Санкт-Петербургский Государственный Университет

Челпанов Константин Вячеславович

Выпускная квалификационная работа

Точные оценки на количество остовных деревьев в графах

Образовательная программа: бакалавриат "Математика"
Направление и код: 01.03.01 "Математика"
Шифр ОП: СВ.5000.2017

Научный руководитель:
профессор факультета математики и компьютерных наук СПбГУ,
старший научный сотрудник ПОМИ им. В. А. Стеклова РАН,
доктор физико-математических наук
Петров Фёдор Владимирович

Рецензент:
старший научный сотрудник
кафедры дискретной математики МФТИ,
кандидат физико-математических наук
Полянский Александр Андреевич

Санкт-Петербург
2021 год

Аннотация

В данной работе приведены некоторые оценки количества остовных деревьев, полученные алгебраическими методами. А именно, применяя матричную теорему о деревьях, теорему мажоризации Шура и неравенство Караматы мы получаем ряд оценок на число остовных деревьев графов и мультиграфов.

Ключевые слова: лапласиан графа, остовное дерево, матричная теорема о деревьях

Содержание

1 Введение

Количество остовных деревьев в графе является одной из важных и хорошо изученных количественных характеристик графа и находит много применений.

Исследования этого вопроса начались в XIX веке благодаря Г. Кирхгофу, который получил основную формулу для количества остовных деревьев [3], и А. Кэли, который получил формулы для остовных деревьев и остовных лесов в полном графе [4]. В дальнейшем Т. Остином были получены формулы для количества остовных деревьев в двудольных и многодольных графах [6].

Возникает естественный вопрос: какие есть верхние оценки для количества $\tau(G)$ остовных деревьев в терминах количества вершин $v(G)$, рёбер $e(G)$ и степеней $d_1, d_2, \ldots, d_{v(G)}$ графа G?

Исследование данного вопроса началось в XX веке. Перечислим известные полученные оценки:

- Келманс (1972): если $\overline{G}$ — дополнительный к G граф, то

$$\tau(G) \leqslant v(G)^{v(G)-2} \left(1 - \frac{2}{v(G)}\right)^{e(\overline{G})}$$

- Гримметт (1975):

$$\tau(G) \leqslant \frac{1}{v(G)} \left(\frac{2e(G)}{v(G)-1}\right)^{v(G)-1}$$

- Гроун, Меррис (1988):

$$\tau(G) \leqslant \left(\frac{v(G)}{v(G)-1}\right)^{v(G)-1} \left(\frac{d_1 \cdot \ldots \cdot d_{v(G)}}{2e(G)}\right)$$

- Нозаль (1970): для d-регулярного графа G

$$\tau(G) \leqslant v(G)^{v(G)-2} \left(\frac{d}{n-1}\right)^{n-1}$$

- Бозкурт (2012, [7]): для связного двудольного графа G

$$\tau(G) \leqslant \frac{d_1 \cdot \ldots \cdot d_{v(G)}}{e(G)},$$

  где $d_1, \ldots, d_{v(G)}$ — степени вершин графа G.

Одним из главных результатов стала формула для количества остовных деревьев в графе, построенном по диаграмме Юнга (см. [12]).

В данной работе мы рассмотрим оценку, полученную в 2021 году Нарайананом и Зауэрман, передокажем её и обобщим на случай мультиграфов, а также проверим её точность для полного графа. Кроме того, мы рассмотрим другие оценки, которые получаются аналогичными методами.

2 Основные определения и свойства

2.1 Начальные сведения из теории матриц

Определение. Пусть $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ — квадратная матрица порядка n, где n — натуральное число.

Характеристическим многочленом матрицы A называется многочлен $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, где I — единичная матрица порядка n.

Корни характеристического многочлена называют *собственными числами матрицы* A, а их набор с учётом кратности (как корней многочлена p_A) — её *спектром* (обозначается σ_A). Собственные числа матрицы можно также определить как такие числа λ, для которых существует вектор v, удовлетворяющий уравнению $Av = \lambda v$. Такой вектор v называется *собственным*.

Определитель матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ определяется следующим образом:

$$\det A = \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in P_n} (-1)^{\mathrm{inv}(k_1,\dots,k_n)} a_{1k_1} \dots a_{nk_n},$$

где P_n — множество всех перестановок чисел от 1 до n, а $\mathrm{inv}(k_1, \dots, k_n)$ — количество инверсий в перестановке (инверсия — это упорядоченная пара индексов (i, j), где $i < j$, такая, что $k_i > k_j$). Сумма всех собственных чисел матрицы A с учётом кратности называется её *следом* и обозначается $\mathrm{Tr}(A)$.

Предложение 1. *Определитель матрицы равен произведению всех её собственных чисел.*

Предложение 2. *След матрицы равен сумме всех её диагональных элементов.*

Предложение 3. *Пусть $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ — симметричная матрица порядка n, т. е. $a_{ij} = a_{ji}$ для любых $i, j \in [1..n]$. Тогда все собственные числа A вещественны и все её собственные векторы образуют ортонормированный базис.*

Больше свойств матриц и собственных чисел можно найти, например, в [2].

2.2 Начальные сведения из теории графов

Определение. *Графом* называется пара $G = (V, E)$, где V – множество элементов, называемых *вершинами*, а E – множество элементов, называемых *рёбрами*, причём каждому ребру e сопоставлено две различных вершины (*концы* ребра e, *соединяемые* ребром e). Различным рёбрам может сопоставляться одна и та же пара вершин (такие рёбра называют *кратными*). Граф без кратных рёбер называем *простым графом*, граф, в котором кратные рёбра разрешены, мы с целью подчеркнуть это обстоятельство иногда называем *мультиграфом*.

Две различные вершины, соединяемые одним ребром, будем называть *смежными*. Если одним из концов ребра e является вершина v, то будем говорить, что ребро e *инцидентно* вершине v.

Количество вершин в графе G будем обозначать $v(G)$, а количество рёбер — $e(G)$.

Степенью $\deg v$ вершины v называется количество рёбер, инцидентных v. По умолчанию будем считать, что $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ и $\deg v_i = d_i$.

За K_n^Δ будем обозначать полный граф на n вершинах с кратностью Δ (то есть граф, в котором между любыми двумя различными вершинами есть ровно Δ рёбер). В случае $\Delta = 1$ будем писать просто K_n.

За $K_{v_1,\dots,v_k}$ $(k \geqslant 2)$ будем обозначать полный k-дольный граф на долях V_i, $i \in [1..k]$, $v(V_i) = v_i$ (то есть граф, в котором любые две вершины, принадлежащие одной доле V_i, несмежны, и любые две вершины из разных долей, наоборот, смежны, при этом кратность ребра равна 1).

Определение. *Матрицей смежности* $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ графа G с пронумерованным множеством вершин $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ называется матрица $n \times n$, в которой каждый элемент a_{ij} равен количеству рёбер из v_i в v_j.

Определение. *Взвешенным графом* будем называть простой граф G с неотрицательной функцией $w\colon E(G) \to [0, +\infty)$, называемой *весом*. Если ребро e отсутствует, то считаем $w(e) = 0$.

Определение. *Матрицей смежности* $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ взвешенного графа G с пронумерованным множеством вершин $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ называется матрица $n \times n$, в которой каждый элемент a_{ij} равен весу ребра из v_i в v_j.

2.3 Остовные деревья в графе

Определение. *Путём*, соединяющим вершины u, w графа G назовём последовательность вершин $u = v_0, v_1, \dots, v_k = w$, $k \geqslant 0$, и рёбер e_1, e_2, $\dots$, e_k, в которой ребро e_i соединяет v_{i-1} и v_i при всех $i = 1, \dots, k$. Путь называется циклом, если $k > 0$ и $u = w$. Граф называется *связным*, если любые две его вершины соединены путём. Связный граф без циклов называется *деревом*.

Определение. Пусть $G = (V, E)$ – связный граф. *Остовным деревом* в G называется дерево, множество вершин которого есть V, а множество рёбер содержится в E.

Предложение 4. *Любой связный граф содержит остовное дерево.*

Определение. *Лапласиан* $L(G)$ графа G определяется следующим образом: $L = D - A$, где A — матрица смежности, а D – диагональная матрица, в которой $d_{i,i} = \deg(v_i)$ для каждого i. Иными словами,

$$L_{i,j}(G) = \begin{cases} \deg(v_i) & \text{если } i = j \\ -\mu_{i,j} & \text{если } i \neq j \text{ и } v_i v_j \in E(G) \\ 0 & \text{если } i \neq j \text{ и } v_i v_j \notin E(G), \end{cases}$$

где $\mu_{i,j}$ — количество рёбер между вершинами v_i и v_j.

Определим операцию стягивания ребра в графе.

Определение. Пусть $G = (V, E)$ — граф, ребро $e \in E$ соединяет вершины x, y. Определим граф $G \cdot e$ следующим образом:

1) удалим из G вершины x, y и ребро e;

2) оставим в G все рёбра, не инцидентные ни x ни y;

3) добавим в G новую вершину θ;

4) для каждого ребра zx или zy, $z \in V \setminus \{x, y\}$, в графе G добавим ребро $z\theta$ в новый граф $G \cdot e$.

(Отметим, что при таком определении стягивания не образуются петли. Для наших целей подсчёта числа остовных деревьев они и не играют роли, а в других ситуациях естественнее понимать стягивание несколько иначе.)

Теорема 2.1 (Cayley)**.** *Пусть G — граф, e — его ребро. Тогда справедлива следующая формула:*

$$\tau(G) = \tau(G \setminus e) + \tau(G \cdot e),$$

где $G \setminus e$ — граф, из которого удалено ребро e.

Теорема 2.2 (Kirchhoff)**.** *Количество остовных деревьев $\tau(G)$ в графе G равно алгебраическому дополнению любого элемента лапласиана графа G.*

Следствие. Пусть $0 = \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n$ – спектр (набор собственных чисел) лапласиана графа G. Тогда $\tau(G) = \frac{\mu_2 \ldots \mu_n}{n}$.

Замечание. В случае, когда требуется уточнение, для какого графа берётся собственное число, мы будем писать $\mu_i(G)$ вместо μ_i.

Лемма 2.1. *Для любого связного графа кратность нуля как собственного числа лапласиана равна* 1*. Для произвольного графа эта кратность равна количеству его компонент связности.*

3 Перечисление остовных деревьев

3.1 Известные факты

Определение. Будем говорить, что граф G имеет *максимальную кратность* Δ, если существует ребро кратности Δ, а все остальные рёбра имеют кратность не более Δ.

Определение. Пусть G — граф с максимальной кратностью ребра, равной Δ. Определим его Δ-*дополнение* $\overline{G}$ следующим образом: для всякого ребра в G, имеющего кратность μ (если $\mu = 0$, то инцидентные ребру вершины попросту несмежны), оно будет иметь в $\overline{G}$ кратность, равную $\Delta - \mu$.

Аналогичным образом можно определить k-*дополнение* графа при $k \geqslant \Delta$: для любого ребра, имеющего в G кратность μ, оно будет иметь в $\overline{G}$ кратность, равную $k - \mu$. Обозначение: $\overline{G}^{(k)}$. Тем самым, $\overline{G}^{\Delta} = \overline{G}$ для Δ — максимальной кратности G.

Утверждение 1. *Пусть $0 = \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n$ — спектр лапласиана графа G с максимальной кратностью Δ. Тогда спектр лапласиана графа $\overline{G}$ — $0 \leqslant n\Delta - \mu_n \leqslant \ldots \leqslant n\Delta - \mu_2$.*

Доказательство. Пусть a — собственный вектор для $L(G)$, соответствующий собственному числу μ_i ($i \geqslant 2$). Заметим, что вектор $(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n})$ обнуляет $L(G)$ (в силу того, что в каждой строке сумма элементов равна нулю), а так как эта матрица симметрична, то у неё есть ортонормированный базис. В частности, $(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}) \perp a$.

Очевидно, что верно такое равенство:

$$L(G) + L(\overline{G}) = \Delta \cdot \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & n-1 & \ldots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \ldots & n-1 \end{pmatrix}.$$

Действительно, объединение графов G и $\overline{G}$ даёт полный граф на n вершинах, кратность каждого ребра которого равна Δ. Умножим обе части равенства на a. Слева получим $L(G)a + L(\overline{G})a = \mu_i a + L(\overline{G})a$, а справа (воспользовавшись тем, что сумма координат a равна нулю):

$$\Delta \cdot \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & n-1 & \ldots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \ldots & n-1 \end{pmatrix} a = n\Delta \cdot a.$$

Таким образом, $L(\overline{G})a = (n\Delta - \mu_i)a$, что и требовалось. $\square$

Замечание. Аналогично можно получить вид спектра для k-дополнения графа G: если $0 = \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n$ — спектр лапласиана G, то $0 \leqslant nk - \mu_n \leqslant \ldots \leqslant nk - \mu_2$.

Отсюда можно получить формулы на количество остовных деревьев в некоторых типах графов.

Лемма 3.1 (Cayley, Austin). *Для полных и полных k-дольных графов выполнено следующее:*

- $\tau(K_n) = n^{n-2}$;
- $\tau(K_{m,n}) = m^{n-1}n^{m-1}$; $\tau(K_{v_1,\ldots,v_k}) = (v - v_1)^{v_1-1}\ldots(v-v_k)^{v_k-1}v^{k-2}$.

Доказательство.

- Рассмотрим дополнение графа K_n. Ясно, что это будет несвязным объединением n вершин. У каждой вершины ровно одно собственное число — нулевое, т.е. все собственные числа $\overline{K_n}$ — нули. Значит, $\sigma_L(K_n) = \{0; \underbrace{n; \ldots; n}_{n-1}\}$ и, следовательно, $\tau(K_n) = \frac{n^{n-1}}{n} = n^{n-2}$.

- Пусть теперь есть граф $K_{v_1,\ldots,v_k}$. Его дополнение равно несвязному объединению графов $K_{v_1}, \ldots, K_{v_k}$. Спектр каждого из них известен, $\sigma_L(K_{v_i}) = \{0, \underbrace{v_i, \ldots, v_i}_{v_i-1}\}$. Отсюда

$$\sigma_L(K_{n_1,\ldots,n_k}) = \{0; \underbrace{v; \ldots; v}_{k-1}; \underbrace{v - v_1, \ldots, v - v_1}_{v_1-1}; \ldots; \underbrace{v - v_k, \ldots, v - v_k}_{v_k-1}\},$$

и $\tau(K_{n_1,\ldots,n_k}) = \frac{(v-v_1)^{v_1-1}\ldots(v-v_k)^{v_k-1}v^{k-1}}{v} = (v-v_1)^{v_1-1}\ldots(v-v_k)^{v_k-1}v^{k-2}$.

□

Есть доказательство этого факта через биекцию (а именно код Прюфера), см. [8].

3.2 Остовные деревья в операциях над графами

Определение. Определим следующие операции графов:

- *Сумма* $G_1 + G_2$: $V(G_1 + G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$; $E(G_1 + G_2) = E(G_1) \cup E(G_2)$.
- *Произведение* $G_1 \nabla G_2$: $V(G_1 \nabla G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$, $E(G_1 \nabla G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \bigcup_{v_1 \in V(G_1), v_2 \in V(G_2)} \{v_1 v_2\}$

Замечание. Очевидно, $\overline{G_1 \nabla G_2} = \overline{G_1} + \overline{G_2}$.

Лемма 3.2.

- $\sigma_L(G_1 + G_2) = \sigma_L(G_1) \cup \sigma_L(G_2)$;
- $\sigma_L(G_1 \nabla G_2) = \{0; v\} \cup (\{v - v_1\} + (\sigma_L(G_1) \setminus \{0\})) \cup (\{v - v_2\} + (\sigma_L(G_2) \setminus \{0\}))$, *где $A + B$ — сумма мультимножеств по Минковскому.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно, поэтому будем доказывать второе.

Пользуясь замечанием, получаем, что $\sigma_L(G_1\nabla G_2) = \{0\} \cup (\{v\} - \sigma_L(\overline{G_1} + \overline{G_2}))$. Заметим. что $\sigma_L(\overline{G_1}) = \{v_1\} - (\sigma_L(G_1) \setminus \{0\})$ и $\sigma_L(\overline{G_2}) = \{v_2\} - (\sigma_L(G_2) \setminus \{0\})$. Следовательно, $\sigma_L(G_1\nabla G_2)$ получается таким, каким надо. □

Замечание. Если даны графы G_1, G_2, $\ldots$, G_n, $v(G_i) = v_i$ и $v_1 + \ldots$ то лапласов спектр их произведения имеет следующий вид: $\sigma_L(G_1\nabla G_2\nabla \ldots \nabla G_n) = \{0\} \cup \{\underbrace{v}_{n-1}\} \cup \bigcup_{i\in[1..n]}(\{v - v_i\} + (\sigma_L(G_i) \setminus \{0\}))$.

Следствие.

$$\begin{aligned}\tau(G_1\nabla G_2) &= (|V_2| + \mu_2^1)\ldots(|V_2| + \mu_{|V_1|}^1)(|V_1| + \mu_2^2)\ldots(|V_1| + \mu_{|V_2|}^2) = \\ &= \frac{(-1)^{|V|}p_{L(G_1)}(-|V_2|)p_{L(G_2)}(-|V_1|)}{|V_1||V_2|}.\end{aligned}$$

Если $G = G_1\nabla G_2\nabla \ldots \nabla G_m$, то

$$\tau(G) = \frac{(-1)^{|V|-m}|V|^{m-2}p_{L(G_1)}(|V_1| - |V|)\ldots p_{L(G_m)}(|V_m| - |V|)}{|V_1|\ldots|V_m|}.$$

Доказательство. Из следствия теоремы 2.2 получаем:

$$\begin{aligned}\tau(G) &= \frac{(m + \mu_2^1)\ldots(m + \mu_n^1)(n + \mu_2^2)\ldots(n + \mu_m^2)(m + n)}{m + n} = \\ &= (m + \mu_2^1)\ldots(m + \mu_n^1)(n + \mu_2^2)\ldots(n + \mu_m^2).\end{aligned}$$

Второе равенство следует из того, что

$$p_{L(G_1)}(-n) = (-n)(-n - \mu_2^1)\ldots(-n - \mu_m^1)$$

и

$$p_{L(G_2)}(-m) = (-m)(-m - \mu_2^2)\ldots(-m - \mu_n^2).$$

Если графов G_i не два, а больше: пусть $\sigma_L(G_i) = \{0\} \cup \bigcup_{k\in[2..v_i]}\{\mu_k^i\}$. Тогда, пользуясь тем, как устроен спектр произведения, мы получаем нужную формулу:

$$\sigma_L(G) = \frac{v^{n-1}\prod_{i=1}^n\prod_{k=2}^{v_i}(v - v_i + \mu_k^i)}{v} = v^{n-2}\prod_{i=1}^n\prod_{k=2}^{v_i}(v - v_i + \mu_k^i).$$

□

Пример.
- В случае, когда G_1 — полный граф на n вершинах, а G_2 — граф на m вершинах без рёбер, получаем следующее: $\tau(G_1\nabla G_2) = (m + n)^{n-1}n^{m-1}$.

- Аналогичным образом можно искать количество остовных деревьев в произведении сумм полных графов: так, если $G = (K_{m_1} + \dots + K_{m_k})\nabla(K_{n_1} + \dots + K_{n_l})$, $m = m_1 + \dots m_k$ и $n = n_1 + \dots + n_l$, то верна следующая формула:

$$\tau(G) = n^{k-1}m^{l-1}(n+m_1)^{m_1-1}\dots(n+m_k)^{m_k-1}(m+n_1)^{n_1-1}\dots(m+n_l)^{n_l-1}.$$

- Также можно найти количество остовных деревьев в произведении двудольных графов: так, если $G = \nabla_{i=1}^{k} K_{m_i,n_i}$, то

$$\tau(G) = \prod_{i=1}^{k}(m+n-n_i)^{n_i-1} \cdot \prod_{i=1}^{k}(m+n-m_i)^{m_i-1} \cdot (m+n)^k,$$

где $m = \sum\limits_{i=1}^{k} m_i$, $n = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i$.

Замечание. Подобные формулы обобщаются на случай, когда каждый граф G_i — сумма полных и полных двудольных графов.

3.3 Оценки на количество остовных деревьев в операциях над графами

Теорема 3.1. *Пусть* $G = K_{v_1,\dots,v_k}$ *— полный* k*-дольный граф. Тогда* $\tau(G) \leqslant e^{1-\frac{v}{k}}v^{v-2}$.

(Здесь e обозначает основание натуральных логарифмов, а не что-то связанное с рёбрами.)

Доказательство. Из леммы 3.1 известно:

$$\tau(G) = (v-v_1)^{v_1-1}(v-v_2)^{v_2-1}\dots(v-v_k)^{v_k-1}v^{k-2}.$$

Данная формула переписывается следующим образом:

$$\tau(G) = (1-\frac{v_1}{v})^{v_1-1}(1-\frac{v_2}{v})^{v_2-1}\dots(1-\frac{v_k}{v})^{v_k-1}v^{v-2}.$$

Используя неравенство $1 + x \leqslant e^x$ при $x \geqslant -1$, получаем следующую оценку:

$$\tau(G) \leqslant e^{-(\frac{v_1}{v}(v_1-1)+\dots+\frac{v_k}{v}(v_k-1))}v^{v-2} = e^{1-\frac{v_1^2+\dots+v_k^2}{v_1+\dots+v_k}}v^{v-2}.$$

Теперь, применяя неравенство о среднем арифметическом и среднем квадратическом

$$\frac{v_1^2+\dots+v_k^2}{v_1+\dots+v_k} \geqslant \frac{v_1+\dots+v_k}{k} = \frac{v}{k}$$

получаем требуемое. □

Замечание. Равенство достигается только для $G = K_v$.

Теорема 3.2. *Пусть* $G = G_1 \nabla \ldots \nabla G_k$ *и* $v = v(G)$, *тогда выполнена следующая оценка:*

$$\tau(G) \leqslant e^{1-\frac{v}{k}+\frac{2e(G_1)+\ldots+e(G_k)}{v}} \cdot v^{v-2}.$$

Доказательство. Применяя результат предыдущей теоремы, получаем:

$$\tau(G) \leqslant v^{v-2} e^{1-\frac{v}{k}} e^{\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=2}^{v_i}\mu_j^i}{v}}$$

Т.к. для каждого i выполнено $\mu_2^i + \ldots + \mu_{v_i}^i = \mathrm{Tr}(L(G_i)) = \sum\limits_{v \in V_i} \deg(v) = 2e(G_i)$.

□

4 Оценка для остовных деревьев: доказательство (и обобщение на мультиграфы)

В [10] была доказана следующая оценка для количества остовных деревьев:

Теорема 4.1. *Пусть G — простой граф (без кратных рёбер и петель), а $d_1 \leqslant \ldots \leqslant d_n$ — его степенная последовательность. Тогда имеет место следующее неравенство:*

$$\tau(G) \leqslant \frac{(1+d_1) \cdot \ldots \cdot (1+d_n)}{n^2}$$

Данное неравенство было доказано по индукции с использованием более сильного результата. Однако мы приведём альтернативное алгебраическое доказательство. Но сначала введём некоторые определения.

Определение. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — два набора вещественных чисел. Говорят, что набор x **мажорирует** набор y ($x \succ y$), если для любого $i \in [1..n]$ выполнены неравенства $x_1 + \ldots + x_i \geqslant y_1 + \ldots + y_i$ и, кроме того, $x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_n$.

Лемма 4.1 (Неравенство Карамата). *Пусть $f \colon I \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция, I — интервал на вещественной оси, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \underbrace{I \times \ldots \times I}_{n}$; $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \underbrace{I \times \ldots \times I}_{n}$ — наборы чисел такие, что $x \succ y$. Тогда выполнено следующее неравенство:*

$$f(x_1) + \ldots + f(x_n) \geqslant f(y_1) + \ldots + f(y_n).$$

Если f строго выпукла, то равенство достигается в том и только том случае, когда наборы x и y совпадают, т.е. $x_i = y_i$ для любого $i \in [1..n]$.

Следствие. Если $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — два набора положительных чисел такие, что $x \succ y$, то выполнено неравенство $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \leqslant y_1 \cdot \ldots \cdot y_n$. Равенство выполнено в том и только том случае, когда $x_i = y_i$ для каждого $i \in [1..n]$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x) = -\log x$, определённую на положительной полуоси. Ясно, что она выпукла, следовательно, для неё и наборов x и y можно применить неравенство Караматы:

$$-\log x_1 - \ldots - \log x_n \geqslant -\log y_1 - \ldots - \log y_n,$$

из которого, сменив знак и взяв экспоненту, получаем требуемое. □

Теперь приступим к доказательству теоремы.

Доказательство. Перепишем нужное неравенство, используя следствие из теоремы Кирхгофа:

$$n^2\tau(G) = n^2 \cdot \frac{\mu_2 \ldots \mu_n}{n} = \mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_n \cdot n \leqslant (1+d_1)\ldots(1+d_n)$$

Таким образом, достаточно доказать, что набор $(n, \mu_n, \ldots, \mu_2)$ мажорирует набор $(1+d_n, \ldots, 1+d_1)$. Сначала покажем, что в обоих наборах суммы чисел равны. Действительно,

$$\mu_2 + \ldots + \mu_n + n = \mathrm{Tr}(L(G)) + n = d_1 + \ldots + d_n + n = (d_1+1) + \ldots + (d_n+1).$$

Далее проверим, что $\mu_2 + \ldots + \mu_k \leqslant d_1 + \ldots d_{k-1} + (k-1)$. Для этого используем следующее неравенство:

Лемма 4.2 (Неравенство Шура [5])**.** *Пусть A — вещественная симметричная матрица размера $n \times n$, $d_1 \geqslant \ldots \geqslant d_n$ — её диагональные элементы, $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ — её собственные числа. Тогда для любого $k \in [1..n]$ верно следующее неравенство:*

$$d_1 + \ldots + d_k \leqslant \lambda_1 + \ldots + \lambda_k.$$

Из него вытекает следующее неравенство:

Следствие (Неравенство Адамара)**.** В условиях предыдущего неравенства $\det A \leqslant d_1 \cdot \ldots \cdot d_n$.

Доказательство. Прямое следствие неравенства Караматы для произведений и того факта, что определитель матрицы равен произведению её собственных чисел. □

Вернёмся к доказательству требуемого неравенства. Рассмотрим граф $\overline{G}$ — 1-дополнение G. Его степенной последовательностью будет $n-1-d_n \leqslant \ldots \leqslant n-1-d_1$, а последовательностью его собственных чисел — $0 \leqslant n-\mu_n \leqslant \ldots \leqslant n-\mu_2$. Применив неравенство Шура, получаем:

$$(n-1-d_1) + \ldots + (n-1-d_{k-1}) \leqslant (n-\mu_2) + \ldots + (n-\mu_k)$$

Перенося в левую часть μ_i, в правую d_i и сокращая $n(k-1)$ в обеих частях, получаем следующее неравенство:

$$\mu_2 + \ldots + \mu_k \leqslant d_1 + \ldots + d_{k-1} + (k-1),$$

откуда

$$n + \mu_n + \ldots + \mu_{k+1} \geqslant d_n + \ldots + d_k + (n-k+1) = (d_n+1) + \ldots + (d_k+1),$$

что и требовалось.

Таким образом, показано, что $(n, \mu_n, \ldots, \mu_2) \succ (1+d_n, \ldots, 1+d_1)$. Применение следствия неравенства Караматы для произведений завершает доказательство. □

Теперь можно вывести оценку для случая, когда G — мультиграф (т.е. разрешены кратные рёбра).

Теорема 4.2. *Пусть G — граф, Δ — его максимальная кратность, $d_1 \leqslant \ldots \leqslant d_n$ — степенная последовательность G. Тогда имеет место следующее неравенство:*

$$\tau(G) \leqslant \frac{(d_1+\Delta)\cdot\ldots\cdot(d_n+\Delta)}{\Delta n^2}.$$

Равенство достигается в том и только том случае, когда $G = K_n^{\Delta}$, где K_n^{Δ} — полный граф на n вершинах с кратностью каждого ребра, равной Δ.

Доказательство. Доказательство неравенства аналогично доказательству в случае, когда G — простой граф, только неравенство Караматы применяется для наборов $(n\Delta, \mu_n, \ldots, \mu_2)$ и $(d_n+\Delta, \ldots, d_1+\Delta)$.

Проверим, когда достигается равенство. Действительно, это равносильно тому, что наборы $(n\Delta, \mu_n, \ldots, \mu_2)$ и $(d_n+\Delta, \ldots, d_1+\Delta)$ совпадают. Отсюда $n\Delta = d_n + \Delta$ и $d_n = (n-1)\Delta$. Т.к. кратность любого ребра не превосходит Δ, то $d_n \leqslant (n-1)\Delta$, причём равенство может достигаться в том и только том случае, когда кратность каждого ребра равна Δ. Таким образом, v_n соединена со всеми остальными вершинами и кратность каждого ребра, инцидентного v_n, равна Δ. Переходя к дополнению G, получаем, что v_n — изолированная вершина (т.е. имеет степень 0), отсюда $\mu_2(\overline{G}) = n\Delta - \mu_{n-1} = 0$ по лемме 2.1, т.е. $\mu_{n-1} = n\Delta$ и $d_{n-1} = \mu_n - \Delta = (n-1)\Delta$. Аналогично получаем, что v_{n-1} соединена со всеми остальными вершинами и кратность каждого ребра, инцидентного v_{n-1}, равна Δ. Продолжая этот процесс, мы приходим к выводу, что между любыми двумя вершинами есть ребро, и его кратность равна Δ. Таким образом, $G = K_n^{\Delta}$, что и требовалось. $\square$

Замечание. Если кратности всех рёбер графа G не превосходят k, то справедлива следующая оценка:

$$\tau(G) \leqslant \frac{(k+d_1)\ldots(k+d_n)}{nk^2}$$

с равенством в том и только том случае, если $G = K_n^k$.

Действительно, для этого достаточно показать, что функция $\frac{(d_1+k)\ldots(d_n+k)}{k}$ не убывает на луче $[\Delta, +\infty)$, где Δ — максимальная кратность графа G. Действительно, прологарифмировав эту функцию и продифференцировав по k, получим $\frac{1}{d_1+k} + \cdots + \frac{1}{d_n+k} - \frac{1}{k}$. Далее, пользуясь тем, что для каждого $i \in [1..n]$ верно неравенство $d_i \leqslant (n-1)\Delta \leqslant (n-1)k$, поэтому $\frac{1}{d_i+k} \geqslant \frac{1}{nk}$. Отсюда мы получаем, что производная логарифма правой части требуемого неравенства неотрицательна (и даже строго положительна), соответственно, правая часть не убывает, чего и хотелось.

В качестве замечания приведём утверждение для взвешенных графов.

Предложение 5. *Пусть* $G = (V, E)$ *— взвешенный граф с функцией весов* $w\colon E \to [0, +\infty)$, *и* $M = \max_{e \in E(G)} w(e)$. *Определим степень каждой вершины* v_i *следующим образом:* $d_i = \sum\limits_{v \neq v_i} w(vv_i)$. *Введём перечислитель остовных деревьев:* $\tau_w(G) = \sum\limits_{T \in ST(G)} \prod\limits_{e \in T} w(e)$, *где* $ST(G)$ *— множество остовных деревьев* G. *Тогда верна следующая оценка:*

$$\tau_w(G) \leqslant \frac{(M + d_1) \cdot \ldots \cdot (M + d_n)}{Mn^2}.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $w(e) = M$ *для любого* $e \in E(G)$.

Доказательство. Аналогичное применение неравенства Караматы для наборов $(M + d_n, \ldots, M + d_1)$ и $(Mn, \lambda_n, \ldots, \lambda_2)$ и использование теоремы Кирхгофа в случае взвешенного графа. $\square$

4.1 Другие оценки, использующие похожие методы

В этой главе будут приведены оценки остовных деревьев, равенство в которых достигается не на полных графах. Их доказательства также будут использовать неравенства, связанные с собственными числами матриц и их диагональными элементами.

4.1.1 Произведения графов

Теорема 4.3. *Пусть $G = G_1 \nabla G_2$, $v(G_1) = n$, $v(G_2) = m$, $\{d_1, \ldots, d_n\}$ и $\{d'_1, \ldots, d'_m\}$ — степенные последовательности графов G_1 и G_2 соответственно. Тогда справедлива следующая оценка:*

$$\tau(G) \leqslant \frac{(d_1 + m) \cdot \ldots \cdot (d_n + m)(d'_1 + n) \cdot \ldots \cdot (d'_m + n)}{mn}$$

Доказательство. Пусть $0 \leqslant \mu_2^1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n^1$ и $0 \leqslant \mu_2^2 \leqslant \ldots \leqslant \mu_m^2$ — спектры $L(G_1)$ и $L(G_2)$ соответственно. Тогда $\tau(G) = (m+\mu_2^1) \cdot \ldots \cdot (m+\mu_n^1)(n+\mu_2^2) \cdot \ldots \cdot (n+\mu_m^2)$. Заметим, что $m \leqslant \mu_2^1 + m \leqslant \cdots \leqslant \mu_n^1 + m$ и $n \leqslant \mu_2^2 + n \leqslant \cdots \leqslant \mu_m^2 + n$ — спектры матриц $L(G_1) + mI$ и $L(G_2) + nI$ соответственно. Т.к. все числа в спектрах положительны, то можно применить следствие неравенства Караматы для произведений, скомбинированное с неравенством Шура, и получить следующие неравенства:

$$m(\mu_2^1 + m) \cdot \ldots \cdot (\mu_n^1 + m) \leqslant (d_1 + m) \cdot \ldots \cdot (d_n + m)$$

и

$$n(\mu_2^2 + n) \cdot \ldots \cdot (\mu_m^2 + n) \leqslant (d'_1 + n) \cdot \ldots \cdot (d'_m + n).$$

Перемножим эти два неравенства, разделим на mn и, воспользовавшись формулой для количества остовных деревьев в произведении графов, получим требуемое.

Теперь рассмотрим случай, когда достигается равенство. В таком случае выполнены последние два равенства:

$$m(\mu_2^1 + m) \cdot \ldots \cdot (\mu_n^1 + m) = (d_1 + m) \cdot \ldots \cdot (d_n + m)$$
$$n(\mu_2^2 + n) \cdot \ldots \cdot (\mu_m^2 + n) = (d'_1 + n) \cdot \ldots \cdot (d'_m + n)$$

Посмотрим на первое равенство. Оно достигается в том и только том случае, когда наборы чисел слева и справа совпадают, т.е. $d_1 = 0$ и $\mu_i^1 = d_i$ для $i \in [2..n]$. Пусть $V(G_1) = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Заметим, что т.к. $d_1 = 0$, то вершина v_1 является изолированной, следовательно, в графе G_1 хотя бы две компоненты связности, откуда $\mu_2^1 = d_2 = 0$. Продолжая процесс дальше, мы получим, что G_1 является антикликой, аналогично G_2 — также антиклика. Таким образом, равенство достигается в том и только том случае, если $G = K_{m,n}$. □

Разберём теперь вариант, когда $G = G_1 \nabla \ldots \nabla G_n$, $n > 2$, $v(G_i) = v_i$, $v = \sum_{i=1}^{n} v_i$. Пусть $d_1^i \leqslant \ldots \leqslant d_{v_i}^i$ — степенная последовательность каждого из графов

G_i, а $0 \leqslant \mu_2^i \leqslant \ldots \leqslant \mu_{v_i}^i$ — его спектр. Тогда для каждого из графов справедливо следующее неравенство (неравенства Караматы и Шура для матрицы $L(G_i) + (v - v_i)I$):

$$(v - v_i)(v - v_i + \mu_2^i) \ldots (v - v_i + \mu_{v_i}^i) \leqslant (v - v_i + d_1^i) \ldots (v - v_i + d_{v_i}^i).$$

Перемножим все такие неравенства по всем $i \in [1..n]$ и умножим обе части на $\frac{v^{n-2}}{(v-v_1)\ldots(v-v_n)}$. Далее, воспользовавшись формулой на количество остовных деревьев в произведении графов, получаем следующее:

$$\tau(G) \leqslant \frac{v^{n-2}\prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j=1}^{v_i}(v - v_i + d_j^i)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(v - v_i)}$$

Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 4.4. *Пусть $G = G_1 \nabla \ldots \nabla G_n$, $n \geqslant 2$, $v(G_i) = v_i$, $v = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i$, $d_1^i \leqslant \ldots \leqslant d_{v_i}^i$ — степенная последовательность каждого из графов G_i. Тогда выполнена следующая оценка:*

$$\tau(G) \leqslant \frac{v^{n-2}\prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j=1}^{v_i}(v - v_i + d_j^i)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(v - v_i)}.$$

Кроме того, равенство достигается в том и только том случае, когда $G_i = \overline{K_{v_i}}$ для каждого $i \in [1..n]$, т.е. $G = K_{v_1,\ldots,v_n}$.

В 2004 году Эренборг выдвинул следующую гипотезу для двудольных графов:

Гипотеза (Ehrenborg, 2004)**.** Пусть G — двудольный граф на долях V_1 и V_2. Тогда верно следующее неравенство:

$$\tau(G) \leqslant \frac{\prod\limits_{v \in V(G)} \deg v}{|V_1||V_2|}$$

Незадолго до этого было доказано равенство для случая, когда G — граф, построенный на диаграмме Юнга [12]. Спустя 15 лет было предложено линейно-алгебраическое доказательство, см. [9].

Эта оценка схожа с той, которая получилась в случае произведения двух графов. Теперь хотелось бы выдвинуть гипотезу для случая, когда в графе больше двух долей.

Гипотеза. Пусть G — k-дольный граф на долях $V_1, \ldots, V_k$, и $|V_i| = v_i$. Тогда верно следующее неравенство:

$$\tau(G) \leqslant \frac{v^{k-2} \prod\limits_{v \in V(G)} \deg v}{\prod\limits_{i=1}^{k} (v - v_i)}.$$

5 Заключение

Основной результат дипломной работы был изложен в публикации [13].

Независимо в [11] Стивен Кли получил линейно-алгебраическими методами утверждение о перечислителе остовных деревьев во взвешенном графе, а именно: если G — граф с функцией веса $w\colon E(G) \to \mathbb{R}_+$, то верна следующая оценка:

$$\tau_w(G) \leqslant \frac{\prod\limits_{v \in V(G)} (1 + d_w(v))}{v(G)^2}.$$

Список литературы

[1] D.M.Cvetkovic, M.Doob, H.Sachs, *Spectra of graphs: theory and applications*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1980.

[2] Ф.Р.Гантмахер, *Теория матриц*, М.: Наука, 1967.

[3] G. Kirchhoff, *Ueber die Auflosung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Strome gefuhrt wird*, Ann. Phys. 148 (1847), pp. 497–508.

[4] A. Cayley, *A theorem on trees*. Quart. J. Pure Appl. Math. 23: 376–378, 1889.

[5] Andries E. Brouwer, Willem H. Haemers, *Spectra of graphs*, Springer, 2011.

[6] T. I. Austin, *The enumeration of point labelled chromatic graphs and trees*, Canad. J. Math. 12 (1960), 535-545.

[7] B. Bozkurt, *Upper bounds for the number of spanning trees of graphs*, J. Inequal. Appl. (2012), 2012:269.

[8] Richard P. Lewis, *The number of spanning trees of a complete multipartite graph*, Discrete Mathematics 197/198 (1999), 537-541.

[9] Steven Klee, Matthew T.Stamps, *Linear algebraic techniques for spanning tree enumeration*, arXiv:1903.04973, 2019.

[10] B. Narayanan, L. Sauermann, *Sharp estimates for spanning trees*, arXiv:2102.01669v1, 2021.

[11] B. Narayanan, L. Sauermann, S. Klee, *Sharp estimates for spanning trees*, arXiv:2102.01669v2, 2021.

[12] R. Ehrenborg, S. van Willigenburg, *Enumerative properties of Ferrers graphs*, Discrete Comput. Geom. 32 (2004), 481–492.

[13] K. V. Chelpanov, *Alternative proof of upper bound of spanning trees in a graph*, arXiv:2103.00310, 2021.