результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая ценность и практическая значимость. *Теоретическая ценность* результатов заключается, во-первых, в обобщении метода знако-возмущенных сумм на многомерный нелинейный случай с симметричными независимыми внешними помехами и установлении условий, при которых обобщенный метод дает результирующее доверительное множество с задаваемым априори уровнем достоверности. Во-вторых, в обобщении модифицированного метода знако-возмущенных сумм на нелинейный случай при произвольных внешних помехах и в получении условий его работоспособности, при которых обобщенный модифицированный метод дает результирующее доверительное множество, содержащее искомый параметр, с задаваемым априори уровнем достоверности. В третьих, в обосновании применения обобщенного метода знако-возмущенных сумм при малом наборе экспериментальных данных для расчетов доверительного интервала параметра инкубационного времени разрушения материала в динамических задачах механики разрушения, а также в установлении условий, при которых предложенный метод дает результирующее доверительное множество с задаваемым априори уровнем достоверности.

Практическая значимость состоит в том, что оценка параметров по конечному числу наблюдений является неотъемлемой частью решения многих прикладных задач. В частности, в дисертации рассмотрено применение метода знако-возмущенных сумм для задач динамической механики разрушения, где также наблюдается недостаток количества испытаний в силу их высокой стоимости и трудоемкости. На основе метода знако-возмущенных сумм могут быть разработаны новые стандарты по оценке динамических прочностных параметров материалов.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность научных результатов обеспечивается строгостью доказательств, согласованностью с уже имеющимися результатами в исследуемой и смежной областях, а также экспериментальной проверкой.

Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на семинарах кафедр теоретической кибернетики и системного программирования математико-механического факультета, на международных конференциях: 56th IEEE Conference on Decision and Control, Мельбурн, Австралия, 12-15 декабря, 2017 г.; IX Традиционной молодежной школе “Информация, управление и оптимизация”, Москва, Россия, 14-20 июня 2017 г.; международной научной конференции “Процессы управления и устойчивость” (Санкт-Петербург, 2009 г., 2010 г., 2011 г. и 2012 г.); научном семинаре по автоматическому управлению под руководством Б. Т. Поляка (ИПУ РАН, Москва).

Результаты диссертации апробированы и подтверждены актом о внедрении в Научно-исследовательском центре “Динамика”.

Публикация результатов. Результаты, полученные в ходе работы над диссертацией, нашли отражение в 13 научных работах, из которых три опубликованы в изданиях, индексируемых в базе данных Scopus, и две в журналах, входящих в перечень изданий, рекомендованных ВАК. Работы [1–3], [5–7], [12–13] написаны в соавторстве. В [1–3], [5–7], [12–13] М. В. Волковой принадлежат формулировки и доказательства теорем, обработка результатов экспериментов, а соавторам — постановки задач и выбор методов решения.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы, включающего 77 источников. Текст занимает 76 страниц и содержит 8 рисунков.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность диссертационной работы, формулируются цель и задачи исследования, научная новизна, теоретическая и практическая значимость, сведения об апробации работы, кратко излагаются основные результаты.

В **первой главе** приводится обзор литературы по теме исследования, в частности по оценке неизвестных параметров системы. В указанных источниках рассматриваются разные постановки задач, исследуется поведение систем в различных условиях при наличии помех.

В разделе 1.1 приводится постановка задачи оптимизации функционалов среднего риска. В разделе 1.2 описываются традиционные подходы к построению доверительного множества на основе оценок метода наименьших квадратов. В разделе 1.3 сравниваются детерминированные и рандомизированные алгоритмы оценивания неизвестных параметров. В разделе 1.4 дан краткий обзор литературы, показывающий в хронологическом порядке развитие рандомизированных подходов.

Во **второй главе** метод знако-возмущенных сумм построения доверительных множеств для оценки значений модельных параметров обобщен на нелинейный многомерный случай. Для случая симметричных независимых помех получены ограничения на нелинейную функцию регрессии, при которых сформулирована и доказана теорема о свойствах получающегося доверительного множества. Проведено обобщение полученного результата на случай отсутствия симметричности относительно нуля вероятностных распределений помех путем рандомизации процедуры проведения испытаний.

В разделе 2.1 приводится формальная постановка задачи. В разделе 2.2 содержатся основные предположения и объясняется интуитивная идея метода знако-возмущенных сумм. В разделе 2.3 описывается метод знако-возмущенных сумм для произвольных внешних помех, имеющих симметричные относительно нуля вероятностные распределения. В разделе 2.4 формулируется Теорема 2.1, обобщающая метод знако-возмущенных сумм на многомерный нелинейный случай с симметричными независимыми внешними помехами и устанавливающая условия, при которых обобщенный метод дает ограниченное результирующее доверительное множество с задаваемым априори уровнем достоверности. В разделе 2.5 дается обобщение модифицированного метода знако-возмущенных сумм на нелинейный случай с произвольной функцией распределения случайных помех, и формулируется Теорема 2.2, устанавливающая условия, при которых обобщенный модифицированный метод знако-возмущенных сумм дает результирующее доверительное множество с задаваемым априори уровнем достоверности в нелинейном случае при произвольных внешних помехах. В разделе 2.6 приводится алгоритм построения границ доверительного множества.

Пусть $f(u, \vartheta)$ — непрерывная функция двух векторных аргументов: $u \in \mathbb{R}^k$ и $\vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$, т. е. $f : \mathbb{R}^k \times \Theta \to \mathbb{R}$, дифференцируемая по второму аргументу во всех внутренних точках множества Θ. Пусть функция f является адекватной моделью некоторого природного явления при единственном неизвестном значении параметра $\vartheta = \vartheta^\star$. Вместо задачи о поиске оценки будем рассматривать задачу построения доверительного множества для неизвестного параметра $\vartheta^\star$.

Рассмотрим модель наблюдений:

$$y_t = f(u_t, \vartheta^\star) + v_t, \qquad t = 1, \dots, T, \tag{1}$$

где y_t — наблюдения (выходы), $y_t \in \mathbb{R}$, v_t — случайные внешние помехи, $v_t \in \mathbb{R}$, u_t — известный план наблюдений (входы), который задается экспериментатором или выбирается как-то случайно из некоторого множества $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^k$, $\vartheta^\star \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ — истинное значение неизвестного векторного параметра, принадлежащее замкнутому ограниченному множеству $\Theta \subset \mathbb{R}^d$, t — номер эксперимента, T — общее количество экспериментов.

Требуется по входам $u_1, u_2, \dots, u_{\mathrm{T}}$ и наблюдениям $y_1, y_2, \dots, y_{\mathrm{T}}$ при заданной рациональной вероятности $p \in (0, 1)$ определить *доверительное множество* $\widehat{\Theta}_{\mathrm{T}} \subseteq \Theta$ такое, что вероятность $\mathrm{P}(\vartheta^\star \in \widehat{\Theta}_{\mathrm{T}})$ не менее, чем p.

При благоприятном распределении случайных помех v_t истинное значение неизвестного параметра $\vartheta^\star$ является решением задачи минимизации функционала среднего риска:

$$F(\vartheta) = \mathrm{E}(y - f(u, \vartheta))^2 \to \min_{\vartheta \in \Theta}. \tag{2}$$

Здесь и далее E — символ математического ожидания.

Поскольку в распоряжении исследователя находится лишь конечное число наблюдений (1), вместо функционала среднего риска рассматривается задача о минимизации эмпирического функционала:

$$F_{\mathrm{T}}(\vartheta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (y_t - f(u_t, \vartheta))^2 \to \min_{\vartheta \in \Theta}, \tag{3}$$

решение которой $\widehat{\vartheta}_{\mathrm{T}}$ называют оценками метода наименьших квадратов (МНК).

Решение задачи (3) затрудняет отсутствие информации о распределении случайных помех v_t в (1), а также малое количество наблюдений T. С этими трудностями справились Б. Касаи, М. Кампи и Э. Вейер для похожей задачи в линейной постановке. Они предложили использовать метод знако-возмущенных сумм. Его преимуществом являются очень слабые ограничения на случайные помехи: предполагается, что они всего лишь независимые и симметрично распределенные относительно нуля случайные величины. А. А. Сеновым, О. Н. Граничиным и другими метод знако-возмущенных сумм был модернизирован для еще более слабых ограничений на внешние помехи с отказом от условия их симметричности.

В случае существования производной функции f по второму аргументу ϑ необходимое условие минимума эмпирического функционала (3) имеет вид:

$$\nabla_\vartheta F_{\mathrm{T}}(\vartheta) = 2\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_t - f(u_t,\vartheta))\nabla_\vartheta f(u_t,\vartheta) = 0. \tag{4}$$

Это условие с учетом модели наблюдений (1) принимает вид:

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\big(f(u_t,\vartheta^\star) - f(u_t,\vartheta) + v_t\big)\nabla_\vartheta f(u_t,\vartheta) = 0.$$

Приращение функции согласно теореме о среднем может быть вычислено в виде:

$$f(u_t,\vartheta^\star) - f(u_t,\vartheta) = \nabla_\vartheta f(u_t,\vartheta')^{\mathrm{T}}(\vartheta^\star - \vartheta), \tag{5}$$

где ϑ' — некоторая точка на отрезке, соединяющем ϑ и $\vartheta^\star$, $\cdot^{\mathrm{T}}$ — операция транспонирования вектора. С учетом (5) уравнение (4) принимает вид:

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\Bigg(\nabla_\vartheta f(u_t,\vartheta)\nabla_\vartheta f(u_t,\vartheta')^{\mathrm{T}}(\vartheta^\star - \vartheta) + \nabla_\vartheta f(u_t,\vartheta)v_t\Bigg) = 0. \tag{6}$$

Для корректного построения доверительного множества методом SPS будем считать, что выполнены следующие предположения относительно случайных помех и исследуемой функции в модели наблюдений (1).

Предположение 1. Внешние помехи наблюдения v_t представляют собой последовательность независимых случайных величин, каждая из которых имеет симметричное относительно нуля вероятностное распределение.

Предположение 2. При любом $\vartheta \in \Theta$ матрица

$$R_{\mathrm{T}}(\vartheta) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\nabla_\vartheta f(u_t,\vartheta)\nabla_\vartheta f(u_t,\vartheta')^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

невырождена.

Предположение 3. Градиент функции $\nabla_\theta f(u,\theta)$ равномерно ограничен и функция $f(\cdot,\cdot)$ удовлетворяет следующему условию:
$\|\bar{\nabla}_j\| \le K\|\vartheta^\star - \vartheta\|$, где $K > 0$, $\bar{\nabla}_j = \nabla_\vartheta f(u_j,\vartheta)\big(f(u_j,\vartheta^\star) - f(u_j,\vartheta)\big)$, $j = 1,\ldots,T$.

Предположение 4. Для произвольных $j,\ k = 1,\dots,T$ при достаточно далеких ϑ от $\vartheta^\star$ выполняется:
$$[\bar{\nabla}_j]^{\mathrm{T}} \bar{R}_{\mathrm{T}}^{-1}(\vartheta) \bar{\nabla}_k \geq \mu \|\vartheta^\star - \vartheta\|^\rho$$
с некоторыми константами $\mu > 0$ и $\rho > 1$.

Стоит отметить, что при выполнении Предположения 2 симметричная матрица $R_{\mathrm{T}}^{\mathrm{T}}(\vartheta) R_{\mathrm{T}}(\vartheta)$ положительно определена, и, кроме того, она может быть факторизована, т. е. существует невырожденная матрица $\bar{R}_{\mathrm{T}}(\vartheta)$ такая, что: $R_{\mathrm{T}}^{\mathrm{T}}(\vartheta) R_{\mathrm{T}}(\vartheta) = \bar{R}_{\mathrm{T}}(\vartheta) \bar{R}_{\mathrm{T}}(\vartheta)$.

Также отметим, что Предположения 3–4 выполняются для практически важных приложений, описанных в Главе 3 диссертации.

Обозначим ошибки предсказания для произвольного значения параметра ϑ следующим образом:
$$\delta_t(\vartheta) := y_t - f(u_t, \vartheta). \tag{8}$$
Введем нормированную сумму невязок между измеряемыми и предсказываемыми значениями:
$$H_0(\vartheta) := \bar{R}_{\mathrm{T}}(\vartheta)^{-1/2} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \nabla_\vartheta f(u_t, \vartheta) \delta_t(\vartheta). \tag{9}$$
Пусть β_{it} — случайные величины, принимающие значения ± 1 с вероятностью $1/2$, $i = 1,\dots,M-1$, $t = 1,\dots,T$. Вместе с $H_0(\vartheta)$ будем рассматривать еще $M-1$ знако-возмущенных сумм $H_i(\vartheta)$:
$$H_i(\vartheta) := \bar{R}_{\mathrm{T}}(\vartheta)^{-1/2} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \beta_{it} \nabla_\vartheta f(u_t, \vartheta) \delta_t(\vartheta), \quad i = 1,\dots,M-1. \tag{10}$$
Если дообозначить $\beta_{0t} = 1$, $t = 1,\dots,T$, то выражение (9) становится частным случаем обозначений (10). Как видно из выражений (9)–(10), величины $H_0(\vartheta)$ и $H_i(\vartheta)$ векторные, поэтому в дальнейшем для их сравнения будем использовать евклидову норму векторов $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}}$.

Интуитивная идея метода SPS заключается в следующей особенности построенных знако-возмущенных сумм. При значении $\vartheta = \vartheta^\star$ суммы $H_0(\vartheta^\star)$ и $H_i(\vartheta^\star)$ будут выглядеть так:
$$H_0(\vartheta^\star) = \bar{R}_{\mathrm{T}}(\vartheta^\star)^{-1/2} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \nabla_\vartheta f(u_t, \vartheta^\star) v_t, \tag{11}$$
$$H_i(\vartheta^\star) = \bar{R}_{\mathrm{T}}(\vartheta^\star)^{-1/2} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \beta_{it} \nabla_\vartheta f(u_t, \vartheta^\star) v_t, \quad i = 1,\dots,M-1. \tag{12}$$
При этом $H_0(\vartheta^\star)$ и $H_i(\vartheta^\star)$ будут иметь одинаковое распределение при выполнении Предположения 1, так как помехи $\{v_t\}$ — независимые случайные величины с симметричными относительно нуля вероятностными распределениями. Следовательно, если все $\|H_s(\vartheta^\star)\|$, $s = 0,\dots,M-1$ различны, и $i \neq j$, то $\|H_j(\vartheta^\star)\|$ равновероятно

может быть как больше, так и меньше $\|H_i(\vartheta^\star)\|$, а вероятность того, что какое-то конкретное $\|H_j(\vartheta^\star)\|$ будет занимать k-ю позицию в упорядочивании $\{\|H_i(\vartheta^\star)\|\}_{i=0}^{M-1}$ будет одинаковой для всех значений j, включая $j = 0$. Поскольку j может принимать M разных значений, эта вероятность в точности равна $1/M$.

Определение 1. Если в наборе величин $G_1, \ldots, G_{M-1}$ нет равных величине G_0, то будем называть *позицией* величины G_0 в наборе $G_1, \ldots, G_{M-1}$ и обозначать ее через $\mathbf{R}(G_0, G_1, \ldots, G_{M-1})$ номер величины G_0 в упорядоченной по возрастанию последовательности $\{G_i\}_{i=0}^{M-1}$. Если же в наборе $G_1, \ldots, G_{M-1}$ есть r_1 величин, равных G_0, то для вычисления позиции G_0 в этом наборе следует применить

Алгоритм позиционирования

Шаг 1. Найти мощности подмножеств индексов:

$$r_0 := \Big|\{i \ \mid \ G_i < G_0\}\Big|, \qquad r_1 := \Big|\{i \ \mid \ G_i = G_0\}\Big|.$$

Шаг 2. Если $r_1 > 0$, то выбрать случайно равновероятным образом с вероятностью $1/(r_1+1)$ одно из чисел из множества $\{1, \ldots, r_1+1\}$ и обозначить его r_2. Если $r_1 = 0$, то $r_2 := 1$.

Шаг 3. Назначить позицией величины G_0 в наборе $G_1, \ldots, G_{M-1}$ величину $\mathbf{R} = \mathbf{R}(G_0, \ldots, G_{M-1}) := r_0 + r_2$.

Определение 2. Определим *ранг* величины ϑ формулой:

$$\mathcal{R}(\vartheta) = \mathbf{R}(\|H_0(\vartheta)\|, \ldots, \|H_{M-1}(\vartheta)\|). \tag{13}$$

Идея такого ранжирования значений параметра ϑ лежит в основе метода, определяющего доверительное множество для истинного значения параметра $\vartheta^\star$. Метод знако-возмущенных сумм базируется на процедуре $\mathsf{SPS\_indicator}(\vartheta, p)$, где p — рациональное число из $(0, 1)$ — задаваемая доверительная вероятность.

Процедура-функция $\mathsf{SPS\_indicator}(\vartheta, p)$

Шаг 1. Выбрать натуральные числа q, M, такие что $M > q > 0$ и $p = 1 - q/M$.

Шаг 2. Сгенерировать $(M-1)T$ одинаково распределенных независимых бернуллиевских случайных величин $\beta_{it} = \pm 1$: $\mathrm{P}(\beta_{it} = 1) = \mathrm{P}(\beta_{it} = -1) = 1/2$ для $t = 1, 2, \ldots, T$ и $i = 1, 2, \ldots, M-1$.

Шаг 3. Для некоторого ϑ вычислить разницу между предсказанным и наблюдаемым в эксперименте значением: $\delta_t(\vartheta) = y_t - f(u_t, \vartheta)$, $t = 1, 2, \ldots, T$.

Шаг 4. Вычислить

$$R_{\mathrm{T}}(\vartheta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \nabla_\vartheta f(u_t, \vartheta) \nabla_\vartheta f(u_t, \vartheta')^{\mathrm{T}}. \tag{14}$$

Произвести факторизацию $R_{\mathrm{T}}^{\mathrm{T}}(\vartheta) R_{\mathrm{T}}(\vartheta) = \bar{R}_{\mathrm{T}}(\vartheta) \bar{R}_{\mathrm{T}}(\vartheta)$. Вычислить

$$H_0(\vartheta) = \bar{R}_{\mathrm{T}}(\vartheta)^{-1/2} \sum_{t=1}^{T} \nabla_\vartheta f(u_t, \vartheta) \delta_t(\vartheta), \tag{15}$$

$$H_i(\vartheta) = \bar{R}_{\mathrm{T}}(\vartheta)^{-1/2} \sum_{t=1}^{T} \beta_{it} \nabla_{\vartheta} f(u_t, \vartheta) \delta_t(\vartheta), \quad i = 1, 2, \ldots, M-1. \tag{16}$$

Шаг 5. Вычислить ранг величины ϑ согласно формуле (13).
Шаг 6. Если $\mathcal{R}(\vartheta) \le M - q$, то присвоить процедуре $\mathsf{SPS\_indicator}(\vartheta, p)$ значение 1, иначе присвоить значение 0.

Метод знако-возмущенных сумм

Определить доверительное множество $\widehat{\Theta}_{\mathrm{T}}$ с доверительной вероятностью p с помощью процедуры $\mathsf{SPS\_indicator}(\vartheta, p)$:

$$\widehat{\Theta}_{\mathrm{T}} := \{\vartheta \in \mathbb{R}^d \mid \mathsf{SPS\_indicator}(\vartheta, p) = 1\}.$$

Теорема 2.1. *Если выполнены Предположения 1–4, p — заданная доверительная вероятность, $\widehat{\Theta}_{\mathrm{T}}$ из метода знако-возмущенных сумм, M, q из Шага 1 процедуры* $\mathsf{SPS\_indicator}(\vartheta, p)$, *то*

$$\mathrm{P}(\vartheta^\star \in \widehat{\Theta}_{\mathrm{T}}) = p = 1 - q/M,$$

и множество $\widehat{\Theta}_{\mathrm{T}}$ ограничено.

Основным ограничением применимости метода знако-возмущенных сумм является предположение о симметричности относительно нуля вероятностных распределений случайных помех. За счет рандомизации входных воздействий А. А. Сенову, О. Н. Граничину и другим удалось в линейном случае ослабить условия независимости и симметричности помех наблюдения. Далее этот подход обобщается на нелинейную постановку задачи, при этом делается лишь одно упрощение — об одномерности входных параметров u_t.

Рассматривается более сложная в целом модель наблюдений по сравнению с исходной моделью (1). Пусть $\Delta_t,\ t = 1, 2, \ldots, T$ — пробное рандомизированное возмущение — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, равных ± 1 с одинаковой вероятностью $1/2$. Предполагается, что функция $f(\cdot, \cdot)$ дифференцируема не только по второму аргументу, но и по первому, и при фиксированном плане наблюдений u_t для каждого момента времени $t = 1, 2, \ldots, T$ кроме наблюдений (1) сделаны еще дополнительные наблюдения:

$$y_t^+ = f(u_t^+, \vartheta^\star) + v_t^+, \tag{17}$$

в возмущенных точках входов $u_t^+ = u_t + \Delta_t$.

По трем измеряемым величинам y_t, y_t^+, Δ_t для каждого момента времени $t = 1, 2, \ldots, T$ определяется "новое" наблюдение следующим образом:

$$\bar{y}_t := \Delta_t (y_t^+ - y_t).$$

Для последовательности наблюдений $\{\bar{y}_t\}$ в силу (1) и (17) имеем:

$$\bar{y}_t = \bar{f}(u_t, \Delta_t, \vartheta^\star) + \bar{v}_t, \tag{18}$$

где $\bar{f}(u_t, \Delta_t, \vartheta^\star) = \Delta_t(f(u_t^+, \vartheta^\star) - f(u_t, \vartheta^\star))$ и $\bar{v}_t = \Delta_t(v_t^+ - v_t)$. По теореме о среднем функцию $\bar{f}(u_t, \Delta_t, \vartheta^\star)$ можно представить в виде:

$$\bar{f}(u_t, \Delta_t, \vartheta^\star) = \Delta_t f'_u({u'}_t, \vartheta^\star)\Delta_t = \Delta_t^2 f'_u({u'}_t, \vartheta^\star) = f'_u({u'}_t, \vartheta^\star),$$

где ${u'}_t$ некоторая точка между u_t и u_t^+. Сформулируем для новой модели наблюдений (18) Предположения 1'-4' аналогичные Предположениям 1-4.

Предположение 1'. Последовательности помех $\{v_t\}$ и $\{\nabla_u f({u'}_t, \vartheta^\star)\}$ независимы с $\{\Delta_t\}$.

Предположение 2'. Невырожденность следующей суммы матриц, формируемых из градиентов исследуемой функции в точках входов

$$R_{\mathrm{T}}^+(\vartheta) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\Big[\nabla_\vartheta f(u_t^+, \vartheta)\nabla_\vartheta f(u_t^+, \vartheta')^{\mathrm{T}} + \nabla_\vartheta f(u_t, \vartheta)\nabla_\vartheta f(u_t, \vartheta')^{\mathrm{T}} -$$

$$-\nabla_\vartheta f(u_t^+, \vartheta)\nabla_\vartheta f(u_t, \vartheta')^{\mathrm{T}} - \nabla_\vartheta f(u_t, \vartheta)\nabla_\vartheta f(u_t^+, \vartheta')^{\mathrm{T}}\Big]$$

при любом $\vartheta \in \Theta$.

Предположение 3'. Градиент функции $\nabla_\theta \bar{f}(u, \theta)$ равномерно ограничен и функция $\bar{f}(\cdot, \cdot)$ удовлетворяет следующему условию:
$\|\bar{\bar{\nabla}}_j\| \leq K\|\vartheta^\star - \vartheta\|$, где $K > 0$,
$\bar{\bar{\nabla}}_j = \big(\nabla_\vartheta f(u_j^+, \vartheta) - \nabla_\vartheta f(u_j, \vartheta)\big)\Big(f(u_j^+, \vartheta^\star) - f(u_j^+, \vartheta) - \big(f(u_j, \vartheta^\star) - f(u_j, \vartheta)\big)\Big)$,
$j = 1, \ldots, T$.

Предположение 4'. Для произвольных $j,\ k = 1, \ldots, T$ при достаточно далеких ϑ от $\vartheta^\star$ выполняется:

$$[\bar{\bar{\nabla}}_j]^{\mathrm{T}}\big(\bar{R}_{\mathrm{T}}^+\big)^{-1}(\vartheta)\bar{\bar{\nabla}}_k \geq \mu\|\vartheta^\star - \vartheta\|^\rho > 0$$

с некоторыми константами $\mu > 0$ и $\rho > 1$. Здесь симметричная матрица $\bar{R}_{\mathrm{T}}^+(\vartheta)$ такая, что $\big(R_{\mathrm{T}}^+(\vartheta)\big)^{\mathrm{T}} R_{\mathrm{T}}^+(\vartheta) = \bar{R}_{\mathrm{T}}^+(\vartheta)\bar{R}_{\mathrm{T}}^+(\vartheta)$.

Заметим, что предположения 1' и 2' выполняются, если функция $f(\cdot, \cdot)$ линейна по первому аргументу, а помехи $\{v_t\}$ — внешние и независимы с $\{\Delta_t\}$ (например, помехи $\{v_t\}$ — неизвестная детерминированная последовательность). В этом случае функция регрессии $\bar{f}(u_t, \Delta_t, \vartheta^\star)$ для "новой" модели наблюдений (18) полностью удовлетворяет условиям Теоремы 2.1.

В разделе 2.5 сформулирована Теорема 2.2, аналогичная Теореме 2.1, но только для слуая произвольных внешних помех.

Теорема 2.2. *Если выполнены Предположения 1'–4', p — заданная доверительная вероятность, $\widehat{\Theta}_{\mathrm{T}}$ из метода знако-возмущенных сумм, M, q из Шага 1 процедуры* SPS_indicator(ϑ, p), *то*

$$\mathrm{P}(\vartheta^\star \in \widehat{\Theta}_{\mathrm{T}}) = p = 1 - q/M,$$

и множество $\widehat{\Theta}_{\mathrm{T}}$ ограничено.

В **третьей главе** для частного одномерного нелинейного случая исследуется применение метода знако-возмущенных сумм для обработки данных динамических испытаний по определению инкубационного времени разрушения материала, приводятся результаты построения доверительных интервалов согласно обобщенному методу знако-возмущенных сумм на основе данных реальных физических экспериментов.

В разделе 3.1 вводится понятие инкубационного времени разрушения и приводится описание общей задачи по определению скоростной зависимости прочности материалов. В разделе 3.2 описывается структурно-временной подход для задач механики динамического разрушения сплошных сред. В разделе 3.3 приводится формализованная постановка задачи оценивания параметра инкубационного времени при наблюдениях с помехами. В разделе 3.4 строятся доверительные интервалы для неизвестного параметра инкубационного времени разрушения материала с помощью обобщенного метода знако-возмущенных сумм, и формулируется Теорема 3.1 для нелинейного одномерного случая. В разделе 3.5 полученные в диссертации теоретические результаты иллюстрируются экспериментами по обработке данных экспериментов реальных динамических испытаний с помощью метода знако-возмущенных сумм.

Проведение динамических испытаний по разрушению материалов достаточно дорогой и трудоемкий процесс, поэтому для обработки имеется не так много экспериментальных данных. В связи с этим оценки, вычисленные согласно МНК, не являются математически обоснованными. В отличие от МНК метод знако-возмущенных сумм не имеет подобных ограничений по количеству наблюдений, и для его работоспособности достаточно небольшого числа точек.

Основной особенностью процессов динамического разрушения материалов является сильная зависимость прочности материалов $\sigma^\star$ от скорости нагружения $\dot\epsilon$. Для описания подобного рода зависимостей был разработан структурно-временной подход, основанный на понятии инкубационного времени разрушения. Добавление к параметру σ_c — статической прочности материала, еще одного прочностного параметра — инкубационного времени разрушения τ, позволяет предсказывать разрушение, как при медленных статических, так и сверхбыстрых динамических нагрузках.

Согласно критерию инкубационного времени следующая кусочно-заданная функция $\varphi(\tau,\dot\epsilon)$ определяет вышеупомянутые скоростные зависимости для хрупких материалов, например, горных пород:

$$\sigma^\star(\dot\epsilon) = \varphi(\dot\epsilon,\tau) = \begin{cases} \sigma_c + \frac{\tau}{2}k\dot\epsilon, & \dot\epsilon \le 2\sigma_c/k\tau, \\ \sqrt{2\sigma_c\tau k\dot\epsilon}, & \dot\epsilon > 2\sigma_c/k\tau, \end{cases} \tag{19}$$

где k — упругий модуль разрушаемого материала.

Для построения доверительного интервала, содержащего истинное значение инкубационного времени $\tau^\star$, в разделе 3.3 рассматривается следующая модель наблюдений, в которой экспериментально получено T наблюдаемых значений напряжений в момент разрушения $\sigma_t^\star$ для набора различных значений входного параметра $\dot\epsilon_t$ — скорости нагружения:

$$\sigma_t^\star = \varphi(\dot\epsilon_t, \tau^\star) + v_t, \qquad t = 1, \ldots, T. \tag{20}$$

где v_t — независимые случайные помехи (погрешность) с симметричными относительно нуля вероятностными распределениями.

Основная задача: построить доверительные интервалы для неизвестного параметра τ с заданной доверительной вероятностью для конечного, и скорее всего, малого количества экспериментальных точек. Эти доверительные интервалы должны определяться для наблюдаемых значений $\{\sigma_t^\star\}_{t=1}^T$ в зависимости от задаваемых действующих факторов $\{\dot\epsilon_t\}_{t=1}^T$, которые также могут быть выбраны.

Основная Теорема 2.1 для общего многомерного случая позволяет сформулировать как следствие следующую теорему.

Теорема 3.1. *Если помехи v_t являются независимыми случайными величинами, обладающими свойством симметрии, p — заданная доверительная вероятность, M, q из Шага 1 процедуры* $\mathsf{SPS\_indicator}(\tau, p)$, *$\widehat{\mathcal{T}}$ из метода знако-возмущенных сумм, модельная функция $\varphi(\cdot,\cdot)$ построена согласно структурно-временному подходу, то для истинного значения параметра инкубационного времени $\tau^\star$:*

$$\mathrm{P}(\tau^\star \in \widehat{\mathcal{T}}) = p = 1 - q/M,$$

и множество $\widehat{\mathcal{T}}$ ограничено.

В **заключении** формулируются основные результаты диссертации.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в периодических рецензируемых изданиях, индексируемых в наукометрической базе данных SCOPUS или включенных в перечень научных журналов, рекомендованных ВАК:

[1] **Волкова М.В., Граничин О.Н., Волков Г.А., Петров Ю.В. О возможности применения метода знако-возмущенных сумм для обработки результатов динамических испытаний // Вестник СПбГУ. — 2018.— Сер. 1. Том 63. Вып. 1. — С. 30–40.**

[2] **Volkova M.V., Granichin O.N., Petrov Y.V., Volkov G.A. Dynamic fracture tests data treatment based on the randomized approach // Advances in Systems Science and Applications (ASSA). — 2017. — No. 3. — P. 35–43.**

[3] **Volkova M., Granichin O., Petrov Yu., Volkov G. Sign-perturbed sums approach for data treatment of dynamic fracture tests // In: Proc. of the 56th IEEE Conference on Decision and Control, December 12-15, 2017, Melbourne, Australia. — 2017. — P. 1652–1656.**

[4] **Volkova M. One method to solve a problem of nonlinear two-stage perspective stochastic planning // International Journal of Pure and Applied Mathematics. — 2017. — V. 112, No 4. — P. 817–826.**

[5] **Колбин В. В., Свищикова М. В. Один прямой метод стохастической оптимизации // Известия Саратовского Университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, №4. — С. 11-14.**

Другие научные публикации:

[6] Волкова М. В., Граничин О. Н. Минимизация функционала типа среднего риска на основе конечного (возможно малого) набора экспериментальных данных // Стохастическая оптимизация в информатике. — 2017. — Т. 13, Вып. 2. — С. 3–37.

[7] Волкова М. В., Михеев С. Е., Морозов П. Д. Корреляция динамики внутреннего валового продукта с ценой моторного топлива // Молодой ученый. — 2017. — №11(145). — С. 192–198.

[8] Свищикова М. В. Один метод прогнозирования ВВП России // Процессы управления и устойчивость: Труды 42-й международной научной конференции аспирантов и студентов. — 2011. — С. 550–554.

[9] Svishchikova M. V. One problem of nonlilear stochastic programming // International Journal of Applied Mathematics and Statistics.—2014.—V.52, No 7. —P. 1-7.

[10] Свищикова М. В. Решение одной двухэтапной задачи нелинейного стохастического программирования // Инновации в науке. — 2014. — №3(28). — С. 12–22.

[11] Свищикова М. В. Один способ решения задач стохастического программирования специального вида // Процессы управления и устойчивость: Труды 43-й международной научной конференции. — 2012. — С. 559–563.

[12] Приставко В. Т., Свищикова М. В. Кодирование и декодирование векторных гауссовских сигналов // Процессы управления и устойчивость: Труды 41-й международной научной конференции аспирантов и студентов. — 2010. — С. 692–698.

[13] Приставко В.Т., Свищикова М.В. Липидность субъекта // Процессы управления и устойчивость: Труды 40-й международной научной конференции аспирантов и студентов. — 2009. — С. 656–658.