Санкт-Петербургский государственный университет

Ходунов Павел Андреевич

Выпускная квалификационная работа

«О локальных свойствах решений задач гидродинамики»

Уровень образования: магистратура
Направление: 01.04.01 «Математика»
Основная образовательная программа: ВМ.5832.2019
Профиль (при наличии): нет

Научный руководитель:
к.ф-м.н., в.н.с. ПОМИ РАН
Филонов Николай Дмитриевич

Рецензент:
к.ф-м.н., с.н.с. ПОМИ РАН
Михайлов Виктор Сергеевич

Санкт-Петербург
2021г

Содержание

1. Введение

Рассматривается система

$$\begin{cases} -\Delta u + b \cdot \nabla u = 0 \\ \operatorname{div} b = 0 \end{cases} \tag{1}$$

где функции $u : \Omega \to \mathbb{R}$ — неизвестная и $b : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — данная по условию, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ открытое и ограниченное, $n \geqslant 3$. Пытаемся найти какие-нибудь ограничения на функцию b, а точнее, принадлежность некоторому классу функций (например L_p), чтобы решение системы u обязательно было «достаточно хорошим» (например из L_∞).
Написанная выше система — это понимание задачи в сильном смысле, когда ищем такие $u \in C^2$, чтобы уравнения выполнялись поточечно. Но часто разумно решать задачу и в слабом смысле тоже (и искать слабое решение $u \in W_2^1$ для $b \in L_2$), а именно, чтобы $\forall \eta, \nu \in C_0^\infty(\Omega)$ выполнялось

$$\begin{cases} \int\limits_\Omega \nabla u \cdot \big(\nabla \eta + b\eta\big)\, dx = 0 \\ \int\limits_\Omega b \cdot \nabla \nu \, dx = 0 \end{cases} \tag{2}$$

На данный момент известно, что если $b \in L_p$ при $p > \frac{n}{2}$, то обязательно $u \in L_\infty$ и есть контрпример для $b \in L_p$ при $p < \frac{n-1}{2}$, в котором $u \notin L_\infty$ [NFTS].
Мы рассмотрим частный случай, когда b имеет фиксированное направление — вдоль оси z, и для него окажется, что при $p = \frac{n-1}{2}$ есть пример с $u \notin L_\infty$ (который будет примером и в общем случае), а также окажется, что при $p > \frac{n-1}{2}$ обязательно будет $u \in L_\infty$.
В нашем случае, когда $\vec{b}(x) = a(z, x')\vec{e}_z$ (мы для удобства считаем координату z первой координатой в пространстве, а остальные координаты собираем в вектор x'), условие $\operatorname{div} b = 0$ превращается в $\partial_z a(z, x') = 0$. Это означает, что функция a зависит только от x' — и потому мы будем писать $\vec{b}(x) = a(x')\vec{e}_z$ и рассматривать вместо условия $b \in L_p(\mathbb{R}^n \cap \Omega)$ условие $a \in L_p\big((\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap \Omega\big)$, и в силу ограниченности Ω ничего тем самым не потеряем. Иногда будем обозначать $r = |x'|$.
После сделанных переобозначений, сильная версия задачи превращается в

$$-\Delta u(z, x') + a(x')\partial_z u(z, x') = 0, \tag{3}$$

а слабая в

$$\int\limits_\Omega \Big(\nabla u(z, x') \cdot \nabla \eta(z, x') + a(x') \cdot \eta(z, x') \cdot \partial_z u(z, x') \Big)\, dz dx' = 0 \tag{4}$$

Решать задачу мы будем для $\Omega = Cyl_1$ — единичный цилиндр с центром в нуле; имеется в виду такое множество: $Cyl_R = (-R; R) \times B_R(\mathbb{R}^{n-1})$. Но для удобства вычислений пример приведём для $Cyl_{0,1}$ — ясно, что масштаб тут не имеет значения.

2. Пример для $p = \frac{n-1}{2}$

Пусть $u(z, x') = f(|x'|) \cdot e^z = f(r) \cdot e^z$ (тут и далее будем обозначать $|x'| = r$). Саму функцию f выберем чуть позже, а пока что подставим в общем случае, считая, что a зависит только от r:

$$\Delta u = a(r)\partial_z u$$

$$\Delta\big(f(r) \cdot e^z\big) = a(r)\partial_z\big(f(r) \cdot e^z\big)$$

$$\left(f''(r) + \frac{n-2}{r}f'(r)\right) \cdot e^z + f(r) \cdot e^z = a(r) \cdot f(r) \cdot e^z$$

$$a(r) = \frac{f''(r)}{f(r)} + \frac{(n-2)f'(r)}{rf(r)} + 1$$

Необходимо выбрать такую f, чтобы в результате было $|a(r)| < \frac{C}{r^2|\ln r|^k}$, при $k > \frac{2}{n-1}$. В таком случае для $p = \frac{n-1}{2}$ имеем $|a|^p \cdot r^{n-2} < \frac{C}{r|\ln r|^\alpha}$ при $\alpha > 1$, то есть $a \in L_p$.
Выберем $f(r) = \ln\big(-\ln r\big)$. Посчитаем производные:

$$f'(r) = \frac{1}{r \ln r}$$

$$f''(r) = -\frac{\ln r + 1}{r^2 \ln^2 r}$$

Как можно заметить, у нас получилось искомая оценка для $k = 1$, которое подходит при $n > 3$. Для $n = 3$ на самом деле тоже подходит, ведь

$$a(r) = \frac{f''(r)}{f(r)} + \frac{n-2}{r} \cdot \frac{f'(r)}{f(r)} + 1 = -\frac{\ln r + 1}{r^2 \ln^2 r \cdot \ln\big(-\ln r\big)} + \frac{3-2}{r^2 \ln r \cdot \ln\big(-\ln r\big)} + 1 = -\frac{1}{r^2 \ln^2 r \cdot \ln\big(-\ln r\big)} + 1$$

И потому для $n = 3$ получается оценка с $k = 2 > 1 = \frac{2}{3-1}$.

3. Некоторые сведения об анизотропных пространствах

Для доказательства основной теоремы этой работы нам потребуются анизотропные пространства и аналоги классических теорем в них. Читатель, знакомый с этой теорией, может сразу переходить к пункту 4.

3.1. Анизотропные пространства Лебега и Соболева

Определение 1. Мультииндексом называется упорядоченный набор $(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \vec{p}$; далее j-й элемент будет соответствовать j-й координате в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Лебегу и для удобства ограничено.

Определение 2. Анизотропным пространством Лебега $L_{\vec{p}}(\Omega) = L_{(p_1,\ldots,p_n)}(\Omega)$ называется пространство измеримых функций на Ω, для которых конечна анизотропная норма

$$\|f\|_{\vec{p}} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left(\ldots \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f|^{p_1} dx_1\right)^{p_2/p_1} \ldots\right)^{p_n/p_{n-1}} dx_n\right)^{1/p_n}$$

Тут функция f, определённая на Ω, продолжается нулём снаружи.

Замечание 1. Обычное пространство Лебега $L_p(\Omega)$ соответствует мультииндексу $(p, p, \ldots, p)$.

Определение 3. Анизотропное пространство Соболева $W^l_{\vec{p}}$ строится в точности аналогично обычному пространству Соболева (но все нормы всех производных берутся в $L_{\vec{p}}$).

Обозначение. Операции с мультииндексами будем считать покомпонентными, притом всегда держим в голове, что каждому числу p соответствует мультииндекс $(p, p, \ldots, p)$. Например,

$$\vec{p} \geqslant \vec{q} \quad \Leftrightarrow \quad p_i \geqslant q_i \;\; \forall\, i$$
$$1 \leqslant \vec{p} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leqslant p_i < \infty \;\; \forall\, i$$
$$\vec{p} + \vec{q} = (p_1 + q_1, \ldots, p_n + q_n)$$
$$\frac{1}{\vec{p}} = \left(\frac{1}{p_1}, \ldots, \frac{1}{p_n}\right)$$
$$\vec{p} : \vec{q} = \left(\frac{p_1}{q_1}, \ldots \frac{p_n}{q_n}\right)$$

Сумму всех элементов мультииндекса будем обозначать вот так:

$$|\vec{p}| = p_1 + \ldots + p_n$$

3.2. Анизотропные версии известных теорем

Теорема 1 (Гёльдера, [BIN] 2.4)**.** *Если мультииндексы $\vec{p}$ и $\vec{p}'$ сопряжены (то есть таковы, что $\frac{1}{\vec{p}} + \frac{1}{\vec{p}'} = 1$), то $\|f \cdot g\|_1 \leqslant \|f\|_{\vec{p}} \cdot \|g\|_{\vec{p}'}$ для любых $f \in L_{\vec{p}}, g \in L_{\vec{p}'}$.*

Следствие 1. *Если $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ измеримо и ограничено, и $\vec{p} \geqslant q$, то $L_{\vec{p}}(\Omega) \subset L_q(\Omega)$, притом для $u \in L_{\vec{p}}(\Omega)$ выполняется неравенство:*

$$\|u\|_q \leqslant C(\Omega, \vec{p}, q) \cdot \|u\|_{\vec{p}},$$

для некоторой константы $C(\Omega, \vec{p}, q)$, не зависящей от выбора функции u. Более того, эту константу можно оценить, используя $\operatorname{diam}(\Omega)$ — диаметр множества:

$$C(\Omega, \vec{p}, q) \leqslant \operatorname{diam}(\Omega)^{\frac{n}{q} - \left|\frac{1}{\vec{p}}\right|}$$

Доказательство :

Обозначим мультииндекс, сопряжённый с $\frac{\vec{p}}{q}$ как $\vec{r}$ (по условию $\frac{\vec{p}}{q} \geqslant 1$, а потому такой $\vec{r}$ существует). Воспользуемся анизотропной теоремой Гёльдера:

$$\|u\|_q^q = \int\limits_{\Omega} |u(x)|^q \, dx = \|\, |u|^q \cdot 1\|_{L_1(\Omega)} \leqslant \|\, |u|^q \,\|_{\frac{\vec{p}}{q}} \cdot \|1\|_{\vec{r}} = \|u\,\|_{\vec{p}}^q \cdot \|1\|_{\vec{r}}$$

и возведением в степень $1/q$ получим требуемое неравенство с константой $C(\Omega, \vec{p}, q) = \|1\|_{L_{\vec{r}}(\Omega)}^{1/q} = \|\chi_\Omega\|_{L_{\vec{r}}(\mathbb{R}^n)}^{1/q}$.
Теперь оценим получившуюся константу. Поместим Ω в куб Q со стороной $\operatorname{diam}(\Omega) = d$ и рёбрами вдоль осей, а функцию χ_Ω увеличим до χ_Q:

$$C(\Omega, \vec{p}, q)^q = \|\chi_\Omega\|_{L_{\vec{r}}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|\chi_Q\|_{L_{\vec{r}}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left(\ldots \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \chi_Q(x)^{r_1} dx_1 \right)^{r_2/r_1} \ldots \right)^{r_n/r_{n-1}} dx_n \right)^{1/r_n} =$$
$$= \left(\left(\ldots \left(d^{r_2/r_1} \cdot d \right)^{r_3/r_2} \ldots \right)^{r_n/r_{n-1}} \cdot d \right)^{1/r_n} = d^S,$$

где $S = \left(\ldots \left(\left(\frac{r_2}{r_1} + 1 \right) \cdot \frac{r_3}{r_2} + 1 \right) \cdot \ldots \cdot \frac{r_n}{r_{n-1}} + 1 \right) \cdot \frac{1}{r_n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{r_k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{q}{p_k} \right) = n - \left| \frac{q}{\vec{p}} \right|$

$\square$

Для следующей теоремы будем считать, что у области Ω граница липшицева. В формулировке теоремы в источнике говорится об «условии l-рога», но это условие для $l = 1$ превращается в «условие конуса», то есть что у любой точки можно найти небольшой конус с вершиной в ней, лежащий целиком в множестве (а это условие гарантируется липицевостью границы).

Теорема 2 (вложения, [BIN] Т.10.2)**.** *Если* $\varkappa = \left|\left(\frac{1}{\vec{p}} - \frac{1}{\vec{q}}\right) : l\right| \leqslant 1$ *или* $\varkappa = 1$ *и* $1 < p_n < q_n$*, то* $W^l_{\vec{p}}(\Omega)$ *непрерывно вкладывается в* $L_{\vec{q}}(\Omega)$*. Если же* $\varkappa < 1$*, то вложение компактно.*

Замечание 2. Утверждение о компактности вложения — это комбинация указанной [BIN, Т.10.2] и теоремы о компактности вложения [BIN, Т.26.3.5] (замечание после теоремы объясняет, почему её можно применять без дополнительных ограничений) в случае когда $\varepsilon > 0$ (в терминах т.26.3.5), где $\varepsilon = 1 - \varkappa$.

3.3. Полезные леммы

Лемма 1. *Пусть* $u \in L_{s_k}(\Omega)$ *при* $s_k \to \infty$*, притом* $\|u\|_{s_k} \leqslant M_k$ *для сходящейся последовательности* $M_k \to M$*. Тогда* $u \in L_\infty(\Omega)$ *и* $\|u\|_\infty \leqslant M$*.*

Доказательство :

Предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ множество $\left\{x \in \Omega \;\middle|\; |u(x)| > M + \varepsilon\right\}$ имеет положительную меру (пусть λ). Тогда было бы верно, что

$$\|u\|_{s_k} = \left(\int\limits_\Omega |u(x)|^{s_k}\, dx\right)^{1/s_k} \geqslant \left((M+\varepsilon)^{s_k} \cdot \lambda\right)^{1/s_k} = (M+\varepsilon) \cdot \lambda^{1/s_k}$$

и так как $\lambda^{1/s_k} \to 1$, при достаточно больших k мы бы имели $\|u\|_{s_k} \geqslant M + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon$, что противоречит условию.
Значит, ни для какого ε это не верно, а потому $\|u\|_\infty \leqslant M$.

$\square$

Следствие 2. *Пусть* $u \in L_{\vec{s}_k}(\Omega)$ *при* $\vec{s}_k \to \infty$*, притом* $\|u\|_{\vec{s}_k} \leqslant M_k$ *для последовательности* $M_k \to M$*. Тогда* $u \in L_\infty(\Omega)$ *и* $\|u\|_\infty(\Omega) \leqslant M$*.*

Доказательство :

Пусть m_k — минимальный элемент у мультииндекса $\vec{s}_k$. Тогда $\vec{s}_k \geqslant m_k$ и значит, по Следствию 1

$$\|u\|_{m_k} \leqslant \operatorname{diam}(\Omega)^{\frac{n}{m_k} - \left|\frac{1}{\vec{s}_k}\right|} \cdot \|u\|_{\vec{s}_k} \leqslant \operatorname{diam}(\Omega)^{\frac{n}{m_k} - \left|\frac{1}{\vec{s}_k}\right|} \cdot M_k$$

Так как $m_k, s_k \to \infty$ по условию, можем воспользоваться предыдущей леммой для последовательности $\operatorname{diam}(\Omega)^{\frac{n}{m_k} - \left|\frac{1}{\vec{s}_k}\right|} \cdot M_k \to M$ и получить требуемое неравенство.

$\square$

4. Доказательство при $p > \frac{n-1}{2}$

Нашей основной целью в этом параграфе будет следующая

Теорема 3. *Для* $p > \min\left(\frac{n-1}{2}, 2\right)$*,* $n \geqslant 3$ *верно, что если* $a \in L_p(Cyl_1)$*, а функция* $u \in W^1_2(Cyl_1)$ *является слабым решением задачи, то есть решением уравнения* (4)*, то* $u \in L_\infty(Cyl_{1/2})$*.*

Доказательство будет состоять из двух шагов. Сначала мы докажем соответствующую оценку в предположении, что $u \in C^\infty(\Omega)$, а потом приблизим слабое решение сильными в W^1_2-норме.

4.1. Случай гладкого решения

Теорема 4. *Для $p > \frac{n-1}{2}$, $n \geqslant 3$ верно, что если $a \in L_p(Cyl_1)$, а функция $u \in C^\infty(Cyl_1)$ является сильным решением задачи, то есть решением уравнения* (3), *то*

$$\|u\|_{L_\infty(Cyl_{1/2})} \leqslant C \cdot \|u\|_{L_{(2,2p',\ldots,2p')}(Cyl_1)} \cdot \left(1 + \|a\|_{L_p(\Omega)}\right)^\mu$$

для некоторых C, μ, зависящих только от n, p.

Замечание 3. Ясно, что масштабированием области легко получится аналогичное неравенство, но не для $Cyl_{1/2}$ и Cyl_1, а для произвольных цилиндров Cyl_r и Cyl_R при $R > r > 0$.

<u>Доказательство теоремы:</u>

Для удобства читателя все доказательства лемм вынесены в конец параграфа, а в ходе рассуждения приводятся только их формулировки.
Возьмём две функции: $\zeta \in C_0^\infty(B_1(\mathbb{R}^{n-1})), \nu \in C_0^\infty([-1;1])$, принимающие значения в $[0;1]$; соорудим из них пробную функцию $\eta(z, x') = \nu^2(z)\zeta^2(x')|u|^\beta u$ и подставим в (4); для удобства обозначим $w = |u|^{\frac{\beta+2}{2}}$ для некоторого $\beta \geqslant 0$. Получим тогда, что верна следующая

Лемма 2. *Пусть ζ, ν определены как выше. Тогда из указанной подстановки вытекает*

$$\int\limits_\Omega \Big(\nabla(\zeta\nu w)\Big)^2 dx \leqslant \int\limits_\Omega w^2\Big(\big(\nabla(\zeta\nu)\big)^2 + |a| \cdot |\partial_z \nu|\Big) dx$$

Выберем произвольные $\frac{1}{2} \leqslant r_1 < r_2 \leqslant 1$ и для них подберём гладкие ζ, ν, которые равны 1 при аргументах меньше r_1 и равны 0 при аргументах больше r_2. Такой выбор и простые неравенства докажут следующий факт:

Лемма 3. *Для любых $\frac{1}{2} \leqslant r_1 < r_2 \leqslant 1$ выполняется неравенство*

$$\|w\|^2_{W_2^1(Cyl_{r_1})} \leqslant \|w\|^2_{L_2(Cyl_{r_2})} \cdot \frac{2}{(r_2 - r_1)^2} + \frac{1}{r_2 - r_1} \int\limits_\Omega |a| \cdot w^2\, dx$$

Применим анизотропное неравенство Гёльдера для второго слагаемого в правой части:

$$\int\limits_\Omega |a| \cdot w^2\, dx = \|\, |a| \cdot w^2\|_{L_1(\Omega)} \leqslant \|a\|_{(\infty,p,\ldots,p)} \cdot \|w^2\|_{(1,p',\ldots,p')} = \|a\|_{L_p(\Omega)} \cdot \|w\|^2_{(2,2p',\ldots,2p')},$$

где в последнем равенстве мы воспользовались независимостью a от z.
Теперь, увеличивая $\|w\|_{L_2(Cyl_{r_2})}$ до $\|w\|_{L_{(2,2p',\ldots,2p')}(Cyl_{r_2})}$ с помощью Следствия 1, приходим к

$$\|w\|^2_{W_2^1(Cyl_{r_1})} \leqslant \|w\|^2_{L_{(2,2p',\ldots,2p')}(Cyl_{r_2})} \cdot \left(\frac{\operatorname{diam}(\Omega)^{2n}}{(r_2 - r_1)^2} + \frac{1}{r_2 - r_1}\|a\|_{L_p(\Omega)}\right)$$

Выражение в скобках оценим для удобства (для краткости $C = \operatorname{diam}(\Omega)^{2n}$):

$$\frac{C}{(r_2 - r_1)^2} + \frac{1}{r_2 - r_1}\|a\|_{L_p(\Omega)} \leqslant \frac{C}{(r_2 - r_1)^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{r_2 - r_1} + \|a\|_{L_p(\Omega)}\right)^2 \leqslant \left(C + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{r_2 - r_1} + \|a\|_{L_p(\Omega)}\right)^2$$

И в итоге приходим к такому неравенству для некоторой константы C:

$$\|w\|^2_{W_2^1(Cyl_{r_1})} \leqslant C \cdot \|w\|^2_{L_{(2,2p',\ldots,2p')}(Cyl_{r_2})} \cdot \left(\frac{1}{r_2 - r_1} + \|a\|_{L_p(\Omega)}\right)^2$$

Для левой части воспользуемся анизотропной теоремой вложения $W_2^1 \subset L_{\vec{q}}$ для $\vec{q} = (2\chi, 2\chi p', \ldots 2\chi p')$:

$$\|w\|^2_{L_{\mathbf{q}}(Cyl_{r_1})} \leqslant C \cdot \|w\|^2_{L_{(2,2p',\ldots,2p')}(Cyl_{r_2})} \cdot \left(\frac{1}{r_2 - r_1} + \|a\|_{L_p(\Omega)}\right)^2$$

Обозначая $\gamma = \beta + 2$ и извлекая корень степени γ, приходим, наконец, к

$$\|u\|_{L_{(\gamma\chi,\gamma\chi p',\ldots,\gamma\chi p')}(Cyl_{r_1})} \leqslant C^{\frac{2}{\gamma}} \cdot \|u\|_{L_{(\gamma,p'\gamma,\ldots,p'\gamma)}(Cyl_{r_2})} \cdot \left(\frac{1}{r_2 - r_1} + \|a\|_{L_p(\Omega)}\right)^{\frac{2}{\gamma}} \tag{5}$$

Поймём, чему равно χ. Для того, чтобы теорема вложения сработала, нам нужно было, чтобы выполнялось неравенство (так как по последнему элементу неравенство $2 < 2p'$ выполнено):

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2\chi} + (n-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\chi p'}\right) \leqslant 1$$

Мы выберем χ так, чтобы достигалось равенство (в этом случае для теоремы вложения надо ещё проверить, что $2 < 2\chi p'$, но у нас будет $\chi > 1$, что гарантирует это). Другими словами,

$$\frac{n}{2} - \frac{1}{2\chi} - \frac{n-1}{2\chi p'} = 1$$

$$\frac{n-2}{2} = \frac{n+p'-1}{2\chi p'}$$

$$\chi = \frac{n+p'-1}{(n-2)p'}$$

Лемма 4. *При* $p > \frac{n-1}{2}$ *будет* $\chi > 1$

Возьмём последовательность радиусов $R_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{m+1}}$ для $m \in \mathbb{N}_0$ и последовательность мультистепеней $\vec{s}_m = \chi^m \cdot (2, 2p', \ldots, 2p')$. Заметим, что $R_0 = 1$, $R_m \to \frac{1}{2}$ при $m \to \infty$ и $\vec{s}_m \to \infty$. Поэтому применяя (5) для $\gamma = 2\chi^{m-1}$, $r_1 = R_m, r_2 = R_{m-1}$ получим:

$$\|u\|_{L_{\vec{s}_m}(Cyl_{R_m})} \leqslant \|u\|_{L_{\vec{s}_{m-1}}(Cyl_{R_{m-1}})} \cdot \left(C \cdot 2^{m+1} + C\|a\|_{L_p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{\chi^{m-1}}}$$

Перемножение таких равенств при $m = 1, 2, \ldots, M$ и устремление $M \to \infty$ с помощью Следствия 2 даст

$$\|u\|_{L_\infty(Cyl_{1/2})} \leqslant \|u\|_{L_{(2,2p',\ldots,2p')}(Cyl_1)} \cdot \prod_{m=1}^{\infty} \left(C \cdot 2^{m+1} + C\|a\|_{L_p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{\chi^{m-1}}}$$

Для завершения доказательства теоремы остаётся только оценить то бесконечное произведение, что докажет такой факт:

Лемма 5. *Для некоторых* C, μ*, зависящих только от* n, p *выполняется*

$$\|u\|_{L_\infty(Cyl_{1/2})} \leqslant C \cdot \|u\|_{L_{(2,2p',\ldots,2p')}(Cyl_1)} \cdot \left(1 + \|a\|_{L_p(\Omega)}\right)^{\mu}$$

И значит, действительно норма $u \in L_\infty(Cyl_{1/2})$ оценивается ровно как надо.

□

Теперь приведём доказательство четырёх лемм, использованных в рассуждениях выше:

Лемма 1. *Пусть* ζ, ν *определены как выше. Тогда из указанной подстановки вытекает*

$$\int\limits_{\Omega} \Big(\nabla(\zeta\nu w)\Big)^2 dx \leqslant \int\limits_{\Omega} w^2 \Big(\big(\nabla(\zeta\nu)\big)^2 + |a| \cdot |\partial_z \nu|\Big) dx$$

<u>**Доказательство :**</u>

Для пробной функции $\eta(z,x') = \zeta^2(r)\nu^2(z)|u|^\beta u$ найдём её производные:

$$\nabla\eta = 2\zeta\nu\cdot\big(\nabla(\zeta\nu)\big)\cdot|u|^\beta\cdot u+\zeta^2\nu^2\cdot\beta\cdot|u|^{\beta-1}\cdot\operatorname{sgn}u\cdot\nabla u\cdot u+\zeta^2\nu^2\cdot|u|^\beta\cdot\nabla u = 2\zeta\nu\cdot\big(\nabla(\zeta\nu)\big)\cdot|u|^\beta\cdot u+(\beta+1)\cdot\zeta^2\nu^2\cdot|u|^\beta\cdot\nabla u$$

и подставим их (первое равенство — это в точности (4) для пробной функции η):

$$0 = \int\limits_\Omega\big(\nabla u\cdot\nabla\eta+a\eta\partial_z u\big)\,dx = \int\limits_\Omega\Big(\nabla u\cdot 2\zeta\nu\cdot\big(\nabla(\zeta\nu)\big)\cdot|u|^\beta\cdot u+\nabla u\cdot(\beta+1)\cdot\zeta^2\nu^2\cdot|u|^\beta\cdot\nabla u+a\cdot\zeta^2\nu^2\cdot|u|^\beta\cdot u\cdot\partial_z u\Big)\,dx$$

Перенося третье слагаемое в другую часть и выделяя в нём полную производную $\partial_z|u|^{\beta+2}$, получим:

$$\int\limits_\Omega\Big(2\nabla u\cdot\zeta\nu\cdot\big(\nabla(\zeta\nu)\big)\cdot|u|^\beta\cdot u+(\beta+1)\cdot\zeta^2\nu^2\cdot|u|^\beta\cdot\big(\nabla u\big)^2\Big)\,dx = -\frac{1}{\beta+2}\int\limits_\Omega a\cdot\zeta^2\nu^2\cdot\partial_z|u|^{\beta+2}\,dx = \\ = \frac{2}{\beta+2}\int\limits_\Omega a\cdot\zeta^2\nu\partial_z\nu\cdot|u|^{\beta+2}\,dx$$

последнее равенство тут — интегрирование по частям по кооординате z. Внеинтегральных членов нет, так как ν обнуляется на концах; производная попала только на ν^2, так как a,ζ не зависят от z.
У нас $w = |u|^{\frac{\beta+2}{2}}$, и потому

$$\nabla\big(\zeta\nu w\big) = w\nabla(\zeta\nu)+\zeta\nu\cdot\frac{\beta+2}{2}\cdot|u|^\beta\cdot\operatorname{sgn}u\cdot\nabla u = w\nabla(\zeta\nu)+\zeta\nu\cdot\frac{\beta+2}{2}\cdot|u|^{\frac{\beta-2}{2}}\cdot u\cdot\nabla u$$

Значит, можем преобразовать левую часть доказываемого неравенства:

$$\int\limits_\Omega\Big(\nabla(\zeta\nu w)\Big)^2\,dx = \int\limits_\Omega w^2\big(\nabla(\zeta\nu)\big)^2\,dx+(\beta+2)\int\limits_\Omega\zeta\nu\cdot|u|^\beta\cdot u\cdot\big(\nabla u\cdot\nabla\zeta\nu\big)\,dx+\Big(\frac{\beta+2}{2}\Big)^2\int\limits_\Omega(\zeta\nu)^2\cdot|u|^\beta\cdot\big(\nabla u\big)^2\,dx \leqslant \\ \leqslant\int\limits_\Omega w^2\big(\nabla(\zeta\nu)\big)^2\,dx+\frac{\beta+2}{2}\Bigg(2\int\limits_\Omega\zeta\nu\cdot|u|^\beta\cdot u\cdot\big(\nabla u\cdot\nabla\zeta\nu\big)\,dx+(\beta+1)\int\limits_\Omega(\zeta\nu)^2\cdot|u|^\beta\cdot\big(\nabla u\big)^2\,dx\Bigg)$$

В последнем неравенстве мы воспользовались неотрицательностью β, или, другими словами, тем, что $\frac{\beta+2}{2}\leqslant\beta+1$. Пользуясь полученным ранее уравнением (и тем, что $0\leqslant\zeta,\nu\leqslant 1$), закончим цепочку преобразований:

$$\int\limits_\Omega\Big(\nabla(\zeta\nu w)\Big)^2\,dx\leqslant\int\limits_\Omega w^2\big(\nabla(\zeta\nu)\big)^2\,dx+\frac{\beta+2}{2}\Bigg(2\int\limits_\Omega\zeta\nu\cdot|u|^\beta\cdot u\cdot\big(\nabla u\cdot\nabla\zeta\nu\big)\,dx+ \\ +(\beta+1)\int\limits_\Omega(\zeta\nu)^2\cdot|u|^\beta\cdot\big(\nabla u\big)^2\,dx\Bigg) = \int\limits_\Omega w^2\big(\nabla(\zeta\nu)\big)^2\,dx+\int\limits_\Omega a\cdot\zeta^2\nu\partial_z\nu\cdot|u|^{\beta+2}\,dx\leqslant \\ \leqslant\int\limits_\Omega w^2\Big(\big(\nabla(\zeta\nu)\big)^2+|a|\cdot|\partial_z\nu|\Big)\,dx$$

□

Лемма 2. *Для любых* $\frac{1}{2}\leqslant r_1<r_2\leqslant 1$ *выполняется неравенство*

$$\|w\|^2_{W_2^1(Cyl_{r_1})}\leqslant\|w\|^2_{L_2(Cyl_{r_2})}\cdot\frac{2}{(r_2-r_1)^2}+\frac{1}{r_2-r_1}\int\limits_\Omega|a|\cdot w^2\,dx$$

Доказательство :

Рассмотрим $\zeta \in C_0^\infty\big(B_{r_2}(\mathbb{R}^{n-1})\big)$ и $\nu \in C_0^\infty\big([-r_2; r_2]\big)$ такие, чтобы при модуле аргумента меньше r_1 у них значение было равно единице, а между r_1 и r_2 градиент практически везде был бы постоянный по модулю и равный $\frac{1}{r_2-r_1}$. Тогда такие функции, подставленные в результат предыдущей леммы дали бы нам в точности требуемое неравенство.
Строгое рассуждение выглядит так: выберем $\zeta_\varepsilon(x') = f_\varepsilon\big(|x'|\big)$ и $\nu_\varepsilon(z) = f_\varepsilon\big(|z|\big)$, где функция $f_\varepsilon \in C^\infty\big([0;1]\big)$ нестрого монотонно убывает и $f|_{[0;r_1]} \equiv 1$, $f|_{[r_2;1]} \equiv 0$, $f'|_{[r_1+\varepsilon; r_2-\varepsilon]} \equiv \frac{1}{r_2-r_1}$, притом $f' < \frac{2}{r_2-r_1}$ на $[0;1]$. Подстановка таких $\zeta_\varepsilon, \nu_\varepsilon$ дадут искомое неравенство по модулю интегралов по множеству меры 2ε от функций с ограниченным полным интегралом. Ясно, что при устремлении $\varepsilon \to 0$ эти члены устремятся в ноль.

$\square$

Лемма 3. *При* $p > \frac{n-1}{2}$ *будет* $\chi > 1$

Доказательство :

$$\frac{n+p'-1}{(n-2)p'} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad n-1+p' > (n-2)p' \quad \Leftrightarrow \quad n-1 > (n-3)p' \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{p'} > \frac{n-3}{n-1}$$

Вспомним, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{p}' = 1$. Закончим доказательство:

$$\frac{1}{p'} > \frac{n-3}{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{p} < \frac{2}{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad p > \frac{n-1}{2}$$

$\square$

Лемма 4. *Для некоторых* C, μ*, зависящих только от* n, p *выполняется*

$$\|u\|_{L_\infty(Cyl_{1/2})} \leqslant C \cdot \|u\|_{L_{(2,2p',\dots,2p')}(Cyl_1)} \cdot \big(1 + \|a\|_{L_p(\Omega)}\big)^\mu$$

Доказательство :

Имели вот такое:

$$\|u\|_{L_\infty(Cyl_{1/2})} \leqslant \|u\|_{L_{(2,2p',\dots,2p')}(Cyl_1)} \cdot \prod_{m=1}^{\infty} \big(C \cdot 2^{m+1} + C\|a\|_{L_p(\Omega)}\big)^{\frac{1}{\chi^{m-1}}}$$

Оценим

$$\prod_{m=1}^{\infty} \big(C \cdot 2^{m+1} + C\|a\|_{L_p(\Omega)}\big)^{\frac{1}{\chi^{m-1}}} \leqslant \prod_{m=1}^{\infty} \big(C \cdot 2^{m+1} \cdot (1 + \|a\|_{L_p(\Omega)})\big)^{\frac{1}{\chi^{m-1}}}$$

Обозначая $\mu = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\chi^{m-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{\chi}}$, получаем

$$\prod_{m=1}^{\infty} \big(C \cdot 2^{m+1} + C\|a\|_{L_p(\Omega)}\big)^{\frac{1}{\chi^{m-1}}} \leqslant C^\mu \cdot \big(1 + \|a\|_{L_p(\Omega)}\big)^\mu \cdot 2^{\sum_{m=1}^{\infty}(m+1)/\chi^{m-1}}$$

Очевидно, что сумма в степени двойки тоже сходится (она равна $-\chi^3 \frac{d}{d\chi}\big(\mu(\chi)\cdot\chi^{-2}\big)$), и потому мы получили неравенство

$$\|u\|_{L_\infty(Cyl_{1/2})} \leqslant \tilde{C} \cdot \|u\|_{L_{(2,2p',\dots,2p')}(Cyl_1)} \cdot \big(1 + \|a\|_{L_p(\Omega)}\big)^\mu$$

$\square$

4.2. Случай слабого решения

Для завершения доказательства теоремы 3 повторим рассуждения из статьи [NFTS, стр. 15], но с заменой $2p'$-нормы на $(2, 2p', \dots, 2p')$-норму.

Пусть $u \in W_2^1(\Omega)$ — произвольное решение уравнения (4). Введём уже знакомые нам функции срезки $\zeta \in C_0^\infty\big(B_1(\mathbb{R}^{n-1})\big)$ и $\nu \in C_0^\infty([-1;1])$, тождественно равные 1 при значениях аргумента, по модулю не превосходящих $\frac{3}{4}$; и определим $v(z,x') = \nu(z)\cdot\zeta(x')\cdot u(z,x')$. Очевидно, что $u \equiv v$ на $Cyl_{3/4}$, а функция v является слабым решением краевой задачи

$$\begin{cases} -\Delta v(z,x') + a(x')\partial_z v(z,x') = g(z,x') \\ \quad v\big|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

где $g = -u\Delta(\zeta\nu) - 2(\nabla u)\cdot\big(\nabla(\zeta\nu)\big) + a\cdot\nu'\zeta\cdot u$.

Лемма 5. *$g \equiv 0$ внутри $Cyl_{3/4}$, и, если $a \in L_p$ при $p > \frac{n-1}{2}$, то $g \in W_2^{-1}(\Omega)$.*

<u>Доказательство :</u>

Первое утверждение очевидно, так как $\zeta\nu \equiv 1$ в $Cyl_{3/4}$. Для доказательства второго оценим для произвольного $\eta \in W_2^1(\Omega)$ выражение

$$\int\limits_\Omega g\eta\,dx = -\int\limits_\Omega u\Delta(\zeta\nu)\eta\,dx - 2\int\limits_\Omega(\nabla u)\cdot\big(\nabla(\zeta\nu)\big)\eta\,dx + \int\limits_\Omega a\nu'\zeta u\eta\,dx$$

сверху через $\|\eta\|_{W_2^1(\Omega)}$. Формальная запись этого выражения такова:

$$\int\limits_\Omega g(x)\eta(x)\,dx = -\int\limits_\Omega u(x)\eta(x)\Delta\big(\zeta(x')\nu(z)\big)\,dx - \int\limits_\Omega 2\big(\nabla u(x)\big)\cdot\big(\nabla(\zeta(x')\nu(z))\big)\eta(x)\,dx + \\ + \int\limits_\Omega a(x')u(x)\eta(x)\nu'(z)\zeta(x')\,dx$$

Оценим каждое слагаемое по отдельности. Функции ζ и ν бесконечно гладкие, а потому их значения и каждая производная на ограниченном Ω тоже ограничены. Поэтому во всех имеющихся интегралах все их вхождения можно оценить сверху одной общей константой — и значит, достаточно оценить те же выражения, но без ζ и ν. Оценим первые два:

$$\int\limits_\Omega \big|u(x)\eta(x)\big|\,dx \leqslant \|u\|_{L_2(\Omega)}\cdot\|\eta\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|u\|_{W_2^1(\Omega)}\cdot\|\eta\|_{W_2^1(\Omega)}$$

$$\int\limits_\Omega |\nabla u(x)|\cdot\big|\eta(x)\big|\,dx \leqslant \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}\cdot\|\eta\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|u\|_{W_2^1(\Omega)}\cdot\|\eta\|_{W_2^1(\Omega)}$$

Для оценки последнего, вспомним, что $W_2^1(\Omega)$ непрерывно вкладывается в $L_{(2,2p',\dots,2p')}(\Omega)$ при $p > \frac{n-1}{2}$; а значит, для некоторого $C > 0$ имеем

$$\int\limits_\Omega \big|a(x')u(x)\eta(x)\big|\,dx \leqslant \|a\|_{L_{(\infty,p,\dots,p)}(\Omega)}\cdot\|u\|_{L_{(2,2p',\dots,2p')}(\Omega)}\cdot\|\eta\|_{L_{(2,2p',\dots,2p')}(\Omega)} \leqslant C\cdot\|a\|_{L_p(\Omega)}\cdot\|u\|_{W_2^1(\Omega)}\cdot\|\eta\|_{W_2^1(\Omega)}$$

После сложения неравенств получим, что g действительно соответствует ограниченному линейному функционалу на W_2^1, что и требовалось.

$\square$

Возьмём теперь такую последовательность $a_k \in C^\infty\big(\bar{B}_1(\mathbb{R}^{n-1})\big)$, что $a_k \to a$ по норме L_p; и введём v_k — решения соответствующей краевой задачи:

$$\begin{cases} -\Delta v_k(z,x') + a_k(x')\partial_z v_k(z,x') = g(z,x') \\ \quad v_k\big|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

В [NFTS] была доказана полезная теорема, которой мы сейчас воспользуемся для доказательства слабой сходимости $v_k \to v$ в $W_2^1(\Omega)$:

Теорема 5 ([NFTS, T.3.1]). *Пусть* $b \in L_2(\Omega)$, $\operatorname{div} b = 0$, $f \in W_2^{-1}(\Omega)$, *и пусть* $u \in W_2^1(\Omega)$ *— слабое решение* (1). *Пусть есть последовательность* $b_k \in L_n(\Omega)$, $\operatorname{div} b_k = 0$, *сходящаяся к* b *в* $L_2(\Omega)$, *и функции* $u_k \in W_2^1(\Omega)$ *— единственные решения системы*

$$\begin{cases} -\Delta u_k + b_k \cdot \nabla u_k = f \\ u_k\big|_{\partial\Omega} = \varphi, \end{cases}$$

где $\varphi = u\big|_{\partial\Omega}$. *Тогда, если* $\varphi \in L_\infty(\partial\Omega)$, *то* $u_k \rightharpoonup u$ *в* $W_2^1(\Omega)$.

Применяя эту теорему для $\varphi \equiv 0, \vec{b}_k(z, x') = a_k(x') \cdot \vec{e}_z, f = g$, получаем слабую сходимость $v_k \rightharpoonup v$ в $W_2^1(\Omega)$. Пользуясь компактностью вложения (теорема 2) $W_2^1(\Omega)$ в $L_{(2,2p',\dots,2p')}$ при $p > \frac{n-1}{2}$, получаем сходящуюся подпоследовательность $v_{k_m} \to v$ по норме $L_{(2,2p',\dots,2p')}$. Сразу выделим из неё подпоследовательность, сходящуюся к v почти всюду, и переобозначим её как $\{v_k\}$.

В нашей задаче $g \equiv 0$ в $Cyl_{3/4}$, и потому обычная эллиптическая теория говорит нам, что $v_k \in C^\infty(Cyl_{3/4})$ — например, см. [LU, T.12.1 + T.13.1]. И потому для этих v_k можно применить результат предыдущего параграфа, теорему 4 (по замечанию 3 радиусы заменены на 1/2 и 3/4):

$$\|v_k\|_{L_\infty(Cyl_{1/2})} \leqslant C \cdot \|v_k\|_{L_{(2,2p',\dots,2p')}(Cyl_{3/4})} \cdot \left(1 + \|a_k\|_{L_p(\Omega)}\right)^\mu$$

Переходя к пределу по k, получаем

$$\|v\|_{L_\infty(Cyl_{1/2})} \leqslant C \cdot \|v\|_{L_{(2,2p',\dots,2p')}(Cyl_{3/4})} \cdot \left(1 + \|a\|_{L_p(\Omega)}\right)^\mu$$

И, так как $v \equiv u$ на $Cyl_{3/4}$, получаем наконец

$$\|u\|_{L_\infty(Cyl_{1/2})} \leqslant C \cdot \|u\|_{L_{(2,2p',\dots,2p')}(Cyl_{3/4})} \cdot \left(1 + \|a_k\|_{L_p(\Omega)}\right)^\mu$$

Итоговое неравенство получается ещё одним применением теоремы вложения $W_2^1(\Omega)$ в $L_{(2,2p',\dots,2p')}$:

$$\|u\|_{L_\infty(Cyl_{1/2})} \leqslant C(n, a, p) \cdot \|u\|_{W_2^1(\Omega)},$$

что доказывает теорему.

5. Список литературы

[NFTS] Н.Д. Филонов, Т.Н. Шилкин «О некоторых свойствах слабых решений эллиптических уравнений с соленоидальным течением», *Contemporary Mathematics*, **710**, 105-119, 2018.

[BIN] О.В. Бесов, В.П. Ильин, С.М. Никольский, «Интегральные представления функций и теоремы вложения», Наука, М., 1996.

[LU] О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева «Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа», Наука, М., 1973.