Отзыв о работе М. И. Новикова "Качественные свойства минимальных бивогнутых функций"

30 мая 2021 г.

Классическое тождество Буля описывает функцию распределения преобразования Гильберта характеристической функции множества. В частности, оказывается, что оная функция распределения не зависит от геометрии множества, только от его меры. Преобразование Гильберта — простейший сингулярный интегральный оператор. Вероятностный аналог сингулярных интегральных операторов — мартингальные преобразования. Для них столь простой формулы как тождество Буля не существует. Тем не менее, разумно поставить вопрос о точном описании количественных свойств мартингального преобразования события: нужно дать условия на вполне приличную неотрицательную функцию f, необходимые и достаточные для конечности величины $\mathbb{E}f(\psi)$, где ψ — мартингальное преобразование некоторого события. Используя стандартные рассуждения, эта задача может быть сведена к следующей: найти необходимые и достаточные условия на неотрицательную функцию f, такую что минимальная бивогнутая на полосе $|y| \leq 1$ функция B с граничными данными $B(x, \pm 1) = f(x)$ конечна. Эту переформулировку я и выдал Михаилу в качестве дипломной работы.

Я догадывался, что достаточным условием будет конечность суммы

$$\sum_k e^{-|k|} \sup_{z \in [k-1, k+1]} f(z),$$

а необходимым — конечность интеграла $\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} f(x)\, dx$. Для приличных функций f эти условия эквивалентны. Приведенный результат уже нетривиален. Но я и мечтать не мог, что в этой задаче возможно найти разумные необходимые и достаточные условия (без всяких предположений о "приличности" функции f). Михаил нашел их. Оказывается, что необходимым и достаточным условием является интегрируемость Гельдер-$\frac{1}{2}$ мажоранты функции $e^{-|x|} f(x)$. Условия, приведенные выше легко следуют из этого. Я бы сказал, что своей работой Михаил вывел этот вопрос на совершенно новый уровень.

Доказательство этой теоремы Михаила весьма трудно, и я не уверен, что его можно существенно упростить. В частности, в работе вычислены явно некоторые очень нетривиальные функции Беллмана, и их поведение существенно влияет на оценки (показатель гельдеровости $\frac{1}{2}$ берется из такого точного вида). Кроме того, в работе приведены более точные результаты, чем просто необходимые и достаточные условия конечности функции. Михаил предложил довольно удобные оценки величины функции в терминах Гельдер-$\frac{1}{2}$ мажоранты функции $e^{-|x|} f(x)$.

Работа безусловно заслуживает оценки "отлично". В работе получена очень глубокая теорема, при доказательстве которой проявлена аналитическая доблесть.

Д. М. Столяров, научный руководитель М. И. Новикова, к. ф.-м. н., доцент.