Санкт-Петербургский государственный университет

НОВИКОВ Михаил Игоревич

Выпускная квалификационная работа

Качественные свойства минимальных бивогнутых функций

Уровень образования: бакалавриат
Направление *01.03.01 «Математика»*
Основная образовательная программа *СВ.5000.2017 «Математика»*

Научный руководитель:
доцент, Лаборатория
им. П. Л. Чебышева, СПбГУ,
кандидат ф.-м. наук,
Столяров Дмитрий Михайлович

Рецензент:
научный сотрудник,
ПОМИ РАН,
кандидат ф.-м. наук,
Осипов Николай Николаевич

Санкт-Петербург
2021 год

Содержание

Введение

Основным объектом изучения в этой работе является координатно-вогнутая функция (separately concave function). Так называется функция нескольких переменных, сужение которой на произвольную прямую, параллельную одной из координатных осей, вогнуто. В книге [1, часть 2] помимо координатно-вогнутых функций можно встретить и другие примеры аналогичных в некотором смысле объектов, с которыми оперирует так называемый квазивыпуклый анализ. Все эти функции играют важную роль в современном вариационном исчислении. В частности, некоторые из них изучаются в статье [2], а в работе [3] можно найти непосредственное применение координатно-вогнутых функций (они вводятся в определении 3). Заметим, что основное отличие координатно-вогнутых функций от классических вогнутых функций состоит в том, что след координатно-вогнутой функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, равный отображению $x \mapsto f(x, x, \ldots, x)$, не обязан быть вогнутым. Соответствующим примером может послужить функция, изображённая на рисунке 8. Описание множества следов координатно-вогнутых функций является нетривиальной задачей, которая достаточно подробно изучена в статье [4].

Особый интерес для нас будут представлять минимальные координатно-вогнутые функции. Координатно-вогнутая функция $\mathcal{B}\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется минимальной, если она является поточечно наименьшей среди всех координатно-вогнутых функций $B\colon U \to \mathbb{R}$, таких что $B|_{\partial U} \geqslant \mathcal{B}|_{\partial U}$. Исследование минимальных координатно-вогнутых функций обусловлено их появлением в теории вероятностей при доказательстве неравенств для мартингалов. Статья Буркхолдера [5] является одной из первых работ, в которой подробно описан метод, позволяющий свести поиск точных констант в неравенствах для мартингалов к построению минимальных координатно-вогнутых функций с конкретными граничными значениями. Более обширный перечень примеров применения метода Буркхолдера можно найти в книге [6].

Отметим, что зачастую рассматриваются координатно-вогнутые функции двух переменных. Назовём такие функции бивогнутыми. В данной работе мы будем изучать только неотрицательные бивогнутые функции с областью определения

$$\mathfrak{S} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon x - 1 \leqslant y \leqslant x + 1\right\} \qquad \text{(см. рис. 1).}$$

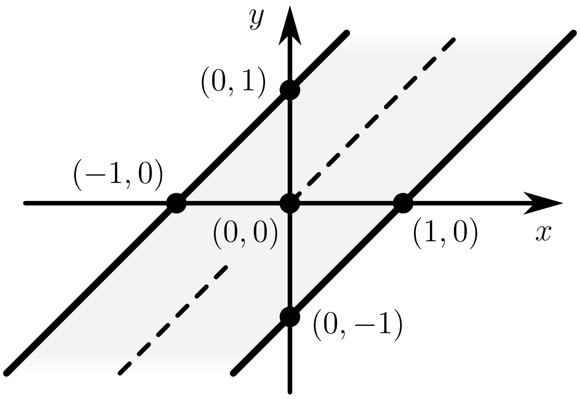

Рис. 1. Область определения $\mathfrak{S}$.

Чтобы показать, как введённая функция связана с доказательствами неравенств для мартингалов, сформулируем следующую теорему.

Теорема 1. *Рассмотрим произвольное вероятностное пространство* Ω*, непрерывное отображение* $H\colon \{-1,1\}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *и введём функцию Беллмана* $\tilde{\mathcal{B}}\colon [-1,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*. Определим значения функции* $\tilde{\mathcal{B}}$ *посредством следующей формулы:*

$$\tilde{\mathcal{B}}(x,y)=\sup\left\{H(\varphi_\infty,\psi_\infty)\colon |\varphi|=1 \text{ почти наверное},\ \varphi_0=x,\ \psi_0=y\right\},$$

где супремум берётся по множеству пар мартингалов φ*,* ψ*, таких что*

$$\forall k\in\mathbb{N}\ \exists\varepsilon\in\{-1,1\}: \psi_k-\psi_{k-1}=\varepsilon(\varphi_k-\varphi_{k-1}).$$

Теперь построим минимальную бивогнутую функцию $\mathcal{B}\colon\mathfrak{S}\to\mathbb{R}$*, такую что*

$$\forall(x,y)\in\partial\mathfrak{S}\colon \mathcal{B}(x,y)=H(y-x,y+x).$$

$$\text{Тогда}\qquad \forall(x,y)\in\mathfrak{S}\colon \mathcal{B}(x,y)=\tilde{\mathcal{B}}(y-x,y+x).$$

Отметим, что это утверждение является простым следствием теоремы 2.2, сформулированной в книге [6].

Введённая нами минимальная бивогнутая функция имеет тесную связь с ещё одной функцией Беллмана $\mathbf{B}_\varepsilon\colon \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\colon x_1^2\leqslant x_2\leqslant x_1^2+\varepsilon\}\to\mathbb{R}$, заданной следующим образом:

$$\mathbf{B}_\varepsilon(x_1,x_2;f)=\sup\left\{\langle f(\varphi)\rangle_{[0,1]}:\ \langle\varphi\rangle_{[0,1]}=x_1,\ \langle\varphi^2\rangle_{[0,1]}=x_2,\ \|\varphi\|_{\mathrm{BMO}([0,1])}\leqslant\varepsilon\right\},$$

где $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — непрерывная неотрицательная функция и $\langle\varphi\rangle_{[0,1]}=\int_0^1\varphi(t)\,\mathrm{d}t$. Более точное определение функции $\mathbf{B}_\varepsilon$ и её свойства можно найти в работах [7] и [8]. Кроме того, в статье [8] приведён подробный алгоритм построения введённой функции Беллмана при условии, что функция f достаточно регулярная.

На данный момент доказана, но ещё не опубликована следующая теорема, утверждающая, что существует соответствие между минимальной бивогнутой функцией $\mathcal{B}\colon\mathfrak{S}\to\mathbb{R}$ и функцией Беллмана $\mathbf{B}_1$. Теорема 2 была сообщена автору этой работы Д. М. Столяровым.

Теорема 2. *Пусть нам дана непрерывная неотрицательная функция* $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *и минимальная бивогнутая функция* $\mathcal{B}\colon\mathfrak{S}\to\mathbb{R}$*, такая что для любых чисел* $t\in\mathbb{R}$ *верны равенства* $\mathcal{B}(t,t-1)=\mathcal{B}(t-1,t)=f(2t-1)$*. Тогда*

$$\forall t\in\mathbb{R}\colon\quad \mathbf{B}_1(t,t^2+1;f)=\mathcal{B}(t/2,t/2).$$

Несложно видеть, что минимальная бивогнутая функция однозначно восстанавливается по своим граничным значениям. Однако не для всяких значений на границе минимальная бивогнутая функция будет невырождена, то есть не равна тождественно $+\infty$. Один из результатов этой работы заключается в описании множества неотрицательных граничных значений, при которых минимальная бивогнутая функция конечна (см. теорему 14). Аналогичный вопрос был затронут и для функции $\mathbf{B}_\varepsilon$ в теореме 6.1.2 из статьи [8]. Кроме того, похожая задача рассматривалась в работе [9] для гармонических функций в полосе $[0,\pi]\times\mathbb{R}$ (см. теорему 1). Заметим, что всякая бивогнутая функция является супергармонической, а любая гармоническая функция не превосходит супергармоническую функцию, принимающую те же значения на границе. Поэтому минимальная бивогнутая функция не меньше гармонической функции с такими же граничными значениями. Указав, как связаны эти объекты, мы вновь обратимся к теореме 1 из работы [9] и заметим, что для бивогнутых функций оказывается верным похожий результат, который сформулирован в теореме 14. А именно, при достаточно регулярном поведении граничных значений f минимальная бивогнутая функция невырождена, если $e^{-2|t|}f(t) \in L^1(\mathbb{R})$. При этом гармоническая функция в полосе $\mathfrak{S}$ будет определена, если функция f, соответствующая её значениям на границе, удовлетворяет условию $e^{-\pi|t|}f(t) \in L^1(\mathbb{R})$. В частности, можно показать, что существуют граничные значения, для которых определена гармоническая функция, но вырождена минимальная бивогнутая. Философское объяснение этой аналогии между гармоническими и бивогнутыми функциями состоит в том, что оба уравнения $\Delta u = 0$ и $\max(u_{xx}, u_{yy}) = 0$ являются уравнениями Гамильтона—Якоби—Беллмана. Некоторые аспекты, связанные с этими уравнениями, можно найти в статье [10].

Наша основная задача будет состоять в том, чтобы найти приближённую оценку значения минимальной бивогнутой функции в точке $(0, 0)$, зная её поведение на границе (см. теорему 16). В качестве следствия мы получим оценку значений минимальной бивогнутой функции внутри всей области $\mathfrak{S}$ (см. теорему 19). Кроме того, будет доказана теорема 17 в предположении, что верна теорема 2. Мы также сформулируем более точную версию теоремы 16 (см. теорему 18) и получим оценку роста следа минимальной бивогнутой функции (см. лемму 20). Отметим, что можно увидеть некоторую аналогию между леммой 20 и следствием 3.1 из статьи [9].

(i) Определения и базовые объекты

Определение 3. Рассмотрим функцию $B\colon \mathfrak{S} \to (-\infty, +\infty]$. Будем называть функцию B бивогнутой, если для любого числа $a \in \mathbb{R}$ функции $B(\cdot, a)$ и $B(a, \cdot)$ вогнуты. Будем говорить, что бивогнутая функция вырождена, если хотя бы в одной точке она принимает бесконечное значение.

Замечание 4. Можно показать, что бивогнутая функция $B\colon \mathfrak{S} \to (-\infty, +\infty]$ вырождена тогда и только тогда, когда $B|_{\mathrm{int}\,\mathfrak{S}} \equiv +\infty$.

Функция $B\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ называется билинейной, если она линейна по каждой своей переменной, то есть равна выражению $a + bx + cy + dxy$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ — некоторые вещественные числа.

Определение 5. Обозначим множество бивогнутых функций $B\colon \mathfrak{S} \to (-\infty, +\infty]$ символом $\mathcal{BC}^*(\mathfrak{S})$, а его подмножество невырожденных бивогнутых функций через $\mathcal{BC}(\mathfrak{S})$.

Бивогнутая функция $B\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ в каждой точке $(x, y) \in \mathrm{int}\,\mathfrak{S}$ имеет односторонние координатные производные, которые мы обозначим символами $\frac{\partial^\pm}{\partial x}B(x, y)$ и $\frac{\partial^\pm}{\partial y}B(x, y)$. А именно,

$$\frac{\partial^\pm}{\partial x}B(x, y) = \lim_{\varepsilon \to 0^\pm} \frac{B(x + \varepsilon, y) - B(x, y)}{\varepsilon};$$
$$\frac{\partial^\pm}{\partial y}B(x, y) = \lim_{\varepsilon \to 0^\pm} \frac{B(x, y + \varepsilon) - B(x, y)}{\varepsilon}.$$

Замечание 6. Любая функция $B \in \mathcal{BC}(\mathfrak{S})$ локально липшицева. В частности, непрерывно сужение $B|_{\mathrm{int}\,\mathfrak{S}}$, и поэтому функция B может иметь разрывы только на границе множества $\mathfrak{S}$. Этот факт можно найти в книге [1, с. 47, теорема 2.31].

Теперь определим семейство минимальных бивогнутых функций.

Определение 7. Будем называть функцию $\mathcal{B} \in \mathcal{BC}^*(\mathfrak{S})$ минимальной, если она не больше любой, возможно, вырожденной бивогнутой функции B с неменьшими граничными значениями. То есть

$$\forall B \in \mathcal{BC}^*(\Omega)\colon \quad B|_{\partial\mathfrak{S}} \geqslant \mathcal{B}|_{\partial\mathfrak{S}} \quad \Rightarrow \quad B \geqslant \mathcal{B}.$$

Определение 8. Множество всех невырожденных минимальных бивогнутых функций $\mathcal{B}\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ обозначим символом $\mathbb{B}(\mathfrak{S})$. Определим также множество $\mathbb{B}^{+}(\mathfrak{S}) \subset \mathbb{B}(\mathfrak{S})$ — семейство неотрицательных минимальных бивогнутых функций.

Наконец, введём главный объект изучения.

Определение 9. Для любых граничных значений $\mathbf{f}, \mathbf{g}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определим функцию

$$\mathcal{B}[\mathbf{f},\mathbf{g}] = \inf\left\{B \in \mathcal{BC}^*(\mathfrak{S}) \mid \forall t \in \mathbb{R}\colon B(t,t-1) \geqslant \mathbf{f}(t) \text{ и } B(t-1,t) \geqslant \mathbf{g}(t)\right\}.$$

Замечание 10. Функция $\mathcal{B}[\mathbf{f},\mathbf{g}]$ корректно определена, то есть не принимает значение $-\infty$. В частности, если $\mathbf{f}, \mathbf{g} \geqslant 0$, то и $\mathcal{B}[\mathbf{f},\mathbf{g}] \geqslant 0$. Кроме того, несложно доказать, что $\mathcal{B}[\mathbf{f},\mathbf{g}] \in \mathcal{BC}^*(\mathfrak{S})$. Это включение следует из того, что инфимум бивогнутых функций также является бивогнутой функцией.

Если включение $\mathcal{B}[\mathbf{f},\mathbf{g}] \in \mathcal{BC}^*(\mathfrak{S})$ очевидно, то описание пар функций $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ для которых функция $\mathcal{B}[\mathbf{f},\mathbf{g}]$ невырождена, является нетривиальной задачей. Например, $\mathcal{B}[e^{2t}, e^{2t}]|_{\mathrm{int}\,\mathfrak{S}} \equiv +\infty$. Однако, заметим, что при наличии достаточно точной оценки значения функции $\mathcal{B}[\mathbf{f},\mathbf{g}]$, например, в точке $(0,0)$, эта задача имеет простое решение. Достаточно лишь воспользоваться соотношением

$$\mathcal{B}[\mathbf{f},\mathbf{g}](0,0) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{B}[\mathbf{f},\mathbf{g}] \in \mathbb{B}(\mathfrak{S}),$$

которое верно в силу замечания 4.

Отметим, что мы будем работать только с неотрицательными функциями $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$. Чтобы внести ясность в вопрос о том, какие оценки считаются точными, мы введём следующее определение.

Определение 11. Пусть нам даны неотрицательные функции g_1 и g_2, значения которых принадлежат множеству $[0,+\infty]$. Будем писать, что $g_1 \lesssim g_2$, если существует абсолютная константа $C > 0$, такая что $g_1 \leqslant C g_2$. Соотношение $g_1 \asymp g_2$ означает, что $g_1 \lesssim g_2$ и $g_2 \lesssim g_1$. При этом указанная оценка

$$c g_2 \leqslant g_1 \leqslant C g_2$$

называется приемлемой, и число C/c — погрешность данной оценки.

Теперь мы готовы приступить к формулировке основных результатов.

(ii) Основные результаты

Один из ключевых вопросов заключается в следующем. При каких минимальных ограничениях на неотрицательные функции $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ справедливо включение $\mathcal{B}[\mathbf{f},\mathbf{g}] \in \mathbb{B}^{+}(\mathfrak{S})$? Мы же будем решать более общую задачу, заключающуюся в поиске приемлемой оценки величины $\mathcal{B}[\mathbf{f},\mathbf{g}](0,0)$ для неотрицательных функций $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$. Чтобы сформулировать соответствующую теорему, введём ещё несколько определений. Зафиксируем произвольное подмножество прямой $U \subset \mathbb{R}$.

Определение 12. Будем говорить, что неотрицательная функция $g\colon U \to [0,+\infty)$ удовлетворяет квазиусловию Гёльдера–Липшица с показателем Гёльдера $p \in (0,+\infty)$ и коэффициентом Липшица $L \in [0,+\infty]$, если

$$\forall x, y \in U\colon \quad |g^p(x) - g^p(y)| \leqslant L^p|x-y|.$$

Множество функций $g\colon U \to [0,+\infty)$, удовлетворяющих этому условию, обозначим символом $\mathrm{Lip}_L^p(U)$.

Определение 13. Введём оператор $\mathcal{L}_L^p$, действующий на множестве неотрицательных функций $g\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ посредством следующей формулы:

$$\mathcal{L}_L^p\, g = \inf\left\{G \in \mathrm{Lip}_L^p(\mathbb{R})\colon G \geqslant g\right\}.$$

Если множество $\{G \in \mathrm{Lip}_L^p\colon G \geqslant g\}$ пусто, то будем считать, что $\mathcal{L}_L^p\, g \equiv +\infty$.

Несложно показать, что $\mathcal{L}_L^p\, g \in \mathrm{Lip}_L^p(\mathbb{R})$, если $\mathcal{L}_L^p\, g \neq +\infty$. В замечании 7.2 будет сказано, как это получить в случае, когда функция g неотрицательна. Отметим, что введённый оператор обладает рядом свойств, которые будут полезны для понимания того, как он устроен. Эти свойства описаны в утверждениях 7.3, 7.8 и лемме 7.5 ниже.

Введём функцию $\xi_1\colon \mathbb{R} \to (0,1]$ посредством следующей формулы (см. рис. 2):

$$\xi_1(x) = \min(e^{1-|2x-1|}, 1). \tag{1}$$

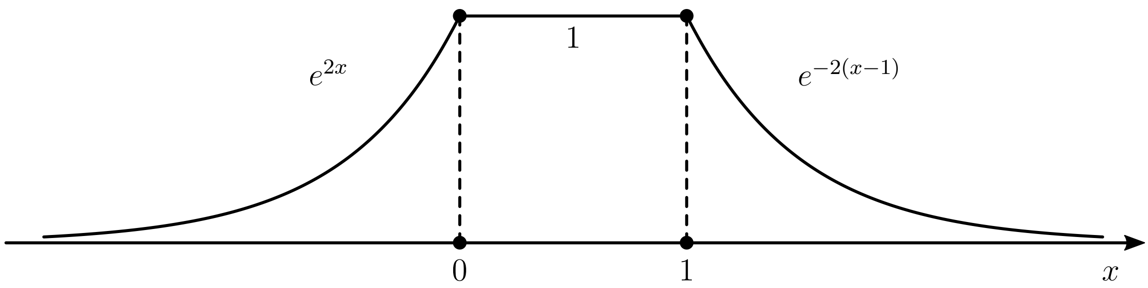

Рис. 2. График функции ξ_1.

Теперь мы готовы сформулировать теорему об описании граничных значений неотрицательной минимальной бивогнутой функции.

Теорема 14. *Пусть* $\mathbf{f},\mathbf{g}\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ — *произвольные неотрицательные функции. Тогда включение* $\mathcal{B}[\mathbf{f},\mathbf{g}] \in \mathbb{B}^+(\mathfrak{S})$ *верно тогда и только тогда, когда*

$$\left\|\mathcal{L}_1^{1/2}(\xi_1\mathbf{f})\right\|_{L^1(\mathbb{R})} < \infty \qquad \text{и} \qquad \left\|\mathcal{L}_1^{1/2}(\xi_1\mathbf{g})\right\|_{L^1(\mathbb{R})} < \infty.$$

Для формулировки основной теоремы нам понадобится ещё одно определение.

Определение 15. Пусть нам дано произвольное положительное число $\nu \in (0,+\infty)$. Тогда действие функционала $\mathcal{R}_\nu$ на множестве неотрицательных функций $g\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ определяется следующим образом:

$$\mathcal{R}_\nu g = \inf_{\lambda\in(0,+\infty)} \max\left(\nu\lambda,\ \left\|\mathcal{L}_\lambda^{1/2}\, g\right\|_{L^1(\mathbb{R})}\right).$$

Воспользовавшись некоторыми свойствами оператора $\mathcal{L}_\lambda^{1/2}$, можно сформулировать более точное определение функционала $\mathcal{R}_\nu$, которое дано в лемме 7.7 ниже. Основные свойства функционала $\mathcal{R}_\nu$ описаны в лемме 7.9.

Теорема 16. *Пусть нам даны произвольные неотрицательные функции* $\mathbf{f},\mathbf{g}\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty)$. *Тогда справедлива следующая приемлемая оценка:*

$$\mathcal{B}[\mathbf{f},\mathbf{g}](0,0) \asymp \mathcal{R}_1\left(\xi_1\,\mathbf{f}\right) + \mathcal{R}_1\left(\xi_1\,\mathbf{g}\right).$$

Заметим, что теорема 14 является простым следствием теоремы 16. Достаточно заметить, что в силу следствия 7.6 и леммы 7.7 величины $\mathcal{R}_1\xi_1\mathbf{f}$ и $\left\|\mathcal{L}_1^{1/2}\,\xi_1\mathbf{f}\right\|_{L^1(\mathbb{R})}$ одновременно равны или не равны $+\infty$.

Другие следствия из теоремы 16 и иные утверждения приведены в следующем подразделе. Отметим, что доказательства теорем 16, 18, следствия 19 и леммы 20 можно найти в подразделе 7.2.

(iii) Следствия и другие теоремы

Воспользовавшись теоремой 2, мы можем получить следующее утверждение:

Теорема 17. *Для любой неотрицательной функции* $f\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ *верно следующее соотношение:*

$$\sup\Big\{\langle f(\varphi)\rangle_{[0,1]} : \langle \varphi\rangle_{[0,1]} = 0,\ \langle \varphi^2\rangle_{[0,1]} = 1,\ \|\varphi\|_{\mathrm{BMO}([0,1])} \leqslant 1\Big\} \asymp \mathcal{R}_1\xi_1(t) f(2t-1).$$

В теореме 16 мы опустили точные константы и погрешность полученной приемлемой оценки. В следующем утверждении мы приведём пример приемлемой оценки с наименьшей погрешностью, которую удалось получить. Но сначала заметим, что функция $e^{-2}\xi_1$ совпадает с функцией ξ, фигурирующей в условии теоремы 18 (см. определение 2.11). Вместо функций ξ_1 и ξ можно рассматривать любую другую функцию $g\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, такую что $g \asymp \xi_1$. Однако это касается только теорем, в которых приведена приемлемая оценка без указания конкретной погрешности. В частности, бывает удобно работать с функцией $g(x) = e^{-2|x|}$, выбор которой, правда, не является естественным, если требуется получить наименьшую погрешность.

Теорема 18. *Пусть даны параметр* $\nu = 2000$ *и неотрицательные функции* $\mathbf{f}$ *и* $\mathbf{g}$. *Определим функции* $\mathbf{f}_0$, $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ *и* $\mathbf{g}_0$, $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ *(см. рис. 3), заданные посредством следующих формул:*

$$\mathbf{f}_0 = \chi_{(0,1)}\mathbf{f}, \qquad \mathbf{f}_1 = \chi_{(-\infty,0]}\mathbf{f}, \qquad \mathbf{f}_2 = \chi_{[1,+\infty)}\mathbf{f},$$
$$\mathbf{g}_0 = \chi_{(0,1)}\mathbf{g}, \qquad \mathbf{g}_1 = \chi_{(-\infty,0]}\mathbf{g}, \qquad \mathbf{g}_2 = \chi_{[1,+\infty)}\mathbf{g}.$$

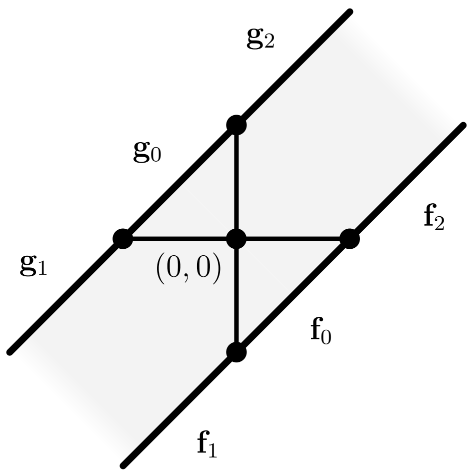

Рис. 3. Функции $\mathbf{f}_0$, $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ и $\mathbf{g}_0$, $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$.

Тогда существует константа $c > 0$, *такая что* $c, c^{-1} \leqslant 50$ *и*

$$\mathcal{B}[\mathbf{f},\mathbf{g}](0,0) = c\left(0.8\left(\mathcal{R}_\nu\xi\mathbf{f}_1 + \mathcal{R}_\nu\xi\mathbf{f}_2 + \mathcal{R}_\nu\xi\mathbf{g}_1 + \mathcal{R}_\nu\xi\mathbf{g}_2\right) + 0.01(\sup\mathbf{f}_0 + \sup\mathbf{g}_0)\right).$$

Соответственно, погрешность данной приемлемой оценки равна 2500.

Пока что мы оценивали значение только в точке $(0, 0)$. Несложно видеть, что аналогичным образом достигается приемлемая оценка и в любой другой точке вида (x, x). Распространить полученную оценку на всю область $\mathfrak{S}$ не удаётся. В следствии 19 показано, какие приемлемые оценки тем не менее можно получить.

Следствие 19. *Пусть нам даны произвольные неотрицательные функции* $\mathbf{f}, \mathbf{g}\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ *и число* $\varepsilon \in (0,1)$. *Тогда для любой точки* $(x_0, y_0) \in \mathfrak{S}$*, такой что* $|y_0 - x_0| \leqslant 1 - \varepsilon$ *справедливы следующие неравенства:*

$$\varepsilon \left(\mathcal{R}_\nu \left(\xi_1(x - \tfrac{1}{2}x_0 - \tfrac{1}{2}y_0)\,\mathbf{f}(x)\right) + \mathcal{R}_\nu \left(\xi_1(y - \tfrac{1}{2}x_0 - \tfrac{1}{2}y_0)\,\mathbf{g}(y)\right)\right) \lesssim \mathcal{B}[\mathbf{f}(x), \mathbf{g}(y)](x_0, y_0) \lesssim (2-\varepsilon)\left(\mathcal{R}_\nu \left(\xi_1(x - \tfrac{1}{2}x_0 - \tfrac{1}{2}y_0)\,\mathbf{f}(x)\right) + \mathcal{R}_\nu \left(\xi_1(y - \tfrac{1}{2}x_0 - \tfrac{1}{2}y_0)\,\mathbf{g}(y)\right)\right).$$

При фиксированном значении параметра ε *данная оценка является приемлемой.*

При изучении свойств, которыми обладают неотрицательные минимальные бивогнутые функции, оказывается полезной следующая лемма, доказательство которой вновь основано на теореме 16.

Лемма 20. *Пусть нам дана неотрицательная невырожденная минимальная бивогнутая функция* $\mathcal{B}\colon \mathfrak{S} \to [0, +\infty)$. *Тогда*

$$\mathcal{B}(x, x) = o(e^{2|x|}) \quad \textit{при } x \to +\infty.$$

Замечание 21. Заметим, что для бивогнутых функций это утверждение ложно. И соответствующим примером может послужить функция B^e (определение 2.1).

(iv) Построение бивогнутых и минимальных бивогнутых функций

В дальнейшей работе мы нередко будем выписывать явные формулы для построенных бивогнутых и минимальных бивогнутых функций. Предположим, что мы хотим описать поведение бивогнутой функции $B \in \mathcal{BC}(\mathfrak{S})$.

Определение 22. Функция B линейна (полулинейна) по переменной x в точке $(x_0, y_0) \in \mathfrak{S}$, если существует невырожденный интервал (отрезок) s, параллельный оси Ox, такой что $(x_0, y_0) \in s \subset \mathfrak{S}$ и функция $B|_s$ линейна.

Будем говорить, что функция B строго полулинейна по x в точке (x_0, y_0), если B полулинейна, но не линейна по переменной x в точке (x_0, y_0).

Аналогично вводится линейность, полулинейность и строгая полулинейность по y.

Описание функции B мы начнём с её граничных значений — функций $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$. Затем выпишем формулы для следующих областей:

- $\mathfrak{S}_{\langle xy\rangle} \subset \mathfrak{S}$ — множество точек, в которых функция B линейна по x и по y.
- $\mathfrak{S}_{\langle x\rangle} \subset \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{S}_{\langle xy\rangle}$ — область, в которой функция $\mathcal{B}$ полулинейна по x, но не линейна по x и по y одновременно.
- $\mathfrak{S}_{\langle y\rangle} \subset \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{S}_{\langle xy\rangle}$ — подмножество области $\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{S}_{\langle xy\rangle}$, в которой B полулинейна по переменной y.
- $\widehat{\mathfrak{S}} \subset \operatorname{int}\mathfrak{S}$ — множество внутренних точек, в которых функция строго полулинейна по обеим переменным x, y.

В примерах, которые будут приводиться $\mathfrak{S}_{\langle x\rangle} \cup \mathfrak{S}_{\langle y\rangle} \cup \mathfrak{S}_{\langle xy\rangle} = \Omega$.

В качестве следующего шага мы определим значение функции в точках из множества $\widehat{\mathfrak{S}}$. Гарантируется, что функцию B можно доопределить на всём множестве $\mathfrak{S}$, зная её значения в областях $\widehat{\mathfrak{S}}$, $\partial\mathfrak{S}$ и конфигурацию множеств $\mathfrak{S}_{\langle x\rangle}$, $\mathfrak{S}_{\langle y\rangle}$, $\mathfrak{S}_{\langle xy\rangle}$.

Обычно для упрощения формул мы будем разделять области $\mathfrak{S}_{\langle x\rangle}$, $\mathfrak{S}_{\langle y\rangle}$, $\mathfrak{S}_{\langle xy\rangle}$ на части и описывать отдельно каждое множество $\mathfrak{S}^i_{\langle x\rangle}$, $\mathfrak{S}^j_{\langle y\rangle}$, $\mathfrak{S}^k_{\langle xy\rangle}$. Для проверки бивогнутости бывает необходимо выписать явные формулы на каждом участке, что мы и будем делать в качестве последнего шага. Сужение функции B на множества $\mathfrak{S}^i_{\langle x\rangle}$, $\mathfrak{S}^j_{\langle y\rangle}$, $\mathfrak{S}^k_{\langle xy\rangle}$ мы обозначим символами $B^i_{\langle x\rangle}$, $B^j_{\langle y\rangle}$ и $B^k_{\langle xy\rangle}$ соответственно.

(v) Предварительные сведения

Утверждение 23. *Каждая бивогнутая функция $B \in \mathbb{BC}(\mathfrak{S})$ локально ограничена.*

Доказательство. В силу непрерывности функции B в области $\operatorname{int}\mathfrak{S}$ достаточно проверить, что она локально ограничена в окрестности границы, например, в областях $\{(x,y)\in\mathfrak{S}\colon y\leqslant x-\frac12\}$ и $\{(x,y)\in\mathfrak{S}\colon y\geqslant x+\frac12\}$. Функция B бивогнута, поэтому справедливы следующие неравенства:

$$B(x,y)\leqslant 2(x+\tfrac12-y)B(x,x)+2(y-x)B(x,x+\tfrac12)\qquad \text{при } x+\frac12\leqslant y\leqslant x+1.$$

А значит, ввиду непрерывности сужений $B(x,x)$ и $B(x,x+\frac12)$ функция B локально ограничена в области $\{(x,y)\in\mathfrak{S}\colon y\geqslant x+\frac12\}$. Локальная ограниченность в области $\{(x,y)\in\mathfrak{S}\colon y\leqslant x-\frac12\}$ доказывается аналогично. □

Покажем, что для оценки выражения $\mathcal{B}[\mathbf{f},\mathbf{g}](0,0)$ достаточно оценить значение величины $\mathcal{B}[\mathbf{f},0](0,0)$.

Утверждение 24. *Рассмотрим последовательность неотрицательных чисел $\{\theta_j\}_{j=1}^M$, удовлетворяющих равенству $\sum_{j=1}^M\theta_j=1$. Тогда для любых положительных функций $\mathbf{f}_j$, $\mathbf{g}_j$ справедливы следующие неравенства:*

$$\sum_{j=1}^M\theta_j\mathcal{B}[\mathbf{f}_j,\mathbf{g}_j]\leqslant\mathcal{B}\Big[\sum_{j=1}^M\mathbf{f}_j,\sum_{j=1}^M\mathbf{g}_j\Big]\leqslant\sum_{j=1}^M\mathcal{B}[\mathbf{f}_j,\mathbf{g}_j]. \tag{2}$$

В частности, мы можем заключить, что

$$\tfrac12\mathcal{B}[\mathbf{f},0]+\tfrac12\mathcal{B}[0,\mathbf{g}]\leqslant\mathcal{B}[\mathbf{f},\mathbf{g}]\leqslant\mathcal{B}[\mathbf{f},0]+\mathcal{B}[0,\mathbf{g}], \tag{3}$$

то есть $\mathcal{B}[\mathbf{f},\mathbf{g}]\asymp\mathcal{B}[\mathbf{f},0]+\mathcal{B}[0,\mathbf{g}]$.

В дальнейшем, мы будем изучать случай, когда $\mathbf{g}\equiv 0$. Нам также будет удобнее работать с функцией $\mathbf{f}$, такой что $\mathbf{f}(x)=0$ при достаточно маленьком значении аргумента x. Поэтому мы, как в теореме 18, разделим функцию $\mathbf{f}$ на три части.

$$\mathbf{f}_0=\chi_{(0,1)}\mathbf{f},\qquad\qquad \mathbf{f}_1=\chi_{(-\infty,0]}\mathbf{f},\qquad\qquad \mathbf{f}_2=\chi_{[1,+\infty)}\mathbf{f}. \tag{4}$$

Для сведения задачи к вычислению величины $\mathcal{B}[\mathbf{f}_2,0]$ мы введём параметр $\nu_0\in[0,\frac12]$. В силу утверждения 24 имеем следующие неравенства:

$$\nu_0\mathcal{B}[\mathbf{f}_1,0]+\nu_0\mathcal{B}[\mathbf{f}_2,0]+(1-2\nu_0)\mathcal{B}[\mathbf{f}_0,0]\leqslant\mathcal{B}[\mathbf{f},0]\leqslant\mathcal{B}[\mathbf{f}_1,0]+\mathcal{B}[\mathbf{f}_2,0]+\mathcal{B}[\mathbf{f}_0,0]. \tag{5}$$

Наибольшую сложность в оценке представляют величины $\mathcal{B}[\mathbf{f}_1,0](0,0)$ и $\mathcal{B}[\mathbf{f}_2,0](0,0)$. Ввиду симметрии мы будем работать только с выражением $\mathcal{B}[\mathbf{f}_2,0](0,0)$. Дальнейшее развитие идеи использования утверждения 24 связано с разбиением функции $\mathbf{f}_2$ на функции, носители которых вкладываются в промежутки вида $[k\delta,(k+1)\delta)$, где $k \in \mathbb{N}$, а $\delta \in (0, +\infty)$. В этом случае мы могли бы оценить каждое слагаемое $\mathcal{B}[\chi_{[k\delta,(k+1)\delta)}\mathbf{f}_2, 0](0,0)$ сверху величиной

$$\sup_{x \in [k\delta,(k+1)\delta]} \mathbf{f}_2(x) \cdot B[\chi_{[k\delta,(k+1)\delta]}, 0].$$

Поэтому следующая наша цель связана с вычислением функции $\mathcal{B}[\chi_{[a,b]}, 0]$. Но перед тем, как искать эту функцию, мы получим несколько нижних оценок, которые позволят доказать, что построенные бивогнутые функции будут минимальными.

1 Нижняя оценка величины $\mathcal{B}[f,0](0,0)$ для интегрируемой функции f

В качестве первого шага мы получим некоторые несложные оценки на значения неотрицательной бивогнутой (не обязательно минимальной) функции B на главной диагонали. А именно, наша задача состоит в том, чтобы для любых вещественных чисел $a \leqslant b$ оценить снизу величину $B(a,a)$ через число $B(b,b)$. Для этого нам нужно сначала ввести несколько определений.

Определение 1.1. Определим функцию $E\colon [0,1] \to [0,+\infty)$ следующим образом.

$$E(x) = \frac{1-x}{1+x}e^{2x}.$$

Утверждение 1.2. *Функция E удовлетворяет следующим соотношениям:*

$$E'(x) = \frac{-2x^2}{(1+x)^2}e^{2x}. \tag{6}$$

$$1 - x^3 \leqslant E(x) \leqslant 1 - \tfrac{2}{3}x^3. \tag{7}$$

Для упрощения дальнейших вычислений введём ещё одно определение.

Определение 1.3. Для произвольной функции $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ мы будем использовать следующее обозначение:

$$\widehat{g}(x) = e^{-2x}g(x).$$

Заметим, что $\widehat{g}(0) = g(0)$.

Замечание 1.4. При формулировке утверждений из этого раздела мы будем считать, что нам даны неотрицательные функции $f, A\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ и неотрицательная, возможно вырожденная, бивогнутая функция $B \in \mathcal{BC}^*(\mathfrak{S})$, такая что $B(x,x-1) = f(x)$ и $B(x,x) = A(x)$ для любого числа $x \in \mathbb{R}$. Отметим, что в следующих разделах, начиная со 2-ого, функция f будет иметь несколько иной смысл. А именно мы будем её отождествлять с функцией $\mathbf{f}_2$. Акцентируем также внимание на том, что утверждения из этого раздела ложны, если не предполагать, что функция B неотрицательна.

1.1. Основное неравенство для получения нижней оценки

Лемма 1.5. *Для любых чисел $\alpha, \beta \in [0,1]$ и $\gamma \in \mathbb{R}$ справедливо следующее неравенство.*

$$\widehat{A}(\gamma-\alpha) \geqslant E(\alpha)E(\beta)\,\widehat{A}(\gamma+\beta) + \frac{\alpha+\beta}{(1+\alpha)(1+\beta)}e^{2\alpha}\widehat{f}(\gamma), \tag{8}$$

где определение функций f и A дано в замечании 1.4.

Замечание 1.6. В случае $\beta = 0$ оценка (8) ввиду неравенства $e^{2\alpha}/(1+\alpha) \geqslant 1$ влечёт следующее соотношение:

$$\widehat{A}(\gamma-\alpha) \geqslant E(\alpha)\widehat{A}(\gamma) + \alpha\widehat{f}(\gamma). \tag{9}$$

Доказательство леммы 1.5. План доказательства заключается в том, чтобы поочерёдно оценивать значения функции B в точках $(\gamma+\beta, \gamma+\beta)$, $(\gamma, \gamma+\beta)$, $(\gamma, \gamma-\alpha)$ и $(\gamma-\alpha, \gamma-\alpha)$ (см. рис. 4).

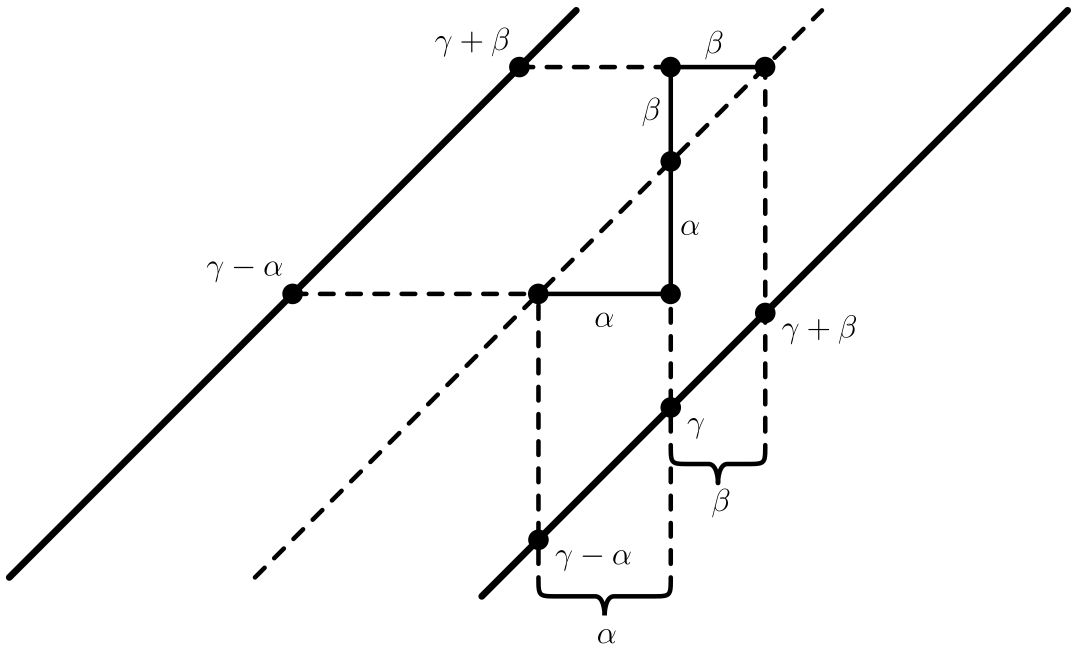

Рис. 4

$$B(\gamma+\beta, \gamma+\beta) = A(\gamma+\beta);$$
$$B(\gamma, \gamma+\beta) \geqslant (1-\beta)B(\gamma+\beta, \gamma+\beta) = (1-\beta)A(\gamma+\beta);$$
$$B(\gamma, \gamma-\alpha) \geqslant \frac{1-\alpha}{1+\beta}B(\gamma, \gamma+\beta) + \frac{\alpha+\beta}{1+\beta}f(\gamma) \geqslant \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{1+\beta}A(\gamma+\beta) + \frac{\alpha+\beta}{1+\beta}f(\gamma);$$
$$A(\gamma-\alpha) = B(\gamma-\alpha, \gamma-\alpha) \geqslant \frac{1}{1+\alpha}B(\gamma, \gamma-\alpha) \geqslant \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\cdot\frac{1-\beta}{1+\beta}\cdot A(\gamma+\beta) + \frac{\alpha+\beta}{1+\beta}f(\gamma).$$

Таким образом, мы получаем следующие соотношения.

$$e^{2\gamma-2\alpha}\widehat{A}(\gamma-\alpha) \geqslant \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\cdot\frac{1-\beta}{1+\beta}e^{2\gamma+2\beta}\widehat{A}(\gamma+\beta) + \frac{\alpha+\beta}{(1+\alpha)(1+\beta)}e^{2\gamma}\widehat{f}(\gamma);$$
$$\widehat{A}(\gamma-\alpha) \geqslant \frac{1-\alpha}{1+\alpha}e^{2\alpha}\cdot\frac{1-\beta}{1+\beta}e^{2\beta}\widehat{A}(\gamma+\beta) + \frac{\alpha+\beta}{(1+\alpha)(1+\beta)}e^{2\alpha}\widehat{f}(\gamma) =$$
$$E(\alpha)E(\beta)\widehat{A}(\gamma+\alpha) + \frac{\alpha+\beta}{(1+\alpha)(1+\beta)}^{2\alpha}\widehat{f}(\gamma).$$

□

1.2. Простейшая итерация основного неравенства

Заметим, что неравенство (9) можно применить несколько раз для разных пар чисел a, b. Получающееся в итоге неравенство сформулируем в следствии 1.7.

Следствие 1.7. *Выберем произвольное число $n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим последовательности чисел $\{\gamma_k\}_{k=0}^{n}$ и $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n}$, такие что для любого $k \in [1; n]$ выполняется $\alpha_k =$*

$\gamma_k - \gamma_{k-1} \leqslant 1$. *Тогда справедливо следующее неравенство.*

$$\widehat{A}(\gamma_0) \geqslant \prod_{j=1}^{n} E(\alpha_j) \left(\widehat{A}(\gamma_n) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \widehat{f}(\gamma_k) \right), \tag{10}$$

где функции f и A заданы в замечании 1.4.

Доказательство. Будем доказывать неравенство (10) индукцией по $n \in \mathbb{N}_0$. База $n = 0$ тривиальна. Предположим, что искомая оценка верна при $n = m - 1$. Докажем её при $n = m$, пользуясь неравенством (9) с параметрами $\alpha = \alpha_m$ и $\gamma = \gamma_k$. Заметим, что

$$\widehat{A}(\gamma_{m-1}) = \widehat{A}(\gamma_m - \alpha_m) \overset{(9)}{\geqslant} E(\alpha_m)\widehat{A}(\gamma_m) + \alpha_m \widehat{f}(\gamma_m).$$

Поэтому

$$\widehat{A}(\gamma_0) \geqslant \prod_{j=1}^{m-1} E(\alpha_j) \left(\widehat{A}(\gamma_{m-1}) + \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_k \widehat{f}(\gamma_k) \right) \geqslant$$

$$\prod_{j=1}^{m-1} E(\alpha_j) \left(E(\alpha_m)\widehat{A}(\gamma_m) + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \widehat{f}(\gamma_k) \right) \overset{(6)}{\geqslant} \prod_{j=1}^{m} E(\alpha_j) \left(\widehat{A}(\gamma_m) + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \widehat{f}(\gamma_k) \right).$$

□

Теперь мы можем устремить число n к бесконечности, а величины α_k к нулю, чтобы получить следующую лемму.

Лемма 1.8. *Пусть нам даны функции $f(x) = B(x, x-1)$ и $A(x) = B(x, x)$ из замечания 1.4. Тогда для любых вещественных чисел $a \leqslant b$ справедлива следующая оценка:*

$$\widehat{A}(a) \geqslant \widehat{A}(b). \tag{11}$$

Если при этом функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, то

$$\widehat{A}(a) \geqslant \widehat{A}(b) + \int_a^b \widehat{f}(x)\, \mathrm{d}x. \tag{12}$$

Доказательство. Применим неравенство (10) с параметрами $\alpha_k = \frac{1}{n}$, $\gamma_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$.

$$\widehat{A}(a) \geqslant (E(1/n))^n \left(\widehat{A}(b) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \widehat{f}\big(a + \tfrac{k}{n}(b-a)\big) \right).$$

Перейдём в полученном соотношении к пределу по $n \to \infty$, воспользовавшись перед этим неравенством $f \geqslant 0$, если функция f не интегрируема по Риману. И так как

$$1 \geqslant \lim_{n\to\infty} (E(1/n))^n \overset{(7)}{\geqslant} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^3}\right)^n = 1$$

мы получаем искомые неравенства (11) и (12). □

Сформулируем ещё одно утверждение, которое проясняет поведение бивогнутой функции на диагонали.

Следствие 1.9. *Пусть нам дана неотрицательная бивогнутая функция $B \in \mathcal{BC}^*(\mathfrak{S})$. Тогда для любых чисел $a, b \in \mathbb{R}$ верны неравенства*

$$e^{-2|b-a|}B(b,b) \leqslant B(a,a) \leqslant e^{2|b-a|}B(b,b). \tag{13}$$

В частности, $B(x,x) = O(e^{2|x|})$.

Доказательство. Заметим, что достаточно доказывать только первое неравенство. Более того, ввиду симметрии можно считать, что $b \geqslant a$. Но тогда полученное неравенство $B(a,a) \geqslant e^{2(a-b)}B(b,b)$ равносильно оценке (11) из леммы 1.8. $\square$

Теперь, имея возможность проверять минимальность построенных бивогнутых функций, мы можем приступить к их поиску.

2 Минимальная бивогнутая функция $\mathcal{B}[\chi_{[a,b]}, 0]$ и грубая верхняя оценка

2.1. Затухание минимальной бивогнутой функции

Перед непосредственным поиском явного вида функции $\mathcal{B}[\chi_{[a,b]}, 0]$ мы поймём, как описать убывание минимальной бивогнутой функции $\mathcal{B}$ на бесконечности, если известно её значение только в точке (a, a). Для этого мы сначала введём функцию B^e

Определение 2.1. Определим функции $B^e, B^e_{\langle x\rangle}, B^e_{\langle y\rangle} \colon \mathfrak{S} \to [0, +\infty)$ посредством следующих формул (см. рис. 5):

$$\begin{aligned} B^e_{\langle x\rangle}(x,y) &= (1+x-y)e^{2y}, \\ B^e_{\langle y\rangle}(x,y) &= (1+y-x)e^{2x}, \end{aligned} \qquad B^e = \begin{cases} B^e_{\langle x\rangle}(x,y), & \text{если } x \leqslant y; \\ B^e_{\langle y\rangle}(x,y), & \text{если } y \leqslant x. \end{cases} \tag{14}$$

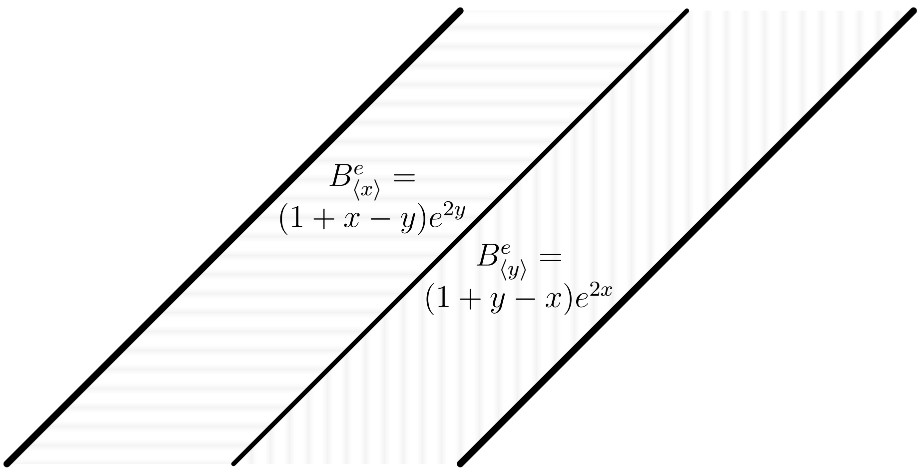

Рис. 5. Функция B^e

Отметим, что для любой точки $(x,y) \in \mathfrak{S}$ верны равенства : $B^e_{\langle x\rangle}(x,y) = B^e_{\langle y\rangle}(y,x)$ и $B^e(x,y) = (1-|x-y|)e^{2\max(x,y)}$. Вычислим некоторые частные производные функций $B^e_{\langle x\rangle}$ и $B^e_{\langle y\rangle}$, которые нам пригодятся в работе.

$$\frac{\partial}{\partial x}B^e_{\langle y\rangle}(x,y) = 2(\tfrac{1}{2}+y-x)e^{2x}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}B^e_{\langle x\rangle}(x,y) = 2(\tfrac{1}{2}+x-y)e^{2y}; \tag{15}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}B^e_{\langle y\rangle}(x,y) = e^{2x}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}B^e_{\langle x\rangle}(x,y) = e^{2y}; \tag{16}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}B^e_{\langle y\rangle}(x,y) = 4(y-x)e^{2x}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2}B^e_{\langle x\rangle}(x,y) = 4(x-y)e^{2y}; \tag{17}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}B_{\langle y\rangle}(x,y) = 2e^{2x}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}B_{\langle x\rangle}(x,y) = 2e^{2y}. \tag{18}$$

Утверждение 2.2. *Функция B^e бивогнута и непрерывно дифференцируема.*

Доказательство. Чтобы убедиться в непрерывной дифференцируемости, достаточно проверить, что для любого $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial}{\partial y}B_{\langle y\rangle}(t,t) = \frac{\partial}{\partial y}B_{\langle x\rangle}(t,t), \qquad \frac{\partial}{\partial x}B_{\langle y\rangle}(t,t) = \frac{\partial}{\partial x}B_{\langle x\rangle}(t,t). \tag{19}$$

Бивогнутость функции B^e следует из её непрерывной дифференцируемости и следующих неравенств.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} B^e_{\langle y \rangle}(x,y) \leqslant 0 \quad \text{при } y \leqslant x, \qquad\qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2} B^e_{\langle x \rangle}(x,y) \leqslant 0 \quad \text{при } x \leqslant y. \tag{20}$$

Осталось отметить, что интересующие нас соотношения (19) и (20) легко получить из равенств (15), (16) и (17). □

Из полученной функции B^e несложно построить следующую функцию, которая в некотором неформальном смысле является минимальной. Отметим, что с точки зрения определения 7 функция B из леммы 2.3 не является минимальной.

Лемма 2.3. *Рассмотрим функцию* $B\colon \mathfrak{S} \to [0,+\infty)$*, заданную следующим образом (см. рис. 6):*

$$B(x,y) = \begin{cases} B^e(x,y), & \text{если } x,y \leqslant 0;\\ B^e(-x,-y), & \text{если } x,y \geqslant 0;\\ 1+y-x, & \text{если } y \leqslant 0 \leqslant x;\\ 1-y+x, & \text{если } x \leqslant 0 \leqslant y. \end{cases} \tag{21}$$

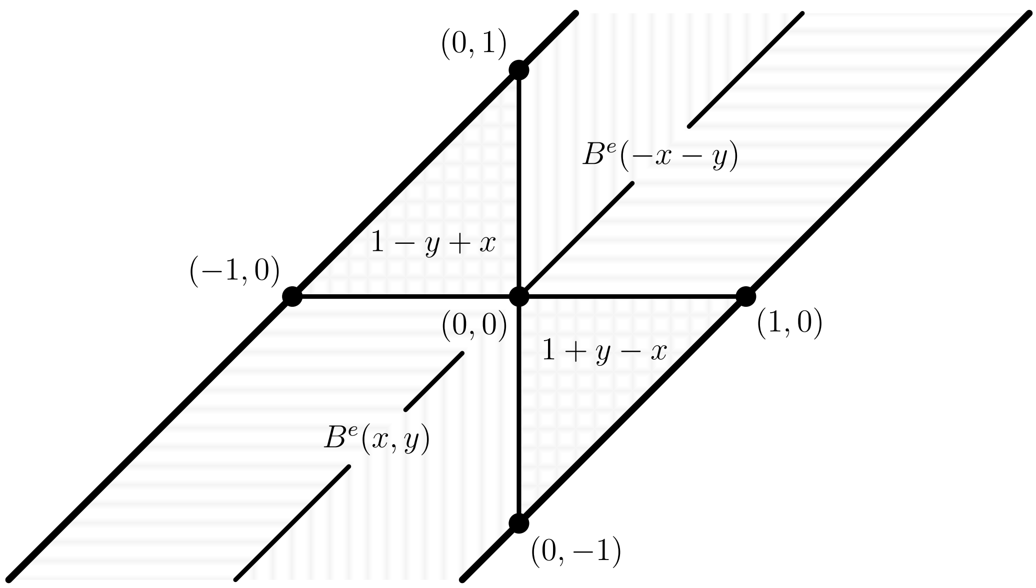

Рис. 6

Функция B минимальна относительно подпорки $\chi_{\{(0,0)\}}$, то есть для любой бивогнутой функции B_1, такой что $B_1 \geqslant \chi_{\{(0,0)\}}$, справедлива оценка $B_1 \geqslant B$.

Доказательство. Сначала убедимся в том, что функция B бивогнута. Бивогнутость в каждой координатной четверти в силу утверждения 2.2 очевидна. Поэтому ввиду симметрии функции B для доказательства бивогнутости достаточно проверить следующее неравенство для любого числа $y \in [-1,0]$:

$$\frac{\partial}{\partial x} B^e(0,y) = \frac{\partial}{\partial x} B^e_{\langle y \rangle}(0,y) \overset{(15)}{=} 1+2y \geqslant -1 = \frac{\partial}{\partial x}(1+y-x).$$

Теперь докажем минимальность функции B относительно подпорки $\chi_{\{(0,0)\}}$. Для этого сначала заметим, что для функции B_1, указанной в условии имеется неравенство

$B_1(x,y) \geqslant B(x,y)$ для любых чисел x,y, таких что $y \leqslant 0 \leqslant x$ или $x \leqslant 0 \leqslant y$, так как в этих областях функция B линейна. Далее применим оценку (13), чтобы получить неравенство $B_1(x,x) \geqslant B(x,x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Осталось воспользоваться линейностью функции B вдоль оси Ox или Oy в оставшихся областях, чтобы получить интересующее нас неравенство $B_1 \geqslant B$. $\square$

Замечание 2.4. Отметим, что лемма 2.3 нужна для получения нижней оценки функции B_1 только в точках (x,y), таких что $x,y \leqslant 0$ или $x,y \geqslant 0$.

Теперь приступим к построению функции $\mathcal{B}[\chi_{[a,b]},0]$.

2.2. Построение функции $\mathcal{B}[\chi_{[a,b]},0]$

Определим функцию B так, как это описано в подразделе (iv). На границе она принимает значения $B(x,x-1) = 2\chi_{[a,b]}$, $B(x,x+1) = 0$. Области линейности и билинейности имеют следующий вид (см. рис. 7):

Область $\mathfrak{S}_{\langle xy\rangle}$:

$$\mathfrak{S}_{\langle xy\rangle} = \{(x,y) \in \mathfrak{S} \colon y > a-1 \quad \text{и} \quad x < b\}\,.$$

Область $\mathfrak{S}_{\langle x\rangle}$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_{\langle x\rangle} &= \mathfrak{S}^0_{\langle x\rangle} \cup \mathfrak{S}^1_{\langle x\rangle} \cup \mathfrak{S}^2_{\langle x\rangle},\\
\mathfrak{S}^0_{\langle x\rangle} &= \{(x,y) \in \mathfrak{S} \colon y \leqslant b \leqslant x\}\,,\\
\mathfrak{S}^1_{\langle x\rangle} &= \{(x,y) \in \mathfrak{S} \colon b \leqslant y \leqslant x\}\,,\\
\mathfrak{S}^2_{\langle x\rangle} &= \{(x,y) \in \mathfrak{S} \colon x \leqslant y \leqslant a-1\}\,.
\end{aligned}$$

Область $\mathfrak{S}_{\langle y\rangle}$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_{\langle y\rangle} &= \mathfrak{S}^0_{\langle y\rangle} \cup \mathfrak{S}^1_{\langle y\rangle} \cup \mathfrak{S}^2_{\langle y\rangle},\\
\mathfrak{S}^0_{\langle y\rangle} &= \{(x,y) \in \mathfrak{S} \colon y \leqslant a-1 \leqslant x\}\,,\\
\mathfrak{S}^2_{\langle y\rangle} &= \{(x,y) \in \mathfrak{S} \colon y \leqslant x \leqslant a-1\}\,,\\
\mathfrak{S}^1_{\langle y\rangle} &= \{(x,y) \in \mathfrak{S} \colon b \leqslant x \leqslant y\}\,.
\end{aligned}$$

Область $\widehat{\mathfrak{S}}$:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathfrak{S}} &= \widehat{\mathfrak{S}}^1 \cup \widehat{\mathfrak{S}}^2,\\
\widehat{\mathfrak{S}}^1 &= \{(x,x) \in \mathfrak{S} \colon x > b\}\,,\\
\widehat{\mathfrak{S}}^2 &= \{(x,x) \in \mathfrak{S} \colon x < a-1\}\,.
\end{aligned}$$

Зададим функцию $\mathcal{B}$ на множестве $\widehat{\mathfrak{S}}$:

$$\begin{aligned}
B(x,x) &= e^{-2(x-b)}, && \text{если } x > b;\\
B(x,x) &= e^{2(x-a+1)}, && \text{если } x < a-1.
\end{aligned}$$

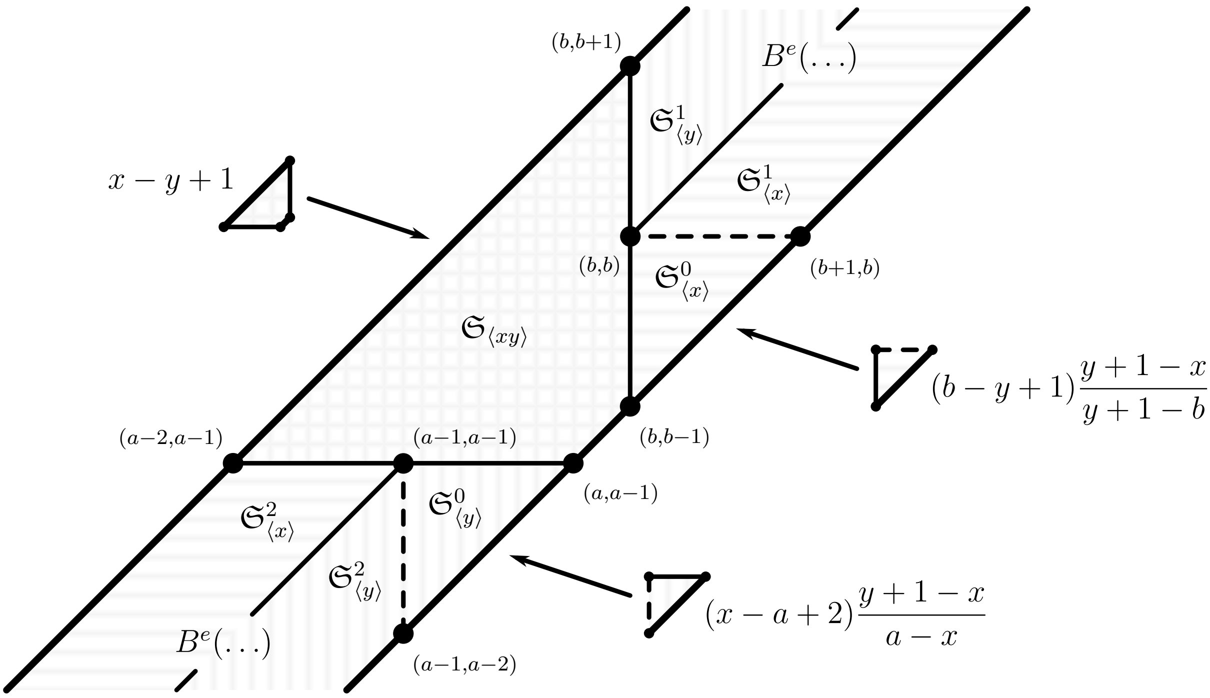

Рис. 7

Теорема 2.5. *Утверждение теоремы заключается в том, что построенная функция B минимальна. То есть*

$$\mathcal{B}[2\chi_{[a,b]},0] = B.$$

Отметим, что построенная функция B не является непрерывно дифференцируемой.

Замечание 2.6. Значения функции B в соответствующих областях линейности и билинейности вычисляются следующим образом (см. рис. 7). Используемая ниже функция B^e задана формулой (14).

Функция $B_{\langle xy\rangle}$:

$$B_{\langle xy\rangle}(x,y) = x - y + 1; \tag{22}$$

Функции $B^0_{\langle x\rangle}$ и $B^0_{\langle y\rangle}$:

$$B^0_{\langle x\rangle}(x,y) = (b-y+1)\frac{y+1-x}{y+1-b},$$
$$B^0_{\langle y\rangle}(x,y) = (x-a+2)\frac{y+1-x}{a-x}.$$

Функция $B^1_{\langle x\rangle,\langle y\rangle}$:

$$B^1_{\langle x\rangle,\langle y\rangle}(x,y) = B^e(-(x-b),-(y-b)), \tag{23}$$

Функция $B^2_{\langle x\rangle,\langle y\rangle}$:

$$B^2_{\langle x\rangle,\langle y\rangle}(x,y) = B^e(x-(a-1),y-(a-1)). \tag{24}$$

Доказательство. Поймём, почему функция B бивогнута. Без ограничения общности будем считать, что $b = 0$ и $a \leqslant 0$. Далее мы можем воспользоваться симметричностью этой функции относительно прямой $x + y = a - 1$ и, в силу равенства (23), уже доказанной бивогнутостью функции B^e (утверждение 2.2). В итоге, нам нужно проверить только следующие соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial y} B^0_{\langle x\rangle}(x,0) \overset{?}{=} \frac{\partial}{\partial y} B^1_{\langle x\rangle}(x,0) \qquad \text{при } x \in [0,1), \tag{25}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} B_{\langle xy\rangle}(0,y) \overset{?}{>} \frac{\partial}{\partial x} B^1_{\langle x\rangle}(0,y) \qquad \text{при } y \in (-1,0], \tag{26}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} B_{\langle xy\rangle}(0,y) \overset{?}{>} \frac{\partial}{\partial x} B^1_{\langle y\rangle}(0,y) \qquad \text{при } y \in [0,1), \tag{27}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} B^0_{\langle x\rangle}(x,y) \overset{?}{\leqslant} 0 \qquad \text{при } y \leqslant 0 \leqslant x. \tag{28}$$

Перед непосредственной проверкой вычислим нужные нам производные.

Функция $B^1_{\langle x\rangle,\langle y\rangle}$:

$$\begin{aligned}
B^1_{\langle x\rangle,\langle y\rangle}(x,y) &\overset{(23)}{=} B^e(-x,-y),\\
\frac{\partial}{\partial y} B^1_{\langle x\rangle,\langle y\rangle}(x,0) &= -\frac{\partial}{\partial y} B^e_{\langle x\rangle}(-x,0) \overset{(15)}{=} 2x-1,\\
\frac{\partial}{\partial x} B^1_{\langle x\rangle,\langle y\rangle}(0,y) &= -\frac{\partial}{\partial x} B^e_{\langle y\rangle}(0,-y) \overset{(15)}{=} 2y-1.
\end{aligned}$$

Функция $B_{\langle xy\rangle}$:

$$\begin{aligned}
B_{\langle xy\rangle}(x,y) &= x-y+1,\\
\frac{\partial}{\partial x} B_{\langle xy\rangle}(0,y) &= 1.
\end{aligned}$$

Функция $B^0_{\langle x\rangle}$:

$$\begin{aligned}
B^0_{\langle x\rangle}(x,y) &= (1-y)\frac{y+1-x}{y+1} = 1-y-x\frac{1-y}{1+y},\\
\frac{\partial}{\partial x} B^0_{\langle x\rangle}(x,y) &= -\frac{1-y}{1+y},\\
\frac{\partial}{\partial y} B^0_{\langle x\rangle}(x,y) &= -1-x\left(\frac{2}{1+y}-1\right)' = -1+\frac{2x}{(1+y)^2},\\
\frac{\partial^2}{\partial y^2} B^0_{\langle x\rangle}(x,y) &= -\frac{4x}{(1+y)^3}.
\end{aligned}$$

Теперь мы готовы проверить соотношения (25), (26), (27), (28).

(25) $\qquad \dfrac{\partial}{\partial y} B^0_{\langle x\rangle}(x,0) = 2x-1 = \dfrac{\partial}{\partial y} B^1_{\langle x\rangle}(x,0) \qquad$ при $x \in [0,1)$

(26) $\qquad \dfrac{\partial}{\partial x} B_{\langle xy\rangle}(0,y) = 1 > -\dfrac{1-y}{1+y} = \dfrac{\partial}{\partial x} B^0_{\langle x\rangle}(0,y) \qquad$ при $y \in (-1,0]$

(27) $\qquad \dfrac{\partial}{\partial x} B_{\langle xy\rangle}(0,y) = 1 > 2y-1 = \dfrac{\partial}{\partial x} B^1_{\langle y\rangle}(0,y) \qquad$ при $y \in [0,1)$

(28) $\qquad \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} B^0_{\langle x\rangle} = -\dfrac{4x}{(1+y)^3} \leqslant 0, \qquad$ при $y \leqslant 0 \leqslant x$.

Таким образом, мы доказали бивогнутость функции B ввиду её симметрии относительно прямой $x+y=a+b-1$. Осталось убедиться в том, что построенная функция минимальна. Пусть нам дана произвольная бивогнутая функция $\tilde{B} \in \mathcal{BC}(\mathfrak{S})$, такая что $\tilde{B}|_{\partial\mathfrak{S}} \geqslant B|_{\partial\mathfrak{S}}$. Тогда, воспользовавшись линейностью функции B в области $\mathfrak{S}_{\langle xy\rangle}$, легко получить неравенство $\tilde{B}|_{\mathfrak{S}_{\langle xy\rangle}} \geqslant B|_{\mathfrak{S}_{\langle xy\rangle}}$. Для получения соответствующего неравенства в областях $\mathfrak{S}^0_{\langle x\rangle}$ и $\mathfrak{S}^0_{\langle y\rangle}$ достаточно заметить, что сужение $B|_{\mathfrak{S}^0_{\langle x\rangle}}$ линейно по переменной x, а сужение $B|_{\mathfrak{S}^0_{\langle y\rangle}}$ линейно по y. Чтобы получить искомое неравенство $\tilde{B} \geqslant B$ нам осталось применить лемму 2.3 с функциями $B_1(x,y) = \tilde{B}(x+b, y+b)$ и $B_1(x,y) = \tilde{B}(x+a-1, y+a-1)$. $\square$

Так как в дальнейшем мы будем часто рассматривать только сужение функции $\mathcal{B}$ на главную диагональ, введём функцию $\mathcal{A}[g](0)$.

Определение 2.7. Для произвольной функции $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ определим функцию $\mathcal{A}[g]\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, заданную следующим образом:

$$\mathcal{A}[g](x) = \mathcal{B}[g,0](x,x).$$

В качестве следствия теоремы 2.5 мы получаем следующее утверждение. Напомним, что функция $\widehat{g}$ задаётся посредством равенства $\widehat{g}(t) = e^{-2t}g(t)$ (см. определение 1.3).

Следствие 2.8. *Для произвольных чисел $a \leqslant b$ справедливо следующее тождество (см. рис. 8):*

$$\mathcal{A}[\chi_{[a,b]}](x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{2(x-a+1)}, & \textit{если } x \in (-\infty, a-1]; \\ 1/2, & \textit{если } x \in [a-1, b]; \\ \frac{1}{2}e^{-2(x-b)}, & \textit{если } x \in [b, +\infty). \end{cases} \tag{29}$$

В частности,

$$\widehat{\mathcal{A}}[\chi_{[a,b]}](x) = \tfrac{1}{2}e^{2(1-a)}, \qquad \textit{если } x \leqslant a-1. \tag{30}$$

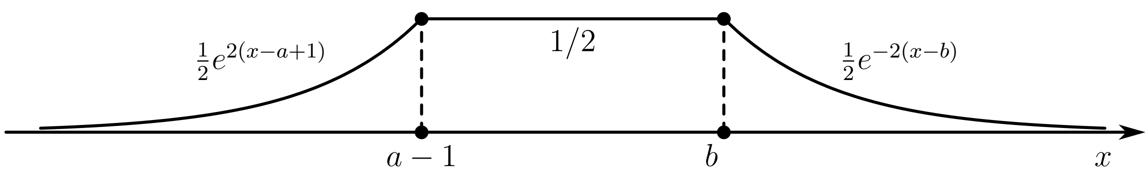

Рис. 8. График функции $\mathcal{A}[\chi_{[a,b]}](x)$.

Доказательство. Пусть B — функция из теоремы 2.5. Так как $\mathcal{A}[\chi_{[a,b]}](x) = \frac{1}{2}B(x,x)$, для доказательства следствия достаточно обратиться к соотношениям (22), (23), (24) и воспользоваться тем, что $B^e(x,x) = e^{2x}$. $\square$

2.3. Сведение задачи к основному случаю

Полученное следствие 2.8 позволяет найти точное значение величины $\mathcal{A}[\mathbf{f}_0](0)$. Напомним, что $\mathbf{f}_0 = \chi_{(0,1)}\mathbf{f}$ (см. формулу (4)).

Утверждение 2.9. *Справедливо следующее тождество.*

$$\mathcal{A}[\mathbf{f}_0](0) = \tfrac{1}{2}\sup \mathbf{f}_0. \tag{31}$$

Доказательство. Заметим, что

$$\mathcal{A}[\mathbf{f}_0](0) \leqslant \mathcal{A}[\sup \mathbf{f}_0](0) = \tfrac{1}{2} \sup \mathbf{f}_0.$$

Поэтому нам нужно только доказать, что $\mathcal{A}[\mathbf{f}_0](0) \geqslant \frac{1}{2} \sup \mathbf{f}_0$. В силу тождества (29) для любого $x_0 \in (0,1)$ справедливы следующие соотношения:

$$\mathcal{A}[\mathbf{f}_0](0) \leqslant \mathbf{f}_0(x_0)\mathcal{A}[\chi_{\{x_0\}}](0) = \tfrac{1}{2}\mathbf{f}_0(x_0).$$

Осталось перейти к супремуму по $x_0 \in (0,1)$ и заключить, что $\mathcal{A}[\mathbf{f}_0](0) \geqslant \frac{1}{2} \sup \mathbf{f}_0$. $\square$

Благодаря полученному утверждению в дальнейшем мы можем работать только с функцией $\mathbf{f}_2 = \chi_{[1,+\infty)}\mathbf{f}$ (см. формулу 4). При этом мы будем существенно пользоваться тем, что функция $\mathbf{f}_2$ неотрицательна, локально ограничена и для любого $x \in [-\infty, 1)$ верно $\mathbf{f}_2(x) = 0$. В дальнейшем нам понадобится ещё одно свойство функции $\mathbf{f}_2$, которое описано в следующем утверждении.

Утверждение 2.10. *Если функция $\mathbf{f}_2$ такова, что $\mathcal{B}[\mathbf{f}_2, 0] \in \mathbb{B}^+(\mathfrak{S})$, то $\sup \widehat{\mathbf{f}}_2 < +\infty$. Более того, $\mathcal{A}[\mathbf{f}_2](0) \geqslant \frac{1}{2}e^2 \sup \widehat{\mathbf{f}}_2$.*

Доказательство. Заметим, что $\forall x_0 \in [1, +\infty)$ справедливы неравенства

$$\mathcal{A}[\mathbf{f}_2](0) \geqslant \mathcal{A}[\mathbf{f}_2(x_0)\chi_{\{x_0\}}](0) \overset{(30)}{=} \tfrac{1}{2}e^2 e^{-2x_0}\mathbf{f}_2(x_0) = \tfrac{1}{2}e^2\widehat{\mathbf{f}}_2(x_0).$$

Осталось перейти к супремуму по $x_0 \in [1, +\infty)$. $\square$

Таким образом, мы можем считать, что $\sup \widehat{\mathbf{f}}_2 < +\infty$. Далее мы докажем лемму 2.12, чтобы в дальнейшем, получив приемлемую оценку величины $\mathcal{A}[\mathbf{f}_2](0)$, можно было автоматически её распространить на выражение $\mathcal{B}[\mathbf{f}, 0](0)$. Для этого нам понадобится функция ξ, которая связана с функцией ξ_1 (см. формулу (1)) соотношением $\xi = e^{-2}\xi_1$.

Определение 2.11. Определим функцию ξ следующим образом (см. рис. 9).

$$\xi(x) = \begin{cases} e^{-2(1-x)}, & \text{если } x \leqslant 0; \\ e^{-2}, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ e^{-2x}, & \text{если } x \geqslant 1. \end{cases}$$

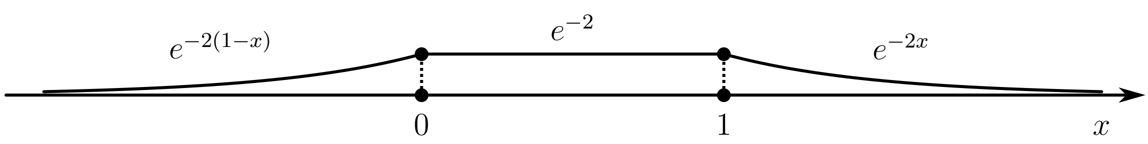

Рис. 9. График функции ξ.

Заметим, что $\widehat{\mathbf{f}}_2 = \xi \mathbf{f}_2$.

Лемма 2.12. *Пусть у нас имеется функционал R, действующий на множестве функций $g\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$. Предположим, что он инвариантен относительно изометрий прямой $\mathbb{R}$ и для некоторых чисел $\mu_1, \mu_2 > 0$ справедливы неравенства*

$$\mu_1 R\widehat{\mathbf{f}}_2 \leqslant \mathcal{A}[\mathbf{f}_2](0) \leqslant \mu_2 R\widehat{\mathbf{f}}_2. \tag{32}$$

Тогда верна следующая приемлемая оценка:

$$\frac{\mu_1}{\mu_1+2\mu_2}\big(\mu_2(R\xi\mathbf{f}_1+R\xi\mathbf{f}_2)+\tfrac{1}{2}\sup\mathbf{f}_0\big) \leqslant \mathcal{A}[\mathbf{f}](0) \leqslant \mu_2(R\xi\mathbf{f}_1+R\xi\mathbf{f}_2)+\tfrac{1}{2}\sup\mathbf{f}_0. \tag{33}$$

Заметим, что погрешность этой оценки равна $1+2\mu_2/\mu_1$.

Доказательство. Применив неравенства (32) и утверждение 2.9 к оценке (5), получим следующие соотношения:

$$\nu_0\mu_1\left(R'\xi\mathbf{f}_1+R'\xi\mathbf{f}_2\right)+\tfrac{1}{2}(1-2\nu_0)\sup\mathbf{f}_0 \leqslant \mathcal{A}[\mathbf{f}](0) \leqslant \mu_2(R''\xi\mathbf{f}_1+R''\xi\mathbf{f}_2)+\tfrac{1}{2}\sup\xi\mathbf{f}_0. \tag{34}$$

Теперь выберем параметр ν_0 так, чтобы получившаяся оценка оказалось приемлемой. Для этого достаточно потребовать выполнения равенства $\nu_0\mu_1/\mu_2 = 1-2\nu_0$. Значит,

$$\nu_0\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}+2\right)=1; \qquad \nu_0=\frac{\mu_2}{\mu_1+2\mu_2}.$$

Несложно видеть, что после подстановки числа $\nu_0=\mu_2/(\mu_1+2\mu_2)$ в неравенство (34) мы получим оценку (33). □

2.4. Верхняя оценка величины $\widehat{\mathcal{A}}[\mathbf{f}_2](0)$

Теорема 2.13. *Рассмотрим последовательность* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$*, такую что* $a_0=1$ *и* $a_k<a_{k+1}$ *для любого* $k\in\mathbb{N}$*. Тогда верно неравенство*

$$\mathcal{A}[\mathbf{f}_2](0)\leqslant \tfrac{1}{2}e^2\sum_{k=0}^{\infty}e^{-2a_k}\sup_{t\in[a_k,a_{k+1})}\mathbf{f}_2(t). \tag{35}$$

Доказательство. Определим для любого $n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ функции

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\chi_{[a_k,a_{k+1})}(x)\sup_{t\in[a_k,a_{k+1})}\mathbf{f}_2(t).$$

Тогда

$$\mathcal{A}[\mathbf{f}_2](0)\leqslant\mathcal{A}[f_\infty](0)=\lim_{n\to\infty}\mathcal{A}[f_n](0).$$

Несложно видеть, что итоговая оценка следует из соотношений

$$\mathcal{A}[f_n](0)\leqslant\sum_{k=0}^{n}\sup_{t\in[a_k,a_{k+1})}\mathbf{f}_2(t)\mathcal{A}[\chi_{[a_k,a_{k+1}]}](0)\overset{(30)}{=} \tfrac{1}{2}e^2\sum_{k=0}^{n}e^{-2a_k}\sup_{t\in[a_k,a_{k+1})}\mathbf{f}_2(t), \quad \text{так как } \forall k\in\mathbb{N}\colon a_k\geqslant 1.$$

□

Следствие 2.14. *Предположим, что последовательность* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *из теоремы 2.13 удовлетворяет также неравенствам* $a_{k+1} - a_k \leqslant \delta$ *для некоторой величины* $\delta > 0$ *и любого числа* $k \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$A[\mathbf{f}_2](0) \leqslant \tfrac{1}{2} e^{2(1+\delta)} \sum_{k=0}^{\infty} \sup_{t \in [a_k, a_{k+1})} \widehat{\mathbf{f}}_2(t).$$

Доказательство. Заметим, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$e^{-2a_k} \sup_{t \in [a_k, a_{k+1})} \mathbf{f}_2(t) \leqslant e^{-2a_k} \sup_{t \in [a_k, a_{k+1})} e^{2a_{k+1} - 2t} \mathbf{f}_2(t) \leqslant e^{2\delta} \sup_{t \in [a_k, a_{k+1})} \widehat{\mathbf{f}}_2(t).$$

Следовательно,

$$\mathcal{A}[\mathbf{f}_2](0) \leqslant \tfrac{1}{2} e^{2} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2a_k} \sup_{t \in [a_k, a_{k+1})} \mathbf{f}_2(t) \leqslant \tfrac{1}{2} e^{2(1+\delta)} \sum_{k=0}^{\infty} \sup_{t \in [a_k, a_{k+1})} \widehat{\mathbf{f}}_2(t).$$

$\square$

3 Точная нижняя оценка

На данный момент у нас имеется нижняя и верхняя оценки величины $\mathcal{A}[\mathbf{f}_2](0)$, которые сформулированы в лемме 1.8 и следствии 2.14. Поймём, можем ли мы получить приемлемую оценку, например, для функции $\mathbf{f}_2$ следующего вида.

Рассмотрим последовательности $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, такие что $a_0 = 0$ и для любого $k \in \mathbb{N}$ верно $1 \leqslant a_k \leqslant a_{k+1}$, $a_{k+1} - a_k \leqslant 1$ и $t_k \geqslant 0$. Затем определим функцию $\mathbf{f}_2$:

$$\mathbf{f}_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{\{a_k\}} t_k.$$

Тогда в силу следствий 2.14 и неравенства (10), применённого с параметрами $\gamma_k = a_k$ справедлива следующая оценка:

$$\prod_{j=1}^{n} E(a_j) \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \widehat{\mathbf{f}}_2(a_k) \lesssim \mathcal{A}[\mathbf{f}_2](0) \lesssim \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\mathbf{f}}_2(a_k),$$

где $\alpha_k = a_k - a_{k-1}$. Заметим, что произведение

$$\prod_{j=1}^{n} E(a_j) \leqslant \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \tfrac{2}{3}\alpha_j^3\right)$$

отлично от нуля только в случае, если $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_k^3 < +\infty$. Но последнее возможно только, если $\alpha_k \to 0$ при $k \to \infty$. Это означает, что вероятнее всего полученная оценка не может быть точной. Мы начнём улучшение имеющихся неравенств с поиска более точной нижней оценки путём выбора оптимальных параметров α и β в неравенстве (8).

В следующих разделах мы вместо функции $\mathbf{f}_2$ будем работать с неотрицательной функцией φ, удовлетворяющей аналогичному условию $\varphi(x) = 0$ при $x < 1$. Единственное отличие этой функции будет состоять в том, что мы будем требовать от неё следующего дополнительного условия:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad \widehat{\varphi}(x) \leqslant 1.$$

Данное предположение является естественным в силу того, что $\sup \widehat{\mathbf{f}}_2 < +\infty$ (см. утверждение 2.10). Кроме того, для любого числа $c > 0$ верно равенство $\mathcal{A}[c\mathbf{f}_2] = c\mathcal{A}[\mathbf{f}_2]$.

3.1. Выбор параметров α, β в основном неравенстве

Утверждение 3.1. *Выберем произвольные числа $\gamma, \tilde{\gamma} \geqslant 1$ и определим величину*

$$\alpha = \sqrt{\frac{\widehat{\varphi}(\gamma)}{3\widehat{\mathcal{A}}[\varphi](\tilde{\gamma})}}.$$

Предположим, что $\alpha \leqslant 1$ и $\tilde{\gamma} \geqslant \gamma + \alpha$. Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\widehat{\mathcal{A}}[\varphi](\gamma - \alpha) \geqslant \widehat{\mathcal{A}}[\varphi](\tilde{\gamma}) + \frac{4\,\widehat{\varphi}(\gamma)}{3}\sqrt{\frac{\widehat{\varphi}(\gamma)}{3\widehat{\mathcal{A}}[\varphi](\tilde{\gamma})}}. \tag{36}$$

Доказательство. Применив лемму 1.5 с параметром $\beta = \alpha$, выпишем следующую цепочку неравенств:

$$\widehat{\mathcal{A}}[\varphi](\gamma - \alpha) \overset{(8)}{\geqslant} E(\alpha)E(\alpha)\widehat{\mathcal{A}}[\varphi](\gamma + \alpha) + \frac{\alpha + \alpha}{(1+\alpha)(1+\alpha)} e^{2\alpha}\widehat{\varphi}(\gamma) \overset{(7),(11)}{\geqslant}$$
$$(1 - \alpha^3)^2 \widehat{\mathcal{A}}[\varphi](\tilde{\gamma}) + (2\alpha)\widehat{\varphi}(\gamma) \geqslant \widehat{\mathcal{A}}[\varphi](\tilde{\gamma}) + 2\alpha\widehat{\varphi}(\gamma) - 2\alpha^3\widehat{\mathcal{A}}[\varphi](\tilde{\gamma}).$$

Нам осталось подставить в получившееся соотношение параметр $\alpha = \sqrt{\frac{\widehat{\varphi}(\gamma)}{3\widehat{\mathcal{A}}[\varphi](\tilde{\gamma})}}$:

$$\widehat{\mathcal{A}}[\varphi](\gamma-\alpha) \geqslant \widehat{\mathcal{A}}[\varphi](\tilde{\gamma}) + 2\alpha\widehat{\varphi}(\gamma) - 2\alpha\frac{\widehat{\varphi}(\gamma)}{3\widehat{\mathcal{A}}[\varphi](\tilde{\gamma})}\widehat{\mathcal{A}}[\varphi](\tilde{\gamma}) =$$
$$\widehat{\mathcal{A}}[\varphi](\tilde{\gamma}) + 2(1-\tfrac{1}{3})\alpha\widehat{\varphi}(\gamma) = \widehat{\mathcal{A}}[\varphi](\tilde{\gamma}) + \frac{4\,\widehat{\varphi}(\gamma)}{3}\sqrt{\frac{\widehat{\varphi}(\gamma)}{3\widehat{\mathcal{A}}[\varphi](\tilde{\gamma})}}.$$

□

Заметим, что параметр α выбирается таким образом, чтобы выражение $\widehat{\mathcal{A}}[\varphi](\tilde{\gamma}) + 2\alpha\widehat{\varphi}(\gamma) - 2\alpha^3\widehat{\mathcal{A}}[\varphi](\tilde{\gamma})$ было максимальным. Отметим, что производя аналогичные оценки с произвольным параметром $\beta \leqslant \alpha \leqslant 1$, мы получим выражение

$$\widehat{\mathcal{A}}[\varphi](\tilde{\gamma}) + \alpha\widehat{\varphi}(\gamma) - \alpha^3\widehat{\mathcal{A}}[\varphi](\tilde{\gamma}) + \beta\widehat{\varphi}(\gamma) - \beta^3\widehat{\mathcal{A}}[\varphi](\tilde{\gamma}),$$

максимум которого достигается при $\beta = \alpha$.

3.2. Итерация основного неравенства

Следующая задача состоит в том, чтобы проитерировать получившееся в утверждении 3.1 неравенство. Отметим, что нам, как и раньше, нужно будет следить за тем, чтобы выполнялось неравенство

$$\alpha = \sqrt{\frac{\widehat{\varphi}(\gamma)}{3\widehat{\mathcal{A}}[\varphi](\tilde{\gamma})}} \leqslant 1; \qquad \widehat{\varphi}(\gamma) \leqslant 3\widehat{\mathcal{A}}[\varphi](\tilde{\gamma}).$$

Так как по предположению $\widehat{\varphi}(\gamma) \leqslant 1$, достаточно потребовать, чтобы $\widehat{\mathcal{A}}[\varphi](\tilde{\gamma}) \geqslant \frac{1}{3}$. Не для любой функции φ и величины $\tilde{\gamma}$ будет верно это неравенство. Чтобы обойти это препятствие, мы воспользуемся следующей оценкой для некоторых достаточно больших чисел x_0 и t:

$$\mathcal{A}[\varphi](0) \geqslant \mathcal{A}\left[\varphi + t\chi_{\{x_0\}}\right](0) - \mathcal{A}\left[t\chi_{\{x_0\}}\right](0).$$

В полученном неравенстве мы уже сможем получить нижнюю оценку на функцию $\mathcal{A}\left[\varphi + t\chi_{\{x\}}\right]$. Следовательно, в этом случае у нас есть возможность применить утверждение 3.1.

Следствие 3.2. *Пусть нам дана последовательность чисел $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$. Определим величины $\alpha_k = \sqrt{\widehat{\varphi}(\gamma_k)}$ и предположим, что $\gamma_1 \geqslant 1$ и $\forall k \in \mathbb{N}$: $\gamma_{k+1} - \gamma_k \geqslant \alpha_k + \alpha_{k+1}$ (см. рис. 10).*

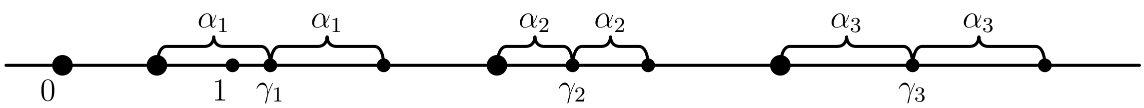

Рис. 10

Построим для каждого $n \in \mathbb{N}$ функцию

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1}\varphi(\gamma_k)\chi_{\{\gamma_k\}}(x) + \tfrac{2}{3}e^{2\gamma_n}\chi_{\{\gamma_n+1\}}.$$

Тогда имеется оценка

$$\mathcal{A}[\varphi](0) \geqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \widehat{\mathcal{A}}[\varphi_n](\gamma_1-\alpha_1) - \tfrac{1}{3} \tag{37}$$

и функция $\widehat{\mathcal{A}}[\varphi_n](x)$ удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\widehat{\mathcal{A}}\,[\varphi_n](\gamma_n-\alpha_n) \geqslant \tfrac{1}{3} \quad \text{и} \quad \forall k\in[1;n)\colon \tag{38}$$

$$\widehat{\mathcal{A}}\,[\varphi_n](\gamma_k-\alpha_k) \geqslant \widehat{\mathcal{A}}\,[\varphi_n](\gamma_{k+1}-\alpha_{k+1}) + \frac{4\widehat{\varphi}(\gamma_k)}{3}\sqrt{\frac{\widehat{\varphi}(\gamma_k)}{3\widehat{\mathcal{A}}\,[\varphi_n](\gamma_{k+1}-\alpha_{k+1})}}. \tag{39}$$

Доказательство. Начнём с неравенства (37). Несложно видеть, что $\varphi_n \leqslant \varphi+\frac{2}{3}e^{2\gamma_n}\chi_{\gamma_n+1}$. Поэтому, так как $\gamma_1-\alpha_1\geqslant 0$,

$$\widehat{\mathcal{A}}\,[\varphi_n](\gamma_1-\alpha_1) \leqslant \widehat{\mathcal{A}}[\varphi+\tfrac{2}{3}e^{2\gamma_n}\chi_{\{\gamma_n+1\}}](0) \leqslant \widehat{\mathcal{A}}[\varphi](0)+\tfrac{2}{3}e^{2\gamma_n}\widehat{\mathcal{A}}[\chi_{\{\gamma_n+1\}}](0).$$

Воспользуемся равенством (30) и тем, что $\gamma_n+1\geqslant 1$, чтобы заключить, что

$$\widehat{\mathcal{A}}[\chi_{\{\gamma_n+1\}}](0) = \tfrac{1}{2}e^{-2\gamma_n}.$$

Таким образом, мы получаем, что

$$\widehat{\mathcal{A}}[\varphi](0) \geqslant \widehat{\mathcal{A}}\,[\varphi_n](\gamma_1-\alpha_1) - \tfrac{2}{3}e^{2\gamma_n}\cdot\tfrac{1}{2}e^{-2\gamma_n} = \widehat{\mathcal{A}}\,[\varphi_n](\gamma_1-\alpha_1)-\tfrac{1}{3},$$

и нам остаётся перейти к супремуму по $n\in\mathbb{N}$. Теперь докажем соотношение (38).

$$\widehat{\mathcal{A}}\,[\varphi_n](\gamma_n-\alpha_n) \overset{(11)}{\geqslant} \widehat{\mathcal{A}}\,[\varphi_n](\gamma_n) \geqslant \tfrac{2}{3}e^{2\gamma_n}\widehat{\mathcal{A}}[\chi_{\{\gamma_n+1\}}](\gamma_n) \overset{(30)}{=} \tfrac{1}{3}.$$

Наконец, перейдём к оценке (39). Воспользуемся утверждением 3.1 с функцией φ_n и параметрами $\gamma=\gamma_k$ и $\tilde{\gamma}=\gamma_{k+1}-\alpha_{k+1}$. Сперва заметим, что в этом случае $\alpha_k\geqslant\alpha$. Действительно,

$$\sqrt{\widehat{\varphi}_n(\gamma_k)} \overset{?}{\geqslant} \sqrt{\frac{\widehat{\varphi}_n(\gamma_k)}{3\widehat{\mathcal{A}}\,[\varphi_n](\gamma_{k+1}-\alpha_{k+1})}};$$

$$\widehat{\mathcal{A}}\,[\varphi_n](\gamma_{k+1}-\alpha_{k+1}) \overset{(11)}{\geqslant} \widehat{\mathcal{A}}[\varphi_n](\gamma_n-\alpha_n) \overset{(38)}{\geqslant} \tfrac{1}{3}. \tag{40}$$

В частности, $\alpha\leqslant\alpha_k=\sqrt{\widehat{\varphi}(\gamma_k)}\leqslant 1$. Поэтому, чтобы применить утверждение 3.1, нам осталось показать, что $\tilde{\gamma}\geqslant\gamma+\alpha$. В самом деле, $\tilde{\gamma}=\gamma_{k+1}-\alpha_{k+1}\geqslant\gamma_k+\alpha_k\geqslant\gamma+\alpha$. Таким образом,

$$\widehat{\mathcal{A}}\,[\varphi_n](\gamma_k-\alpha_k) \overset{(11)}{\geqslant} \widehat{\mathcal{A}}\,[\varphi_n](\gamma-\alpha) \overset{(36)}{\geqslant} \widehat{\mathcal{A}}\,[\varphi_n](\tilde{\gamma}) + \frac{4\,\widehat{\varphi}_n(\gamma)}{3}\sqrt{\frac{\widehat{\varphi}_n(\gamma)}{3\widehat{\mathcal{A}}\,[\varphi_n](\tilde{\gamma})}}.$$

Для завершения доказательства заметим, что $\varphi_n(\gamma_k)=\varphi(\gamma_k)$. $\square$

3.3. Анализ рекуррентной последовательности

Из полученных неравенств (37), (38) и (39) непонятно, как получить оценку на величину $\mathcal{A}[\varphi](0)$. Поэтому сейчас мы найдём приближённое решение полученной рекуррентной последовательности. Но сначала напомним несколько полезных неравенств, которыми будем пользоваться.

Утверждение 3.3. *Для любых чисел $m \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$ и последовательности неотрицательных величин $\{\theta_k\}_{k=1}^m$ справедливы следующие неравенства.*

$$m^{p-1}\sum_{k=1}^{m}\theta_k^p \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{m}\theta_k\Big)^p \leqslant \sum_{k=1}^{m}\theta_k^p. \tag{41}$$

В частности,

$$2^{-\frac{1}{3}}\left(\theta_1^{\frac{2}{3}}+\theta_2^{\frac{2}{3}}\right) \leqslant (\theta_1+\theta_2)^{\frac{2}{3}} \leqslant \theta^{\frac{2}{3}}+\theta^{\frac{2}{3}}. \tag{42}$$

Лемма 3.4. *Пусть нам дано число $n \in \mathbb{N}$, функции $u\colon [0;n) \to [0,+\infty)$, $v\colon [1;n] \to (0,+\infty)$ и величины $\omega, \mu > 0$. Тогда если выполнены оценки*

$$v(n) \geqslant \omega; \qquad \forall k \in [1,n)\colon \quad v(k) \geqslant v(k+1) + \mu u(k)\sqrt{\frac{u(k)}{v(k+1)}}, \tag{43}$$

то справедливо неравенство

$$v(1) \geqslant 2^{-\frac{1}{3}}\left(\left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\mu^{\frac{2}{3}}\Big(\sum_{k=1}^{n-1}u^{\frac{3}{2}}(k)\Big)^{\frac{2}{3}}+\omega\right). \tag{44}$$

Если же верны соотношения

$$v(n) = \omega; \qquad \forall k \in [1;n)\colon \quad v(k+1) \leqslant v(k) \leqslant v(k+1) + \mu u(k)\sqrt{\frac{u(k)}{v(k+1)}} \tag{45}$$

и $\forall k \in [1;n)\colon\ \mu_\omega\omega \geqslant u(k)$ *для некоторого числа* $\mu_\omega > 0$, *то*

$$v(1) \leqslant \left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\mu^{\frac{2}{3}}\Big(\sum_{k=1}^{n-1}u^{\frac{3}{2}}(k)\Big)^{\frac{2}{3}} + \left(\tfrac{3}{2}\max\left(\mu\mu_\omega^{3/2},1\right)-\tfrac{1}{2}\right)\omega. \tag{46}$$

Замечание 3.5. Отметим, что в случае, когда неравенства (43) обращаются в равенство, $\mu = 1$ и $\forall k \in [1;n)\colon \omega \geqslant u(k)$, полученные оценки (44), (46) являются приемлемыми, и их погрешность равна $\sqrt[3]{2} \leqslant 1.26$.

Доказательство. Начнём с нижней оценки. Немного переписав неравенство $v(k) \geqslant v(k+1)+\mu u(k)\sqrt{\frac{u(k)}{v(k+1)}}$, просуммируем его по $k \in [1;n)$ и получим

$$\begin{gathered}(v(k)-v(k+1))\sqrt{v(k+1)} \geqslant \mu u^{\frac{3}{2}}(k);\\ \sum_{k=1}^{n-1}(v(k)-v(k+1))\sqrt{v(k+1)} \geqslant \mu\sum_{k=1}^{n-1}u^{\frac{3}{2}}(k).\end{gathered} \tag{47}$$

Выражению слева можно придать ясный геометрический смысл. А именно, оно близко к величине $\int\limits_{\omega}^{v(1)}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$ (см. рис. 11).

Точнее говоря, выполняется следующее неравенство:

$$\sum_{k=1}^{n-1}(v(k)-v(k+1))\sqrt{v(k+1)} \leqslant \int\limits_{\omega}^{v(1)}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \tfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_{\omega}^{v(1)} = \tfrac{2}{3}v(1)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{2}{3}\omega^{\frac{3}{2}}.$$

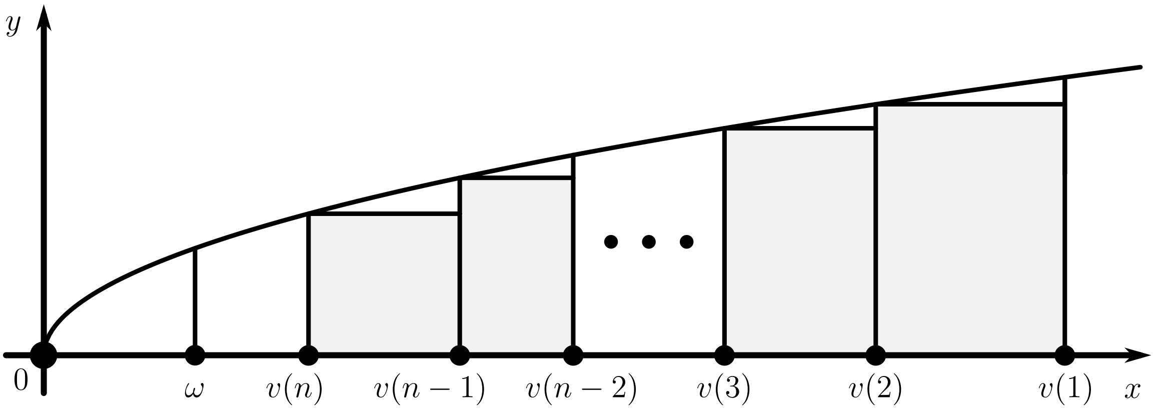

Рис. 11. Площадь закрашенной области равна левой части в тождестве (47).

Теперь воспользуемся неравенством (47) и соотношениями (42).

$$v(1) \geqslant \left(\frac{3\mu}{2}\sum_{k=1}^{n-1} u^{\frac{3}{2}}(k) + \omega^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \geqslant 2^{-\frac{1}{3}}\left(\left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\mu^{\frac{2}{3}}\Big(\sum_{k=1}^{n-1} u^{\frac{3}{2}(k)}\Big)^{\frac{2}{3}} + \omega\right).$$

Итак, мы получили необходимую нижнюю оценку (44) величины $v(1)$. Теперь перейдём ко второй части доказательства. Сперва заметим, что верно неравенство, аналогичное оценке (47)

$$\sum_{k=1}^{n-1}(v(k) - v(k+1))\sqrt{v(k+1)} \leqslant \mu\sum_{k=1}^{n-1} u^{\frac{3}{2}}(k). \tag{48}$$

Снова оценим интеграл функции $\sqrt{t}$ ступенчатой функцией (см. рис. 12).

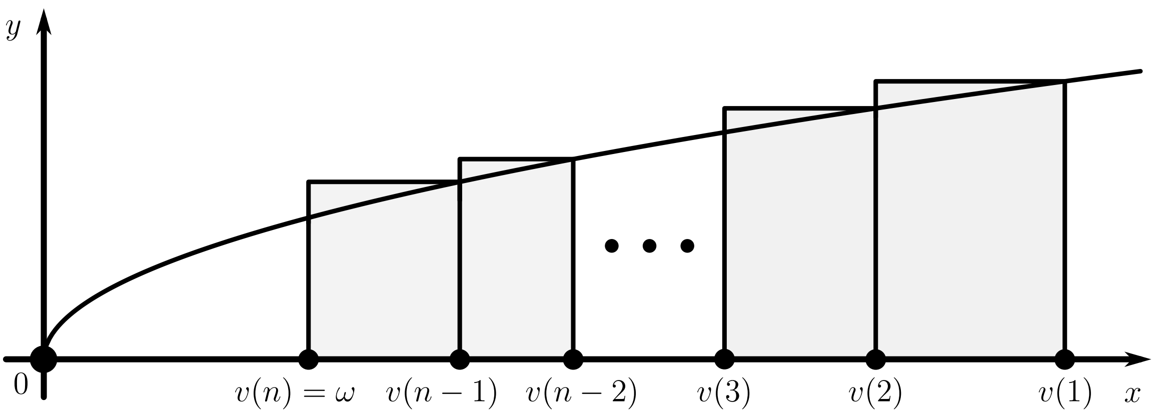

Рис. 12. Геометрический смысл первого неравенства в цепочке соотношений (49).

$$\int\limits_{\omega}^{v(1)} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}(v(k) - v(k+1))\sqrt{v(k)} = \tag{49}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}(v(k) - v(k+1))\sqrt{v(k+1)} + \sum_{k=1}^{n-1}(v(k) - v(k+1))(\sqrt{v(k)} - \sqrt{v(k+1)}).$$

Оценим сверху величину $v(k) - v(k+1)$. Для этого сначала вспомним, что $u(k) \leqslant \mu_\omega \omega$ и $v(k) \geqslant v(k+1) \geqslant \ldots \geqslant v(n) = \omega$. Поэтому

$$\forall k \in [1; n): \quad v(k) - v(k+1) \overset{(45)}{\leqslant} \mu u(k) \sqrt{\frac{u(k)}{v(k+1)}} \leqslant \mu \mu_\omega \omega \sqrt{\frac{\mu_\omega \omega}{\omega}} = \mu \mu_\omega^{3/2} \omega. \tag{50}$$

Обозначим величину $\max\left(\mu \mu_\omega^{3/2}, 1\right)$ символом θ. Отметим, что в дальнейшем мы будем пользоваться тем, что $\theta \geqslant 1$. Из неравенства (50) следует, что

$$\sum_{k=1}^{n-1} (v(k) - v(k+1))(\sqrt{v(k)} - \sqrt{v(k+1)}) \leqslant$$
$$\theta \omega \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sqrt{v(k)} - \sqrt{v(k+1)}\right) = \theta \omega (\sqrt{v(1)} - \sqrt{v(n)}) = \theta \omega \sqrt{v(1)} - \theta \omega^{\frac{3}{2}}.$$

Комбинируя полученное неравенство с оценкой (49) и соотношением (48), мы получаем

$$\mu \sum_{k=1}^{n-1} u(k)^{\frac{3}{2}} + \theta \omega \sqrt{v(1)} - \theta \omega^{\frac{3}{2}} \geqslant \int\limits_{\omega}^{v(1)} \sqrt{t}\, \mathrm{d}t = \tfrac{2}{3} v(1)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{2}{3} \omega^{\frac{3}{2}}. \tag{51}$$

Введём следующие обозначения:

$$V = \frac{1}{\omega} v(1), \qquad\qquad U = \frac{1}{\omega} \left(\mu \sum_{k=1}^{n-1} u(k)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

После деления обеих частей неравенства (51) на число $\omega^{\frac{3}{2}}$ и заменой соответствующих выражений на V и U получается такое неравенство:

$$U^{\frac{3}{2}} + \theta \sqrt{V} - \theta \geqslant \tfrac{2}{3} V^{\frac{3}{2}} - \tfrac{2}{3}; \qquad\qquad U^{\frac{3}{2}} \geqslant \tfrac{2}{3} V^{\frac{3}{2}} - \theta \sqrt{V} + \theta - \tfrac{2}{3}. \tag{52}$$

Заметим, что интересующее нас неравенство (46) равносильно соотношению

$$V \overset{?}{\leqslant} \left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} U + \tfrac{3}{2} \theta - \tfrac{1}{2}. \tag{53}$$

Обозначим выражение $V - \frac{3}{2}\theta + \frac{1}{2}$ символом x. В случае $x \leqslant 0$ неравенство (53) тривиально. Поэтому можно считать, что $x > 0$. Таким образом, в силу неравенства (52) нам осталось доказать, что

$$U^{\frac{3}{2}} \geqslant \tfrac{2}{3} V^{\frac{3}{2}} - \theta \sqrt{V} + \theta - \tfrac{2}{3} \overset{?}{\geqslant} \tfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}};$$
$$\left(V - \tfrac{3}{2}\theta\right) \sqrt{V} + \tfrac{3}{2}\theta - 1 \overset{?}{\geqslant} x^{\frac{3}{2}};$$
$$\left(x - \tfrac{1}{2}\right) \sqrt{V} + V - x - \tfrac{1}{2} \overset{?}{\geqslant} x^{\frac{2}{3}}.$$

Воспользуемся тем, что $V = x + \frac{3}{2}\theta - \frac{1}{2} \geqslant x + 1$.

$$\left(x - \tfrac{1}{2}\right) \sqrt{V} + V \geqslant \left(x - \tfrac{1}{2}\right) \sqrt{x+1} + x + 1 \overset{?}{\geqslant} x^{\frac{3}{2}} + x + \tfrac{1}{2};$$
$$(2x - 1)\sqrt{x+1} \overset{?}{\geqslant} 2x\sqrt{x} - 1;$$
$$2x \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) \geqslant \sqrt{x+1} - 1.$$

Домножим обе части неравенства на выражение $\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\,\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)$.

$$2x(\sqrt{x+1}+1) \overset{?}{\geqslant} x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\,);$$
$$\sqrt{x+1}+2 \geqslant \sqrt{x}.$$

$\square$

Теперь мы покажем, как при помощи полученной леммы оценить снизу величину $\mathcal{A}[\varphi](0)$. Напомним наше предположение о том, что $\sup\widehat{\varphi} \leqslant 1$.

Предложение 3.6. *Пусть дана последовательность чисел* $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$, *такая что*

$$\gamma_1 \geqslant 1 \qquad \text{и} \qquad \forall k\in\mathbb{N}\colon\quad \gamma_{k+1}-\gamma_k \geqslant \sqrt{\widehat{\varphi}(\gamma_k)}+\sqrt{\widehat{\varphi}(\gamma_{k+1})}.$$

Тогда имеется оценка

$$\mathcal{A}[\varphi](0) \geqslant c_1\left(\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\varphi}^{\frac{3}{2}}(\gamma_k)\right)^{\frac{2}{3}} - c_2, \tag{54}$$
$$\text{где}\qquad c_1 = \sqrt[3]{2/3}, \qquad c_2 = \frac{1-2^{-1/3}}{3}.$$

Замечание 3.7. В частности, если $\mathcal{A}[\varphi](0) < +\infty$, то $\widehat{\varphi}(x)\to 0$ при $x\to+\infty$.

Доказательство. Воспользуемся следствием 3.2 и применим лемму 3.4 с функциями $u(k)=\frac{1}{3}\widehat{\varphi}(\gamma_k)$, $v(k)=\mathcal{A}[\varphi_n](\gamma_k-\alpha_k)$ и параметрами $\omega=\frac{1}{3}$, $\mu=4$. В силу неравенств (38) и (39) верны соотношения (43), а значит, справедлива оценка (44). Таким образом, мы имеем следующую цепочку неравенств:

$$\mathcal{A}[\varphi](0) \overset{(37)}{\geqslant} \sup_{n\to\infty}\mathcal{A}[\varphi_n](\gamma_1-\alpha_1)-\tfrac{1}{3} \overset{(44)}{\geqslant} 2^{-\frac{1}{3}}\left(\left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\mu^{\frac{2}{3}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}u^{\frac{3}{2}}(k)\right)^{\frac{2}{3}}+\omega\right)-\frac{1}{3} =$$
$$\frac{3^{\frac{2}{3}}}{2}\cdot 4^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\varphi}^{\frac{3}{2}}(\gamma_k)\right)^{\frac{2}{3}}+\frac{2^{-\frac{1}{3}}}{3}-\frac{1}{3} = \sqrt[3]{2/3}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\varphi}^{\frac{3}{2}}(\gamma_k)\right)^{\frac{2}{3}}-\frac{1-2^{-1/3}}{3}.$$

$\square$

4 Функция $B^\chi[s,\sigma,a,b]$

Для произвольного подмножества прямой U определим область

$$\mathfrak{S}U = \{(x,y)\in\mathfrak{S}\colon \max(x,y)\in U\}\,. \tag{55}$$

Пример области $\mathfrak{S}U$ для множества $U=[a,b]$ приведён на рисунке 13.

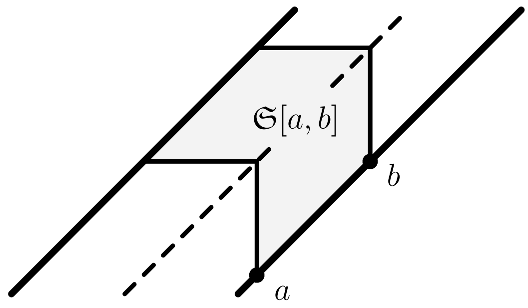

Рис. 13. Область $\mathfrak{S}[a,b]$.

Наша следующая задача состоит в том, чтобы построить функцию $B\big[\sum_{k=1}^n \chi_{[a_k,b_k]},0\big]$ для получения точной верхней оценки. Данную функцию мы будем склеивать из функций с областями определения вида $\mathfrak{S}U$, где U — некоторый промежуток прямой. Каждая из функций будет отвечать одному из слагаемых в сумме $\sum_{k=1}^n \chi_{[a_k,b_k]}$. Особенность функции $B^\chi[s,\sigma,a,b]$, которую мы хотим построить, заключается в том, что $B^\chi[s,\sigma,a,b](x,x-1)=\sigma\chi_{[a,b]}(x)$ и для достаточно больших значениях аргументов x и y справедливо равенство $B^\chi[s,\sigma,a,b]=sB^e(x,y)$. Для достаточно маленьких значений x и y мы также будем требовать, чтобы выполнялось соотношение $B^\chi[s,\sigma,a,b](x,y)=cB^e(x,y)$ для некоторого числа $c>0$.

4.1. Определение функции $B^\chi[s,\sigma,a,b]$

Определение 4.1. Опишем функцию $B^\chi=B^\chi[s,\sigma,a,b]$ в соответствии с подразделом (iv). Сначала потребуем, чтобы $s>0$, $\sigma\in(0,e^{2b}]$ и $b>a\geqslant 1$. Введём параметры $\alpha,\beta\in(0,1)$, значения которых определим позже. На границе функция B^χ принимает значения $B^\chi(x,x-1)=\sigma\chi_{[a,b]}(x)$, $B^\chi(x,x+1)=0$. Области линейности и билинейности имеют следующий вид (см. рис. 14):

Область $\mathfrak{S}_{\langle xy\rangle}$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_{\langle xy\rangle} &= \mathfrak{S}^0_{\langle xy\rangle}\cup\mathfrak{S}^1_{\langle xy\rangle},\\
\mathfrak{S}^0_{\langle xy\rangle} &= \{(x,y)\in\mathfrak{S}\colon a-\alpha<x<a \quad\text{и}\quad a-1<y<a-\alpha\}\,,\\
\mathfrak{S}^1_{\langle xy\rangle} &= \{(x,y)\in\mathfrak{S}\colon b<x<b+\beta \quad\text{и}\quad b+\beta-1<y<b+\beta\}\,.
\end{aligned}$$

Область $\mathfrak{S}_{\langle x\rangle}$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_{\langle x\rangle} &= \mathfrak{S}^0_{\langle x\rangle} \cup \mathfrak{S}^1_{\langle x\rangle} \cup \mathfrak{S}^2_{\langle x\rangle} \cup \mathfrak{S}^3_{\langle x\rangle} \cup \mathfrak{S}^4_{\langle x\rangle} \cup \mathfrak{S}^5_{\langle x\rangle},\\
\mathfrak{S}^0_{\langle x\rangle} &= \left\{(x,y)\in\mathfrak{S}\colon x\leqslant y\leqslant a-\alpha\right\},\\
\mathfrak{S}^1_{\langle x\rangle} &= \left\{(x,y)\in\mathfrak{S}\colon \max(x,a)\leqslant y\leqslant b\right\},\\
\mathfrak{S}^2_{\langle x\rangle} &= \left\{(x,y)\in\mathfrak{S}\colon \max(x,b+\beta)\leqslant y\right\},\\
\mathfrak{S}^3_{\langle x\rangle} &= \left\{(x,y)\in\mathfrak{S}\colon x\leqslant a \quad \text{и} \quad a-\alpha\leqslant y\leqslant a\right\},\\
\mathfrak{S}^4_{\langle x\rangle} &= \left\{(x,y)\in\mathfrak{S}\colon x\leqslant b \quad \text{и} \quad b\leqslant y\leqslant b+\beta\right\},\\
\mathfrak{S}^5_{\langle x\rangle} &= \left\{(x,y)\in\mathfrak{S}\colon b\leqslant x \quad \text{и} \quad y\leqslant b+\beta\right\}.
\end{aligned}$$

Область $\mathfrak{S}_{\langle y\rangle}$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_{\langle y\rangle} &= \mathfrak{S}^0_{\langle y\rangle} \cup \mathfrak{S}^1_{\langle y\rangle} \cup \mathfrak{S}^2_{\langle y\rangle} \cup \mathfrak{S}^3_{\langle y\rangle},\\
\mathfrak{S}^0_{\langle y\rangle} &= \left\{(x,y)\in\mathfrak{S}\colon y\leqslant x\leqslant a-\alpha\right\},\\
\mathfrak{S}^1_{\langle y\rangle} &= \left\{(x,y)\in\mathfrak{S}\colon \max(y,a)\leqslant x\leqslant b\right\},\\
\mathfrak{S}^2_{\langle y\rangle} &= \left\{(x,y)\in\mathfrak{S}\colon \max(y,b+\beta)\leqslant x\right\},\\
\mathfrak{S}^3_{\langle y\rangle} &= \left\{(x,y)\in\mathfrak{S}\colon a-\alpha\leqslant x \quad \text{и} \quad y\leqslant a\right\}.
\end{aligned}$$

Область $\widehat{\mathfrak{S}}$:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathfrak{S}} &= \widehat{\mathfrak{S}}^0 \cup \widehat{\mathfrak{S}}^1 \cap \widehat{\mathfrak{S}}^2,\\
\widehat{\mathfrak{S}}^0 &= \left\{(x,x)\in\mathfrak{S}\colon x< a-\alpha\right\},\\
\widehat{\mathfrak{S}}^1 &= \left\{(x,x)\in\mathfrak{S}\colon a\leqslant x< b\right\},\\
\widehat{\mathfrak{S}}^2 &= \left\{(x,x)\in\mathfrak{S}\colon a+\alpha\leqslant x\right\}.
\end{aligned}$$

Функция B^χ задаётся на множестве $\widehat{\mathfrak{S}}$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
B^\chi(x,x) &= e^{2x}s & &\text{если } b+\beta\leqslant x;\\
e^{-2x}\left(B^\chi(x,x)-\tfrac{1}{2}\sigma\right) &= e^{-2b}\left(B^\chi(b,b)-\tfrac{1}{2}\sigma\right) & &\text{если } a\leqslant x<b;\\
B^\chi(x,x) &= e^{-2(x-a+\alpha)}B^\chi(a-\alpha,a-\alpha) & &\text{если } x<a-\alpha.
\end{aligned} \tag{56}$$

В дальнейшем мы также будем обозначать выражение $B^\chi(x,x)$ через $A^\chi(x)$. Заметим, что на данный момент при фиксированных параметрах s, σ, a и b величина $B^\chi(0,0)$ зависит от переменных α и β. Обозначим число $B^\chi(0,0)$ символом $\theta(\alpha,\beta)$. Будем говорить, что функция $B^\chi[s,\sigma,a,b]$ корректно определена, если существует единственная пара чисел $\alpha,\beta\in(0,1)$, такая что

$$\theta(\alpha,\beta) = \sup_{x,y\in(0,1)} \theta(x,y). \tag{57}$$

В этом случае придадим переменным α и β такие значения, чтобы выполнялось равенство (57).

При дальнейшем изучении функции $B^\chi[s,\sigma,a,b]$ мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\delta = b-a, \qquad\qquad h(x) = \sigma\chi_{[a,b]}(x).$$

Заметим, что $\widehat{h}(b) \leqslant 1$, так как мы предполагали, что $\sigma \leqslant e^{2b}$.

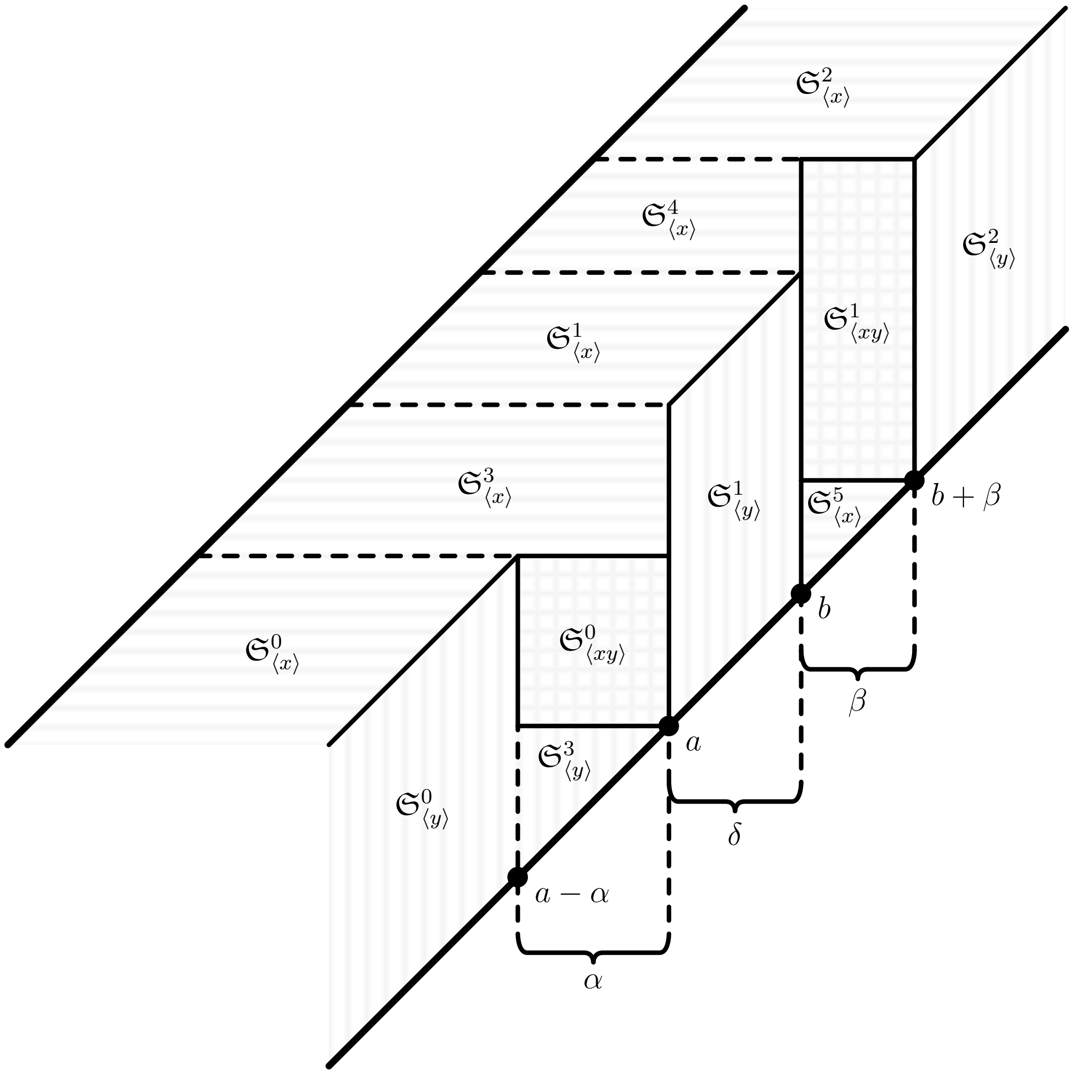

Рис. 14. Профиль функции $B^{\chi}[s,\sigma,a,b]$.

В дальнейшем мы покажем, что введённая функция бивогнутая (см. теорему 4.5) и минимальна относительна подпорки $sB^e + \sigma\chi_U$, где $U = \{(x, x-1) \in \mathfrak{S}\colon a \leqslant x \leqslant b\}$ (см лемму 5.1). Минимальность функции $B^{\chi}[s,\sigma,a,b]$ относительно введённой подпорки означает, что

$$\forall B \in \mathcal{BC}(\mathfrak{S})\colon \quad B \geqslant sB^e + \sigma\chi_U \quad \Rightarrow \quad B \geqslant B^{\chi}[s,\sigma,a,b].$$

4.2. Поиск параметров α и β

Наша следующая цель состоит в том, чтобы понять при каких значениях параметров s, σ, a и b функция $B^{\chi}[s,\sigma,a,b]$ корректно определена.

Лемма 4.2. *Пусть нам даны параметры $s > 0$, $b > a \geqslant 1$ и $\sigma \in (0, e^{2b}]$. Определим числа μ_a, μ_b и функцию $c_\mu\colon (0,1) \to [0,+\infty)$ следующими формулами:*

$$\mu_a = \sqrt{\frac{\widehat{h}(a)}{\widehat{A}^{\chi}(a)}}, \qquad \mu_b = \sqrt{\frac{\widehat{h}(b)}{s}}, \qquad c_\mu(t) = \frac{t+\sqrt{2-t^2}}{2(1-t^2)}.$$

Будем при этом считать, что величина $\widehat{A}^\chi(a)$ задана посредством формул (62), (63) ниже. То есть она выражается через параметры s, σ, a, b и β, но не зависит от выбора числа α. Предположим, что функция $B^\chi[s,\sigma,a,b]$ корректно определена и $\mu_a < 1$. Тогда

$$\alpha = c_\mu(\mu_a)\mu_a, \qquad \beta = W(2^{-\frac{1}{2}}\mu_b). \tag{58}$$

Напротив, если $\mu_a < 1$ и числа α и β, заданные формулами (58), принадлежат интервалу $(0,1)$, то функция $B^\chi[s,\sigma,a,b]$ корректно определена.

Заметим, что при задании чисел α и β при помощи формул (58) сначала необходимо вычислить величину β, затем проверить, что $\beta \in (0,1)$ и в конце найти числа $\widehat{A}^\chi(a)$, μ_a и α. При этом нужно убедиться, что $\mu_a \in (0,1)$, иначе в точке μ_a не будет определена функция c_μ.

В дальнейшем нам также понадобятся тождества, сформулированные в лемме 4.3.

Лемма 4.3. *Параметры α и β, заданные формулами (58), удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$2(\widehat{h}(a) - \widehat{A}^\chi(a))\alpha^2 + 2\widehat{h}(a)\alpha + \widehat{h}(a) = 0; \tag{59}$$

$$2\beta^2 e^{2\beta} s = \widehat{h}(b). \tag{60}$$

Кроме того, если функция $B^\chi[s,\sigma,a,b]$ корректно определена, то верно равенство

$$A^\chi(0) = \sup_{\alpha,\beta\in(0,1)} \Big(E(\alpha)E(\beta)s + \tfrac{\alpha}{1+\alpha}e^{2\alpha}\widehat{h}(a) + \tfrac{\beta}{1+\beta}E(\alpha)\widehat{h}(b) + \tfrac{1}{2}E(\alpha)(\widehat{h}(a) - \widehat{h}(b))\Big). \tag{61}$$

Доказательство леммы 4.2 и 4.3. В качестве первого шага найдём число $\widehat{A}^\chi(0)$.

$$\begin{aligned} B^\chi(b+\beta, b+\beta) &\overset{(56)}{=} e^{2(b+\beta)}s;\\ B^\chi(b, b+\beta) &= (1-\beta)B^\chi(b+\beta,b+\beta) = (1-\beta)e^{2(b+\beta)}s;\\ B^\chi(b,b) &= \frac{\beta}{1+\beta}\sigma + \frac{1}{1+\beta}B^\chi(b,b+\beta) = \frac{\beta}{1+\beta}\sigma + \frac{1-\beta}{1+\beta}e^{2(b+\beta)}s. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем

$$\widehat{A}^\chi(b) = e^{-2b}B^\chi(b,b) = \frac{\beta}{1+\beta}e^{-2b}\sigma + \frac{1-\beta}{1+\beta}e^{2\beta}s = \frac{\beta}{1+\beta}\widehat{h}(b) + E(\beta)s. \tag{62}$$

Заметим, что из соотношений (56) следуют тождества

$$\begin{aligned} \forall x \in [a,b]\colon \quad &\widehat{A}^\chi(x) - \tfrac{1}{2}\widehat{h}(x) = \widehat{A}^\chi(b) - \tfrac{1}{2}\widehat{h}(b);\\ &\widehat{A}^\chi(a) = \widehat{A}^\chi(b) + \tfrac{1}{2}\widehat{h}(a) - \tfrac{1}{2}\widehat{h}(b). \end{aligned} \tag{63}$$

Наконец, перейдём к вычислению величины $\widehat{A}^\chi(a-\alpha)$.

$$\begin{aligned} B^\chi(a, a-\alpha) &= (1-\alpha)B^\chi(a,a) + \alpha\sigma;\\ B^\chi(a-\alpha, a-\alpha) &= \frac{1}{1+\alpha}B^\chi(a,a-\alpha) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}B^\chi(a,a) + \frac{\alpha}{1+\alpha}\sigma. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \widehat{A}^\chi(a-\alpha) = e^{2\alpha-2a}B^\chi(a-\alpha,a-\alpha) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}e^{2\alpha}e^{-2a}B^\chi(a,a) + \\ \frac{\alpha}{1+\alpha}e^{2\alpha}e^{-2a}\sigma = E(\alpha)\widehat{A}^\chi(a) + \frac{\alpha}{1+\alpha}e^{2\alpha}\widehat{h}(a). \end{aligned} \tag{64}$$

Теперь соберём найденные равенства вместе, чтобы получить тождество (61):

$$\begin{aligned} A^{\chi}(0) = \widehat{A}^{\chi}(0) = \widehat{A}^{\chi}(a-\alpha) &\overset{(64)}{=} E(\alpha)\widehat{A}^{\chi}(a) + \frac{\alpha}{1+\alpha}e^{2\alpha}\widehat{h}(a) \overset{(63)}{=} \\ E(\alpha)\widehat{A}^{\chi}(b) &+ \tfrac{1}{2}E(\alpha)(\widehat{h}(a)-\widehat{h}(b)) + \frac{\alpha}{1+\alpha}e^{2\alpha}\widehat{h}(a) \overset{(62)}{=} \\ E(\alpha)E(\beta)s + \frac{\beta}{1+\beta}E(\alpha)\widehat{h}(b) &+ \frac{\alpha}{1+\alpha}e^{2\alpha}\widehat{h}(a) + \tfrac{1}{2}E(\alpha)(\widehat{h}(a)-\widehat{h}(b)). \end{aligned} \tag{65}$$

Теперь мы перейдём к непосредственному поиску чисел α и β. Заметим, что можно сначала максимизировать выражение $\widehat{A}^{\chi}(b)$ по переменной β, а затем число $\widehat{A}^{\chi}(a-\alpha)$ по переменной α.

$$0 = \frac{\partial}{\partial\beta}\widehat{A}^{\chi}(b) \overset{(62)}{=} \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\beta}{1+\beta}\widehat{h}(b) + E(\beta)s\right) \overset{(6)}{=} \frac{\widehat{h}(b)}{(1+\beta)^2} - \frac{2\beta^2e^{2\beta}}{(1+\beta)^2}s.$$

Из полученного равенства мы заключаем, что верно тождество (60). Следовательно,

$$2\beta^2e^{2\beta}s = \widehat{h}(b);$$

$$\beta e^{\beta} = \left(\frac{\widehat{h}(b)}{2s}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\mu_b}{\sqrt{2}};$$

$$\beta = W(2^{-\frac{1}{2}}\mu_b).$$

Мы получили второе соотношение (58). Теперь найдём величину α:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial}{\partial\alpha}\widehat{A}^{\chi}(a-\alpha) &\overset{(64)}{=} \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(E(\alpha)\widehat{A}^{\chi}(a) + \frac{\alpha}{1+\alpha}e^{2\alpha}\widehat{h}(a)\right) \overset{(6)}{=} \\ &\frac{-2\alpha^2}{(1+\alpha)^2}e^{2\alpha}\widehat{A}^{\chi}(a) + \frac{1}{(1+\alpha)^2}e^{2\alpha}\widehat{h}(a) + \frac{2\alpha}{1+\alpha}e^{2\alpha}\widehat{h}(a) = \\ &\frac{e^{2\alpha}}{(1+\alpha)^2}\left(2(\widehat{h}(a)-\widehat{A}^{\chi}(a))\alpha^2 + 2\widehat{h}(a)\alpha + \widehat{h}(a)\right). \end{aligned}$$

Таким образом, мы заключаем верность равенства (59). Поделив обе части тождества (59) на величину $\widehat{A}^{\chi}(a)$, мы получим

$$2(\mu_a^2-1)\alpha^2 + 2\mu_a^2\alpha + \mu_a^2 = 0;$$

Напомним, что $\mu_a < 1$. Поэтому

$$\alpha_{\pm} = \frac{\mp\sqrt{4\mu_a^4 - 8\mu_a^2(\mu_a^2-1)} - 2\mu_a^2}{4(\mu_a^2-1)} = \frac{\mu_a \pm \sqrt{2-\mu_a^2}}{2(1-\mu_a^2)}\mu_a.$$

Так как $\alpha_- < 0$, максимум величины $\widehat{A}^{\chi}(a)$ на интервале $\alpha \in (0,1)$ достигается при

$$\alpha = \frac{\mu_a + \sqrt{2-\mu_a^2}}{2(1-\mu_a^2)}\mu_a = c_\mu(\mu_a)\mu_a,$$

если полученное выражение не превосходит значения 1. $\square$

После того, как мы нашли конкретные выражения для величин α и β, мы можем приступить к поиску условий на параметры s, σ, a и b, при которых функция $B^{\chi}(s,\sigma,a,b)$ корректно определена.

Введём глобальный параметр $\Delta > 0$ и предположим, что

$$\delta = b - a \leqslant \Delta$$

Определим также функцию $\nu_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданную следующей формулой:

$$\nu_1(t) = \tfrac{5}{2}e^{2t}. \tag{66}$$

Лемма 4.4. *Предположим, что нам даны параметры* $s \geqslant \nu_1(\Delta)$, $b > a \geqslant 1$ *и* $\sigma \in [0, e^{2b}]$, *такие что* $b - a \leqslant \Delta$. *Тогда функция* $B^{\chi}[s, \sigma, a, b]$ *корректно определена и величины* α *и* β *удовлетворяют неравенствам*

$$\alpha, \beta < \sqrt{\widehat{h}(b)} \leqslant 1.$$

Доказательство. Наша задача заключается в том, чтобы выбрать как можно меньший параметр s, при котором найденные в лемме 4.2 числа α и β будут принадлежать интервалу $(0, 1)$. Для этого будем их оценивать сверху. Как и раньше будем пользоваться обозначениями

$$\mu_a = \sqrt{\frac{\widehat{h}(a)}{\widehat{A}^{\chi}(a)}}, \qquad \mu_b = \sqrt{\frac{\widehat{h}(b)}{s}}.$$

Сперва отметим, что $\mu_b \leqslant 1$, так как $\widehat{h}(b) \leqslant 1$ и $s \geqslant \nu_1(\Delta) \geqslant 1$. Поэтому

$$\beta \overset{(58)}{=} W(2^{-\frac{1}{2}}\mu_b) \leqslant \frac{\mu_b}{\sqrt{2}} < 1, \tag{67}$$

а значит, величина $\widehat{A}^{\chi}(a)$, заданная посредством формул (62) и (63) корректно определена. Заметим, что

$$\widehat{A}^{\chi}(a) \overset{(63)}{\geqslant} \widehat{A}^{\chi}(b) \overset{(62)}{=} \frac{\beta}{1+\beta}\widehat{h}(b) + E(\beta)s \overset{(7),(60)}{\geqslant} \left(\frac{2\beta^3}{1+\beta}e^{2\beta} + 1 - \beta^3\right) s > s.$$

Далее оценим сверху число μ_a через μ_b:

$$\mu_a = \sqrt{\frac{\widehat{h}(a)}{\widehat{A}^{\chi}(a)}} < \sqrt{\frac{e^{-2a}\sigma}{s}} = e^{b-a}\sqrt{\frac{e^{-2b}\sigma}{s}} = e^{\delta}\sqrt{\frac{\widehat{h}(b)}{s}} \leqslant e^{\Delta}\mu_b.$$

Теперь покажем, что функция $c_\mu(t) = \frac{t+\sqrt{2-t^2}}{2(1-t^2)}$ возрастает по переменной t на интервале $(0, 1)$. Действительно, достаточно проверить следующие соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(t + \sqrt{2-t^2}\right) = 1 - \frac{t}{\sqrt{2-t^2}} \overset{?}{>} 0;$$

$$\sqrt{2-t^2} \overset{?}{>} t; \qquad 2 > 2t^2.$$

Далее введём дополнительную величину $\nu_a \in (0, 1)$ и потребуем, чтобы выполнялось неравенство $\mu_a \leqslant \nu_a$. Тогда

$$\alpha \overset{(58)}{=} c_\mu(\mu_a)\mu_a < e^{\Delta}c_\mu(\nu_a)\mu_b. \tag{68}$$

Функция $B^{\chi}[s, \sigma, a, b]$ будет корректно определена, если $\alpha, \beta, \mu_a \in (0, 1)$. Поэтому, ввиду оценки (67), достаточно проверить, что выполняются следующие неравенства:

$$\mu_a < e^{\Delta}\mu_b \overset{?}{\leqslant} \nu_a; \qquad \alpha < e^{\Delta}c_\mu(\nu_a)\mu_b \overset{?}{\leqslant} 1.$$

Так как $\mu_b^2 = \frac{\widehat{h}(b)}{s}$, данные соотношения равносильны следующим:

$$e^{2\Delta}\widehat{h}(b) \leqslant \nu_a^2 s; \qquad e^{2\Delta}c_\mu^2(\nu_a)\widehat{h}(b) \leqslant s.$$

Значит, в силу оценки $\widehat{h}(b) \leqslant 1$, нам достаточно потребовать, чтобы

$$s \geqslant \max\left(e^{2\Delta}\nu_a^{-2}, e^{2\Delta}c_\mu^2(\nu_a)\right).$$

Выберем параметр ν_a так, чтобы выполнялось равенство $e^{2\Delta}\nu_a^{-2} = e^{2\Delta}c_\mu^2(\nu_a)$.

$$\nu_a^{-1} = c_\mu(\nu_a); \qquad \nu_a^{-1} = \frac{\nu_a + \sqrt{2-\nu_a^2}}{2(1-\nu_a^2)};$$
$$2 - 2\nu_a^2 = \nu_a^2 + \nu_a\sqrt{2-\nu_a^2}; \qquad (2-3\nu_a^2)^2 = 2\nu_a^2 - \nu_a^4;$$
$$10\nu_a^4 - 14\nu_a^2 + 4 = 0; \qquad 5\nu_a^4 - 7\nu_a^2 + 2 = (5\nu_a^2 - 2)(\nu_a^2 - 1) = 0.$$

Таким образом, следует взять $\nu_a = \sqrt{2/5}$. Тогда $c_\mu(\nu_a) = \nu_a^{-1} = \sqrt{5/2}$. Значит, функция $B^\chi[s,\sigma,a,b]$ корректно определена, если выполняется неравенство

$$s \geqslant \max\left(\tfrac{5}{2}e^{2\Delta}, \tfrac{5}{2}e^{2\Delta}, \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{5}{2}e^{2\Delta} = \nu_1(\Delta).$$

Нам осталось проверить, что $\alpha, \beta < \sqrt{\widehat{h}(b)}$. Сначала оценим число μ_b.

$$\mu_b = \sqrt{\frac{\widehat{h}(b)}{s}} \leqslant \sqrt{\frac{2}{5}}\,e^{-\Delta}\sqrt{\widehat{h}(b)}.$$

В итоге, мы имеем

$$\beta \overset{(67)}{\leqslant} \tfrac{1}{\sqrt{2}}\mu_b \leqslant \frac{e^{-\Delta}}{\sqrt{5}}\sqrt{\widehat{h}(b)} < \sqrt{h(b)};$$
$$\alpha \overset{(68)}{<} e^{\Delta}c_\mu(\nu_a)\mu_b \leqslant e^{\Delta}\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}\,e^{-\Delta}\sqrt{\widehat{h}(b)} = \sqrt{\widehat{h}(b)}.$$

□

4.3. Принадлежность функции $B^\chi[s,\sigma,a,b]$ множеству $\mathcal{BC}(\mathfrak{S})$

Этот подраздел мы посвятим доказательству следующей теоремы.

Теорема 4.5. *Пусть нам даны параметры s, σ, a, b, такие что $s \geqslant \nu_1(\Delta)$, $\sigma \in [0, e^{2b}]$ и $b > a \geqslant 1$. Тогда функция $B[s,\sigma,a,b]$ корректно определена и бивогнута.*

При доказательстве этой теоремы мы будем обозначать функцию $B^\chi[s,\sigma,a,b]$ символом B. Чтобы убедиться, что функция B является бивогнутой, мы должны проверить её бивогнутость в каждой из областей $\mathfrak{S}^i_{\langle x\rangle,\langle y\rangle,\langle xy\rangle}$ и соответствующие условия на границах этих множеств.

План доказательства бивогнутости на границах будет следующим. В целом, мы должны сравнить производные на границах областей. Но для этого мы будем изучать только изменение производной вдоль границ, то есть считать смешанные производные. Поэтому будет достаточно проверить неравенство только в некоторых точках, а не вдоль всей границы. Более того, неравенство в этих точках будет следовать автоматически из конструкции.

Вычислять смешанные производные мы будем так. Сначала выпишем явные общие формулы для функции B в некоторых областях. Затем найдём значения функции в ключевых точках. После этого мы сможем выписать явные выражения смешанных производных.

Для начала выпишем явные формулы в областях $\mathfrak{S}^0_{\langle x\rangle,\langle y\rangle}$ и $\mathfrak{S}^2_{\langle x\rangle,\langle y\rangle}$.

$$B^2_{\langle x\rangle,\langle y\rangle}(x,y) \overset{(56)}{=} e^{-2(b+\beta)} B(b+\beta, b+\beta) B^e_{\langle x\rangle,\langle y\rangle}(x,y); \tag{69}$$

$$B^0_{\langle x\rangle,\langle y\rangle}(x,y) \overset{(56)}{=} e^{-2(a-\alpha)} B(a-\alpha, a-\alpha) B^e_{\langle x\rangle,\langle y\rangle}(x,y). \tag{70}$$

Напомним, что функции $B^e_{\langle x\rangle}$ и $B^e_{\langle y\rangle}$ заданы посредством формул (14). Для получения соответствующего равенства в областях $\mathfrak{S}^1_{\langle x\rangle,\langle y\rangle}$ заметим, что в силу равенства (56) верны следующие соотношения:

$$\begin{gathered} B^1_{\langle x\rangle,\langle y\rangle}(x,y) - \tfrac{1}{2}\sigma(x-y+1) = e^{-2b}\left(B(b,b) - \tfrac{1}{2}\sigma\right) B^e_{\langle x\rangle,\langle y\rangle}(x,y); \\ \text{и в частности,} \qquad e^{-2a}(B(a,a) - \tfrac{1}{2}\sigma) = e^{-2b}(B(b,b) - \tfrac{1}{2}\sigma). \end{gathered}$$

Поэтому мы имеем

$$B^1_{\langle x\rangle,\langle y\rangle}(x,y) = \tfrac{1}{2}\sigma(x-y+1) + e^{-2b}(B(b,b) - \tfrac{1}{2}\sigma) B^e_{\langle x\rangle,\langle y\rangle}(x,y); \tag{71}$$

$$B^1_{\langle x\rangle,\langle y\rangle}(x,y) = \tfrac{1}{2}\sigma(x-y+1) + e^{-2a}(B(a,a) - \tfrac{1}{2}\sigma) B^e_{\langle x\rangle,\langle y\rangle}(x,y). \tag{72}$$

Напомним, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} B^e_{\langle y\rangle}(x,y) \overset{(18)}{=} 2e^{2x}; \qquad \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} B^e_{\langle x\rangle}(x,y) \overset{(18)}{=} 2e^{2y}.$$

Для областей $\mathfrak{S}^3_{\langle x\rangle}$, $\mathfrak{S}^3_{\langle y\rangle}$, $\mathfrak{S}^4_{\langle x\rangle}$ и $\mathfrak{S}^5_{\langle x\rangle}$ мы выпишем общую формулу. Для этого введём функцию H.

4.3.1. Определение и свойства функции H

Определение 4.6. Введём параметры $0 \leqslant d_1 < d_2$ и $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$. Область определения функции $H = H[d_1, d_2, z_1, z_2]$ имеет следующий вид (см. рис. 15).

$$\Omega^H[d_1, d_2] = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\; 0 \leqslant x \leqslant y,\; d_1 \leqslant y \leqslant d_2\right\}.$$

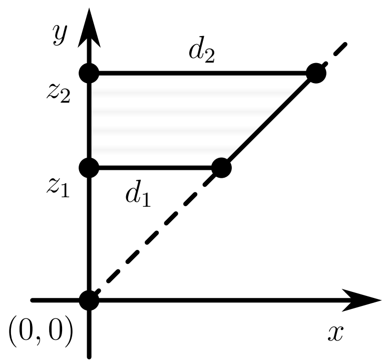

Рис. 15. Профиль функции H и её область определения $\Omega^H[d_1, d_2]$.

Функция H будет определяться посредством следующих условий и соотношений. Будем требовать, чтобы функция H была линейна по переменной x, а её сужение $H|_{x=0}$ было линейно по переменной y. Кроме того, функция H должна удовлетворять равенствам

$$H(0, d_1) = z_1, \qquad H(0, d_2) = z_2, \qquad H|_{x=y} = 0.$$

Утверждение 4.7. *Справедливы следующие соотношения:*

$$(d_2-d_1)H[d_1,d_2,z_1,z_2](x,y) = d_2z_1-d_1z_2+(z_1-z_2)x+(z_2-z_1)y+(d_1z_2-d_2z_1)\frac{x}{y};$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}H[d_1,d_2,z_1,z_2] = \frac{d_2z_1-d_1z_2}{(d_2-d_1)y^2}. \tag{73}$$

При это функция $H[d_1,d_2,z_1,z_2]$ бивогнута тогда и только тогда, когда

$$d_1z_2 \leqslant d_2z_1.$$

Доказательство. Несложно видеть, что

$$H(x,y) = \frac{y-x}{y}\cdot\frac{1}{d_2-d_1}\left((d_2-y)z_1+(y-d_1)z_2\right);$$
$$(d_2-d_1)H(x,y) = \left(1-\frac{x}{y}\right)(d_2z_1-d_1z_2+(z_2-z_1)y) =$$
$$d_2z_1-d_1z_2+(z_1-z_2)x+(z_2-z_1)y+(d_1z_2-d_2z_1)\frac{x}{y}.$$

Используя полученную формулу, несложно вычислить смешанную производную:

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(d_2-d_1)H(x,y) = (d_1z_2-d_2z_1)\,\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\frac{x}{y} = \frac{d_2z_1-d_1z_2}{y^2}.$$

Нам осталось понять, при каких условиях функция H бивогнута. Заметим, что по условию H линейна по переменной x. Поэтому осталось узнать, когда эта функция вогнута по переменной y.

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(d_2-d_1)H(x,y) = 2\frac{d_1z_2-d_2z_1}{y^3}x \overset{?}{\leqslant} 0;$$
$$d_1z_2-d_2z_1 \leqslant 0.$$

□

4.3.2. Значения функции B в ключевых точках

Для получения более простых формул мы будем всё выражать через параметры α и β. Напомним, что величина β удовлетворяет тождеству (60):

$$2\beta^2e^{2\beta}s = \widehat{h}(b);$$
$$2\beta^2e^{2(\beta+b)}s = h(b);$$
$$2\beta^2B(b+\beta,b+\beta) = \sigma.$$

Введём параметр

$$c_\beta = \frac{1}{B(b+\beta,b+\beta)} = \frac{2\beta^2}{\sigma}.$$

Тогда мы имеем

$$c_\beta\sigma = 2\beta^2, \qquad c_\beta B(b+\beta,b+\beta) = 1.$$

Мы также знаем, что верно тождество (59):

$$\begin{gathered}2(\widehat{h}(a)-\widehat{A^{\chi}}(a))\alpha^2+2\widehat{h}(a)\alpha+\widehat{h}(a)=0;\\ 2(h(a)-A^{\chi}(a))\alpha^2+2h(a)\alpha+h(a)=0;\\ \sigma(2\alpha^2+2\alpha+1)=2\alpha^2 B(a,a).\end{gathered}$$

Определим параметр

$$c_\alpha=\frac{2\alpha^2}{\sigma}$$

и заметим, что выполняются следующие равенства:

$$c_\alpha\sigma=2\alpha^2,\qquad c_\alpha B(a,a)=2\alpha^2+2\alpha+1.$$

Теперь мы готовы вычислить значения функции B в ключевых точках. Начнём со значений, которые после домножения на число c_β выражаются через величину β:

- $c_\beta B(b+\beta,b+\beta)=1;$
- $c_\beta B(b,b+\beta)=(1-\beta)c_\beta B(b+\beta,b+\beta)=1-\beta;$
- $c_\beta B(b,b)=\dfrac{\beta c_\beta\sigma}{1+\beta}+\dfrac{c_\beta B(b,b+\beta)}{1+\beta}=\dfrac{2\beta^3}{1+\beta}+\dfrac{1-\beta}{1+\beta}=2\beta^2-2\beta+1;$
- $c_\beta B(b,b+\beta-1)=\dfrac{c_\beta\sigma}{1+\beta}+\dfrac{\beta c_\beta B(b,b+\beta)}{1+\beta}=\dfrac{2\beta^2}{1+\beta}+\dfrac{\beta-\beta^2}{1+\beta}=\dfrac{\beta^2+\beta}{1+\beta}=\beta.$

Теперь перейдём к величинам, выражающимися через параметр α:

- $c_\alpha B(a,a)=2\alpha^2+2\alpha+1;$
- $c_\alpha B(a,a-\alpha)=(1-\alpha)c_\alpha B(a,a)+\alpha c_\alpha\sigma=(1-\alpha)(2\alpha^2+2\alpha+1)+2\alpha^3=1+\alpha;$
- $c_\alpha B(a-\alpha,a-\alpha)=\dfrac{c_\alpha B(a,a-\alpha)}{1+\alpha}=1;$
- $c_\alpha B(a-\alpha,a-1)=\alpha c_\alpha B(a-\alpha,a-\alpha)=\alpha.$

Теперь мы готовы перейти к вычислению смешанных производных и проверке бивогнутости функции B внутри областей.

4.3.3. Области $\mathfrak{S}^5_{\langle x\rangle}$, $\mathfrak{S}^3_{\langle y\rangle}$, $\mathfrak{S}^4_{\langle x\rangle}$, $\mathfrak{S}^3_{\langle x\rangle}$

Область $\mathfrak{S}^5_{\langle x\rangle}$. Несложно видеть, что

$$\begin{gathered}B^5_{\langle x\rangle}(x,y)=H[d_1,d_2,z_1,z_2](\tilde{x},\tilde{y}),\\ \text{где}\qquad d_1=0,\quad d_2=\beta,\quad z_1=\sigma,\quad z_2=B(b,b+\beta-1)\\ \text{и}\quad x=\tilde{x}+b,\quad y=\tilde{y}+b-1\quad\text{или}\quad \tilde{x}=x-b,\quad \tilde{y}=y-b+1.\end{gathered}$$

Заметим, что в силу утверждения 4.7 функция $B^5_{\langle x\rangle}$ бивогнута, так как

$$d_1z_2=0\leqslant\beta\sigma=d_2z_1.$$

Теперь найдём смешанную производную, обратившись к формуле (73):

$$c_\beta\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}B^5_{\langle x\rangle}(x,y)=c_\beta\frac{d_2z_1-d_1z_2}{(d_2-d_1)\tilde{y}^2}=\frac{\beta c_\beta\sigma}{\beta(y-b+1)^2}=\frac{2\beta^2}{(y-b+1)^2}=2\left(\frac{\beta}{y-b+1}\right)^2.$$

Область $\mathfrak{S}^3_{\langle y\rangle}$. Справедливо следующее тождество:

$$
\begin{gathered}
B^3_{\langle y\rangle}(x,y) = H[d_1,d_2,z_1,z_2](\tilde{x},\tilde{y}),\\
\text{где}\qquad d_1 = 0,\quad d_2 = \alpha,\quad z_1 = \sigma,\quad z_2 = B(a-\alpha, a-1)\\
\text{и}\quad x = a-\tilde{y},\quad y = a-1-\tilde{x}\quad \text{или}\quad \tilde{x} = a-1-y,\quad \tilde{y} = a-x.
\end{gathered}
$$

Как и в предыдущем случае функция $B^2_{\langle y\rangle}$ бивогнута, так как

$$
d_1 z_2 = 0 \leqslant \alpha\sigma = d_2 z_1.
$$

Воспользовавшись формулой (73), найдём смешанную производную:

$$
c_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} B^2_{\langle y\rangle}(x,y) = c_\alpha \frac{d_2 z_1 - d_1 z_2}{(d_2-d_1)\tilde{y}^2} = \frac{\alpha c_\alpha \sigma}{\alpha(a-x)^2} = \frac{2\alpha^2}{(a-x)^2} = 2\left(\frac{\alpha}{a-x}\right)^2.
$$

Область $\mathfrak{S}^4_{\langle x\rangle}$. Из рисунка 14 видно, что

$$
\begin{gathered}
B^4_{\langle x\rangle}(x,y) = H[d_1,d_2,z_1,z_2](\tilde{x},\tilde{y}),\\
\text{где}\qquad d_1 = 1-\beta,\quad d_2 = 1,\quad z_1 = B(b,b+\beta),\quad z_2 = B(b,b)\\
\text{и}\quad x = b-\tilde{x},\quad y = b+1-\tilde{y}\quad \text{или}\quad \tilde{x} = b-x,\quad \tilde{y} = b+1-y.
\end{gathered}
$$

Докажем, что функция $B^4_{\langle x\rangle}$ бивогнута. Ввиду утверждения 4.7 достаточно проверить следующее неравенство:

$$
\begin{gathered}
d_1 z_2 \overset{?}{\leqslant} d_2 z_1;\\
(1-\beta) c_\beta B(b,b) \overset{?}{\leqslant} 1\cdot c_\beta B(b,b+\beta);\\
(1-\beta)(2\beta^2 - 2\beta + 1) \overset{?}{\leqslant} (1-\beta);\\
2\beta^2 - 2\beta + 1 \overset{?}{\leqslant} 1;\qquad 2\beta(\beta-1) \leqslant 0.
\end{gathered}
$$

Смешанная производная функции $B^4_{\langle x\rangle}$ вычисляется следующим образом:

$$
c_\beta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} B^4_{\langle x\rangle}(x,y) \overset{(73)}{=} c_\beta \frac{d_2 z_1 - d_1 z_2}{(d_2-d_1)\tilde{y}^2} = \frac{c_\beta B(b,b+\beta) - (1-\beta) c_\beta B(b,b)}{\beta(b+1-y)^2} =
$$
$$
\frac{1-\beta-(1-\beta)(2\beta^2-2\beta+1)}{\beta(b+1-y)^2} = \frac{(1-\beta)(-2\beta^2+2\beta)}{\beta(b+1-y)^2} = 2\frac{(1-\beta)^2}{(b+1-y)^2} = 2\left(\frac{1-\beta}{b+1-y}\right)^2.
$$

Область $\mathfrak{S}^3_{\langle x\rangle}$. Для функции $B^3_{\langle x\rangle}$ справедливо следующее равенство:

$$
\begin{gathered}
B^3_{\langle x\rangle}(x,y) = H[d_1,d_2,z_1,z_2](\tilde{x},\tilde{y}),\\
\text{где}\qquad d_1 = 1,\quad d_2 = 1+\alpha,\quad z_1 = B(a,a),\quad z_2 = B(a,a-\alpha)\\
\text{и}\quad x = a-\tilde{x},\quad y = a+1-\tilde{y}\quad \text{или}\quad \tilde{x} = a-x,\quad \tilde{y} = a+1-y.
\end{gathered}
$$

Бивогнутость функции $B^3_{\langle x\rangle}$ равносильна следующим соотношениям:

$$
\begin{gathered}
d_1 z_2 \leqslant d_2 z_1;\\
1\cdot c_\alpha B(a,a-\alpha) \leqslant (1+\alpha) c_\alpha B(a,a);\\
1+\alpha \leqslant (1+\alpha)(2\alpha^2+2\alpha+1);\\
1 \leqslant 2\alpha^2 + 2\alpha + 1;\qquad 0 \leqslant 2\alpha(\alpha+1).
\end{gathered}
$$

И нам осталось произвести следующие вычисления для нахождения смешанной производной:

$$c_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} B^2_{\langle x \rangle}(x,y) \overset{(73)}{=} c_\alpha \frac{d_2 z_1 - d_1 z_2}{(d_2-d_1)\tilde{y}^2} = \frac{(1+\alpha)c_\alpha B(a,a) - c_\alpha B(a,a-\alpha)}{\alpha(a+1-y)^2} =$$

$$\frac{(1+\alpha)(2\alpha^2+2\alpha+1)-(1+\alpha)}{\alpha(a+1-y)^2} = \frac{(1+\alpha)(2\alpha^2+2\alpha)}{\alpha(a+1-y)^2} = 2\frac{(1+\alpha)^2}{(a+1-y)^2} = 2\left(\frac{1+\alpha}{a+1-y}\right)^2.$$

4.3.4. Области $\mathfrak{S}^{0,1}_{\langle xy \rangle}$ и $\mathfrak{S}^0_{\langle x \rangle,\langle y \rangle}$, $\mathfrak{S}^1_{\langle x \rangle,\langle y \rangle}$, $\mathfrak{S}^2_{\langle x \rangle,\langle y \rangle}$

Так как функции, линейные по каждой своей переменной, являются бивогнутыми нам достаточно только вычислить смешанные производные функций $B^0_{\langle xy \rangle}$ и $B^1_{\langle xy \rangle}$. Кроме того, эти производные можно в силу билинейности вычислить следующим образом.

Область $\mathfrak{S}^1_{\langle xy \rangle}$.

$$c_\beta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} B^1_{\langle xy \rangle}(x,y) = c_\beta \frac{(B(b+\beta,b+\beta) - B(b+\beta,b+\beta-1)) - (B(b,b+\beta) - B(b,b+\beta-1))}{1 \cdot \beta} = \frac{1-0-(1-\beta-\beta)}{\beta} = \frac{2\beta}{\beta} = 2.$$

Область $\mathfrak{S}^0_{\langle xy \rangle}$.

$$c_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} B^0_{\langle xy \rangle}(x,y) = c_\alpha \frac{(B(a,a-\alpha) - B(a,a-1)) - (B(a-\alpha,a-\alpha) - B(a-\alpha,a-1))}{\alpha(1-\alpha)} = \frac{1+\alpha-2\alpha^2-(1-\alpha)}{\alpha(1-\alpha)} = \frac{-2\alpha^2+2\alpha}{\alpha(1-\alpha)} = 2.$$

Несложно видеть, что в областях $\mathfrak{S}^0_{\langle x \rangle,\langle y \rangle}$, $\mathfrak{S}^1_{\langle x \rangle,\langle y \rangle}$ и $\mathfrak{S}^2_{\langle x \rangle,\langle y \rangle}$ нам также не нужно проверять бивогнутость функции B в силу тождеств (70), (69), (71) и утверждения 2.2. В оставшихся областях смешанные производные функции B мы будем вычислять только в точках, принадлежащих множествам $\mathfrak{S}\{b+\beta\}$, $\mathfrak{S}\{b\}$, $\mathfrak{S}\{a\}$ и $\mathfrak{S}\{a-\alpha\}$. Определение этих множеств можно найти, обратившись к формуле (55).

Множество $\mathfrak{S}\{b+\beta\}$.

$$c_\beta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} B^2_{\langle x \rangle}(x,b+\beta) = c_\beta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} B^2_{\langle y \rangle}(b+\beta,y) \overset{(69)}{=}$$

$$e^{-2(b+\beta)} c_\beta \mathcal{B}(b+\beta,b+\beta) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} B^e_{\langle y \rangle}(b+\beta,y) = e^{-2(b+\beta)} \cdot 2e^{2(b+\beta)} = 2.$$

Множество $\mathfrak{S}\{b\}$.

$$c_\beta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} B^1_{\langle x \rangle}(x,b) = c_\beta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} B^1_{\langle y \rangle}(b,y) \overset{(71)}{=}$$

$$e^{-2b}(c_\beta B(b,b) - \tfrac{1}{2}c_\beta \sigma) B^e_{\langle y \rangle}(b,y) = e^{-2b}\left(2\beta^2 - 2\beta + 1 - \beta^2\right) 2e^{2b} = 2(1-\beta)^2.$$

Множество $\mathfrak{S}\{a\}$.

$$c_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} B^1_{\langle x\rangle}(x,a) = c_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} B^1_{\langle y\rangle}(a,y) \overset{(72)}{=}$$
$$e^{-2a}(c_\alpha B(a,a) - \tfrac{1}{2}c_\alpha\sigma)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} B^1_{\langle y\rangle}(a,y) = e^{-2a}(2\alpha^2+2\alpha+1-\alpha^2)2e^{2a} = 2(1+\alpha)^2.$$

Множество $\mathfrak{S}\{a-\alpha\}$.

$$c_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} B^0_{\langle x\rangle}(x,a-\alpha) = c_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} B^0_{\langle y\rangle}(a-\alpha,y) \overset{(70)}{=}$$
$$e^{-2(a-\alpha)} \cdot 2e^{2(a-\alpha)} = 2.$$

Отметим, что мы доказали бивогнутость функции B в каждой из областей $\mathfrak{S}^{0,1,2}_{\langle x\rangle,\langle y\rangle}$, $\mathfrak{S}^{3}_{\langle x\rangle,\langle y\rangle}$, $\mathfrak{S}^{4,5}_{\langle x\rangle}$ и $\mathfrak{S}^{0,1}_{\langle xy\rangle}$. Поэтому нам осталось проверить бивогнутость этой функции на границе указанных множеств. Кроме того, в силу бивогнутости функции B^e мы можем не рассматривать границы, находящиеся на прямой $y = x$. Для завершения доказательства рассмотрим покрытие области определения $\mathfrak{S}$ открытыми множествами $\mathfrak{S}(a,+\infty)$ и $\mathfrak{S}(-\infty,b)$. Несложно видеть, что достаточно доказать теорему отдельно для каждой области.

4.3.5. Бивогнутость функции B в области $\mathfrak{S}(a,+\infty)$

Отметим, что в дальнейшем мы будем пользоваться только тем, что нам известны все интересующие нас смешанные производные. Чтобы лишний раз не обращаться к ранее сделанным вычислениям, отметим полученные формулы на рисунке 16. Отрезки на которых первые производные имеют разрыв обозначены пунктирной линией.

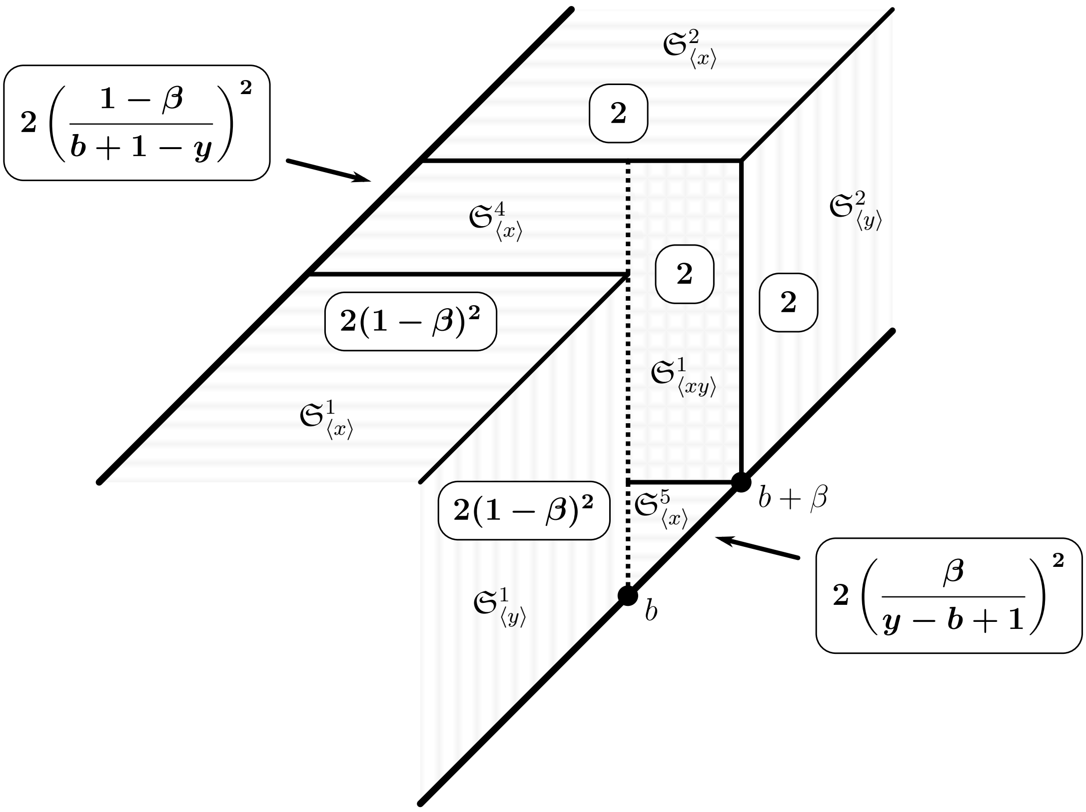

Рис. 16. Область $\mathfrak{S}(a,+\infty)$.

Начнём с проверки вогнутости функции B по переменной y. Заметим, что в точке $(b+\beta, b+\beta)$ функция B дифференцируема по переменной y, так как дифференцируема функция B^e. Отсюда следует дифференцируемость по переменной y на интервале $(b+\beta-1, b+\beta)\times\{b+\beta\}$, так как справедливы равенства

$$c_\beta\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}B^2_{\langle x\rangle}(x,b+\beta) = c_\beta\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}B^4_{\langle x\rangle}(x,b+\beta) = c_\beta\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}B^1_{\langle xy\rangle}(x,b+\beta) = 2.$$

Аналогично доказывается дифференцируемость по y на промежутках $(b-1,b)\times\{b\}$ и $(b, b+\beta)\times\{b+\beta-1\}$. Для этого достаточно заметить, что функция B линейна по переменной y в точках (b,b), $(b, b+\beta-1)$ и верны следующие равенства:

$$c_\beta\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}B^4_{\langle x\rangle}(x,b) = c_\beta\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}B^1_{\langle x\rangle}(x,b) = 2(1-\beta)^2;$$
$$c_\beta\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}B^1_{\langle xy\rangle}(x,b+\beta-1) = c_\beta\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}B^5_{\langle x\rangle}(x,b+\beta-1) = 2.$$

Нам осталось в области $\mathfrak{S}(a,+\infty)$ проверить только вогнутость по переменной x. Сначала отметим, что функция B дифференцируема в точке $(b+\beta, b+\beta)$ и по переменной x. Поэтому для получения дифференцируемости функции B по x на интервале $\{b+\beta\}\times(b+\beta-1, b+\beta)$ достаточно убедиться в справедливости следующего тождества.

$$c_\beta\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}B^2_{\langle y\rangle}(b+\beta,y) = c_\beta\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}B^1_{\langle xy\rangle}(b+\beta,y) = 2.$$

Теперь докажем вогнутость функции B по переменной x на промежутке $\{b\}\times(b-1, b+\beta)$. Заметим, что в отличие от предыдущих случаев, в этот раз функция B не будет дифференцируема в точках, принадлежащих указанному интервалу. Тем не менее в точке $(b, b+\beta)$ имеется линейность. Поэтому достаточно доказать, что

$$\forall y\in(b-1,b+\beta)\colon\quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^-}{\partial x}B(b,y) \leqslant \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^+}{\partial x}B(b,y).$$

Действительно, при $y\in[b,b+\beta)$ имеем $b+1-y\geqslant 1-\beta$ и поэтому

$$c_\beta\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^-}{\partial x}B(b,y) = c_\beta\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}B^4_{\langle x\rangle}(b,y) = 2\left(\frac{1-\beta}{b+1-y}\right)^2 \leqslant$$
$$2 = c_\beta\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}B^1_{\langle xy\rangle}(b,y) = c_\beta\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^+}{\partial x}B(b,y).$$

Если же $y\in[b+\beta-1,b]$, то

$$c_\beta\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^-}{\partial x}B(b,y) = c_\beta\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}B^1_{\langle x\rangle,\langle y\rangle}(b,y) = 2(1-\beta)^2 <$$
$$2 = c_\beta\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}B^1_{\langle xy\rangle}(b,y) = c_\beta\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^+}{\partial x}B(b,y).$$

В случае, когда $y\in(b-1,b+\beta-1]$, мы имеем

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^-}{\partial x}B(b,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}B^1_{\langle y\rangle}(b,y) = 2(1-\beta)^2 \overset{?}{\leqslant}$$
$$2\left(\frac{\beta}{y-b+1}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}B^5_{\langle x\rangle}(b,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^+}{\partial x}B(b,y);$$
$$(1-\beta)(y-b+1)\leqslant(1-\beta)\beta\leqslant\beta.$$

Таким образом, мы доказали, что функция B бивогнута в области $\mathfrak{S}(a,+\infty)$.

4.3.6. Бивогнутость функции B в области $\mathfrak{S}(-\infty, b)$

Бивогнутость функции B, суженной на множество $\mathfrak{S}(-\infty, b)$ проверяется аналогичным образом. Как и в случае с областью $\mathfrak{S}(a, +\infty)$ отметим все вычисленные смешанные производные на рисунке 17. Также отметим пунктиром отрезки, на которых первые производные функции B имеют разрыв.

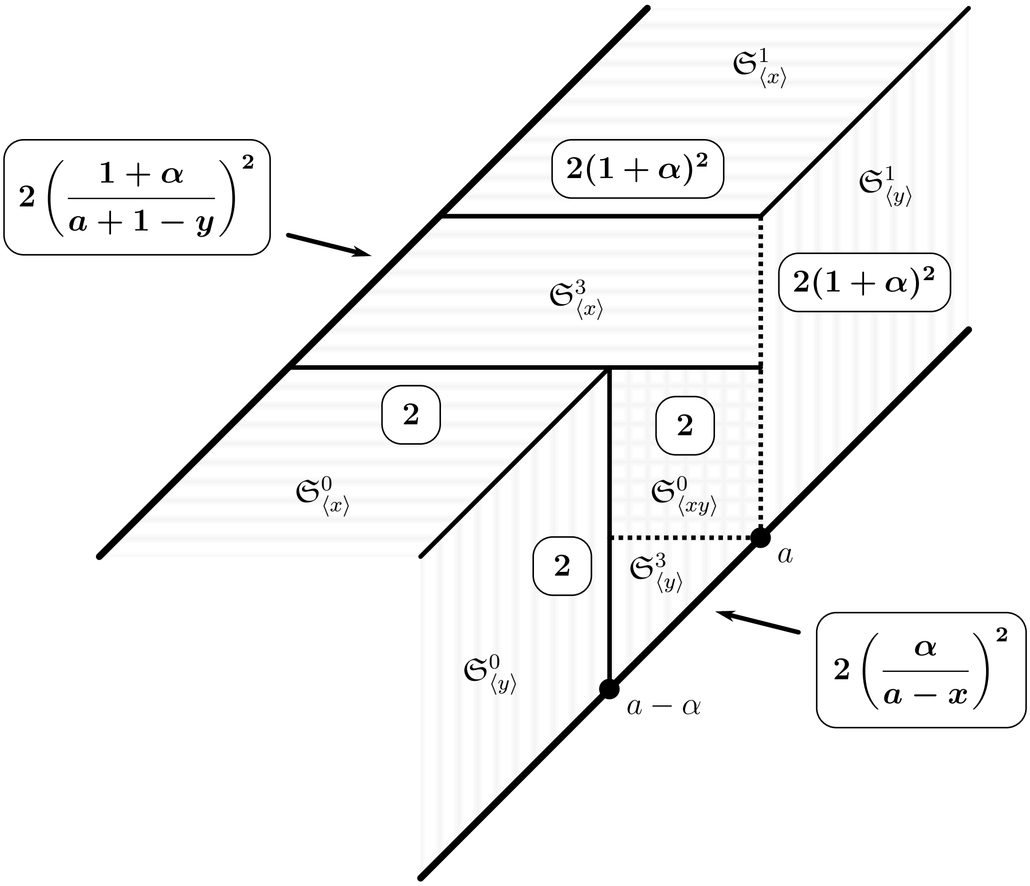

Рис. 17. Область $\mathfrak{S}(-\infty, b)$.

Сначала проверим вогнутость функции B по переменной y. На интервале $(a - 1, a) \times \{a\}$ вогнутость функции B следует из её дифференцируемости по y в точке (a, a) и равенств

$$c_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} B^1_{\langle x\rangle}(x, a) = c_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} B^3_{\langle x\rangle}(x, a) = 2(1+\alpha)^2.$$

Чтобы убедиться в дифференцируемости функции B по переменной y на интервале $(a - \alpha - 1, a) \times \{a - \alpha\}$, достаточно заметить, что B линейна по y в точке $(a, a - \alpha)$ и выполняются следующие тождества:

$$c_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} B^3_{\langle x\rangle}(x, a-\alpha) = c_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} B^0_{\langle x\rangle, \langle y\rangle}(x, a-\alpha) = c_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} B^0_{\langle xy\rangle}(x, a-\alpha) = 2.$$

Остался интервал $(a - \alpha, a) \times \{a - 1\}$. На этом отрезке вогнутость функции B по переменной y следует из её линейности по y в точке $(a - \alpha, a - 1)$ и неравенства

$$\forall x \in (a-\alpha, a): \quad c_\alpha \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^-}{\partial y} B(x, a-1) = c_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} B^3_{\langle y\rangle}(x, a-1) = 2\left(\frac{\alpha}{a-x}\right)^2 \geqslant$$
$$2 = c_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} B^0_{\langle xy\rangle}(x, a-1) = c_\alpha \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^+}{\partial y} B(x, a-1).$$

Теперь докажем бивогнутость функции B по переменной x. На интервале $\{a-\alpha\} \times (a-\alpha-1, a-\alpha)$ дифференцируемость функции B следует из её линейности в точке $(a-\alpha, a-\alpha)$ и следующих равенств:

$$c_\alpha \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} B^0_{\langle x\rangle,\langle y\rangle}(a-\alpha, y) = c_\alpha \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} B^0_{\langle xy\rangle}(a-\alpha, y) = c_\alpha \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} B^3_{\langle y\rangle}(a-\alpha, y) = 2.$$

Осталось проверить, вогнутость на промежутке $\{a\} \times (a-1, a)$. Для этого отметим, что в точке (a, a) функция B дифференцируема по x, поэтому достаточно проверить, что

$$\forall y \in (a-1, a)\colon \quad c_\alpha \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^-}{\partial x} B(a, y) \leqslant c_\alpha \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^+}{\partial x} B(a, y).$$

Действительно, если $y \in [a-\alpha, a)$, то

$$c_\alpha \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^-}{\partial x} B(a, y) = c_\alpha \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} B^3_{\langle x\rangle}(a, y) = 2\left(\frac{1+\alpha}{a+1-y}\right)^2 \leqslant$$
$$2(1+\alpha)^2 = c_\alpha \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} B^1_{\langle y\rangle}(a, y) = c_\alpha \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^+}{\partial x} B(a, y).$$

Если же $y \in (a-1, a-\alpha]$, то мы имеем

$$c_\alpha \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^-}{\partial x} B(a, y) = c_\alpha \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} B^0_{\langle xy\rangle}(a, y) = 2 \leqslant$$
$$2(1+\alpha)^2 = c_\alpha \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} B^1_{\langle y\rangle}(a, y) = c_\alpha \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^+}{\partial x} B(a, y).$$

Тем самым мы завершаем доказательство бивогнутости функции, как при сужении на множество $\mathfrak{S}(-\infty, b)$, так и во всей области $\mathfrak{S}$. Таким образом, теорема 4.5 доказана.

5 Минимальная бивогнутая функция $\mathcal{B}\left[\sum_{k=1}^{n} \sigma_k \chi_{[a_k,b_k]}, 0\right]$ и верхняя оценка

В этом разделе мы покажем, как при помощи полученной функции $B[s,\sigma,a,b]$ построить минимальную бивогнутую функцию с граничным значением вида $\sum_{k=1}^{n} \sigma_k \chi_{[a_k,b_k]}$ и оценить сверху её значение в точке $(0,0)$.

На данный момент бивогнутость функции $B^{\chi}[s,\sigma,a,b]$ получена, но пока у нас нет какой бы то ни было нижней оценки, необходимой для доказательства минимальности функции, которую мы хотим построить. С неё мы и начнём.

Лемма 5.1. *Пусть параметры s, σ, a и b выбраны таким образом, что функция $B^{\chi}[s,\sigma,a,b]$ корректно определена и $b-a \leqslant \Delta$, $s \geqslant \nu_1(\Delta)$. Предположим, что неотрицательная бивогнутая функция B удовлетворяет неравенствам*

$$B(x_0,x_0) \geqslant e^{2x_0}s \qquad \text{для некоторого числа } x_0 \geqslant b+\sqrt{\widehat{h}(b)};$$
$$\forall x \in \mathbb{R}\colon \quad B(x,x-1) \geqslant h(x),$$

где как и раньше $h=\sigma\chi_{[a,b]}$. Тогда

$$\forall (x,y) \in \mathfrak{S}(-\infty,x_0]\colon \quad B(x,y) \geqslant B^{\chi}[s,\sigma,a,b](x,y). \tag{74}$$

Доказательство. Будем доказывать неравенство (74) по очереди в областях $\mathfrak{S}[b+\beta,x_0]$, $\mathfrak{S}[b,b+\beta]$, $\mathfrak{S}[a,b]$, $\mathfrak{S}[a-\alpha,a]$ и $\mathfrak{S}(-\infty,a-\alpha]$. Заметим, что интересующую нас оценку в области $\mathfrak{S}[b+\beta,x_0]$ легко получить, воспользовавшись неравенством (13). Отметим, что область $\mathfrak{S}[b+\beta,x_0]$ корректно определена, так как $\beta < \sqrt{\widehat{h}(b)}$ в силу леммы 4.4. Для точек $(x,y) \in \mathfrak{S}[b,b+\beta]$ неравенство (74) легко следует из построения функции B^{χ} и уже полученного неравенства в области $\mathfrak{S}[b+\beta,x_0]$.

Теперь докажем оценку (74) в области $\mathfrak{S}[a,b]$ в предположении, что $B(b,b) \geqslant B^{\chi}(b,b)$. Для этого введём функцию $A(x)=B(x,x)$ и применим лемму 1.8.

$$\forall x \in [a,b]\colon \quad B(x,x) = e^{2x}\widehat{A}(x) \overset{(12)}{\geqslant} e^{2x}\int_x^b \widehat{h}(t)\,\mathrm{d}t + e^{2x}\widehat{A}(b) \geqslant$$
$$e^{2x}\sigma\int_x^b e^{-2t}\,\mathrm{d}t + e^{2x}e^{-2b}B(b,b) \geqslant e^{2x}\tfrac{1}{2}\sigma(e^{-2x}-e^{-2b}) + e^{2(x-b)}B^{\chi}(b,b) =$$
$$\tfrac{1}{2}\sigma + e^{2(x-b)}\left(B^{\chi}(b,b)-\tfrac{1}{2}\sigma\right) \overset{(56)}{=} B^{\chi}(x,x).$$

Как и в области $\mathfrak{S}[b,b+\beta]$, интересующее нас неравенство для точек $(x,y) \in \mathfrak{S}[a-\alpha,a]$ следует из построения функции B^{χ}. Осталось заметить, что для получения оценки (74) в области $\mathfrak{S}(-\infty,a-\alpha]$ нужно ещё раз применить следствие 1.9. $\square$

5.1. Функция $\mathcal{B}\left[\sum_{k=1}^{n} \sigma_k \chi_{[a_k,b_k]}, 0\right]$

Теперь мы готовы описать минимальную бивогнутую функцию, которая на границе кусочно постоянна. Но построить такую функцию мы сможем только при существенных ограничениях на её поведение на границе. Тем не менее, полученной конструкции будет достаточно для решения основной задачи.

Теорема 5.2. *Введём натуральное число $n \geqslant 2$ и параметры $\{a_k\}_{k=1}^{n}$, $\{b_k\}_{k=1}^{n}$, такие что $1 \leqslant a_1$ и $\forall k \in [1;n)\colon a_k < b_k < a_{k+1} \leqslant b_{k+1}$. Рассмотрим также положительные* *числа* $\{\sigma_k\}_{k=1}^{n}$ *и функцию*

$$h_1 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k \chi_{[a_k,b_k]},$$

такую что для любого $k \in [1;n)$ *верно* $\widehat{h}_1(b_k) \leqslant 1$. *Обозначим число* $b_k - a_k$ *символом* δ_k *и потребуем, чтобы* $\delta_k \leqslant \Delta$ *для любого натурального* $k \leqslant n-1$. *Далее для любого* $k \in [1;n)$ *определим числа*

$$\tilde{a}_k = a_k - \sqrt{\widehat{h}_1(b_k)}, \qquad \tilde{b}_k = b_k + \sqrt{\widehat{h}_1(b_k)}.$$

Также рассмотрим такое число $\tilde{a}_n \in \mathbb{R}$, *что* $\tilde{a}_n < a_n - 1$, *и потребуем, чтобы выполнялись следующие условия:*

$$\forall k \in [1;n)\colon \quad \tilde{b}_k \leqslant \tilde{a}_{k+1}; \tag{75}$$

$$\tfrac{1}{2}e^{-2(a_n-1)}\sigma_n \geqslant \nu_1(\Delta) = \tfrac{5}{2}e^{2\Delta}. \tag{76}$$

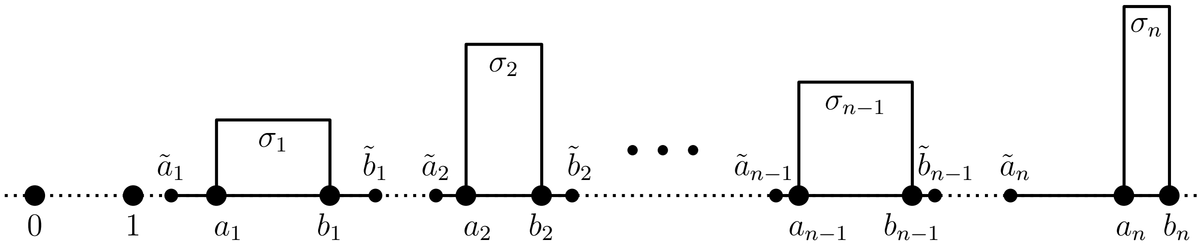

Рис. 18. Параметры a_k, $\tilde{a}_k$, b_k, $\tilde{b}_k$ и σ_k.

Теперь мы готовы описать функцию $\mathcal{B}[h_1, 0]$. *Для этого построим семейство функций* $\{h_j\}_{j=2}^{n}$:

$$h_j = \sum_{k=j}^{n} \sigma_k \chi_{[a_k,b_k]}.$$

Функцию $B_n = B[h_n, 0]$ *мы уже описали в теореме* 2.5. *Введём теперь семейство функций* $\{B_j\}_{j=1}^{n-1}$. *Построим функцию* B_j *в предположении, что функция* B_{j+1} *уже определена.*

$$B_j(x,y) = \begin{cases} B_{j+1}(x,y), & \text{если } (x,y) \in \mathfrak{S}[\tilde{b}_j, +\infty), \\ B^{\chi}[s_j, \sigma_j, a_j, b_j], & \text{если } (x,y) \in \mathfrak{S}(-\infty, \tilde{b}_j), \end{cases}$$

$$\text{где} \qquad s_j = \widehat{A}_{j+1}(\tilde{b}_j) \quad \text{и} \quad A_j(x) = \mathcal{B}_j(x,x)$$

Заключение теоремы состоит в том, что $\mathcal{B}[h_1, 0] = B_1$.

Доказательство. Сначала мы докажем, что участвующие в определении функции $B^{\chi}[s_k, \sigma_k, a_k, b_k]$ корректно определены. Для этого в силу леммы 4.4 и введённых в условии теоремы 5.2 ограничений на параметры σ, a и b достаточно проверить, что для любого числа $j \in [1;n)$ выполняется неравенство $s_j \geqslant \nu_1(\Delta)$. Для этого мы сначала докажем, что $s_{n-1} \geqslant \nu_1(\Delta)$. Действительно,

$$s_{n-1} = \widehat{A}_n(\tilde{b}_{n-1}) = \widehat{\mathcal{A}}[\sigma_n \chi_{[a_n,b_n]}](\tilde{b}_{n-1}) \geqslant \widehat{\mathcal{A}}[\sigma_n \chi_{[a_n,b_n]}](\tilde{a}_n) \geqslant$$
$$\widehat{\mathcal{A}}[\sigma_n \chi_{a_n,b_n}](a_n - 1) \overset{(30)}{=} \tfrac{1}{2}e^{-2(a_n-1)}\sigma_n \geqslant \nu_1(\Delta).$$

Нам осталось понять, что $\forall j \in [1; n-1)\colon\ s_j \geqslant s_{j+1}$.

$$s_j = \widehat{\mathcal{A}}_{j+1}(\tilde{b}_j) = \widehat{A}^{\chi}[s_{j+1}, \sigma_{j+1}, a_{j+1}, b_{j+1}](\tilde{b}_j) \overset{(11)}{\geqslant} \\ \widehat{A}^{\chi}[s_{j+1}, \sigma_{j+1}, a_{j+1}, b_{j+1}](\tilde{b}_{j+1}) = \widehat{\mathcal{A}}_{j+1}(\tilde{b}_{j+1}) = s_{j+1}.$$

Теперь мы покажем, что функция B_j бивогнута. Будем это доказывать индукцией по j. При $j = n$ включение $B_n \in \mathbb{BC}(\mathfrak{S})$ следует из определения функции B_n. Докажем бивогнутость функции B_j в предположении, что $B_{j+1} \in \mathbb{BC}(\mathfrak{S})$.

Сперва заметим, что $B_j(x,y) = B_{j+1}(x,y)$ при $(x,y) \in \mathfrak{S}[\tilde{b}_j, +\infty)$ и $B_j(x,y) = B^{\chi}[s_j, \sigma_j, a_j, b_j]$ при $(x,y) \in \mathfrak{S}(-\infty, \tilde{b}_j)$. Поэтому нам осталось проверить бивогнутость функции B_j в окрестности множества $\mathfrak{S}\{\tilde{b}\}$. Введём для каждой функции $B^{\chi}[s_j, \sigma_j, a_j, b_j]$ параметры α_j, β_j, аналогичные параметрам α и β для функции $B^{\chi}[s, \sigma, a, b]$. Заметим, что $b_j + \beta_j < \tilde{b}_j < a_{j+1} - \alpha_{j+1}$, где $\alpha_n = 1$. Действительно, при $j \leqslant n-2$

$$b_j + \beta_j < b_j + \sqrt{\widehat{h}_1(b_j)} = \tilde{b}_j \leqslant \tilde{a}_{j+1} = a_{j+1} - \sqrt{\widehat{h}_1(b_{j+1})} < a_{j+1} - \alpha_{j+1}.$$

В случае, если $j = n-1$ мы имеем

$$b_{n-1} + \beta_{n-1} < b_{n-1} + \sqrt{\widehat{h}_1(b_{n-1})} = \tilde{b}_{n-1} \leqslant \tilde{a}_n < a_n - 1 = a_n - \alpha_n.$$

Таким образом, нам достаточно проверить бивогнутость функции B_j в области $\mathfrak{S}(b_j + \beta_j, a_{j+1} - \alpha_{j+1})$. Для этого покажем, что

$$B_j(x,y) = s_j B^e(x,y).$$

В случае, если $(x,y) \in \mathfrak{S}(b_j + \beta_j, \tilde{b}_j)$ мы имеем

$$B_j(x,y) = B^{\chi}[s_j, \sigma_j, a_j, b_j](x,y) = s_j B^e(x,y).$$

Пусть теперь $(x,y) \in \mathfrak{S}[\,\tilde{b}_j, a_{j+1} - \alpha_{j+1})$ и $j \leqslant n-2$. Тогда

$$B_j(x,y) = B_{j+1}(x,y) = B^{\chi}[s_{j+1}, \sigma_{j+1}, a_{j+1}, b_{j+1}](x,y) = \\ \widehat{A}^{\chi}[s_{j+1}, \sigma_{j+1}, a_{j+1}, b_{j+1}](\tilde{b}_j) B^e(x,y) = \widehat{A}_{j+1}(\tilde{b}_j) B^e(x,y) = s_j B^e(x,y).$$

Если же $(x,y) \in \mathfrak{S}[\,\tilde{b}_{n-1}, a_n - \alpha_n) = \mathfrak{S}[\,\tilde{b}_{n-1}, a_n - 1)$, то

$$B_{n-1}(x,y) = B_n(x,y) = \widehat{A}_n(a_n - 1) B^e(x,y) = \widehat{A}_n(\tilde{b}_{n-1}) B^e(x,y) = s_{n-1} B^e(x,y).$$

В конечном итоге, нам осталось доказать, что полученные бивогнутые функции B_j минимальны, и тогда, в частности, мы получим, что $\mathcal{B}[h_1, 0] = B_1$. Вновь будем доказывать индукцией по j. Минимальность функции B_n известна. Пусть мы доказали, что $B_{j+1} \in \mathbb{B}^+(\mathfrak{S})$. Докажем, что минимальна и функция B_j, то есть $\mathcal{B}[h_j, 0] \geqslant B_j$. При $(x,y) \in \mathfrak{S}[\,\tilde{b}_j, +\infty)$ мы имеем

$$\mathcal{B}[h_j, 0](x,y) \geqslant \mathcal{B}[h_{j+1}, 0](x,y) = B_{j+1}(x,y) = B_j(x,y).$$

В случае, если $(x,y) \in \mathfrak{S}(-\infty, \tilde{b}_j)$, мы можем применить лемму 5.1 с параметрами $s = s_j$, $\sigma = \sigma_j$, $a = a_j$, $b = b_j$, $x_0 = \tilde{b}_j$ и функцией $B = \mathcal{B}[h_j, 0]$. Таким образом,

$$\mathcal{B}[h_j, 0](x,y) \overset{(74)}{\geqslant} B^{\chi}[s_j, \sigma_j, a_j, b_j](x,y) = B_j(x,y),$$

так как

$$\mathcal{B}[h_j, 0](\tilde{b}_j, \tilde{b}_j) \geqslant \mathcal{B}_{j+1}(\tilde{b}_j, \tilde{b}_j) = e^{2\tilde{b}_j} s_j = e^{2x_0} s \qquad \text{и} \qquad x_0 = \tilde{b}_j = b_j + \sqrt{\widehat{h}_1(b_j)} = b + \sqrt{\widehat{h}_1(b)}.$$

$\square$

5.2. Верхняя оценка величины $\mathcal{A}\left[\sum_{k=1}^{n}\sigma_k\chi_{[a_k,b_k]}\right](0)$

Прежде, чем получить верхнюю оценку для функции, построенной в предыдущем подразделе мы оценим сверху величину $B^{\chi}[s,\sigma,a,b](0,0)$.

Утверждение 5.3. *Рассмотрим параметры $s,\sigma,a,b\in\mathbb{R}$, такие что $s\geqslant\nu_1(\Delta)$, $\sigma\in[0,e^{2b}]$, $b\geqslant a\geqslant 1$ и $b-a\leqslant\Delta$. Тогда справедливо неравенство*

$$\widehat{A}^{\chi}[s,\sigma,a,b](0)\leqslant s+\tfrac{1}{2}(e^{2\delta}-1)\widehat{h}(b)+c_3(\Delta)\sqrt{\frac{\widehat{h}(b)}{s}}\,\widehat{h}(b), \tag{77}$$
$$\text{где}\quad c_3(t)=\tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(2^{-\frac{3}{2}}e^{3(1+t)}+1\right).$$

Кроме того,

$$\widehat{A}^{\chi}[s,\sigma,a,b](0)\geqslant s+\tfrac{1}{2}(e^{2\delta}-1)\widehat{h}(b). \tag{78}$$

Доказательство. Чтобы доказать это утверждение, воспользуемся равенством (61) из леммы 4.2.

$$A^{\chi}(0)=\sup_{\alpha,\beta\in(0,1)}\left(E(\alpha)E(\beta)s+\tfrac{\alpha}{1+\alpha}e^{2\alpha}\widehat{h}(a)+\tfrac{\beta}{1+\beta}E(\alpha)\widehat{h}(b)+\tfrac{1}{2}E(\alpha)(\widehat{h}(a)-\widehat{h}(b))\right).$$

Заметим, что $\widehat{h}(a)=e^{-2a}\sigma=e^{2(b-a)}e^{-2b}\sigma=e^{2\delta}\widehat{h}(b)$. Для получения неравенства (78) оценим величину $A^{\chi}(0)$ снизу, взяв в качестве переменных α и β ноль.

$$A^{\chi}(0)=\sup_{\alpha,\beta\in(0,1)}(\ldots)\geqslant s+\tfrac{1}{2}(\widehat{h}(a)-\widehat{h}(b))=s+\tfrac{1}{2}(e^{2\delta}-1)\widehat{h}(b).$$

Чтобы доказать верхнюю оценку, сперва выпишем пару соотношений.

- $\dfrac{e^{2\alpha}}{1+\alpha}\leqslant\tfrac{1}{2}e^2$, так как $\alpha<1$ и функция $\frac{e^{2t}}{1+t}$ возрастает. Действительно,

$$\left(\frac{e^{2t}}{1+t}\right)'=\frac{2(1+t)-1}{(1+t)^2}e^{2t}\geqslant 0.$$

- $E(\alpha)E(\beta)\leqslant 1-\tfrac{4}{9}\alpha^3-\tfrac{4}{9}\beta^3$. В самом деле,

$$E(\alpha)E(\beta)\overset{(7)}{\leqslant}\left(1-\tfrac{2}{3}\alpha^3\right)\left(1-\tfrac{2}{3}\beta^3\right)=1+\tfrac{2}{9}\alpha^3\beta^3-\tfrac{2}{3}\alpha^3+\tfrac{2}{9}\alpha^3\beta^3-\tfrac{2}{3}\beta^3\leqslant 1-\tfrac{4}{9}\alpha^3-\tfrac{4}{9}\beta^3.$$

Теперь продолжим верхнюю оценку.

$$A^{\chi}(0)\leqslant\sup_{\alpha,\beta\in(0,1)}\left(s-\tfrac{4}{9}\alpha^3s-\tfrac{4}{9}\beta^3s+\tfrac{1}{2}e^2\cdot e^{2\Delta}\alpha\widehat{h}(b)+\beta\widehat{h}(b)+\tfrac{1}{2}(e^{2\delta}-1)\widehat{h}(b)\right)\leqslant$$
$$s+\tfrac{1}{2}(e^{2\delta}-1)\widehat{h}(b)+\sup_{\alpha\geqslant 0}\left(\tfrac{1}{2}e^{2(1+\Delta)}\alpha\widehat{h}(b)\right)-\tfrac{4}{9}\alpha^3s+\sup_{\beta\geqslant 0}\left(\beta\widehat{h}(b)-\tfrac{4}{9}\beta^3s\right).$$

Далее мы найдём величину $\sup\limits_{x\geqslant 0}\left(\theta x\widehat{h}(b)-\tfrac{4}{9}x^3s\right)$, где θ — произвольное положительное число. Возьмём производную по x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\theta x\widehat{h}(b)-\tfrac{4}{9}x^3s\right)=\theta\widehat{h}(b)-\tfrac{4}{3}x^2s.$$

Так как полученная функция убывает по x при $x \geqslant 0$, максимум интересующего нас выражения достигается в точке

$$x = \sqrt{\frac{3\theta\widehat{h}(b)}{4s}} = \sqrt{\tfrac{3}{4}\theta}\,\mu_b,$$

где $\mu_b = \sqrt{\frac{\widehat{h}(b)}{s}}$. Следовательно,

$$\sup_{x\geqslant 0}\left(\theta x\widehat{h}(b) - \tfrac{4}{9}x^3 s\right) = \theta\sqrt{\tfrac{3}{4}\theta}\,\mu_b\widehat{h}(b) - \tfrac{4}{9}\sqrt{\tfrac{3}{4}\theta}\,\mu_b\cdot\tfrac{3}{4}\theta\mu_b^2 s = \left(\theta\sqrt{\tfrac{3}{4}\theta} - \tfrac{1}{3}\theta\sqrt{\tfrac{3}{4}\theta}\right)\mu_b\widehat{h}(b) = \tfrac{2}{3}\theta\sqrt{\tfrac{3}{4}\theta}\mu_b\widehat{h}(b) = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\theta^{\frac{3}{2}}\mu_b\widehat{h}(b).$$

В конечном итоге, мы имеем оценку

$$A^{\chi}(0) \leqslant s + \tfrac{1}{2}(e^{2\delta}-1)\widehat{h}(b) + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\tfrac{1}{2}e^{2(1+\Delta)}\right)^{\frac{3}{2}}\mu_b\widehat{h}(b) + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\mu_b\widehat{h}(b) = s + \tfrac{1}{2}(e^{2\delta}-1)\widehat{h}(b) + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(2^{-\frac{3}{2}}e^{3(1+\Delta)}+1\right)\mu_b\widehat{h}(b).$$

□

Предложение 5.4. *Пусть нам даны натуральное число $n \geqslant 2$, последовательности неотрицательных чисел $\{\tau_k\}_{k=1}^{n-1}$, $\{a_k\}_{k=1}^{n-1}$, $\{b_k\}_{k=1}^{n-1}$ и $\{\delta_k\}_{k=1}^{n-1}$, такие что $1 \leqslant a_1$ и $\forall k \in [1;n)\colon 0 \leqslant \delta_k = b_k - a_k \leqslant \Delta$. Введём функцию $h\colon \mathbb{R}\to[0,+\infty)$, такую что*

$$\widehat{h} = \sum_{k=1}^{n-1}\tau_k\chi_{[a_k,b_k]}$$

и потребуем, чтобы

$$\forall t\in\mathbb{R}\colon\quad \widehat{h}(t)\leqslant 1 \qquad \text{и} \qquad \forall k\in[1;n-1)\colon\quad a_{k+1}-b_k \geqslant \sqrt{\widehat{h}(b_{k+1})}+\sqrt{\widehat{h}(b_k)}.$$

Тогда справедлива следующая оценка:

$$\mathcal{A}[h](0) \leqslant c_4(\Delta)\sum_{k=1}^{n-1}\delta_k\widehat{h}(a_k) + \left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}c_3^{\frac{2}{3}}(\Delta)\left(\sum_{k=1}^{n-1}\widehat{h}^{\frac{3}{2}}(a_k)\right)^{\frac{2}{3}} + \ \tfrac{7}{5}\nu_0(\Delta),$$
$$\text{где } c_4(t) = \tfrac{1}{2t}(e^{2t}-1).$$

Заметим, что полученное неравенство примет следующий вид, если пренебречь константами и зафиксировать параметр Δ:

$$\mathcal{A}[h](0) \lesssim \sum_{k=1}^{n-1}\delta_k\widehat{h}(a_k) + \left(\sum_{k=1}^{n-1}\widehat{h}^{\frac{3}{2}}(a_k)\right)^{\frac{2}{3}} + 1.$$

Доказательство. Сначала введём параметры a_n, b_n, $\{\sigma_k\}_{k=1}^{n}$, чтобы можно было применить теорему 5.2. Будем считать, что

$$a_n = b_n = b_{n-1}+3; \qquad \forall k\in[1;n)\colon \sigma_k = e^{2b_k}\tau_k; \qquad \sigma_n = 2e^{2(a_n-1)}\nu_1(\Delta).$$

Остальные параметры $\{\tilde{a}_k\}_{k=1}^{n-1}$ и $\{\tilde{b}_k\}_{k=1}^{n-1}$ и функции $\{h_j\}_{j=1}^{n}$ определяются так же, как и в условии теоремы 5.2. Нужно только ещё ввести величину $\tilde{a}_n = b_{n-1}+1 = a_n-2 < a_n-1$. Отметим, что $\forall k\in[1;n)\colon \widehat{h}(b_k) = \widehat{h}_1(b_k)$, но при этом $\widehat{h}\big|_{[a_k,b_k]} \neq \widehat{h}_1\big|_{[a_k,b_k]}$.

Далее заметим, что введённые параметры удовлетворяют условию теоремы 5.2. Чтобы в этом убедиться, проверим соотношения (75) и (76):

$$\forall k \in [1;n): \quad \tilde{b}_k = b_k + \sqrt{\widehat{h}_1(b_k)} \leqslant a_{k+1} - \sqrt{\widehat{h}_1(b_{k+1})} = \tilde{a}_{k+1};$$

$$\tilde{b}_{n-1} = b_{n-1} + \sqrt{\widehat{h}_1(b_{n-1})} \leqslant b_{n-1} + 1 = \tilde{a}_n;$$

Кроме того, $\quad \frac{1}{2}e^{-2(a_n-1)}\sigma_n = \frac{1}{2}e^{-2(a_n-1)} \cdot 2e^{2(a_n-1)}\nu_1(\Delta) = \nu_1(\Delta).$

Рассмотрим описанные в теореме 5.2 функции $\{B_j\}_{j=1}^n$ и $\{A_j\}_{j=1}^n$, где $A_j(x) = B_j(x,x)$. По условию $B_n = \mathcal{B}[\sigma_n\chi_{[a_n,b_n]}, 0]$, поэтому в силу тождества (30)

$$\widehat{A}_n(\tilde{a}_n) = \sigma_n\widehat{\mathcal{A}}[\chi_{\{a_n\}}](a_n-2) = 2e^{2(a_n-1)}\nu_1(\Delta) \cdot \tfrac{1}{2}e^{2(1-a_n)} = \nu_1(\Delta). \tag{79}$$

В качестве следующего шага мы, применив утверждение 5.3, оценим величину $\widehat{A}_j(\tilde{a}_j)$ через число $\widehat{A}_{j+1}(\tilde{a}_{j+1})$. Для любого $j \in [1;n)$:

$$\widehat{A}_j(\tilde{a}_j) = \widehat{A}^{\chi}[s_j,\sigma_j,a_j,b_j](\tilde{a}_j) = \widehat{A}^{\chi}[s_j,\sigma_j,a_j,b_j](0); \qquad \text{Поэтому}$$

$$s_j + \tfrac{1}{2}(e^{2\delta_j}-1)\widehat{h}_1(b_j) \overset{(78)}{\leqslant} \widehat{A}_j(\tilde{a}_j) \overset{(77)}{\leqslant} s_j + \tfrac{1}{2}(e^{2\delta_j}-1)\widehat{h}_1(b_j) + c_3(\Delta)\sqrt{\frac{\widehat{h}_1(b_j)}{s_j}}\,\widehat{h}_1(b_j). \tag{80}$$

Осталось воспользоваться тем, что по определению $s_j = \widehat{A}_{j+1}(\tilde{b}_j) = \widehat{A}_{j+1}(\tilde{a}_{j+1})$.

Наконец, заметим, что

$$\mathcal{A}[h](0) = \mathcal{A}\Big[\sum_{k=1}^{n-1} e^{2x}\tau_k\chi_{[a_k,b_k]}\Big](0) = \mathcal{A}\Big[\sum_{k=1}^{n-1} e^{-2(b_k-x)}\sigma_k\chi_{[a_k,b_k]}\Big](0) \leqslant$$

$$\mathcal{A}\Big[\sum_{k=1}^{n}\sigma_k\chi_{[a_k,b_k]}\Big](0) = \mathcal{A}[h_1](0) = A_1(0) = \widehat{A}_1(\tilde{a}_1), \tag{81}$$

так как $\mathcal{B}[h_1,0] = B_1$ в силу заключения теоремы 5.2.

Теперь мы готовы воспользоваться леммой 3.4. Основанием применения этой леммы является совокупность следующих соотношений, которые следуют из неравенств (80).

$$\widehat{A}_n(\tilde{a}_n) = \nu_1(\Delta);$$

$$\forall k \in [1;n)\colon \widehat{A}_k(\tilde{a}_k) - \sum_{j=k}^{n-1}\tfrac{1}{2}(e^{2\delta_j}-1)\widehat{h}(b_j) \leqslant$$

$$\widehat{A}_{k+1}(\tilde{a}_{k+1}) - \sum_{j=k+1}^{n-1}\tfrac{1}{2}(e^{2\delta_j}-1)\widehat{h}(b_j) + c_3(\Delta)\sqrt{\frac{\widehat{h}(b_k)}{\widehat{A}_{k+1}(\tilde{a}_{k+1})}}\,\widehat{h}(b_k);$$

$$\forall k \in [1;n)\colon \quad \widehat{A}_k(\tilde{a}_k) - \sum_{j=k}^{n-1}\tfrac{1}{2}(e^{2\delta_j}-1)\widehat{h}(b_j) \geqslant \widehat{A}_{k+1}(\tilde{a}_{k+1}) - \sum_{j=k+1}^{n-1}\tfrac{1}{2}(e^{2\delta_j}-1)\widehat{h}(b_j).$$

Определим параметры, участвующие в условии леммы 3.4, следующим образом:

$$\forall k \in [1;n]\colon \qquad v(k) = \widehat{A}_k(\tilde{a}_k) - \sum_{j=k}^{n-1}\tfrac{1}{2}(e^{2\delta_j}-1)\widehat{h}(b_j), \qquad u(k) = \widehat{h}(b_k);$$

$$\omega = \nu_1(\Delta), \qquad \mu = c_3(\Delta), \qquad \mu_\omega = (\nu_1(\Delta))^{-1}.$$

Несложно видеть, что тогда справедливы соотношения (45), фигурирующие в условии леммы. Кроме того,

$$\forall k \in [1;n)\colon \qquad \mu_\omega \omega = (\nu_1(\Delta))^{-1}\,\nu_1(\Delta) = 1 \geqslant \sqrt{\widehat{h}(\,\tilde{b}_k)} = u(k).$$

Таким образом, мы можем заключить, что

$$\widehat{A}[h](0) \overset{(81)}{\leqslant} \widehat{A}_1(\tilde{a}_1) = \sum_{j=1}^{n-1} \tfrac{1}{2}(e^{2\delta_j}-1)\widehat{h}(\tilde{b}_j) + \left(\widehat{A}_1(\tilde{a}_1) - \sum_{j=1}^{n-1} \tfrac{1}{2}(e^{2\delta_j}-1)\widehat{h}(\tilde{b}_j)\right) =$$
$$\sum_{j=1}^{n-1} \tfrac{1}{2}(e^{2\delta_j}-1)\widehat{h}(\tilde{b}_j) + v(1) \overset{(46)}{\leqslant}$$
$$\sum_{j=1}^{n-1} \tfrac{1}{2}(e^{2\delta_j}-1)\widehat{h}(\tilde{b}_j) + \left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \mu^{\frac{2}{3}} \Big(\sum_{k=1}^{n-1} u^{\frac{3}{2}}(k)\Big)^{\frac{2}{3}} + \left(\tfrac{3}{2}\max\left(\mu\mu_\omega^{3/2}, 1\right) - \tfrac{1}{2}\right)\omega =$$
$$\sum_{k=1}^{n-1} \tfrac{1}{2}(e^{2\delta_k}-1)\widehat{h}(\tilde{b}_k) + \left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} c_3(\Delta)^{\frac{2}{3}} \Big(\sum_{k=1}^{n-1} \widehat{h}(b_k)^{\frac{3}{2}}(k)\Big)^{\frac{2}{3}} + \left(\tfrac{3}{2}\max\left(\mu\mu_\omega^{3/2}, 1\right) - \tfrac{1}{2}\right)\nu_1(\Delta).$$

Для получения искомого неравенства нам осталось сделать следующие оценки:

$$\tfrac{1}{2}(e^{2\delta_k}-1) = \tfrac{1}{2\delta_k}(e^{2\delta_k}-1)\delta_k \leqslant \tfrac{1}{2\Delta}(e^{2\Delta}-1)\delta_k = c_4(\Delta)\delta_k;$$
$$\left(\tfrac{3}{2}\max\left(\mu\mu_\omega^{3/2}, 1\right) - \tfrac{1}{2}\right) = \left(\tfrac{3}{2}\max\left(c_3(\Delta)(\nu_1(\Delta))^{-3/2}, 1\right) - \tfrac{1}{2}\right) \overset{?}{\leqslant} \tfrac{7}{5};$$
$$\tfrac{3}{2}c_3(\Delta)(\nu_1(\Delta))^{-3/2} - \tfrac{1}{2} \overset{?}{\leqslant} \tfrac{7}{5}; \qquad c_3(\Delta)(\nu_1(\Delta))^{-3/2} \overset{?}{\leqslant} \tfrac{1}{3} + \tfrac{14}{15} = \tfrac{19}{15};$$
$$c_3(\Delta)(\nu_1(\Delta))^{-3/2} \overset{(77,66)}{=} \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(2^{-\frac{3}{2}}e^{3(1+\Delta)}+1\right)\left(\tfrac{2}{5}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-3\Delta} \leqslant \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(2^{-\frac{3}{2}}e^{3}+1\right)\left(\tfrac{2}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \overset{?}{\leqslant} \tfrac{19}{15};$$
$$e^3 + 2^{\frac{3}{2}} \leqslant 19\sqrt{\tfrac{5}{3}};$$

Последнее неравенство мы не будем проверять, но отметим, что $e^3 + 2^{\frac{3}{2}} < 24 < 19\sqrt{\frac{5}{3}}$. $\square$

6 Сведение задачи к липшицевым функциям

6.1. Резюмирование полученных результатов

Мы получили достаточно точные нижнюю и верхнюю оценки (см. предложения 3.6 и 5.4). Осталось показать, что из них можно получить соотношение, которое мы декларировали в теореме 16. Чтобы привести полученные неравенства к общему виду, мы введём несколько определений. Как и в предыдущих двух разделах, будем считать, что нам дано число $\Delta > 0$, которое мы выберем позже.

Определение 6.1. Пусть нам даны последовательности вещественных чисел $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$. Будем называть совокупность последовательностей (a, b, t) допустимым набором степени $p \in (0, +\infty)$ и плотности $\rho \in (0, +\infty)$, если она удовлетворяет следующим условиям (см. рис. 19).

1. $a_1 \geqslant 1$;
2. $\forall k \in \mathbb{N}: \quad 0 \leqslant b_k - a_k \leqslant \Delta$;
3. $\forall k \in \mathbb{N}: \quad a_{k+1} - b_k \geqslant \rho(t_k^p + t_{k+1}^p)$;
4. $\forall k \in \mathbb{N}: \quad 0 \leqslant t_k \leqslant \rho^{-1}$.

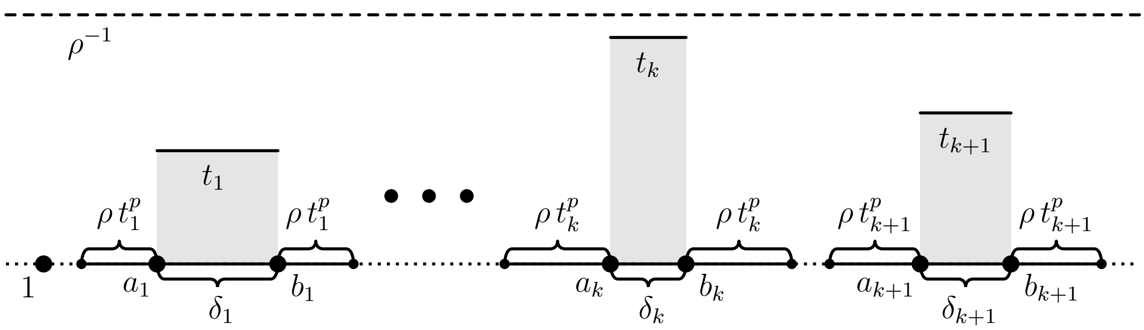

Рис. 19. Допустимый набор (a, b, t) степени p и плотности ρ.

Будем также говорить, что функция g задана по допустимому набору (a, b, t), если

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} t_k \chi_{[a_k, b_k)}.$$

Кроме того, мы будем использовать обозначение $\delta_k = b_k - a_k$.

Теперь мы, используя определение допустимого набора, введём понятия точечной и ступенчатой последовательности.

Определение 6.2. Последовательность $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется точечной последовательностью степени p и плотности ρ для функции $g\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, если тройка последовательностей $(\gamma, \gamma, g(\gamma))$ образует допустимый набор степени p и плотности ρ. А именно,

1. $\gamma_1 \geqslant 1$;
2. $\forall k \in \mathbb{N}: \quad \gamma_{k+1} - \gamma_k \geqslant \rho g(\gamma_k)^p + \rho g(\gamma_{k+1})^p$;
3. $\forall k \in \mathbb{N}: \quad 0 \leqslant g(\gamma_k) \leqslant \rho^{-1}$.

Определение 6.3. Пусть нам дана последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ и функция $g\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$. Введём последовательности a', a'', b', b'', t', t'' (см. рис. 20). Для любого числа $k \in \mathbb{N}$ положим по определению

$$\begin{aligned} a'_k &= a_{2k-1}, & \qquad a''_k &= a_{2k}; \\ b'_k &= a_{2k}, & b''_k &= a_{2k+1}; \\ t'_k &= \sup_{t\in[a'_k, b'_k)} g(t), & t''_k &= \sup_{t\in[a''_k, b''_k)} g(t). \end{aligned}$$

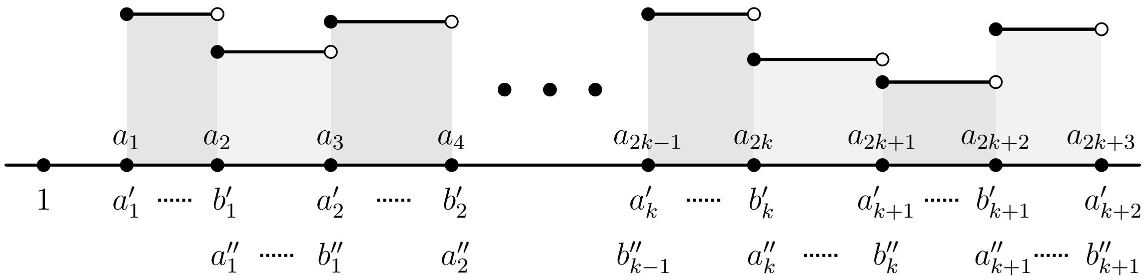

Рис. 20

Последовательность a называется ступенчатой последовательностью степени p и плотности ρ для функции g, если тройки (a', b', t') и (a'', b'', t'') образуют допустимые наборы степени p и плотности ρ. Иначе говоря, числа a_k должны удовлетворять следующим соотношениям:

1. $a_1 \geqslant 1$;
2. $\forall k \in \mathbb{N}\colon \quad 0 \leqslant a_{k+1} - a_k \leqslant \Delta$;
3. $\forall k \in \mathbb{N}\colon \quad a_{k+2} - a_{k+1} \geqslant \rho \sup\{g^p(t)\colon t \in [a_k, a_{k+1})\} + \rho \sup\{g^p(t)\colon t \in [a_{k+2}, a_{k+3})\}$;
4. $0 \leqslant \sup g \leqslant \rho^{-1}$.

Вместе с последовательностью a мы также введём последовательность $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$, заданную равенством

$$\delta_k = a_{k+1} - a_k.$$

Будем называть функцию $G\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ мажорантной для данной ступенчатой последовательности a и функции g, если

$$G \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{[a_k, a_{k+1})} \sup_{t\in[a_k, a_{k+1})} g(t).$$

Мы также будет рассматривать конечные точечные и ступенчатые последовательности, которые определяются аналогично.

Теперь мы готовы сформулировать уже доказанные неравенства в новых терминах. Пусть нам дана функция $\varphi\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, такая что $\widehat{\varphi} \leqslant 1$ и $\varphi(x) = 0$ при $x < 1$.

Предложение 6.4. *Предположим, что для функции $\widehat{\varphi}$ даны точечная и ступенчатая последовательности γ и a степени $\frac{1}{2}$ и плотности 1. Кроме того, для последова-*

тельности a и функции $\widehat{\varphi}$ мы построили мажорантную функцию $\widehat{h}$ и последовательность δ. Тогда справедлива следующая оценка:

$$c_1\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\varphi}^{\frac{3}{2}}(\gamma_k)\Big)^{\frac{2}{3}} - c_2 \leqslant \mathcal{A}[\varphi](0) \leqslant c_4(\Delta)\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k\widehat{h}(a_k) + c_5(\Delta)\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{h}^{\frac{3}{2}}(a_k)\Big)^{\frac{2}{3}} + c_6(\Delta),$$

$$\text{\textit{где}}\qquad c_1 = (2/3)^{\frac{1}{3}}, \qquad c_2 = \frac{1-2^{-\frac{1}{3}}}{3}, \qquad c_4(t) = \frac{e^{2t}-1}{2t},$$

$$c_5(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}e^{3(t+1)} + \sqrt{3/2}\right)^{\frac{2}{3}}, \qquad c_6(t) = 7e^{2t}.$$

Доказательство. Начнём с нижней оценки. Заметим, что последовательность γ_k удовлетворяет условиям предложения 3.6 в силу того, что является точечной. Поэтому справедливо неравенство (54), которое влечёт нижнюю оценку.

Для получения верхней оценки рассмотрим допустимые наборы (a', b', t') и (a'', b'', t''), указанные в определении ступенчатой последовательности a, и построим функции $\widehat{h}'$, $\widehat{h}''$ и последовательности δ_k', δ_k'', заданные соответственно по этим наборам. Заметим, что мы можем применить предложение 5.4 с функциями $\widehat{h}'$ и $\widehat{h}''$ и последовательностям a', b' и a'', b''. Поэтому мы имеем следующую цепочку неравенств:

$$\mathcal{A}[\varphi](0) \leqslant \mathcal{A}[h'+h''](0) \leqslant \mathcal{A}[h'](0) + \mathcal{A}[h''](0) \leqslant$$
$$c_4(\Delta)\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k'\widehat{h}'(a_k') + \left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} c_3^{\frac{2}{3}}(\Delta)\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{h}'^{\frac{3}{2}}(a_k')\Big)^{\frac{2}{3}} + \tfrac{7}{5}\nu_0(\Delta) +$$
$$c_4(\Delta)\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k''\widehat{h}''(a_k'') + \left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} c_3^{\frac{2}{3}}(\Delta)\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{h}''^{\frac{3}{2}}(a_k'')\Big)^{\frac{2}{3}} + \tfrac{7}{5}\nu_0(\Delta).$$

Теперь применим неравенство $\widehat{h}' + \widehat{h}'' \leqslant \widehat{h}$ и воспользуемся соотношением (42).

$$\mathcal{A}[\varphi](0) \leqslant c_4(\Delta)\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k\widehat{h}(a_k) + 2^{\frac{1}{3}}\left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} c_3^{\frac{2}{3}}(\Delta)\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{h}(a_k)\Big)^{\frac{2}{3}} + 2\cdot\tfrac{7}{5}\nu_0(\Delta).$$

Нам осталось заметить, что

$$2^{\frac{1}{3}}\left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} c_3^{\frac{2}{3}}(t) \overset{(77)}{=} 2^{\frac{1}{3}}\left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} 3^{-\frac{1}{3}}\left(2^{-\frac{3}{2}}e^{3(1+t)}+1\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\tfrac{3}{2}\right)^{1/3}\left(2^{-\frac{3}{2}}e^{3(1+t)}+1\right)^{\frac{2}{3}} = c_5(t);$$
$$2\cdot\tfrac{7}{5}\nu_0(t) \overset{(66)}{=} 2\cdot\tfrac{7}{5}\cdot\tfrac{5}{2}e^{2t} = 7e^{2t} = c_6(t).$$

□

При получении дальнейших результатов в этом разделе мы будем опираться только на неравенства, доказанные в предложении 6.4.

Наша следующая задача заключается в том, чтобы избавиться от недетерминированных компонент в оценке, зависящих от выбора последовательностей a и γ. Начнём мы с того, что введём параметр $\rho > 0$ и перепишем полученную оценку в терминах допустимых последовательностей степени 1 и плотности ρ. Для этого определим функцию $\psi\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ посредством следующей формулы:

$$\psi = \psi[\rho, \varphi] = \rho^{-1}\sqrt{\widehat{\varphi}} \qquad \text{или} \qquad \varphi(x) = e^{2x}\rho^2\psi^2(x).$$

Следствие 6.5. *Пусть для функции $\psi[\rho,\varphi]$ построены точечная и ступенчатая последовательности γ и a степени 1 и плотности ρ. Рассмотрим также произвольную мажорантную функцию η для последовательности a и функции $\psi[\rho,\varphi]$. Тогда справедлива следующая оценка:*

$$c_1\rho^2\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\psi^3(\gamma)\Big)^{\frac{2}{3}} - c_2 \leqslant \mathcal{A}[\varphi](0) \leqslant c_4(\Delta)\rho^2\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k\eta^2(a_k) + c_5(\Delta)\rho^2\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\eta^3(a_k)\Big)^{\frac{2}{3}} + c_6(\Delta).$$

При этом $\sup\psi[\rho] \leqslant \rho^{-1}$.

Заметим, что теперь мы имеем дело с функцией η, которая оценивается снизу кусочно постоянной функцией, ступеньки которой имеют почти квадратную форму. Мы покажем, как её связать с липшицевой функцией, но сначала введём несколько определений.

6.2. Устранение неопределённости в оценке

Определение 6.6. Введём для произвольного числа $L \in (0,+\infty)$ множество функций $\mathrm{Lip}^*_L(\mathbb{R}) = \mathrm{Lip}_L(\mathbb{R}) \cup \{+\infty\}$, которое назовём семейством формально липшицевых функций с коэффициентом Липшица L.

Начнём со следующего простого утверждения.

Утверждение 6.7. *Пусть нам дано произвольное семейство неотрицательных функций $\{g_i\}_{i\in I}$, где I — некоторое множество индексов. Тогда, если $\forall i \in I\colon g_i \in \mathrm{Lip}_L(\mathbb{R})$ для некоторого числа $L \in (0,+\infty)$, то*

$$\sup_{i\in I} g_i \in \mathrm{Lip}^*_L(\mathbb{R}) \qquad \inf_{i\in I} g_i \in \mathrm{Lip}^*_L(\mathbb{R}).$$

Теперь мы дадим определение оператора $\mathcal{L}_L$.

Определение 6.8. Для произвольного числа $L \in (0,+\infty)$ введём оператор $\mathcal{L}_L$, действующий на множестве произвольных функций $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\mathcal{L}_L\, g = \inf\left\{G \in \mathrm{Lip}^*_L(\mathbb{R})\colon G \geqslant g\right\}.$$

Кроме того, оператор $\mathcal{L}_1$ мы будем обозначать символом $\mathcal{L}$.

Утверждение 6.9. *Для любого числа $L \in (0,+\infty)$ и произвольной функции $g\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ справедливо включение $\mathcal{L}_L\, g \in \mathrm{Lip}^*_L(\mathbb{R})$. При этом, $\mathcal{L}_L\, g \neq +\infty$, если функция g ограничена.*

Доказательство. Достаточно применить утверждение 6.7 и заметить, что если $g \leqslant C$ для некоторой константы $C > 0$, то и $\mathcal{L}_L\, g \leqslant C$. □

Также для нас будет полезным следующее утверждение.

Утверждение 6.10. *Рассмотрим произвольное множество функций $\{g_i\}_{i\in I}$, где I — некоторое семейство индексов. Тогда справедливо следующее тождество:*

$$\mathcal{L}_L \sup_{i\in I} g_i = \sup_{i\in I} \mathcal{L}_L\, g_i. \tag{82}$$

Теперь введём функции

$$\Psi = \Psi[\rho, \varphi] = \mathcal{L}\,\psi[\rho, \varphi], \qquad H = H[\rho, \varphi] = \chi_{[1,+\infty)}\,\mathcal{L}\,\psi[\rho, \varphi].$$

На данный момент у нас нет связи между функциями Ψ, H и оценкой, полученной в следствии 6.5. Чтобы установить эту связь, мы введём понятие накрывающей функции.

Определение 6.11. Пусть нам дана произвольная неотрицательная ограниченная функция $g\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ и число $r > 0$. Будем говорить, что кусочно постоянная функция $\zeta\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ называется накрывающей функции g и принадлежит множеству $\mathcal{Z}[r](g)$, если выполняются следующие условия. Для некоторого натурального числа $n \in \mathbb{N}$ и последовательностей вещественных чисел $\{x_k\}_{k=1}^n$, $\{y_k\}_{k=1}^n$, $\{z_k\}_{k=1}^n$, таких что $\forall k \in [1; n]\colon y_k > x_k$, справедливо равенство

$$\zeta = \max_{k\in[1;n]} z_k \chi_{[x_k, y_k)}.$$

Кроме того,

$$\forall k \in [1; n]\colon \qquad \zeta|_{[x_k,y_k)} \geqslant g|_{[x_k,y_k)}\,, \quad y_k - x_k = r z_k.$$

Величину $y_k - x_k$ мы будем обозначать символом d_k.

Нам также понадобится следующее определение, смысл которого будет понятен после формулировки леммы 6.13.

Определение 6.12. Пусть нам дана неотрицательная ограниченная функция $g\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ и числа $r, \rho, \varepsilon > 0$. Будем говорить, что функция ζ удовлетворяет первому достаточному условию и принадлежит множеству $\mathcal{Z}_1[r, \rho, \varepsilon](g)$, если выполняются следующие условия:

1. $\zeta = \max\limits_{k\in[1;n]} z_k \chi_{[x_k,y_k)} \in \mathcal{Z}[r](g)$;

2. $\{t \in \mathbb{R}\colon g(t) \geqslant \varepsilon\} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} [x_k, y_k)$;

3. Существует перестановка $\pi\colon [1; n] \to [1; n]$, такая что последовательность $\left\{\frac{1}{2}x_{\pi(k)} + \frac{1}{2}y_{\pi(k)}\right\}_{k=1}^n$ будет точечной последовательностью степени 1 и плотности ρ для функции g;

4. $\forall k \in [1; n]\colon z_k \leqslant (1 + \varepsilon) g(\frac{1}{2}x_k + \frac{1}{2}y_k)$.

Теперь мы готовы сформулировать нижнюю оценку из следствия 6.5 в терминах накрывающей.

Лемма 6.13. *Пусть нам даны такие числа $r, \rho > 0$, что для любого $\varepsilon > 0$ множество $\mathcal{Z}_1[r, \rho, \varepsilon](\psi[\rho, \varphi])$ непусто. Тогда имеется неравенство*

$$\mathcal{A}[\varphi](0) \geqslant c_0(r)\rho^2 \left\|\Psi^2[\rho, \varphi]\,\right\|_{L^1(\mathbb{R})}^{2/3} - c_2, \tag{83}$$
$$\text{где} \qquad c_0(t) = c_1 \left(t + \tfrac{2}{3}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\tfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \left(t + \tfrac{2}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}.$$

Доказательство. Возьмём произвольную функцию $\zeta = \max\limits_{k\in[1;n]} z_k \chi_{[x_k,y_k)} \in \mathcal{Z}_1[r, \rho, \varepsilon](\psi)$. В силу 3-его пункта, указанного в определении 6.12 последовательность $\{\gamma_k\}_{k=1}^n$, где

$\gamma_k = \frac{1}{2}x_{\pi(k)} + \frac{1}{2}y_{\pi(k)}$, будет точечной последовательностью степени 1 и плотности ρ для функции ψ. Значит, ввиду следствия 6.5 справедливо неравенство

$$\mathcal{A}[\varphi](0) \geqslant c_1\rho^2\left(\sum_{k=1}^{n} \psi^3(\gamma_k)\right)^{\frac{2}{3}} - c_2.$$

Теперь воспользуемся пунктом 4, чтобы заметить, что $\psi(\gamma_k) \geqslant (1+\varepsilon)^{-1} z_{\pi(k)}$. Поэтому

$$\mathcal{A}[\varphi](0) \geqslant c_1\rho^2(1+\varepsilon)^{-2}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k^3\right)^{\frac{2}{3}} - c_2.$$

Далее мы оценим выражение $\left\|(\mathcal{L}\,\zeta)^2\right\|_{L^1(\mathbb{R})}$ сверху суммой $\sum\limits_{k=1}^{n} z_k^3$. Для этого сначала отметим, что

$$\mathcal{L}\,\zeta = \mathcal{L}\max_{k\in[1;n]} z_k\chi_{[x_k,y_k)} \overset{(82)}{=} \max_{k\in[1;n]} \mathcal{L}\, z_k\chi_{[x_k,y_k)}.$$

Поэтому

$$\left\|(\mathcal{L}\,\zeta)^2\right\|_{L^1(\mathbb{R})} = \left\|\max_{k\in[1;n]}\left(\mathcal{L}\, z_k\chi_{[x_k,y_k)}\right)^2\right\|_{L^1(\mathbb{R})} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left\|\left(\mathcal{L}\, z_k\chi_{[x_k,y_k)}\right)^2\right\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Вычислим величину $\left\|\left(\mathcal{L}\, z_k\chi_{[x_k,y_k)}\right)^2\right\|_{L^1(\mathbb{R})}$ (см. рис. 21). Напомним, что величину $y_k - x_k$ мы обозначали символом d_k. Кроме того, в силу включения $\zeta \in \mathcal{Z}[r](\psi)$ (пункт 1) справедливо равенство $d_k = r z_k$. Итак, мы имеем

$$\left\|\left(\mathcal{L}\, z_k\chi_{[x_k,y_k)}\right)^2\right\|_{L^1(\mathbb{R})} = 2\int_0^{z_k} t^2\,\mathrm{d}t + \int_0^{d_k} z_k^2\,\mathrm{d}t = \tfrac{2}{3}z_k^3 + d_k z_k^2 = (\tfrac{2}{3}+r)z_k^3. \tag{84}$$

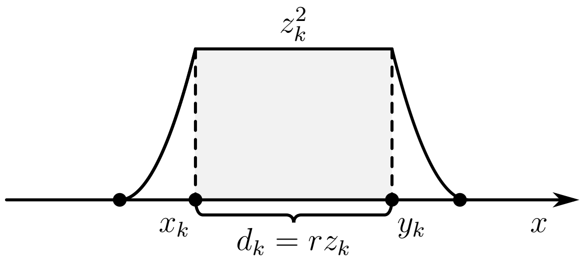

Рис. 21. График функции $\left(\mathcal{L}\, z_k\chi_{[x_k,y_k)}\right)^2$

Таким образом, $\left\|(\mathcal{L}\,\zeta)^2\right\|_{L^1(\mathbb{R})} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{3}+r\right) z_k^3$.

Теперь оценим сверху величину $\|\Psi^2\|_{L^1(\mathbb{R})}$ через число $\left\|(\mathcal{L}\,\zeta)^2\right\|_{L^1(\mathbb{R})}$. Сначала заметим, что $\max(\zeta,\varepsilon) \geqslant \psi$ в силу 2-ого пункта и включения $\zeta \in \mathcal{Z}[r](\psi)$. Значит,

$$\Psi = \mathcal{L}\,\psi \leqslant \mathcal{L}\max(\zeta,\varepsilon) = \max(\mathcal{L}\,\zeta, \mathcal{L}\,\varepsilon) \leqslant \mathcal{L}\,\zeta + \varepsilon,$$

откуда мы заключаем, что

$$\left\|(\mathcal{L}\,\zeta)^2\right\|_{L^1(\mathbb{R})} \geqslant \left\|(\max(\Psi-\varepsilon,0))^2\right\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

В конечном итоге мы имеем

$$\mathcal{A}[\varphi](0) \geqslant c_1(1+\varepsilon)^{-2}\rho^2\left(\sum_{k=1}^{n} z_k^3\right)^{\frac{2}{3}} - c_2 \geqslant$$
$$c_1(1+\varepsilon)^{-2}\left(\tfrac{2}{3}+r\right)^{-\frac{2}{3}}\rho^2\left\|(\mathcal{L}\,\zeta)^2\right\|_{L^1(\mathbb{R})}^{2/3} - c_2 \geqslant$$
$$c_1(1+\varepsilon)^{-2}\left(\tfrac{2}{3}+r\right)^{-\frac{2}{3}}\rho^2\left\|(\max(\Psi-\varepsilon,0))^2\right\|_{L^1(\mathbb{R})}^{2/3} - c_2.$$

Для получения искомой оценки (83) осталось перейти к пределу по $\varepsilon \to 0$ в получившемся неравенстве. □

Теперь мы покажем, как получить верхнюю оценку. Но для этого нам понадобится ввести понятие второго достаточного условия.

Определение 6.14. Рассмотрим числа $r, \rho \in (0, +\infty)$, $N \in (1, +\infty)$ и неотрицательную ограниченную функцию $g\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$. Функция ζ удовлетворяет второму достаточному условию и принадлежит множеству $\mathcal{Z}_2[r, \rho, N](g)$, если

1. $\zeta = \max\limits_{k\in[1;n]} z_k \chi_{[x_k, y_k)} \in \mathcal{Z}[r](g)$;
2. Для любого $k \in [1; n)$: $y_k = x_{k+1}$. Кроме того, $x_1 = 1$, $x_n < N \leqslant y_n$;
3. Последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{n+1}$, где $x_{n+1} = y_n$, является ступенчатой последовательностью степени 1 и плотности ρ для функции g;
4. $\forall k \in [1; n]\colon z_k = \sup\limits_{t\in[x_k, y_k)} g(t)$.

Лемма 6.15. *Пусть нам даны величины $r \in (0, 1)$ и $\rho \in (0, +\infty)$, такие что для любого достаточно маленького числа $\varepsilon > 0$ и любого числа $N > 1$ множество $\mathcal{Z}_2[r, \rho, N](\chi_{[1,N)} \max(H[\rho, \varphi], \varepsilon))$ непусто. Тогда выполняется соотношение*

$$\mathcal{A}[\varphi](0) \leqslant c_4(\Delta)c_7(r)\rho^2\left\|H^2\right\|_{L^1(\mathbb{R})} + c_5(\Delta)c_8(r)\rho^2\left\|H^2\right\|_{L^1(\mathbb{R})}^{\frac{2}{3}} + c_6(\Delta), \tag{85}$$
$$\text{где} \qquad c_7(t) = \left(\tfrac{1}{3}t^2 - t + 1\right)^{-1}, \qquad c_8(t) = \left(t^{-1}c_7(t)\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Доказательство. Обозначим функцию $\chi_{[1,N)} \max(H[\rho, \varphi], \varepsilon)$ через H_N и введём функцию $\varphi_N = \chi_{[1,N]}\varphi$. Возьмём произвольную функцию $\zeta = \max\limits_{k\in[1;n]} z_k\chi_{[x_k,y_k)} \in \mathcal{Z}_2[r, \rho, N](H_N)$ и отметим, что в силу 3-его пункта, указанного в определении 6.14, последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{n+1}$ является ступенчатой последовательностью степени 1 и плотности ρ для функции H_N. При этом функция ζ в силу пунктов 1 и 2 будет мажорантной для этой последовательности и функции H_N. Далее покажем, что $H_N \geqslant \psi[\rho, \varphi_N]$.

$$H_N = \chi_{[1,N]} \max(H[\rho, \varphi], \varepsilon) \geqslant \chi_{[1,N]}\,\mathcal{L}\,\psi[\rho, \varphi] \geqslant \chi_{[1,N]}\psi[\rho, \varphi] = \psi[\rho, \chi_{[1,N]}\varphi] = \psi[\rho, \varphi_N].$$

Таким образом, функция ζ является мажорантной для последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{n+1}$ и функции $\psi[\rho, \varphi_N]$. Значит, можно применить следствие 6.5 и заключить, что

$$\mathcal{A}[\varphi_N](0) \leqslant c_4(\Delta)\rho^2\sum_{k=1}^{n} d_k z_k^2 + c_5(\Delta)\rho^2\left(\sum_{k=1}^{n} z_k^3\right)^{\frac{2}{3}} + c_6(\Delta),$$
$$\text{где} \qquad \forall k \in [1; n]\colon \quad z_k = \zeta(x_k) \quad \text{и} \quad d_k = x_{k+1} - x_k \leqslant \Delta.$$

Введём функцию $\tilde{H} = \max(H, \varepsilon)$. Мы хотим в итоге свести верхнюю оценку к величине $\|\tilde{H}^2\|_{L^1([1,y_n))} \leqslant \|\tilde{H}^2\|_{L^1([1,N+\Delta))}$, от которой после несложно будет перейти к норме $\|H^2\|_{L^1(\mathbb{R})}$. Чтобы это сделать, начнём с того, что оценим снизу через параметр z_k число $\|\tilde{H}^2\|_{L^1([x_k,y_k])}$, пользуясь тем, что

$$z_k = \sup_{t\in[x_k,y_k)} \tilde{H}, \qquad d_k = y_k - x_k = r z_k \qquad \text{и} \qquad \tilde{H}\big|_{[x_k,y_k)} \in \mathrm{Lip}_1([x_k,y_k)).$$

В самом деле,

$$\|\tilde{H}^2\|_{L^1([x_k,y_k))} \overset{(*)}{\geqslant} \int_0^{d_k} (z_k - t)^2\,\mathrm{d}t = \int_0^{d_k} z_k^2 - 2tz_k + t^2\,\mathrm{d}t =$$
$$d_k z_k^2 - d_k^2 z_k + \tfrac{1}{3} d_k^3 = d_k z_k^2 (1 - r + \tfrac{1}{3} r^2) = d_k z_k^2 c_7(r)^{-1}.$$

Неравенство $(*)$ следует из того, что монотонная перестановка функции $\chi_{[x_k,y_k)}\tilde{H}$ не меньше функции $\chi_{[0,d_k]}(z_k - t)$. А это несложно увидеть, обратившись к рисунку 22.

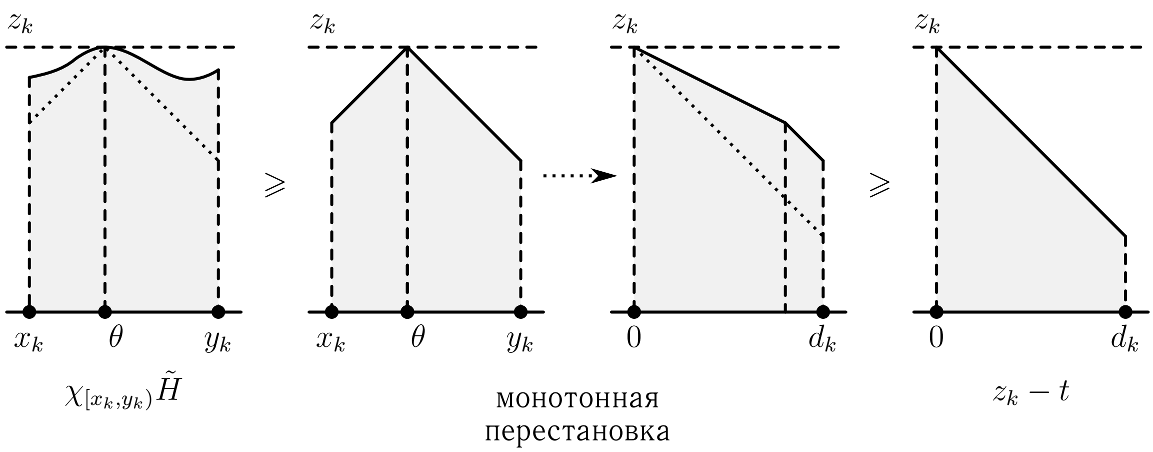

Рис. 22. Величина $\theta \in [x_k, y_k])$, указанная на рисунке, выбрана так, чтобы $\tilde{H}(\theta) = z_k$.

Таким образом, мы имеем

$$\sum_{k=1}^{n} d_k z_k^2 \leqslant c_7(r) \sum_{k=1}^{n} \|\tilde{H}^2\|_{L^1([x_k,y_k))} = c_7(r)\|\tilde{H}^2\|_{L^1([1,y_n))} \leqslant c_7(r)\|\tilde{H}^2\|_{L^1([1,N+\Delta))}$$

Аналогичным образом получаем следующее неравенство:

$$\sum_{k=1}^{n} z_k^3 = r^{-1} \sum_{k=1}^{n} d_k z_k^2 \leqslant r^{-1} c_7(r)\|\tilde{H}^2\|_{L^1([1,N+\Delta))}.$$

В итоге, мы имеем такую оценку:

$$\mathcal{A}[\varphi_N](0) \leqslant c_4(\Delta) c_7(r) \rho^2 \|\tilde{H}^2\|_{L^1([1,N+\Delta))} + c_5(\Delta) \left(r^{-1} c_7(r)\right)^{\frac{2}{3}} \rho^2 \|\tilde{H}^2\|^{\frac{2}{3}}_{L^1([1,N+\Delta))} + c_6(\Delta).$$

Несложно видеть, что для получения неравенства (85) нам осталось сначала перейти к пределу по $\varepsilon \to 0$, а затем по $N \to +\infty$. $\square$

6.3. Выбор подходящих параметров r и ρ

Единственное, что нам осталось сделать, чтобы получить оценки (83) и (85) — это понять, при каких параметрах r и ρ можно построить представителя семейства $\mathcal{Z}_1[r,\rho,\varepsilon]$ и $\mathcal{Z}_2[r,\rho,N]$. Этим мы сейчас и займёмся.

Лемма 6.16. *Для любых чисел $r,\rho,\varepsilon > 0$, таких что $r \geqslant 4\rho$ справедливо соотношение $\mathcal{Z}_1[r,\rho,\varepsilon](\psi[\rho,\varphi]) \neq \varnothing$, если $\widehat{\varphi}(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.*

Доказательство. Мы предъявим явный алгоритм построения последовательности функций $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$, а затем покажем, что для достаточно большого значения n имеется включение $\zeta_n \in \mathcal{Z}_1[r,\rho,\varepsilon](\psi)$.

Положим по определению $\zeta_0 \equiv 0$. Будем также считать, что $\zeta_n \in \mathcal{Z}[r](\psi[\rho,\varphi])$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. В частности,

$$\zeta_n = \max_{k\in[1;n]} z_k \chi_{[x_k,y_k)}, \tag{86}$$

где последовательности $\{x_k\}_{k=1}^n$, $\{y_k\}_{k=1}^n$, $\{z_k\}_{k=1}^n$ вводятся вместе с накрывающей функцией ζ_n в определении 6.11. Также для каждого $n \in \mathbb{N}$ введём множество $U_n = \mathbb{R} \setminus \operatorname{supp}\zeta_n$, число $\gamma_n = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}y_n$ и будем требовать, чтобы $z_n \leqslant (1+\varepsilon)\psi(\gamma_n)$.

Предположим, что мы уже получили функцию ζ_{n-1}. Покажем, как построить функцию ζ_n в предположении, что $\psi|_{U_{n-1}} \not\equiv 0$. Сначала определим число z_n посредством формулы:

$$z_n = \sup_{t\in U_{n-1}} \psi(t).$$

Затем найдём точку $\gamma_n \in U_{n-1}$, такую что $z_k \leqslant (1+\varepsilon)\psi(\gamma_n)$. Тогда положим по определению

$$x_n = \gamma_n - \tfrac{1}{2}rz_n, \qquad y_n = \gamma_n + \tfrac{1}{2}rz_n.$$

Функция ζ_n задаётся посредством равенства (86). Несложно видеть, что функция ζ_n удовлетворяет индукционному предположению, в частности, для неё по построению выполнены условия 1 и 4 из определения 6.12.

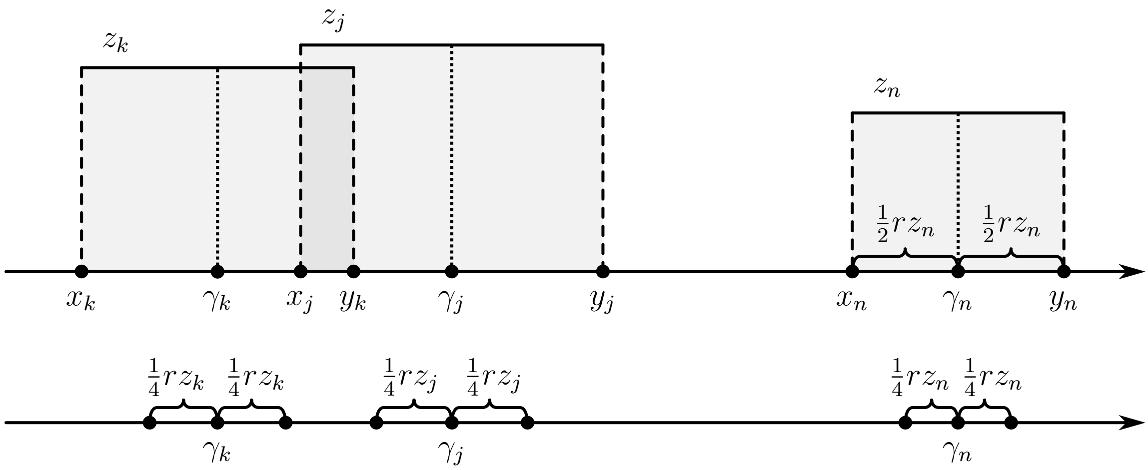

Рис. 23. График функции ζ_n.

Отметим также, что по построению промежутки $[\gamma_k - \rho z_k, \gamma_k + \rho z_k)$ не пересекаются (см. рис. 23). Действительно, для любых $1 \leqslant j < k \leqslant n$ имеем $\gamma_k \notin [x_j, y_j)$, так как

$\gamma_k \in U_{k-1}$. Значит, $|\gamma_k - \gamma_j| \geqslant \frac{1}{2} r z_j$. Далее заметим, что $z_k \leqslant z_j$, поскольку $U_{k-1} \subset U_{j-1}$. Поэтому $|\gamma_k - \gamma_j| \geqslant \frac{1}{4} r z_j + \frac{1}{4} r z_k$. Чтобы получить искомое неравенство $|\gamma_k - \gamma_j| \geqslant \rho z_k + \rho z_j$, осталось заметить, что по условию $\rho \leqslant \frac{1}{4} r$.

Теперь убедимся в том, что функция ζ_n удовлетворяет 3-ему условию. Рассмотрим перестановку $\pi\colon [1;n] \to [1;n]$, такую что для любых $1 \leqslant j < k \leqslant n$ верно $\gamma_{\pi(j)} < \gamma_{\pi(k)}$. Напомним, что нам нужно проверить, является ли последовательность $\{\gamma_k\}_{k=1}^n$ точечной последовательностью степени 1 и плотности ρ для функции $\psi[\rho,\varphi]$. Действительно, из того, что промежутки $[\gamma_k - \rho z_k, \gamma_k + \rho z_k)$ не пересекаются следует, что

$$\forall k \in [1,n)\colon \quad \gamma_{\pi(k+1)} - \gamma_{\pi_k} \geqslant \rho \left(z_{\pi(k)} + z_{\pi(k+1)} \right) \geqslant \rho \left(\psi(\gamma_{\pi(k)}) + \psi(\gamma_{\pi(k+1)}) \right).$$

Остальные свойства точечной последовательности (определение 6.2) очевидны.

Для доказательства утверждения нам осталось убедиться в том, что для достаточно большого числа $n \in \mathbb{N}$ справедливо соотношение $\{t \in \mathbb{R} \colon g(t) \geqslant \varepsilon\} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} [x_k, y_k)$, что в силу включения $\zeta \in \mathcal{Z}[r](\psi[\rho,\varphi])$ равносильно следующему неравенству:

$$\exists n \in \mathbb{N}\colon \quad \sup_{t \in U_n} \psi(t) < \varepsilon.$$

Предположим противное. Пусть

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon \quad \sup_{t \in U_n} \psi(t) \geqslant \varepsilon.$$

Тогда по построению $z_n \geqslant \varepsilon$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, промежутки $[\gamma_k - \rho\varepsilon, \gamma_k + \rho\varepsilon) \subset [\gamma_k - \rho z_k, \gamma_k + \rho z_k)$ не пересекаются. Это означает, что $\gamma_k \to +\infty$ при $k \to \infty$, так как $\forall k \in \mathbb{N}\colon \gamma_k \geqslant 1$. Но по условию $\psi[\rho,\varphi](\gamma_k) = \rho^{-1}\sqrt{\widehat{\varphi}(\gamma_k)} \to 0$ при $k \to \infty$. А это противоречит неравенству

$$\psi[\rho,\varphi](\gamma_k) \geqslant (1-\varepsilon)^{-1} z_k \geqslant (1+\varepsilon)^{-1}\varepsilon.$$

$\square$

Теперь мы поймём при каких параметрах r, ρ и N множество $\mathcal{Z}_2[r,\rho,N]$ непусто.

Лемма 6.17. *Рассмотрим числа $r \in (0,1)$, $\rho > 0$, $N > 1$ и неотрицательную функцию $g\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty)$. Предположим, что $\operatorname{supp} g \subset [1,N)$, $g|_{[1,N)} \in \mathrm{Lip}_1([1,N))$ и $\forall t \in [0,N)\colon \varepsilon \leqslant g(t) \leqslant \min(r^{-1}\Delta, \rho^{-1})$. Кроме того, мы потребуем, чтобы $\rho \leqslant \frac{1}{2} r(1-r)$. Тогда $\mathcal{Z}_2[r,\rho,N](g) \neq \varnothing$.*

Доказательство. Как и в предыдущем утверждении, мы построим последовательность функций $\{\zeta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и покажем, что найдётся номер n, такой что $\zeta_n \in \mathcal{Z}_2[r\rho,N](g)$. Положим $\zeta_0 = 0$.

Предположим, что мы уже построили функцию

$$\zeta_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} z_k \chi_{[x_k, x_{k+1})},$$

которая удовлетворяет свойствам 1 и 4. Будем также считать, что выполнены соотношения из пункта 2 за исключением неравенства $x_n < N \leqslant y_n$. Построим функцию ζ_n, удовлетворяющую тем же свойствам (см. рис. 24).

Рассмотрим произвольную величину $d_n > 0$, число $x_{n+1} = x_n + d_n$ и определим

$$z_n = z_n(d_n) = \sup_{t \in [x_n, x_n + d_n)} g(t) = \sup_{t \in [x_n, x_{n+1})} g(t).$$

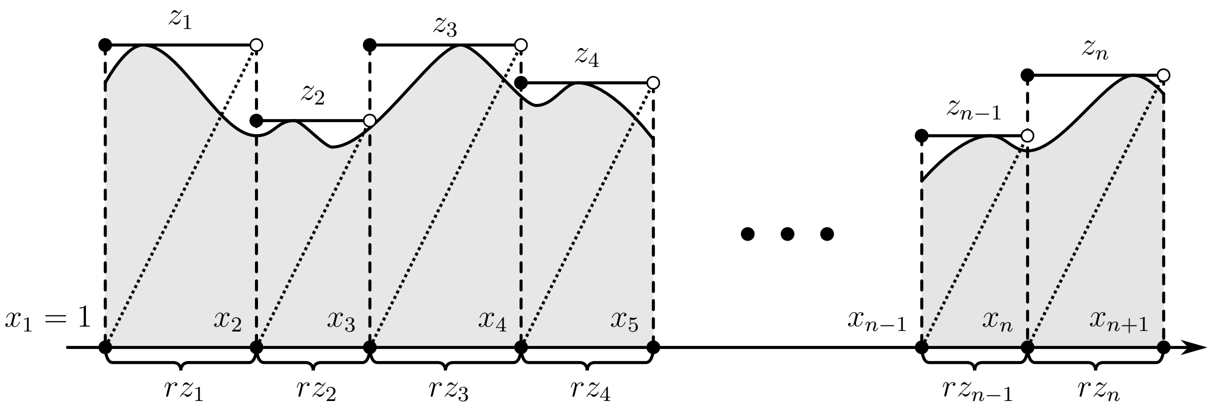

Рис. 24. Графики функций g и ζ_n.

Наша задача состоит состоит в том, чтобы выбрать такое число d_n, чтобы $d_n = rz_n$. Заметим, что $\varepsilon \leqslant z_n(d_n) \leqslant \rho^{-1}$ для любого $d_n > 0$. Число d_n мы при этом можем варьировать в промежутке $(0, +\infty)$. Поэтому, чтобы показать, что найдётся число d_n, удовлетворяющее равенству $d_n = rz_n$, достаточно проверить непрерывность функции $z_n(d_n)$. Сначала заметим, что $z_n(d_n)$ — неубывающая функция. Рассмотрим числа $d_n < d'_n$ и предположим, что $z_n(d'_n) > z_n(d_n)$. Тогда

$$z_n(d'_n) = \sup_{[x_n, x_n+d'_n)} g(t) = \sup_{[x_n+d_n, x_n+d'_n)} g(t) \leqslant g(x_n + d_n) + d'_n - d_n \leqslant z_n(d_n) + d'_n - d_n.$$

Значит, $z_n(d_n)$ — неубывающая 1-липшицева функция. Таким образом, мы можем подобрать соответствующее число d_n и построить функцию ζ_n, удовлетворяющую свойствам 1 и 4.

Теперь поймём при каких параметрах r и ρ функции ζ_n удовлетворяют 3-ему свойству. Как и в лемме 6.16 мы будем проверять только неравенство

$$x_{k+2} - x_{k+1} \overset{?}{\geqslant} \rho \sup \{g(t) \colon t \in [x_k, x_{k+1})\} + \rho \sup \{g(t) \colon t \in [x_{k+2}, x_{k+3})\}.$$

Остальные свойства ступенчатой последовательности (определение 6.3) очевидны и следуют из того, что $d_k = rz_k \leqslant r \sup g$ и $g \leqslant \min(r^{-1}\Delta, \rho^{-1})$. Перепишем интересующее нас неравенство в терминах накрывающей функции:

$$d_{k+1} \geqslant \rho z_k + \rho z_{k+2}.$$

Мы будем предполагать, что $x_{k+3} \leqslant N$. Случай, когда $x_{k+2} < N \leqslant x_{k+3}$, рассматривается аналогично. Без ограничения общности будем считать, что $k = 1$. Итак, мы хотим получить неравенство $d_2 \overset{?}{\geqslant} \rho z_1 + \rho z_2$ (см. рис. 25).

В силу включения $g|_{[x_1,x_4)} \in \mathrm{Lip}_1([x_1, x_4))$ справедливо следующее соотношение:

$$\forall t \in [x_1, x_2) \colon \quad g(x_2) \geqslant g(t) - (x_2 - t) \geqslant g(t) - d_1.$$

Перейдя в полученном неравенстве к супремуму по $t \in [x_1, x_2)$, мы получим

$$z_2 \geqslant g(x_2) \geqslant z_1 - d_1.$$

Аналогичным образом доказывается неравенство $z_2 \geqslant z_3 - d_3$. Далее, вспомнив, что $d_k = rz_k$, придём к следующим соотношениям:

$$z_2 \geqslant z_1 - rz_1 = (1 - r)z_1, \qquad z_2 \geqslant z_3 - rz_3 = (1 - r)z_3.$$

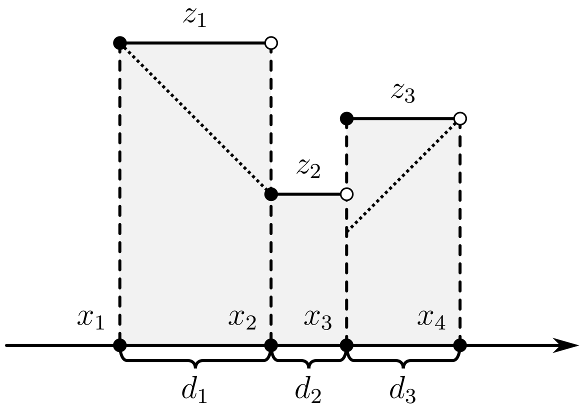

Рис. 25

Таким образом,

$$\rho z_1 + \rho z_3 \leqslant \frac{\rho z_2}{1-r} + \frac{\rho z_2}{1-r} = \frac{2\rho d_2}{r(1-r)} \overset{?}{\leqslant} d_2.$$

Последняя оценка следует из неравенства $\rho \leqslant \frac{1}{2}r(1-r)$, наличие которого мы предполагали в условии леммы 6.17.

Нам осталось получить 2-ое свойство. Заметим, что достаточно доказать предельное соотношение $x_k \to +\infty$ при $k \to \infty$. А оно следует из того, что $x_{k+1} - x_k = d_k = rz_k \geqslant r\varepsilon$, так как мы предположили, что $g(t) \geqslant \varepsilon$ при $t \in [1, N)$. $\square$

7 Получение приемлемых оценок

7.1. Функционал $\mathcal{R}_\nu$ и его свойства

Следующая наша задача состоит в том, чтобы построить оператор, который будет отображать функцию $\widehat{\varphi}$ в ψ^2. Напомним, что во введении в определении 13 мы вводили оператор $\mathcal{L}_L^p$, действие которого на функцию g имеет следующий вид:

$$\mathcal{L}_L^p\, g = \inf\left\{G \in \mathrm{Lip}_L^p(\mathbb{R})\colon G \geqslant g\right\},$$

где включение $G \in \mathrm{Lip}_L^p(\mathbb{R})$ означает, что

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ |G^p(x) - G^p(y)| \leqslant L^p|x-y|.$$

В следующем утверждении мы покажем, как связаны операторы $\mathcal{L}_L^p$ и $\mathcal{L}_L$.

Утверждение 7.1. *Пусть нам дано произвольное число $\lambda \in (0, +\infty)$ и $p > 0$. Тогда для произвольной неотрицательной функции $g\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ справедливо следующее равенство:*

$$\mathcal{L}_\lambda^p\, g = \left(\mathcal{L}_{\lambda^p}\, g^p\right)^{1/p}.$$

Доказательство. Сперва заметим, что множество $\mathrm{Lip}_L^p(\mathbb{R})$ обладает следующим свойством. Если для некоторой неотрицательной функции $G\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ справедливо включение $G \in \mathrm{Lip}_\lambda^p(\mathbb{R})$, то $G^p \in \mathrm{Lip}_{\lambda^p}^1(\mathbb{R})$. Поэтому

$$\mathcal{L}_\lambda^p\, g = \inf\left\{G \in \mathrm{Lip}_\lambda^p(\mathbb{R})\colon G \geqslant g\right\} = \inf\left\{G^p \in \mathrm{Lip}_{\lambda^p}^1(\mathbb{R})\colon G \geqslant g\right\}^{\frac{1}{p}} =$$
$$\inf\left\{\tilde{G} \in \mathrm{Lip}_{\lambda^p}(\mathbb{R})\colon \tilde{G} \geqslant g^p\right\}^{\frac{1}{p}} = \left(\mathcal{L}_{\lambda^p}\, g^p\right)^{1/p}.$$

□

Замечание 7.2. Полученные утверждения 6.9 и 7.1 позволяют заключить, что $\mathcal{L}_\lambda^p\, g \in \mathrm{Lip}_\lambda^p(\mathbb{R})$, если $\mathcal{L}_\lambda^p\, g \neq +\infty$ и функция g неотрицательна.

Отметим, что оператор $\mathcal{L}_\lambda^p$ не является положительно однородным. Однако он удовлетворяет следующему соотношению.

Утверждение 7.3. *Пусть нам дана произвольная неотрицательная функция $g\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ и числа $\alpha > 0$, $p > 0$, $\lambda \in (0, +\infty)$. Тогда справедливо следующее тождество:*

$$\mathcal{L}_{\alpha\lambda}^p\, \alpha g = \alpha\, \mathcal{L}_\lambda^p\, g. \tag{87}$$

Доказательство. Сначала докажем тождество (87) в случае $p = 1$.

$$\mathcal{L}_{\alpha\lambda}^1\, \alpha g = \sup\left\{G \in \mathrm{Lip}_{\alpha\lambda}(\mathbb{R})\colon G \geqslant \alpha g\right\} =$$
$$\sup\left\{\alpha\tilde{G} \in \mathrm{Lip}_{\alpha\lambda}(\mathbb{R})\colon \alpha\tilde{G} \geqslant \alpha g\right\} =$$
$$\alpha \sup\left\{\tilde{G} \in \mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{R})\colon \tilde{G} \geqslant g\right\} = \alpha\, \mathcal{L}_\lambda^1\, g.$$

Теперь приведём доказательство для произвольного $p > 1$.

$$\mathcal{L}_{\alpha\lambda}\, \alpha g = \left(\mathcal{L}_{(\alpha\lambda)^p}(\alpha g)^p\right)^{1/p} = \left(\alpha^p\, \mathcal{L}_{\lambda^p}\, g^p\right)^{1/p} = \alpha\left(\mathcal{L}_{\lambda^p}\, g^p\right)^{1/p} = \alpha\, \mathcal{L}_\lambda^p\, g.$$

□

Мы готовы резюмировать результаты, полученные в леммах 6.13, 6.15, 6.16 и 6.17.

Лемма 7.4. *Рассмотрим произвольную неотрицательную функцию* $\mathbf{f}_2\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty)$, *такую что* $\forall t \in (-\infty,1)\colon \mathbf{f}_2(t) = 0$ *и* $\widehat{\mathbf{f}}_2(t) \to 0$ *при* $t \to +\infty$. *Пусть нам также даны числа* $\rho_1 > 0$, $r_2 \in (0,1)$ *и* $\lambda \in (0,+\infty)$, *такие что*

$$\sup \widehat{\mathbf{f}}_2 \leqslant \lambda \min(\rho_1^{-2}, c_9(r_2)), \qquad \text{где} \qquad c_9(t) = \left(\tfrac{1}{2}t(1-t)\right)^{-2}. \tag{88}$$

Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\begin{gathered} c_0(4\rho_1)\lambda^{\frac{1}{3}} \left\| \mathcal{L}_\lambda^{1/2}\, \widehat{\mathbf{f}}_2 \right\|_{L^1(\mathbb{R})}^{2/3} - c_2\rho_1^{-2}\lambda \\ \leqslant \mathcal{A}[\mathbf{f}_2](0) \leqslant \\ c_4(\Delta)c_7(r_2) \left\| \mathcal{L}_\lambda^{1/2}\, \widehat{\mathbf{f}}_2 \right\|_{L^1([1,+\infty))} + c_5(\Delta)c_8(r_2)\lambda^{\frac{1}{3}} \left\| \mathcal{L}_\lambda^{1/2}\, \widehat{\mathbf{f}}_2 \right\|_{L^1([1,+\infty))}^{2/3} + c_6(\Delta)c_9(r_2)\lambda, \\ \text{где} \qquad \Delta \geqslant r_2\lambda^{-1/2}\left(\sup \widehat{\mathbf{f}}_2\right)^{1/2}. \end{gathered} \tag{89}$$

Доказательство. Применяя доказанные неравенства (83) и (85), мы будем подставлять функцию $\varphi = \rho^2\lambda^{-1}\mathbf{f}_2$. Чтобы это можно было сделать, нужно потребовать выполнения следующего неравенства:

$$\begin{gathered} \sup \widehat{\varphi} = \rho^2\lambda^{-1} \sup \widehat{\mathbf{f}}_2 \leqslant 1; \\ \sup \widehat{\mathbf{f}}_2 \leqslant \lambda\rho^{-2}. \end{gathered} \tag{90}$$

Поймём, как связаны функции Ψ^2 и H^2 с оператором $\mathcal{L}_\lambda^{1/2}$ и функцией $\mathbf{f}_2$.

$$\Psi^2[\rho,\varphi] = (\mathcal{L}_1\, \psi[\rho,\varphi])^2 = \left(\mathcal{L}_1\, \rho^{-1}\sqrt{\widehat{\varphi}}\right)^2 = \mathcal{L}_1^{1/2}\, \rho^{-2}\widehat{\varphi} = \mathcal{L}_1^{1/2}\, \lambda^{-1}\widehat{\mathbf{f}}_2 = \lambda^{-1}\, \mathcal{L}_\lambda^{1/2}\, \widehat{\mathbf{f}}_2.$$

Аналогичным образом получаем следующее равенство:

$$H^2[\rho,\varphi] = \lambda^{-1}\chi_{[1,+\infty)}\, \mathcal{L}_\lambda^{1/2}\, \widehat{\mathbf{f}}_2.$$

Далее мы применим лемму 6.13 с указанной функцией φ и параметрами $r = r_1$ и $\rho = \rho_1$. Чтобы воспользоваться неравенством (83), нужно применить лемму 6.16 и потребовать, чтобы параметры r_1 и ρ_1 удовлетворяли неравенству $r_1 \geqslant 4\rho_1$. Таким образом, совокупность лемм 6.13 и 6.16 позволяет заключить, что

$$\begin{gathered} \rho_1^2\lambda^{-1}\mathcal{A}[\mathbf{f}_2](0) \geqslant c_0(r_1)\rho_1^2\lambda^{-\frac{2}{3}} \left\| \mathcal{L}_\lambda^{1/2}\, \widehat{\mathbf{f}}_2 \right\|_{L^1(\mathbb{R})}^{2/3} - c_2; \\ \mathcal{A}[\mathbf{f}_2](0) \geqslant c_0(r_1)\lambda^{\frac{1}{3}} \left\| \mathcal{L}_\lambda^{1/2}\, \widehat{\mathbf{f}}_2 \right\|_{L^1(\mathbb{R})}^{2/3} - c_2\rho_1^{-2}\lambda. \end{gathered}$$

Осталось заметить, что наилучшая оценка достигается при $r_1 = 4\rho_1$.

Теперь перейдём к верхней оценке. Рассмотрим параметры $r = r_2$, $\rho = \rho_2$ и обратимся к лемме 6.15. Чтобы её применить потребуем, чтобы выполнялись неравенства $\rho_2 \leqslant \frac{1}{2}r_2(1-r_2)$, $\chi_{[1,N)} \max(H[\rho_2,\varphi],\varepsilon) \leqslant r_2^{-1}\Delta$ и воспользуемся леммой 6.17. Таким образом, справедливо неравенство (85) с функцией $\varphi = \rho_2^2\lambda^{-1}\mathbf{f}_2$.

$$\begin{aligned} \rho_2^2\lambda^{-1}\mathcal{A}[\mathbf{f}_2](0) \leqslant c_4(\Delta)c_7(r_2)\rho_2^2\lambda^{-1} \left\| \mathcal{L}_\lambda^{1/2}\, \widehat{\mathbf{f}}_2 \right\|_{L^1([1,+\infty))} + {} \\ c_5(\Delta)c_8(r)\rho_2^2\lambda^{-\frac{2}{3}} \left\| \mathcal{L}_\lambda^{1/2}\, \widehat{\mathbf{f}}_2 \right\|_{L^1([1,+\infty))}^{2/3} + c_6(\Delta); \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}[\mathbf{f}_2](0) \leqslant c_4(\Delta)c_7(r_2)\left\|\mathcal{L}_\lambda^{1/2}\widehat{\mathbf{f}}_2\right\|_{L^1([1,+\infty))} + c_5(\Delta)c_8(r)\lambda^{\frac{1}{3}}\left\|\mathcal{L}_\lambda^{1/2}\widehat{\mathbf{f}}_2\right\|_{L^1([1,+\infty))}^{2/3} + c_6(\Delta)\rho_2^2\lambda.$$

Заметим, что полученная оценка непрерывно зависит от параметра Δ, а неравенство $\chi_{[1,N)}\max(H[\rho_2,\varphi],\varepsilon) \leqslant r_2^{-1}\Delta$ достаточно требовать только для достаточных маленьких чисел $\varepsilon > 0$. Поэтому мы будем искать наименьший параметр $\Delta > 0$, такой что $H[\rho_2,\varphi] \leqslant r_2^{-1}\Delta$. Сначала покажем, что можно взять любое число $\Delta \geqslant r_2\rho_2^{-1}\sqrt{\sup\widehat{\varphi}}$. Действительно,

$$\sup H_N[\rho_2,\varphi] = \sup\sup\psi[\rho_2,\varphi] = \rho_2^{-1}\sqrt{\sup\widehat{\varphi}}.$$

Таким образом,

$$\Delta \geqslant r_2\rho_2^{-1}\sqrt{\sup\widehat{\varphi}} = r_2\rho_2^{-1}\left(\rho_2^2\lambda^{-1}\sup\widehat{\mathbf{f}}_2\right)^{1/2} = r_2\lambda^{-1/2}\left(\sup\widehat{\mathbf{f}}_2\right)^{1/2}.$$

Теперь заметим, что наилучшая оценка достигается при $\rho_2 = \frac{1}{2}r_2(1-r_2)$. Осталось отметить, что

$$\rho_2^{-2} = \left(\tfrac{1}{2}r_2(1-r_2)\right)^{-2} = c_9(r_2).$$

В частности, для выполнения условия $\sup\widehat{\varphi} \leqslant 1$, которое необходимо для получения как нижней, так и верхней оценки, нужно потребовать, чтобы

$$\sup\widehat{\mathbf{f}}_2 \overset{(90)}{\leqslant} \lambda\min(\rho_1^{-2},\rho_2^{-2}) = \lambda\min(\rho_1^{-2},c_9(r_2)).$$

$\square$

Заметим, что полученные оценки (89) будут приемлемыми, если выбрать параметр λ так, чтобы выполнялось соотношение $\lambda \asymp \left\|\mathcal{L}_\lambda^{1/2}\widehat{\mathbf{f}}_2\right\|_{L^1(\mathbb{R})}$. Как мы видим, это соотношение является уравнением относительно переменной λ. Чтобы доказать, что оно имеет решение, поймём, как меняется величина $\left\|\mathcal{L}_\lambda^{1/2}\widehat{\mathbf{f}}_2\right\|_{L^1(\mathbb{R})}$ при варьировании числа λ.

Лемма 7.5. *Пусть нам даны неотрицательная функция* $g\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ *и числа* λ_1,λ_2*, такие что* $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2$*. Тогда для любого числа* $p > 0$ *справедливы следующие неравенства:*

$$\left\|\mathcal{L}_{\lambda_2}^p g\right\|_{L^1(\mathbb{R})} \leqslant \left\|\mathcal{L}_{\lambda_1}^p g\right\|_{L^1(\mathbb{R})} \leqslant \left(\tfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^p\left\|\mathcal{L}_{\lambda_2}^p g\right\|_{L^1(\mathbb{R})}. \tag{91}$$

Доказательство. Первое неравенство следует из того, что $\mathcal{L}_{\lambda_1}^p g \in \mathrm{Lip}_{\lambda_1}^p(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Lip}_{\lambda_2}^p(\mathbb{R})$. Идея доказательства второго неравенства состоит в том, чтобы понять во сколько раз может измениться мера множества $\left\{t\in\mathbb{R}\colon\ \mathcal{L}_{\lambda_2}^p g = t\right\}$ при уменьшении параметра λ_2 в λ_1/λ_2 раз. Динамику изменения этого множества можно увидеть на рисунке 26.

Перейдём ко второму неравенству, которое перепишем в следующем виде:

$$\lambda_1^p\left\|\mathcal{L}_{\lambda_1}^p g\right\|_{L^1(\mathbb{R})} \overset{?}{\leqslant} \lambda_2^p\left\|\mathcal{L}_{\lambda_2}^p g\right\|_{L^1(\mathbb{R})}. \tag{92}$$

Распишем подробнее выражение $\lambda^p\left\|\mathcal{L}_\lambda^p g\right\|_{L^1(\mathbb{R})}$.

$$\lambda^p\left\|\mathcal{L}_\lambda^p g\right\|_{L^1(\mathbb{R})} = \lambda^p\left\|(\mathcal{L}_{\lambda^p}g^p)^{1/p}\right\|_{L^1(\mathbb{R})} = \lambda^p\left\|\left(\mathcal{L}_{\lambda^p}\sup_{x\in\mathbb{R}}g^p(x)\chi_{\{x\}}\right)^{1/p}\right\|_{L^1(\mathbb{R})} =$$

$$\lambda^p\left\|\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}\mathcal{L}_{\lambda^p}g^p(x)\chi_{\{x\}}\right)^{1/p}\right\|_{L^1(\mathbb{R})} = \lambda^p\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(g^p(x)-\lambda^p|x-t|\right)\right)^{1/p}\mathrm{d}t = \left[\begin{smallmatrix}t=\lambda^{-p}s,\\ \mathrm{d}t=\lambda^{-p}\,\mathrm{d}s\end{smallmatrix}\right] =$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(g^p(x)-|\lambda^p x-s|\right)\right)^{1/p}\mathrm{d}s = \int\limits_0^{+\infty}\mathrm{mes}\left\{s\in\mathbb{R}\colon\ z^p < \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(g^p(x)-|\lambda^p x-s|\right)\right\}\mathrm{d}z.$$

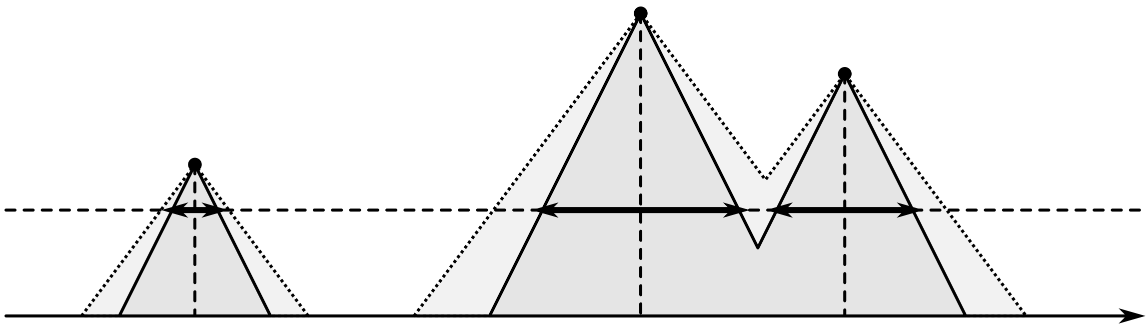

Рис. 26. Зависимость поведения функции $\mathcal{L}_L^1 g$ от L в случае, когда $g = \sum_k a_k \chi_{x_k}$.

Чтобы получить неравенство (92), мы докажем, что

$$\operatorname{mes}\Big\{s \in \mathbb{R}\colon z^p < \sup_{x\in\mathbb{R}} (g^p(x) - |\lambda_1^p x - s|)\Big\} \leqslant \operatorname{mes}\Big\{s \in \mathbb{R}\colon z^p < \sup_{x\in\mathbb{R}} (g^p(x) - |\lambda_2^p x - s|)\Big\}.$$

Введём функцию $\delta(x) = \max(g^p(x) - z^p, 0)$ и выпишем следующую цепочку равенств:

$$\Big\{s \in \mathbb{R}\colon z^p < \sup_{x\in\mathbb{R}} (g^p(x) - |\lambda^p x - s|)\Big\} = \bigcup_{x\in\mathbb{R}} \{s \in \mathbb{R}\colon |\lambda^p x - s| < g^p(x) - z^p\} = \bigcup_{x\in\mathbb{R}} B_{\delta(x)}(\lambda^p x).$$

Таким образом, нам осталось показать, что

$$\operatorname{mes} \bigcup_{x\in\mathbb{R}} B_{\delta(x)}(\lambda_1^p x) \leqslant \operatorname{mes} \bigcup_{x\in\mathbb{R}} B_{\delta(x)}(\lambda_2^p x).$$

Заметим, что множество $\bigcup_{x\in\mathbb{R}} B_{\delta(x)}(\lambda^p x)$ открыто, и поэтому представимо в виде счётного дизъюнктного объединения интервалов и лучей. Если в это объединение входят лучи, то обе части неравенства (92) равны $+\infty$. Введём семейство индексов I и числа x_i и δ_i, такие что

$$\bigcup_{x\in\mathbb{R}} B_{\delta(x)}(\lambda_2^p x) = \bigsqcup_{i\in I} B_{\delta_i}(x_i)$$

и докажем следующее включение:

$$\bigcup_{x\in\mathbb{R}} B_{\delta(x)}(\lambda_1^p x) \subset \bigcup_{i\in I} B_{\delta_i}\left((\lambda_1/\lambda_2)^p x_i\right).$$

В самом деле, если $\delta(x) \neq 0$, то $\exists i \in I\colon B_{\delta(x)}(\lambda_2^p(x)) \subset B_{\delta_i}(x_i)$. Но тогда

$$B_{\delta(x)}(\lambda_1^p(x)) \subset B_{\delta_i}\left((\lambda_1/\lambda_2)^p x_i\right) \subset \bigcup_{i\in I} B_{\delta_i}\left((\lambda_1/\lambda_2)^p x_i\right)$$

и мы можем завершить доказательство неравенства (92).

$$\operatorname{mes} \bigcup_{x\in\mathbb{R}} B_{\delta(x)}(\lambda_1^p x) \leqslant \operatorname{mes} \bigcup_{i\in I} B_{\delta_i}\left((\lambda_1/\lambda_2)^p x_i\right) \leqslant \operatorname{mes} \bigsqcup_{i\in I} B_{\delta_i}(x_i) = \operatorname{mes} \bigcup_{x\in\mathbb{R}} B_{\delta(x)}(\lambda_2^p x).$$

$\square$

Следствием доказанной леммы будут следующие утверждения, доказательства которых в силу их простоты мы опустим.

Следствие 7.6. *Пусть нам дана неотрицательная функция* $g\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ *и число* $p > 0$. *Тогда функция* $\lambda \mapsto \|\mathcal{L}_\lambda^p g\|_{L^1(\mathbb{R})}$ *непрерывна и монотонно убывает на промежутке* $(0,+\infty)$, *если величина* $\|\mathcal{L}_\lambda^p g\|_{L^1(\mathbb{R})}$ *конечна хотя бы для одного числа* $\lambda \in (0,+\infty)$.

Напомним, что выражение для функционала $\mathcal{R}_\nu$ можно найти в определении 15.

Лемма 7.7. *Пусть нам даны число* $\nu > 0$ *и неотрицательная неравная нулю функция* $g\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty)$, *такая что величина* $\big\|\mathcal{L}_1^{1/2} g\big\|_{L^1(\mathbb{R})}$ *конечна. Тогда*

$$\mathcal{R}_\lambda g = \Big\|\mathcal{L}_\lambda^{1/2} g\Big\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

где число $\lambda \in (0,+\infty)$ — *единственное решение уравнения* $\lambda = \nu\big\|\mathcal{L}_\lambda^{1/2} g\big\|_{L^1(\mathbb{R})}$. *Если при этом* $\big\|\mathcal{L}_1^{1/2} g\big\|_{L^1(\mathbb{R})} = +\infty$, *то* $\mathcal{R}_\nu g = +\infty$. *Если же* $g \equiv 0$, *то и* $\mathcal{R}_\nu g = 0$.

Прежде, чем приступить к доказательству основных результатов, мы изучим некоторые свойства функционала $\mathcal{R}_\nu$ и оператора $\mathcal{L}_\lambda^p$.

Утверждение 7.8. *Пусть нам даны произвольное натуральное число* $m \in \mathbb{N}$ *и семейство* $\{g_k\}_{k=1}^m$, *состоящее из неотрицательных функций* $g_k\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty)$. *Тогда для любых чисел* $p \in (0,1)$ *и* $\lambda \in [0,+\infty]$ *справедливы следующие неравенства:*

$$m^{-1}\sum_{k=1}^m \mathcal{L}_\lambda^p g_k \leqslant \mathcal{L}_\lambda^p \sum_{k=1}^m g_k \leqslant m^{\frac{1}{p}} \sum_{k=1}^m \mathcal{L}_\lambda^p g_k. \tag{93}$$

Доказательство. Чтобы получить нижнюю оценку достаточно заметить, что

$$\forall j \in [1;m]\colon\ \mathcal{L}_\lambda^p \sum_{k=1}^m g_k \geqslant \mathcal{L}_\lambda^p g_j.$$

Доказательство верхней оценки начнём со следующего соотношения:

$$\mathcal{L}_\lambda \sum_{k=1}^m g_k = \inf\Big\{G \in \mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{R})\colon G \geqslant \sum_{k=1}^m g_k\Big\} \leqslant \\ \sum_{k=1}^m \{G_k \in \mathrm{Lip}_{m^{-1}\lambda}(\mathbb{R})\colon G_k \geqslant g_k\} = \sum_{k=1}^m \mathcal{L}_{m^{-1}\lambda}\, g_k. \tag{94}$$

Для завершения доказательства осталось обратиться к следующей цепочке неравенств:

$$\mathcal{L}_\lambda^p \sum_{k=1}^m g_k = \bigg(\mathcal{L}_{\lambda^p}\Big(\sum_{k=1}^m g_k\Big)^p\bigg)^{1/p} \overset{(41)}{\leqslant} \bigg(\mathcal{L}_{\lambda^p} \sum_{k=1}^m g_k^p\bigg)^{1/p} \overset{(94)}{\leqslant} \bigg(\sum_{k=1}^m \mathcal{L}_{m^{-1}\lambda^p}\, g_k^p\bigg)^{1/p} \overset{(41)}{\leqslant} \\ m^{\frac{1}{p}-1} \sum_{k=1}^m (\mathcal{L}_{m^{-1}\lambda^p}\, g_k^p)^{1/p} = m^{\frac{1}{p}-1} \sum_{k=1}^m \mathcal{L}_{m^{-1/p}\lambda}^p\, g_k \overset{(91)}{\leqslant} m^{\frac{1}{p}} \sum_{k=1}^m \mathcal{L}_\lambda^p\, g_k.$$

□

Лемма 7.9. *Введём натуральное число $m \in \mathbb{N}$, положительные величины $\nu, \nu_1, \nu_2, \alpha > 0$ и неотрицательные функции g, $\{g_k\}_{k=1}^m$. Функционал $\mathcal{R}_\nu$ обладает следующими свойствами:*

1. $\mathcal{R}_\nu \alpha g = \alpha \mathcal{R}_\nu g$;
2. *Если* $g_1 \leqslant g_2$, *то* $\mathcal{R}_\nu g_1 \leqslant \mathcal{R}_\nu g_2$;
3. *Если* $\nu_1 \leqslant \nu_2$, *то* $\mathcal{R}_{\nu_1} g \leqslant \mathcal{R}_{\nu_2} g \leqslant \frac{\nu_2}{\nu_1} \mathcal{R}_{\nu_1} g$;
4. $m^{-2} \sum\limits_{k=1}^m \mathcal{R}_\nu g_k \leqslant \mathcal{R}_\nu \sum\limits_{k=1}^m g_k \leqslant m^2 \sum\limits_{k=1}^m \mathcal{R}_\nu g_k$;
5. *Предположим, что* $\operatorname{supp} g \in [a, b]$ *для некоторых чисел* $a, b \in [-\infty, +\infty]$. *Тогда*

$$\left(\tfrac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \nu^{\frac{1}{3}} \sup g \leqslant \mathcal{R}_\nu g \leqslant \left(\left(\tfrac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \nu^{\frac{1}{3}} + (b - a)\right) \sup g. \tag{95}$$

Доказательство. Свойства 1 и 2 легко следуют из определения функционала $\mathcal{R}_\nu$. Действительно,

$$\mathcal{R}_\nu \alpha g = \inf_{\lambda \in (0, +\infty)} \max\left(\nu\lambda,\ \left\|\mathcal{L}_\lambda^{1/2} \alpha g\right\|_{L^1(\mathbb{R})}\right) = \inf_{\lambda \in (0, +\infty)} \max\left(\nu\lambda,\ \alpha\left\|\mathcal{L}_{\alpha^{-1}\lambda}^{1/2} g\right\|_{L^1(\mathbb{R})}\right) =$$
$$\inf_{\lambda \in (0, +\infty)} \max\left(\nu\alpha\lambda,\ \alpha\left\|\mathcal{L}_\lambda^{1/2} g\right\|_{L^1(\mathbb{R})}\right) = \alpha \mathcal{R}_\nu g;$$
$$\mathcal{R}_\nu g_1 = \inf_{\lambda \in (0, +\infty)} \max\left(\nu\lambda,\ \left\|\mathcal{L}_\lambda^{1/2} g_1\right\|_{L^1(\mathbb{R})}\right) \leqslant \inf_{\lambda \in (0, +\infty)} \max\left(\nu\lambda,\ \left\|\mathcal{L}_\lambda^{1/2} g_2\right\|_{L^1(\mathbb{R})}\right) = \mathcal{R}_\nu g_2.$$

Теперь приступим к доказательству 3-его свойства. Заметим, что неравенство $\mathcal{R}_{\nu_1} g \leqslant \mathcal{R}_{\nu_2} g$ очевидно. Действительно,

$$\mathcal{R}_{\nu_1} g = \inf_{\lambda \in (0, +\infty)} \max\left(\nu_1\lambda,\ \left\|\mathcal{L}_\lambda^{1/2} g\right\|_{L^1(\mathbb{R})}\right) \leqslant \inf_{\lambda \in (0, +\infty)} \max\left(\nu_2\lambda,\ \left\|\mathcal{L}_\lambda^{1/2} g\right\|_{L^1(\mathbb{R})}\right) = \mathcal{R}_{\nu_2} g.$$

Далее обозначим частное ν_2/ν_1 символом α и докажем второе неравенство.

$$\mathcal{R}_{\nu_2} g = \inf_{\lambda \in (0, +\infty)} \max\left(\nu_2\lambda,\ \left\|\mathcal{L}_\lambda^{1/2} g\right\|_{L^1(\mathbb{R})}\right) = \inf_{\lambda \in (0, +\infty)} \max\left(\nu_2\alpha^2\lambda,\ \left\|\mathcal{L}_{\alpha^2\lambda}^{1/2} g\right\|_{L^1(\mathbb{R})}\right) \overset{(91)}{\leqslant}$$
$$\inf_{\lambda \in (0, +\infty)} \max\left(\nu_2\alpha\lambda,\ \alpha\left\|\mathcal{L}_\lambda^{1/2} g\right\|_{L^1(\mathbb{R})}\right) = \alpha \mathcal{R}_{\nu_2} g.$$

Для доказательства верхней оценки из пункта 4 введём числа λ и λ_k, такие что

$$\nu\lambda = \left\|\mathcal{L}_\lambda^{1/2} \sum_{k=1}^m g_k\right\|_{L^1(\mathbb{R})}, \qquad \forall k \in [1; m]\colon \quad \nu\lambda_k = \left\|\mathcal{L}_{\lambda_k}^{1/2} g_k\right\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

В силу 2-ого свойства и того, что $\nu\lambda_k = \mathcal{R}_\nu g_k$, $\nu\lambda = \mathcal{R}_\nu \sum_{k=1}^m g_k$ справедливо неравенство $\lambda \geqslant \lambda_k$ для любого $k \in [1; m]$. Поэтому

$$\mathcal{R}_\nu \sum_{k=1}^m g_k = \left\|\mathcal{L}_\lambda^{1/2} \sum_{k=1}^m g_k\right\|_{L^1(\mathbb{R})} \overset{(93)}{\leqslant} m^2 \sum_{k=1}^m \left\|\mathcal{L}_\lambda^{1/2} g_k\right\|_{L^1(\mathbb{R})} \leqslant$$
$$m^2 \sum_{k=1}^m \left\|\mathcal{L}_{\lambda_k}^{1/2} g_k\right\|_{L^1(\mathbb{R})} = m^2 \sum_{k=1}^m \mathcal{R}_\nu g_k.$$

Приступим к доказательству нижней оценки.

$$\mathcal{R}_\nu \sum_{k=1}^{m} g_k = \inf_{\lambda\in(0,+\infty)} \max\Big(\nu\lambda,\ \Big\|\mathcal{L}_\lambda^{1/2}\sum_{k=1}^{m} g_k\Big\|_{L^1(\mathbb{R})}\Big) \overset{(93)}{\geqslant}$$
$$\inf_{\lambda\in(0,+\infty)} \max\Big(\nu\lambda,\ m^{-1}\sum_{k=1}^{m}\Big\|\mathcal{L}_\lambda^{1/2} g_k\Big\|_{L^1(\mathbb{R})}\Big) \geqslant$$
$$\inf_{\lambda\in(0,+\infty)} m^{-1}\sum_{k=1}^{m} \max\Big(\nu\lambda,\ m^{-1}\Big\|\mathcal{L}_\lambda^{1/2} g_k\Big\|_{L^1(\mathbb{R})}\Big) \geqslant$$
$$m^{-2}\sum_{k=1}^{m}\inf_{\lambda\in(0,+\infty)} \max\Big(\nu\lambda,\ \Big\|\mathcal{L}_\lambda^{1/2} g_k\Big\|_{L^1(\mathbb{R})}\Big) = m^{-2}\sum_{k=1}^{m}\mathcal{R}_\nu g_k.$$

Нам осталось доказать 5-ое свойство. Обозначим величину $\sup g$ буквой s и будем полагать, что для чисел $\lambda_0, \lambda_1 \in (0,+\infty)$ справедливы следующие равенства:

$$\nu\lambda_0 = \Big\|\mathcal{L}_{\lambda_0}^{1/2} s\chi_{\{0\}}\Big\|_{L^1(\mathbb{R})}, \qquad \nu\lambda_1 = \Big\|\mathcal{L}_{\lambda_1}^{1/2} s\chi_{[a,b]}\Big\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Заметим, что $\lambda_1 \geqslant \lambda_0$. Найдём величину $\Big\|\mathcal{L}_\lambda^{1/2} s\chi\Big\|_{L^1(\mathbb{R})}$ по аналогии с вычислением (84).

$$\Big\|\mathcal{L}_\lambda^{1/2} s\chi_{[a,b]}\Big\|_{L^1(\mathbb{R})} = \Big\|\big(\mathcal{L}_{\sqrt{\lambda}}\sqrt{s}\chi_{[a,b]}\big)^2\Big\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_a^b s\,\mathrm{d}t + 2\int_0^{\sqrt{\lambda^{-1}s}}(\sqrt{\lambda}t)^2\,\mathrm{d}t =$$
$$(b-a)s + \tfrac{2}{3}\lambda t^3\Big|_0^{\sqrt{\lambda^{-1}s}} = (b-a)s + \tfrac{2}{3}\lambda^{-\frac{1}{2}}s^{\frac{3}{2}}.$$

Далее найдём число λ_0.

$$\nu\lambda_0 = \Big\|\mathcal{L}_{\lambda_0}^{1/2} s\chi_{\{0\}}\Big\|_{L^1(\mathbb{R})} = \tfrac{2}{3}\lambda_0^{-\frac{1}{2}}s^{\frac{3}{2}}; \tag{96}$$
$$\nu^{\frac{3}{2}}\lambda_0^{\frac{3}{2}} = \tfrac{2}{3}\nu^{\frac{1}{2}}s^{\frac{3}{2}}; \qquad \nu\lambda_0 = \left(\tfrac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}\nu^{\frac{1}{3}}s.$$

Теперь несложно оценить снизу величину $\mathcal{R}_\nu g$.

$$\mathcal{R}_\nu g \geqslant \mathcal{R}_\nu s\chi_{\{0\}} = \nu\lambda_0 = \left(\tfrac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}\nu^{\frac{1}{3}}s.$$

Верхнюю оценку можно получить следующим образом:

$$\mathcal{R}_\nu g \leqslant \mathcal{R}s\chi_{[a,b]} = \Big\|\mathcal{L}_{\lambda_1}^{1/2} s\chi_{[a,b]}\Big\|_{L^1(\mathbb{R})} \leqslant \Big\|\mathcal{L}_{\lambda_0}^{1/2} s\chi_{[a,b]}\Big\|_{L^1(\mathbb{R})} =$$
$$(b-a)s + \tfrac{2}{3}\lambda_0^{-\frac{1}{2}}s^{\frac{3}{2}} \overset{(96)}{=} (b-a)s + \nu\lambda_0 = (b-a)s + \left(\tfrac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}\nu^{\frac{1}{3}}s.$$

□

Приступим к доказательству основных результатов.

7.2. Доказательство основных результатов

Теперь мы готовы получить первую приемлемую оценку.

Предложение 7.10. *Рассмотрим число $\nu = 2000$ и неотрицательную не обязательно локально конечную функцию $\mathbf{f}_2\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, такую что $\mathbf{f}_2(x) = 0$ при $x \leqslant 1$. Тогда справедлива следующая приемлемая оценка:*

$$1.002 \cdot 0.064\, \mathcal{R}_\nu \widehat{\mathbf{f}}_2 \leqslant \mathcal{A}[\mathbf{f}_2](0) \leqslant 40\, \mathcal{R}_\nu \widehat{\mathbf{f}}_2. \tag{97}$$

При этом погрешность данной приемлемой оценки не превосходит 625.

Доказательство. Будем сначала считать, что функция $\mathbf{f}_2$ такова, что $\left\|\mathcal{L}_1^{1/2} \widehat{\mathbf{f}}_2\right\|_{L^1(\mathbb{R})} \in (0, +\infty)$. В частности, тогда $\widehat{\mathbf{f}}_2(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ и функция $\mathbf{f}_2$ подходит под условие леммы 7.4. Предположим, что число λ удовлетворяет равенству $\nu\lambda = \left\|\mathcal{L}_\lambda^{1/2} \widehat{\mathbf{f}}_2\right\|_{L^1(\mathbb{R})}$. Заметим, что в этом случае, применяя лемму 7.4, мы можем вместо неравенства (88) требовать выполнения следующего соотношения:

$$\tfrac{3}{2}\nu \max\left(\rho_1^3, \left(\tfrac{1}{2}r_2(1-r_2)\right)^3\right) \leqslant 1. \tag{98}$$

Действительно, если число ν удовлетворяет неравенствам (98), то в силу 5-ого свойства из леммы 7.9 справедливы следующие соотношения:

$$\lambda \geqslant \left(\tfrac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \nu^{-\frac{2}{3}} \sup \widehat{\mathbf{f}}_2 \overset{(98)}{\geqslant} \max(\rho_1^2, \left(\tfrac{1}{2}r_2(1-r_2)\right)^2) \sup \widehat{\mathbf{f}}_2 = \max\left(\rho_1^2, (c_9(r_2))^{-1}\right) \sup \widehat{\mathbf{f}}_2.$$

Заметим, что полученное неравенство равносильно оценке (88). Пусть нам даны числа $\rho_1 > 0$ и $r_2 \in (0,1)$, такие что выполнена оценка (98). Тогда мы можем считать, что выполнено соотношение (88), а значит, в силу леммы 7.4 справедливы неравенства (89). При это можно взять параметр $\Delta = r_2 \left(\frac{3}{2\nu}\right)^{\frac{1}{3}}$, так как

$$r_2 \lambda^{-\frac{1}{2}} (\sup \widehat{\mathbf{f}}_2\,)^{1/2} \overset{(95)}{\leqslant} r_2 \left(\tfrac{3}{2\nu}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Запишем оценку (89) в следующем виде:

$$\begin{gathered}\left(c_0(4\rho_1)\nu^{-\frac{1}{3}} - c_2\rho^{-2}\nu^{-1}\right) \left\|\mathcal{L}_\lambda^{1/2} \widehat{\mathbf{f}}_2\right\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ \leqslant \mathcal{A}[\mathbf{f}_2](0) \leqslant \\ \left(c_4(\Delta)c_7(r_2) + c_5(\Delta)c_8(r_2)\nu^{-\frac{1}{3}} + c_6(\Delta)c_9(r_2)\nu^{-1}\right) \left\|\mathcal{L}_\lambda^{1/2} \widehat{\mathbf{f}}_2\right\|_{L^1(\mathbb{R})}\end{gathered}$$

и напомним формулы для констант, которые участвуют в получившейся оценке:

$$\begin{gathered} c_0(t) = \left(\tfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \left(t + \tfrac{2}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}, \quad c_2 = \frac{1 - 2^{-\frac{1}{3}}}{3}, \quad c_4(t) = \frac{e^{2t} - 1}{2t}, \\ c_5(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} e^{3(t+1)} + \sqrt{3/2}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad c_6(t) = 7e^{2t}, \quad c_7(t) = \left(\tfrac{1}{3}t^2 - t + 1\right)^{-1}, \\ c_8(t) = \left(t^{-1}c_7(t)\right)^{\frac{2}{3}}, \quad c_9(t) = \left(\tfrac{1}{2}t(1-t)\right)^{-2}, \quad \Delta = r_2\left(\tfrac{3}{2\nu}\right)^{\frac{1}{3}}. \end{gathered}$$

Далее подставим конкретные значения параметров ρ_1, r_2 и ν. А именно, возьмём $\nu = 2000$, $\rho_1 = 0.06$ и $r_2 = 0.05$. В этом случае верна оценка (98) и справедливы следующие неравенства:

$$\begin{gathered} c_0(4\rho_1)\nu^{-\frac{1}{3}} - c_2\rho^{-2}\nu^{-1} \geqslant 1.001 \cdot 0.064; \\ c_4(\Delta)c_7(r_2) + c_5(\Delta)c_8(r_2)\nu^{-\frac{1}{3}} + c_6(\Delta)c_9(r_2)\nu^{-1} \leqslant 40. \end{gathered}$$

Таким образом, используя получившиеся неравенства и то, что $\left\|\mathcal{L}_\lambda^{1/2}\widehat{\mathbf{f}}_2\right\|_{L^1(\mathbb{R})} = \mathcal{R}_\nu\widehat{\mathbf{f}}_2$, мы можем убедиться в том, что верны следующие соотношения:

$$1.001\cdot 0.64\,\mathcal{R}_\nu\widehat{\mathbf{f}}_2 \leqslant \mathcal{A}[\mathbf{f}_2](0) \leqslant 40\,\mathcal{R}_\nu\widehat{\mathbf{f}}_2.$$

Теперь докажем, что данное неравенство верно для произвольной функции $\mathbf{f}_2$, удовлетворяющей условию предложения 7.10. Несложно видеть, что данные неравенства верны в случае, если $\mathbf{f}_2\equiv 0$. Если же $\left\|\mathcal{L}_1^{1/2}\widehat{\mathbf{f}}_2\right\|_{L^1(\mathbb{R})} = +\infty$, то и $\mathcal{R}_\nu\widehat{\mathbf{f}}_2 = +\infty$. Покажем, что величина $\mathcal{A}[\mathbf{f}_2](0)$ в этом случае тоже равна $+\infty$. В силу утверждения 2.10 и замечания 3.7 мы можем считать, что функция $\widehat{\mathbf{f}}_2$ ограничена и $\widehat{\mathbf{f}}_2(x)\to 0$ при $x\to+\infty$. Но тогда можно применить лемму 7.4 с числом $\lambda = 1$ и достаточно маленькими параметрами $\rho_1 > 0$, $r_2 > 0$, такими что выполнено соотношение (89). Осталось применить неравенство (89) и заключить, что $\mathcal{A}[\mathbf{f}_2](0) = +\infty$. □

Имея приемлемую оценку (97), несложно получить доказательство теоремы 18.

Доказательство теоремы 18. Применим предложение 7.10 и лемму 2.12 с параметрами $\mu_1 = 1.002\cdot 0.064$, $\mu_2 = 40$ и функционалами $R' = R'' = \mathcal{R}_\nu$. Заметим, что

$$1 + 2\frac{\mu_2}{\mu_1} = 1 + 2\cdot 1.002^{-1}\frac{40}{0.064} \leqslant 1 + 2\cdot 0.999\cdot 625 = 1250 + 1 - 1.25 \leqslant 1250.$$

Поэтому $\frac{\mu_1}{1+2\mu_2} \geqslant 1250^{-1}$. Значит можно применить оценку (33) и получить следующие соотношения:

$$1250^{-1}\left(40\,(\mathcal{R}_\nu\xi\mathbf{f}_1 + \mathcal{R}_\nu\xi\mathbf{f}_2) + \tfrac{1}{2}\sup\mathbf{f}_0\right) \leqslant \mathcal{A}[\mathbf{f}](0) \leqslant 40\,(\mathcal{R}_\nu\xi\mathbf{f}_1 + \mathcal{R}_\nu\xi\mathbf{f}_2) + \tfrac{1}{2}\sup\mathbf{f}_0.$$

Осталось воспользоваться неравенствами (3) и получить искомую оценку. □

Чтобы получить более удобную приемлемую оценку из теоремы 16 обратимся к лемме 7.9.

Доказательство теоремы 16. В силу соотношений (3) достаточно доказать, что

$$\mathcal{A}[\mathbf{f}](0) \asymp \mathcal{R}_\nu\mathbf{f}.$$

А это несложно сделать в силу уже доказанных в лемме 7.9 свойств функционала $\mathcal{R}_\nu$ и утверждения 24. Действительно,

$$\mathcal{A}[\mathbf{f}](0) = \mathcal{A}[\mathbf{f}_0+\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_2](0) \overset{(2)}{\asymp} \mathcal{A}[\mathbf{f}_0](0) + \mathcal{A}[\mathbf{f}_1](0) + \mathcal{A}[\mathbf{f}_2](0) \overset{(97)}{\asymp}$$
$$\sup\mathbf{f}_0 + \mathcal{R}_\nu\mathbf{f}_1 + \mathcal{R}_\nu\mathbf{f}_2 \asymp \mathcal{R}_\nu\mathbf{f}_0 + \mathcal{R}_\nu\mathbf{f}_1 + \mathcal{R}_\nu\mathbf{f}_2 \asymp \mathcal{R}_\nu\mathbf{f}.$$

Отметим, что ввиду 3-его пункта из леммы 7.9 полученная приемлемая оценка верна для любого параметра $\nu\in(0,+\infty)$. □

Далее покажем, как получить приемлемую оценку величины $\mathcal{B}[\mathbf{f},\mathbf{g}](x_0,y_0)$ для любой точки $(x_0,y_0)\in\mathfrak{S}$, такой что $|x_0-y_0| < 1-\varepsilon$.

Доказательство следствия 19. Обозначим функцию $\mathcal{B}[\mathbf{f},\mathbf{g}]$ символом B. В силу теоремы 16 нам достаточно показать, что для любой точки $(x,y)\in\mathfrak{S}$, такой что $|x-y|\leqslant 1-\varepsilon$, справедливы следующие неравенства:

$$\varepsilon B\left(\tfrac{1}{2}(x+y),\tfrac{1}{2}(x+y)\right) \leqslant B(x,y) \leqslant (2-\varepsilon)B\left(\tfrac{1}{2}(x+y),\tfrac{1}{2}(x+y)\right).$$

Предположим, что $y \geqslant x$ и, обозначив величину $\frac{1}{2}(y-x)$ символом t, заметим, что эта оценка следуют из цепочек неравенств, которые приведены ниже:

$$B(x, x+2t) \geqslant \tfrac{1-2t}{1-t}\, B(x, x+t) \geqslant \tfrac{1-t}{1} \cdot \tfrac{1-2t}{1-t}\, B(x+t, x+t) \geqslant \varepsilon B(\tfrac{1}{2}(x+y), \tfrac{1}{2}(x+y));$$
$$B(x, x+2t) \leqslant \tfrac{1+2t}{1+t}\, B(x, x+t) \leqslant \tfrac{1+t}{1} \cdot \tfrac{1+2t}{1+t}\, B(x+t, x+t) \leqslant (2-\varepsilon) B(\tfrac{1}{2}(x+y), \tfrac{1}{2}(x+y)).$$

□

Теперь приведём доказательство леммы 20 в качестве примера применения теоремы 16.

Доказательство леммы 20. Без ограничения общности будем считать, что $\mathbf{g} = 0$. Поэтому нам достаточно доказать, что $e^{-2t}\mathcal{A}[\mathbf{f}, 0](t) = o(1)$ при $t \to +\infty$. Заметим, что $\xi_1(x) \asymp e^{-2|x|}$, поэтому функция $\mathcal{L}_\lambda^{1/2}\left(e^{-2|x|}\mathbf{f}(x)\right)$ имеет конечную L^1-норму. Введём функцию $g(x) = e^{-2|x|}\mathbf{f}(x)$ и оценим сверху величину $e^{-2t}\mathcal{A}[\mathbf{f}](t)$.

$$e^{-2t}\mathcal{A}[\mathbf{f}](t) \lesssim e^{-2t}\mathcal{R}_1\xi_1(x-t)\mathbf{f}(x) \asymp \mathcal{R}_1 e^{-2|x-t|-2t}\,\mathbf{f}(x) =$$
$$\inf_{\lambda\in(0,+\infty)} \max\left(\lambda, \left\|\mathcal{L}_\lambda^{1/2}\, e^{-2|x-t|-2t}\,\mathbf{f}(x)\right\|_{L^1(\mathbb{R})}\right) \lesssim$$
$$\inf_{\lambda\in(0,+\infty)} \max\left(\lambda, \max(\lambda^{-\frac{1}{2}}, 1)\left\|\mathcal{L}_1^{1/2}\, e^{2x-2|x-t|-2t} g(x)\right\|_{L^1(\mathbb{R})}\right).$$

Теперь возьмём число $\lambda = \left\|\mathcal{L}_1^{1/2}\, e^{2x-2|x-t|-2t} g(x)\right\|_{L^1(\mathbb{R})}$ и заметим, что нам осталось понять, почему величина $\left\|\mathcal{L}_1^{1/2}\, e^{2x-2|x-t|-2t} g(x)\right\|_{L^1(\mathbb{R})}$ стремится к нулю при $t \to +\infty$. Несложно видеть, что

$$e^{2x-2|x-t|-2t} \leqslant e^{-t} + \chi_{[t/2,+\infty)}(x).$$

Поэтому

$$\left\|\mathcal{L}_1^{1/2}\, e^{2x-2|x-t|-2t} g(x)\right\|_{L^1(\mathbb{R})} \lesssim \left\|\mathcal{L}_1^{1/2}\, e^{-t} g(x)\right\|_{L^1(\mathbb{R})} + \left\|\mathcal{L}_1^{1/2}\, \chi_{[t/2,+\infty)} g(x)\right\|_{L^1(\mathbb{R})} =$$
$$e^{-t}\left\|\mathcal{L}_{e^t}^{1/2}\, g(x)\right\|_{L^1(\mathbb{R})} + \left\|\mathcal{L}_1^{1/2}\, \chi_{[t/2,+\infty)} g(x)\right\|_{L^1\left(t/2-\sqrt{\sup g},\, +\infty\right)} \leqslant$$
$$e^{-t}\left\|\mathcal{L}_1^{1/2}\, g(x)\right\|_{L^1(\mathbb{R})} + \left\|\mathcal{L}_1^{1/2}\, g(x)\right\|_{L^1\left(t/2-\sqrt{\sup g},\, +\infty\right)}.$$

Легко видеть, что слагаемые в получившемся выражении стремятся к 0 при $t \to +\infty$.

□

Список обозначений

В этой работе мы будем использовать следующие обозначения.

mes — стандартная мера Лебега на прямой.

$W\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ — W-функция Ламберта. Эта функция определяется как обратная к функции $f(w) = we^w$.

Через (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$ и $[a,b]$ мы будем обозначать промежутки прямой с открытыми и замкнутыми концами. Множества целых чисел, принадлежащих этим промежуткам обозначим через $(a;b)$, $[a;b)$, $(a;b]$ и $[a;b]$. Например, $\mathbb{N} = [1;+\infty)$.

При введении новых обозначений мы также будем придерживаться следующих договорённостей.

Символами $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ будем обозначать граничные значения минимальной бивогнутой функции. Символы f и g при этом будут играть роль произвольных функций.

В работе будет присутствовать некоторое количество констант. Некоторые из них мы будем обозначать символами c_i, μ_j и ν_k. Как правило, c_i — это константы, конкретное значение которых не играет большой роли и влияет только на точность вычислений. Символами μ_j мы будем обозначать ключевые константы или использующиеся в леммах параметры, значения которых могут варьироваться. Числа ν_k будут соответствовать переменным, значения которых мы будем выбирать таким образом, чтобы получающие оценки были оптимальными.

Список литературы

[1] Dacorogna, Bernard. Direct Methods in the Calculus of Variations. 2008.

[2] Kirchheim, B.; Kristensen, J. On Rank One Convex Functions that are Homogeneous of Degree One. Arch Rational Mech Anal 221, 527–558, 2016.

[3] Kazaniecki Krystian; Stolyarov Dmitriy M.; Wojciechowski Michal. Anisotropic Ornstein noninequalities. Anal. PDE 10 (2) 351 - 366, 2017.

[4] Kurka Ondřej; Pokorný Dušan. Notes on the trace problem for separately convex functions. ESAIM: COCV 23 (4) 1617-1648, 2017.

[5] Burkholder D. L. Boundary Value Problems and Sharp Inequalities for Martingale Transforms. Ann. Probab. 12 (3) 647 - 702, August, 1984.

[6] Osękowski, Adam. Sharp Martingale and Semimartingale Inequalities, 2012.

[7] Ivanisvili, Paata; Osipov, Nikolay N.; Stolyarov, Dmitriy M.; Vasyunin, Vasily I.; Zatitskiy, Pavel B. Bellman function for extremal problems in BMO. Trans. Amer. Math. Soc. 368 (2016), no. 5, 3415–3468.

[8] Ivanisvili, P.; Stolyarov, D. M.; Vasyunin, V. I.; Zatitskiy, P. B. Bellman function for extremal problems in BMO II: Evolution. Memoirs of the American Mathematical Society, 255 (1220), 1-148, 2018.

[9] Widder, D. V. Functions Harmonic in a Strip. Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 12, no. 1, pp. 67–72. JSTOR, 1961.

[10] Н. В. Крылов. Гладкость функции выигрыша для управляемого диффузионного процесса в области, Изв. АН СССР. Сер. матем., 53:1 (1989), 66–96; Math. USSR-Izv., 34:1 (1990), 65–95.