Санкт-Петербургский государственный универсиет

Блудов Михаил Васильевич

Выпускная квалификационная работа

Цветная теорема Тверберга для неизбежных комплексов

Бакалавриат
направление 01.03.01 «Математика»
основная образовательная программа СВ.5000.2017 «Математика»

Научный руководитель:
профессор, факультет математики и компьютерных наук, Санкт-Петербургский государственный университет,
доктор физико-математических наук,
Панина Гаянэ Юрьевна

Рецензент:
профессор,
математический институт Сербской академии наук и искусств,
Ph.D.,
Раде Живалевич

Санкт-Петербург
2021

1 Введение

Теоремы типа Тверберга и Ван Кампена-Флореса уже многие годы являются центральной темой для исследований в комбинаторной геометрии. Среди наиболее важных результатов выделим нахождение контрпримеров к общей топологической теореме Тверберга [6, 11, 3] . Однако были получены положительные результаты в других направлениях.

Для "сбалансированных" комплексов (определение 1.8) была получена "сбалансированная теорема типа Ван Кампена-Флореса" [9, Theorem 1.2]. Затем в [7] с помощью нового подхода, основанного на концепции "сбалансированности", "коллективной неизбежности" (определение 1.11) и методах дискретной теории Морса [5], была получена теорема 1.2 (теорема Тверберга для коллективно-неизбежных комплексов), которая является обобщением [9, Theorem 1.2] и представляется наиболее общим результатом типа Тверберга и Ван Кампена-Флореса. Используя идею коллективной (r, s)-неизбежности, в этой работе было получено небольшое обобщение теоремы 1.2.

Ещё одно направление исследований состоит в изучении "цветных теорем типа Тверберга" [17, 1]. В [8], среди прочего, была получена "сбалансированная цветная теорема Тверберга" 1.3. Эта теорема использует понятие "сбалансированности" и методы дискретной теории Морса и является родственной для теоремы 1.2 (но при этом она не использует понятие неизбежности). Основной результат этой работы состоит в том, что было получено обобщение теоремы 1.3 с помощью концепции коллективной неизбежности (теорема 2.1) (и тем самым получено некоторое слияние теорем). Идею доказательства мы заимствуем из доказательства исходной теоремы 1.3, дополняя её существенными деталями.

1.1 Предварительные определения

Определение 1.1. Под $[m]$ будем подразумевать множество $\{1, \dots .m\}$, а $2^{[m]}$ – множество всех подмножеств $[m]$. Мы также не будем различать $2^{[m]}$ и $\Delta_{[m]}$ – комбинаторный симплекс на m вершинах размерности $N = m - 1$ (мы также отождествляем симплекс Δ^N с комбинаторным $\Delta_{[m]}$).

Определение 1.2. *Симплициальным комплексом* будем называть пару (K, V), где V – некоторое множество (базовое множество, обычно $[m]$), $K \subset 2^V$ и удовлетворяет свойству наследственности: если $A \in K$ и $B \subset A$, то $B \in K$. Другими словами, K – множество симплексов комплекса. Для удобства, мы будем отождествлять K и сам симплициальный комплекс. Под $A \uplus B$ будем иметь в виду $A \times \{1\} \cup B \times \{2\}$ – формальное дизъюнктное объединение.

Определение 1.3. Пусть K, L – симплициальные комплексы. Тогда *джойном* [12] мы назовем $K * L$ – симплициальный комплекс со множеством вершин $V(K) \uplus V(L)$ и со множеством симплексов $\{F \uplus G : F \in K, G \in L\}$. Т.е. мы взяли дизъюнктное объединение вершин двух симплексов, затем скомбинировали все симплексы первого комплекса с симплексами второго.

Определение 1.4. Пусть $\mathscr{K} = \langle K_1, \ldots, K_r \rangle$ – семейство симплициальных комплексов, $K_i \subset 2^{[m]}$. Тогда *проколотым джойном* этого семейства назовем симплициальный комплекс $(\mathscr{K}_\Delta^*) = K_1 *_\Delta \ldots *_\Delta K_r \subset (2^{[m]})^{*r}$ и $A \in \mathscr{K}_\Delta^* \iff A = \uplus_{i=1}^r A_i$, A_j попарно дизъюнктны и $A_j \in K_j$ для j от 1 до r.

Определение 1.5. *Симметрический проколотый джойн* определяется как

$$SymmDelJoin(\mathscr{K}) = \bigcup_{\pi \in S_r} K_{\pi_1} *_\Delta \ldots *_\Delta K_{\pi_r} \subseteq (2^{[m]})^{*r},$$

где S_r – симметрическая группа. Элементы этого джойна имеют вид $A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_r \in SymmDelJoin(\mathscr{K})$. Для удобства будем обозначать их $(A_1, \ldots, A_r, B)$, где B – это $[m] \backslash \bigcup_{i=1}^r A_i$. Т.о. $(A_1, \ldots, A_r, B)$ является дизъюнктным разбиением множества вершин $[m]$.

Определение 1.6. *Раскраской* множества вершин $[m]$ в $k+1$ цвет назовем разбиение вершин на $k+1$ множество: $[m] = C_1 \uplus \ldots \uplus C_{k+1}$. Подмножество вершин V будем называть радужным, если каждый из цветов присутствует в нем не более одного раза, т.е. $|V \cap C_i| \leq 1$ для $i = 1, \ldots, k+1$. Симплекс $\Delta \subset \Delta_{[m]}$ назовем *радужным*, если множество его вершин $V = vert\Delta$ является радужным. Симплициальный комплекс K будем называть радужным, если все его симплексы – радужные. Через $Col\Delta_{[m]}$ обозначим симплициальный комплекс, образованный из всех радужных симплексов в $\Delta_{[m]}$.

Определение 1.7. Пусть дан симплициальный комплекс $K \subseteq \Delta_{[m]}$. Его *d-скелетом* $K^{(d)}$ будем называть множество всех таких симплексов из K, что их размерность не превосходит d.

Определение 1.8. Будем называть симплициальный комплекс $K \subset 2^m$ *(m,k)-сбалансированным*, если $\Delta_{[m]}^{(k-1)} \subseteq K \subseteq \Delta_{[m]}^{(k)}$. И если $[m]$ раскрашено, то будем называть его *(m,k)-радужно сбалансированным*, если $Col\Delta_{[m]}^{(k-1)} \subseteq K \subseteq Col\Delta_{[m]}^{(k)}$.

1.2 Коллективно-неизбежные комплексы

Коллективно-неизбежные комплексы как самостоятельный комбинаторный объект систематически начали изучаться в [13]. В [10] авторы изучают топологические свойства r-неизбежных комплексов. Здесь дадим определение этого понятия и приведем один из результатов работы [10].

Определение 1.9. Пусть дан симплициальный комплекс K на множестве вершин $[m]$. Тогда он называется r-неизбежным, если если для любого упорядоченного разбиения $[m]$ вида $(A_1, \ldots, A_r, B)$ найдётся такой индекс i, что $A_i \in K$ для $i = 1, \ldots, r$.

В [10] даётся также естественное обобщение:

Определение 1.10. Пусть дан симплициальный комплекс K на множестве вершин $[m]$. Будем называеть его (r,s)-*неизбежным*, если для любого упорядоченного разбиения $[m]$ вида $(A_1,\ldots,A_r,B)$ найдутся такие s индексов, что $A_{i_j}\in K$ для $j=1,\ldots,s$.

Нас же будут интересовать коллективно r-неизбежные семейства комплексов. Сформулируем определения и для них [4]:

Определение 1.11. Пусть дано семейство $\mathscr{K}=\langle K_1,\ldots,K_r\rangle$ подкомплексов Δ_m. Будем называеть его *коллективно r-неизбежным*, если для любого упорядоченного разбиения $[m]$ вида $(A_1,\ldots,A_r,B)$ найдётся такой индекс i, что $A_i\in K_i$ для $i=1,\ldots,r$.

Определение 1.12. Пусть дано семейство $\mathscr{K}=\langle K_1,\ldots,K_r\rangle$ подкомплексов $\Delta_{[m]}$. Будем называеть его *коллективно* (r,s)-*неизбежным*, если для любого упорядоченного разбиения $[m]$ вида $(A_1,\ldots,A_r,B)$ найдутся такие s индексов, что $A_{i_j}\in K_{i_j}$ для $j=1,\ldots,s$.

В [10] был получен следующий интересный результат:

Теорема 1.1. *Пусть $r=p^\nu$ – степень простого. Пусть $K=K_1*\ldots*K_s$, где K_i – это r-неизбежный комплекс на m_i вершинах ($K_i\subseteq\Delta_{[m_i]}$) для каждого $i=1,\ldots,s$. Тогда если*

$$(r-1)(d+s+1)+1\leq m_1+\ldots+m_s,$$

то для любого непрерывного $f\colon K\to\mathbb{R}^d$ найдется r дизъюнктных граней в K таких, что их образы будут иметь непустое пересечение.

В этой теореме доказывается высокая связность джойна r-неизбежных комплексов. Эта теорема похожа на 1.2, однако в случае коллективной неизбежности и симметризации проколотого джойна оказывается, что для доказательства высокой связности нужно накладывать также условие (m,k)-сбалансированности, а само доказательство использует методы дискретной теории Морса.

1.3 Краткий обзор теорем типа Тверберга

"Теоремы типа Тверберга" – это общее название для семейства теорем, посвященных специальным разбиениям конечного множества точек в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$.

Оригинальная теорема Тверберга [14] утверждает, что если множество $S\subset\mathbb{R}^d$ т.ч. $|S|=(r-1)(d+1)+1$, то его можно разбить на r непустых непересекающихся частей $S_1,\ldots,S_r$ так, что пересечение их выпуклых оболочек будет непустым: $\cap_{i=1}^r conv(S_i)\neq\emptyset$.

Среди предшествующих, например, можем отметить теорему Радона о том, что множество из $d+2$ точек в $\mathbb{R}^d$ можно разбить на два так, что их выпуклые оболочки будут пересекаться.

Оригинальную теорему можно понимать так: S – это образ N-мерного симплекса Δ^N $(N = (r-1)(d+1))$ под действием некоторого аффинного отображения f, и утверждается, что найдется r непустых непересекающихся граней, что их образы пересекутся: $f(\Delta_1) \cap \ldots \cap f(\Delta_r) \neq \emptyset$.

Это утверждение можно расширить до топологической теоремы Тверберга [15, 2]: если f – произвольное непрерывное отображение

$$f \colon \Delta^{(r-1)(d+1)} \to \mathbb{R}^d$$

и $r = p^\nu$ – степень простого, то утверждение остается верным: найдется r непустых непересекающихся граней, что их образы пересекутся: $f(\Delta_1) \cap \ldots \cap f(\Delta_r) \neq \emptyset$.

Дальнейшие обобщения можно получать, накладывая различные условия на искомые грани Δ_i, например, можем требовать чтобы каждая грань выбиралась из соответствующего ей симплициального комплекса, $\Delta_i \in K_i$, $K_i \subset \Delta^N$. Например, в [7], среди прочего, был получен следующий (основной) результат:

Теорема 1.2 (Теорема Тверберга для коллективно-неизбежных комплексов)**.** *Пусть $\mathscr{K} = \langle K_1, \ldots, K_r \rangle$ – это коллективно r-неизбежное семейство подкомплексов Δ^N, где $r = p^\nu$ – степень простого, $N = (r-1)(d+2)$ и $m = N+1$. Если для всех $i = 1, \ldots, r$ выполнено, что K_i – (m,k)-сбалансированно, то для любого непрерывного отображения $f \colon \Delta^N \to \mathbb{R}^d$ найдется r непересекающихся граней Δ_i, что $f(\Delta_1) \cap \ldots \cap f(\Delta_r) \neq \emptyset$ и для каждого i верно, что $\Delta_i \in K_i$.*

Другой путь обобщения – это раскраска вершин и требование условия "радужности" искомых граней – т.е. все вершины в грани должны быть разноцветными. В [8], в частности, была получена следующая теорема:

Теорема 1.3 (Сбалансированная цветная теорема Тверберга)**.** *Пусть $r = p^\nu$ – степень простого. Пусть целые $d \geq 1$, $k \geq 0$ и $0 < s \leq r$ таковы, что $r(k-1) + s = (r-1)d$. Пусть $[m] = C_1 \uplus \ldots \uplus C_{k+1}$ – раскраска вершин Δ^N, где $N + 1 = m = (2r-1)(k+1)$ и $|C_i| = 2r - 1$ для каждого i. Тогда для любого непрерывного отображения f : $\Delta^N \to \mathbb{R}^d$ найдется r дизъюнктных радужных симплексов, т.ч. $f(\Delta_1) \ldots \cap f(\Delta_r) \neq \emptyset$ и $dim(\Delta_i) \leq k$ для $i = 1, \ldots, s$, $dim(\Delta_j) \leq k-1$ для $j = s+1, \ldots, r$.*

Далее мы докажем обобщение этой теоремы (и получим, в некотором смысле, смесь из последних двух теорем).

Определение 1.13. Пусть дан кортеж $\mathscr{K} = \langle K_1, \ldots, K_r \rangle$ подкомплексов Δ_m. Если все K_i являются радужными комплексами для фиксированной раскраски $[m]$, то будем называть $\mathscr{K}$ коллективно (r,s)*-радужно-неизбежным*, если для любого упорядоченного разбиения вида $(A_1, \ldots, A_r, B)$ такого, что все симплексы A_i являются радужными, найдутся такие s индексов, что $A_{i_j} \in K_{i_j}$ для $j = 1, \ldots, s$.

2 Цветная теорема Тверберга для радужно-неизбежных комплексов

Теорема 2.1 (Цветная теорема Тверберга для радужно-неизбежных комплексов)**.** *Пусть $r = p^\nu$ – степень простого. Пусть целые $d \geq 1$, $k \geq 0$ и $0 < s \leq r$ таковы, что $r(k-1)+s = (r-1)d$. Пусть $[m] = C_1 \uplus \ldots \uplus C_{k+1}$ – раскраска вершин Δ_m, где $m = (2r-1)(k+1)$ и $|C_i| = 2r-1$ для каждого i. Пусть также $\mathscr{K} = \langle K_i \rangle_{i=1}^r$ – это коллективно (r,s)-радужно-неизбежное семейство подкомплексов $\Delta_{[m]}$ и K_i (m,k)-радужно-сбалансирован для каждого i . Тогда для любого непрерывного отображения $f : \Delta_{[m]} \to \mathbb{R}^d$ найдется r дизъюнктных радужных симплексов, т.ч. $f(\Delta_1) \ldots \cap f(\Delta_r) \neq \emptyset$ и $\Delta_i \in K_i$.*

Доказательство теоремы. Эта теорема получается из стандартного рассуждения, которое можно найти, например, в [7] или в [8]. Предположим противное, то есть нашлось такое отображение $f\colon \Delta_{[m]} \to \mathbb{R}^d$, что при этом образы различных граней не пересекаются.

Построим естественным образом S_r-эквивариантное отображение

$$\Phi_f : SymmDelJoin(\mathscr{K}) \to (\mathbb{R}^d)^{*r} = \mathbb{R}^{dr+r-1}.$$

Образ этого отображения не задевает диагональ $D \subset \mathbb{R}^{dr+r-1}$. Заметим, что D – подпространство размерности d пространства $\mathbb{R}^{dr+r-1}$. Заметим, что мы можем убрать D и оставшееся $\mathbb{R}^{dr+r-1} \setminus D$ эквивариантно гомотопно $S^{(r-1)(d+1)-1}$ – имеет связность $rd+r-d-3$. Связность $SymmDelJoin(\mathscr{K})$ равна $rk+s-2 = rd+r-d-2$ – получили противоречие с теоремой Воловикова [16]. ■

Осталось проверить, что $SymmDelJoin(\mathscr{K})$ имеет требуемую связность.

Теорема 2.2. *Пусть $[m] = C_1 \uplus \ldots \uplus C_{k+1}$ – раскраска вершин Δ_m, где $m = (2r-1)(k+1)$ и $|C_i| = 2r-1$ для каждого i. Пусть $\mathscr{K} = \langle K_i \rangle_{i=1}^r$. Пусть также все K_i радужные, (m,k)-радужно-сбалансированные и $\mathscr{K}$ коллективно (r,s)-радужно-неизбежное семейство подкомплексов Δ_m. Тогда $SymmDelJoin(\mathscr{K})$ $rk+s-2$ связно.*

Доказательство теоремы. Доказывается эта теорема с помощью дискретной теории Морса [5]. Суть ДТМ заключается в том, что мы построим дискретное векторное поле на нашем комплексе, докажем его ацикличность и, изучив критические симплексы, получим желаемое.

Мы будем понимать дискретное векторное поле как набор пар (или стрелок) из симплекса и его гиперграни. Каждый симплекс может участвовать не более чем в одной паре. Спариваем симплексы, пока это возможно. Симплексы, оставшиеся без пары, будем называть критическими. Это поле будет ацикличным, если в нем не найдется замкнутого градиентного пути. Под *градиентным путем* мы понимаем последовательность

$$G_0^p, G_0^{p+1}, G_1^p, ..., G_k^{p+1}, G_{k+1}^p,$$

где верхний индекс p указывает на размерность симплекса в нашем комплексе. Для нижнего индекса выполнено, что для каждого i : G_i^p в паре с G_i^{p+1} и $G_i^{p+1} > G_{i+1}^p$, $G_{i+1}^p \neq G_i^p$ и $G_{i+1}^{p+1} \neq G_i^{p+1}$.

После этого мы можем применить одну из основных теорем ДТМ о том, что если симплициальный комплекс с дискретной функцией Морса на нем имеет 1 нульмерную клетку и все оставшиеся клетки имеют размерность $> k$, то комплекс $k-1$ связен.

Построим дискретную функцию Морса так, что в итоге критическими симплексами будут только нульмерный симплекс (вершина) и симплексы, размерность которых не менее $rk+s-1$, то есть это те, в которых не менее $rk+s$ вершины. Это докажет, что пространство имеет связность $rk+s-2$.

Сделаем несколько замечаний про изучаемое пространство. Каждый из K_i содержит в себе все радужные симплексы на k вершинах и также содержит некоторый набор t_i радужных симплексов $D_{i,1}, \ldots, D_{i,t_j}$ на $k+1$ вершине, т.е. эти симплексы – максимальные по включению радужные симлексы, т.е. используют все возможные цвета.

Проводить построение ДФМ будем в несколько шагов.

Будем называть разбиение $(A_1, \ldots A_r, B)$ допустимым, если $(A_1, \ldots A_r, B) \in SymmDelJoin(\mathscr{K})$. Когда разбиение допустимо? Когда каждое из A_i радужно и при этом существует такая перестановка π, что $A_{\pi(i)} \in K_i$. С разбиением можем ассоциировать симплекс в $SymmDelJoin(\mathscr{K})$. Наша цель – спарить все симплексы в $SymmDelJoin(\mathscr{K})$, за исключением симплексов высокой размерности.

Симплекс назовем максимальным, если он не является гранью никакого другого симплекса из $SymmDelJoin(\mathscr{K})$.

Доказательство будет происходить в несколько шагов (всего их r). Каждый из шагов также будет разбит на $k+1$ подшаг. Каждый шаг - это процедура спаривания каких-то симплексов и анализ оставшихся.

Шаг 1 Спаривать будем только симплексы из $SymmDelJoin(\mathscr{K})$.

Шаг 1.1 Каждого цвета у нас $2r-1$ вершина. Пронумеруем их (цвета уже пронумерованы). Пусть есть симплекс $(A_1, \ldots A_r, B)$. Положим $a_1^1 = min(A_1, B) \cap C_1$ – минимальная вершина цвета 1 из A_1 и B. Тогда спарим $(A_1, \ldots A_r, B \cup a_1^1) \to (A_1 \cup a_1^1, \ldots A_r, B)$. Проанализируем, что получилось. Симплекс вида $(A_1 \cup a_1^1, \ldots A_r, B)$ не спарен $\iff \mathrm{A}_1 \cup a_1^1 = a_1^1$ и $B = [m]$ – это симплекс размерности 0 и он не будет спарен до конца всей процедуры. Симплекс вида $(A_1, \ldots A_r, B \cup a_1^1)$ не спарен, если в A_1 уже есть цвет 1 или симплекс после переноса a_1^1 получается недопустимым – то есть не принадлежит $SymmDelJoin(\mathscr{K})$.

Шаг 1.2 Положим $a_1^2 = min(A_1 \cup B \cap C_2)$ – минимальная вершина цвета 2 из A_1 и B. Тогда составим пару $(A_1, \ldots A_r, B \cup a_1^2) \to (A_1 \cup a_1^2, \ldots A_r, B)$ – если оба эти симплекса не были спарены на предыдущем этапе. Проанализируем, что получилось.

- симплекс вида $(A_1, \ldots A_r, B \cup a_1^2)$ остался не спаренным, если A_1 или уже содержит цвет 2, или при переносе a_1^2 получим недопустимый симплекс. Назовем такие разбиения "Шаг 1.2 тип 1 неспаренные"

- если симплекс вида $(A_1 \cup a_1^2, \dots A_r, B)$ неспарен, то это значит, что мы не можем перекинуть a_1^2 в B, т.е. $(A_1, \dots A_r, B \cup a_1^2)$ уже спарен на предыдущем этапе посредством a_1^1, т.е. $a_1^1 \in B$, в A_1 нет цвета 1 и $|A_1 \cup a_1^2| = k$. Назовем такие симплексы "Шаг 1.2 тип 2 неспаренным".

Продолжим по аналогии. Шаг $i.j$ типа 1 означает, что мы не можем переместить минимальный элемент цвета j из B в A_i. Типа 2 – не можем из A_i в B. Шаги до $1.k+1$ продолжаем по аналогии. Для дальнейших рассуждений нам понадобится модификация понятия "допустимости".

Определение 2.1. Назовем симплекс $(A_1, \dots, A_r, B)$ - "шаг i" максимально допустимым, если $|A_i| = k$ и при добавлении к A_i недостающего цвета мы получим недопустимый симплекс.

Лемма 2.3. *Если после шага 1 симплекс $(A_1, \dots A_r, B)$ является неспаренным, то:*

- $|A_1| = k + 1$, *или*
- $|A_1| = k$ *и* $(A_1, \dots A_r, B)$ – *"шаг 1" максимально допустимый.*

Шаг 2. На этом шаге будем спаривать, добавляя вершины к A_2.

Шаг 2.1 Положим $a_2^1 = min\left((A \cup B \cap C_2) \setminus [1, a_1^1)\right)$. Спарим $(A_1, A_2, \dots A_r, B \cup a_2^1) \to (A_1, A_2 \cup a_2^1, \dots A_r, B)$ – если оба эти симплекса не были спарены ранее.

- Если $(A_1, A_2, \dots A_r, B \cup a_2^1)$ остался без пары, то либо A_2 уже содержит цвет 1, либо $|A_2| = k$ и это "шаг 2" максимально допустимый симплекс. Это симплексы "шаг 2.1 типа 1".
- Если $(A_1, A_2 \cup a_2^1, \dots A_r, B)$ неспарен, то он "шаг 1" максимально допустимый и $|A_2| = k + 1$ Это симплекс "шаг 2.1 типа 2".

Лемма 2.4. *Если после шага* 2.1 *симплекс $(A_1, \dots A_r, B)$ является неспаренным, то:*

- $|A_2| = k + 1$, *или*
- $|A_2| = k$ *и* $(A_1, \dots A_r, B)$ – *"шаг 2" максимально допустимый.*

Шаги 2.2 – 2.k+1 – происходят аналогично. Собирая все вместе, можем сформулировать лемму.

Лемма 2.5. *Для шагов от* 1 *до* $r-1$ *числа* a_j^i *определены корректно. Заметим, что после* $r-1$ *шага если симплекс* $(A_1, \dots A_r, B)$ *остался неспаренным, то для всех* i *от* 1 *до* $r-1$ *мы знаем, что*

- $|A_i| = k + 1$ *или*

- $|A_i| = k$ *и* $(A_1, \dots A_r, B)$ *"шаг i" максимально допустимый.*

Шаг r

Шаг r.1 Положим $a_r^1 = min\left((A_r \cup B \cap C_2) \setminus [1, a_{r-1}^1)\right)$. Может получиться так, что $(A \cup B \cap C_2) \setminus [1, a_r^1) = \emptyset$, т.е. a_r^1 не определено. Тогда мы точно знаем, что для i от 1 до r все A_i содержат цвет 1. Такие неспаренные симплексы обозначим как "шаг r.1 типа 3". Если же все определено корректно, то продолжаем как ранее.

Шаг r.2 Положим $a_r^2 = min\left((A_r \cup B \cap C_2) \setminus [1, a_{r-1}^2)\right)$. Если определено некорректно, то это "шаг r.2 типа 3", все A_i содержат цвет 2. В противном случае продолжаем аналогично ранее описанной процедуре.

Шаги r.2 – r.k+1 – продолжаем шаги по аналогии.

Лемма 2.6. *Оставшиеся неспаренные симплексы либо максимальные, либо имеют высокую размерность.*

Доказательство леммы. Если симплекс неспарен, то для каждого i либо $|A_i| = k+1$, либо $|A_i| = k$ и он "шаг i" максимально допустим. Тогда либо он является максимальным, либо первые $|A_i| = k+1$ для $i = 1, \dots, r-1$ – уже высокая размерность. ∎

Утверждение 1. *Все неспаренные симплексы (за исключением нульмерного) имеют высокую размерность, а именно содержат не менее $rk + s$ точек.*

Доказательство утверждения. Достаточно рассмотреть максимальные симплексы среди неспаренных. Рассмотрим максимальный симплекс $(A_1, \dots A_r, B)$. Не умоляя общности будем считать, что $A_j \in K_j$ для всех j. Ещё раз заметим, что если для какого-то j имеем $|A_j| = k$ то $a_j^{i_j}$ – корректно определено (где i_j – это недостающий цвет в A_j). Все a_j^i различны. Пусть A_{j_l} – все такие, что $|A_{j_l}| = k$. Вернем во все множества недостающий им цвет, т.е. $A_{j_l} \mapsto A_{j_l} \cap a_{j_l}^{i_{j_l}}$. Получили новый, уже недопустимый симплекс, так как если к A_{j_l} добавить недостающий цвет, то мы получим что $A_{j_l} \cap a_{j_l}^{i_{j_l}} \notin K_{j_l}$ – иначе противоречие с максимальностью. Но воспользовавшись условием на (r, s)-радужную неизбежность у нашего семейства $\langle K_i \rangle_{i=1}^r$ мы найдем для нового симплекса как минимум s индексов, что $A_{i_j} \in K_{i_j}$ для $j = 1, \dots, s$ – это означает, что в изначальном наборе было как минимум s множеств размера $k+1$ – что и требовалось. ∎

Осталось показать ацикличность. Пусть есть градиентный путь

$$\alpha_0^p, \beta_0^{p+1}, \alpha_1^p, ..., \beta_m^{p+1}, \alpha_{m+1}^p.$$

Для всех симплексов α можем определить последовательность чисел

$$\Pi(\alpha) := (a_1^1, a_1^2, \dots, a_r^1 \dots, a_r^{k+1}),$$

где все a^i_j – те, которые появляются в алгоритме спариваний. Они определены корректно, кроме, быть может, шага r. Если α спарена на каком-то шаге, то на этом шаге определено и a^i_j. Если a^i_r не определено, то положим его равным ∞.

Лемма 2.7. *На градиентном пути* $\Pi(\alpha)$ *строго уменьшает свой лексикографический порядок. Отсюда следует, что градиентный путь ацикличен.*

Доказательство леммы. Для доказательства достаточно рассмотреть короткий путь

$$\alpha_0^p, \beta_0^{p+1}, \alpha_1^p, \beta_1^{p+1}.$$

Мы проведем разбор случаев.

1. Пусть $\alpha_0^p, \beta_0^{p+1}$ спарены добавлением цвета i к A_j, а α_1^p получается из β_0^{p+1} удалением цвета $i' > i$ из A_j.
   - Если для спаривания мы должны удалить цвет i из A_j в α_1^p, то путь на этом останавливается.
   - В противном случае, α_1^p спарен до шага $j.i$.
2. Пусть $\alpha_0^p, \beta_0^{p+1}$ спарены добавлением цвета i к A_j, а α_1^p получается из β_0^{p+1} удалением цвета $i' < i$ из A_j. Тогда α_1^p спарен до шага $j.i$.
3. Пусть $\alpha_0^p, \beta_0^{p+1}$ спарены добавлением цвета i к A_j, а α_1^p получается из β_0^{p+1} удалением цвета i' из A'_j с $j' < j$. Тогда
   - либо α_1^p спарен добавлением j', i',
   - либо α_1^p спарен до шага $j'.i'$.
4. Пусть $\alpha_0^p, \beta_0^{p+1}$ спарены добавлением цвета i к A_j, а α_1^p получается из β_0^{p+1} удалением цвета i' из A'_j с $j' > j$. Тогда
   - либо α_1^p спарен удалением цвета i из A_j и тем самым обрывает путь,
   - либо α_1^p спарен до шага $j'.i'$.

Таким образом, лемма доказана. А это завершает доказательство теоремы 2.2. ■

3 "Монохромная" теорема Тверберга для коллективно (r, s)-неизбежных комплексов

Мы можем немного обобщить теорему Тверберга [7] для коллективно-неизбежных комплексов: а именно, мы будем требовать теперь (r, s)-неизбежность.

Теорема 3.1 (Теорема Тверберга для (r,s)-неизбежных комплексов)**.** *Пусть $\mathscr{K} = \langle K_1,\dots,K_r\rangle$ – это коллективно (r,s)-неизбежное семейство подкомплексов Δ^N, где $r = p^\nu$ – степень простого, $N = (r-1)(d+2) - s + 1$ и $m = N+1$. Если для всех $i = 1,\dots,r$ выполнено, что K_i – (m,k)-сбалансированный, то для любого непрерывного отображения $f\colon \Delta^N \to \mathbb{R}^d$ найдется r непересекающихся граней Δ_i, что $f(\Delta_1)\cap\ldots\cap f(\Delta_r) \neq \emptyset$ и для каждого i верно, что $\Delta_i \in K_i$.*

Действительно, потребовав коллективную (r,s)-неизбежность, мы увеличим связность $SymmDelJoin(\mathscr{K})$ на $s-1$. Т.е. теперь она равна $m-r+s-2$. А тогда условие на то, что $m-r+s-2 \geq (r-1)(d+1)-1$ эквивалентно тому, что $N \geq (r-1)(d+2)-s+1$. Заметим, что подставив $s=1$ мы окажемся в точности в условиях исходной теоремы о коллективно-неизбежных комплексах. Таким образом, мы можем уменьшить число N (однако это приведет к увеличению числа k, ведь мы требуем условие (m,k)-сбалансированности, а чем выше параметр s, тем больше симплексов должно быть в комплексах K_i). Если же мы подставим $r=s$, то из условия (r,s)-неизбежности мы получим, что все K_i будут в точности $\Delta_{[m]}$ и мы получим в чистом виде топологическую теорему Тверберга: $N = (r-1)(d+2)-r+1 = (r-1)(d+1)$.

4 Коллективная (r,s)-неизбежность в терминах графов

Пусть $\mathscr{K} = \langle K_1,\dots,K_r\rangle$, при этом K_i – (m,k)-сбалансированы (или радужно-сбалансированы). Заметим, что такие K_i можно описать как $\Delta^{(k)}_{[m]} \setminus \mathscr{A}$, где $\mathscr{A}^i = \{A^i_1,\dots,A^i_{l_i}\}$ и для всех i,j имеем $|A^i_{j_i}| = k+1$. Т.е. $\mathscr{A}^i$ – это те симплексы, которых не хватает K_i до $\Delta^{(k)}_{[m]}$ (или $Col\Delta^{(k)}_{[m]}$). Тогда $\mathscr{K}$ можно сопоставить граф $\Gamma = \Gamma(\mathscr{K})$. Его вершины – пары (i,j), где $i = 1,\dots,r$ и для каждого i имеем $j = 1,\dots,l_i$. Две вершины (i,j) и (i',j') соединены ребром, если $i \neq i'$ и $A^i_j \cap A^{i'}_{j'} = \emptyset$. То есть это кнезеровский r-дольный граф $KG(\mathscr{A})$.

Предложение 4.1. *Если набор комплексов $\mathscr{K}$ является (r,s)-неизбежным, то в графе $\Gamma(\mathscr{K})$ нет клики размера $r-s+1$.*

Доказательство предложения. Действительно, если $\mathscr{K}$ является (r,s)-неизбежным, тогда если мы нашли в построенном графе Γ клику размера $r-s+1$, тогда мы нашли $r-s+1$ симплекс на $k+1$ вершине – причем заметим, что найденные симплексы $A^i_{j_i}$ не принадлежат соответствующим им комплексам K_i и при этом дизъюнктны. Тогда дополним их произвольным набором из $s-1$ симплекса так, что полученный набор из r симплексов получился бы упорядоченным разбиением множества вершин m на r дизъюнктных подмножеств. Полученный набор будет контрпримером к (r,s)-неизбежности $\mathscr{K}$. ∎

Замечание. В теореме 1 можем поменять условие (r,s)-неизбежности на отсутствие $r-s+1$-клики в $\Gamma(\mathscr{K})$. Доказательство при этом не поменяется.

Замечание. Обратное в общем случае, вообще говоря, не верно. Возьмем, например, k маленьким – например, если $m > (k+2)(r-s+1)$, то мы можем просто взять $r-s+1$ множество размера $k+2$ и тогда они не будут лежать ни в каких K_i. А если положить все K_i просто k-скелетами, то построенный на них кнезеровский граф будет пустым, но при этом они не будут (r,s)-неизбежными. Однако обратное будет верно в условиях теорем 1 и 2 (понятно, что все определения продолжаются на радужный случай). Это так, потому что все симплексы радужные, и в любом разбиении количество вершин в симплексах A_i не превосходит $k+1$. А тогда если в графе нет $r-s+1$ клики, то выбрав любое разбиение мы найдем s дизъюнктных множеств размера не более $k+1$, которые не лежат в соответствующих долях Г. Тогда они лежат в соответствующих комплексах K_i – откуда получаем коллективную радужную (r,s)-неизбежность.

5 Сравнение с предыдущими результатами

Теорема 1.3 является следствием теоремы 2.1. Действительно, рассматриваемое там конфигурационное пространство $\mathscr{C}$ является $SymmDelJoin(\mathscr{K})$, где $\mathscr{K} = \langle K_1, \ldots, K_r \rangle$, при этом $K_i = Col\Delta_{[m]}^{(k)}$ для $i = 1, \ldots, s$ и $K_i = Col\Delta_{[m]}^{(k-1)}$ для $i = s+1, \ldots, r$. Ясно, что такой набор симплексов обладает свойством коллективной (r,s)-радужной неизбежности. Остается только заметить, что (r,s)-неизбежными являются наборы не только из s радужных k-скелетов и $r-s$ радужных $k-1$-скелетов. Для этого достаточно построить кнезеровский граф без $r-s+1$-клики. Например, все K_i могут быть равны $Col\Delta_{[m]}^{(k)} \setminus A$, где A – какой-то фиксированный радужный симплекс на $k+1$ вершине. Тогда в графе вообще не будет ни одного ребра.

6 Заключение

Таким образом, применив идею коллективной (r,s)-радужной неизбежности, мы доказали теорему 2.1, которая является обобщением теоремы 1.3 и получили "цветной аналог" теоремы 1.2. Также, расширив коллективную r-неизбежность до (r,s)-неизбежности, мы получили обобщение теоремы 1.2 и с помощью параметра s проследили прямую связь с топологической теоремой Тверберга.

References

[1] I. Bárány and D. G. Larman. "A Colored Version of Tverberg's Theorem". In: *Journal of the London Mathematical Society* s2-45.2 (1992), pp. 314–320. DOI: https://doi.org/10.1112/jlms/s2-45.2.314. eprint: https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1112/jlms/s2-45.2.314. URL: https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/jlms/s2-45.2.314.

[2] I. Bárány, S. B. Shlosman, and A. Szücs. "On a Topological Generalization of a Theorem of Tverberg". In: *Journal of the London Mathematical Society* s2-23.1 (1981), pp. 158–164. DOI: https://doi.org/10.1112/jlms/s2-23.1.158. eprint: https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1112/jlms/s2-23.1.158. URL: https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/jlms/s2-23.1.158.

[3] Pavle V. M. Blagojević, Florian Frick, and Günter M. Ziegler. *Barycenters of Polytope Skeleta and Counterexamples to the Topological Tverberg Conjecture, via Constraints*. 2019. arXiv: 1510.07984 [math.CO].

[4] Jojić Duško et al. "Alexander r-tuples and bier complexes". In: *Publications de l'Institut Mathematique* 104.1 (118 Jan. 2018), pp. 1–22. ISSN: 0024-6107. DOI: 10.1112/jlms/s1-41.1.123.

[5] R. Forman. "Topological methods in discrete geometry". In: *Sém. Lothar. Combin.* 48 (Dec. 2001).

[6] Florian Frick. *Counterexamples to the topological Tverberg conjecture*. 2015. arXiv: 1502.00947 [math.CO].

[7] Duško Jojić, Gaiane Panina, and Rade Živaljević. *A Tverberg type theorem for collectively unavoidable complexes*. 2018. arXiv: 1812.00366 [math.CO].

[8] Duško Jojić, Gaiane Panina, and Rade T. Živaljević. *Colored Tverberg problem, extensions and new results*. 2020. arXiv: 2002.09186 [math.MG].

[9] Duško Jojić, Siniša Vrećica, and Rade Živaljević. *Symmetric multiple chessboard complexes and a new theorem of Tverberg type*. 2016. arXiv: 1502.05290 [math.CO].

[10] Duško Jojić et al. *Topology of unavoidable complexes*. 2018. arXiv: 1603.08472 [math.AT].

[11] Isaac Mabillard and Uli Wagner. "Eliminating Tverberg Points, I. An Analogue of the Whitney Trick". In: *Proceedings of the Thirtieth Annual Symposium on Computational Geometry*. SOCG'14. Kyoto, Japan: Association for Computing Machinery, 2014, pp. 171–180. ISBN: 9781450325943. DOI: 10.1145/2582112.2582134. URL: https://doi.org/10.1145/2582112.2582134.

[12] Jiri Matousek. *Using the Borsuk-Ulam Theorem: Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry*. Springer Publishing Company,Incorporated, 2007. ISBN: 3540003622.

[13] Marija Jelić Milutinović et al. *Combinatorics of 'unavoidable complexes'*. 2019. arXiv: 1612.09487 [math.CO].

[14] H. Tverberg. "A Generalization of Radon's Theorem". In: *Journal of the London Mathematical Society* s1-41.1 (Jan. 1966), pp. 123–128. ISSN: 0024-6107. DOI: 10.1112/jlms/s1-41.1.123.

[15] A.Y. Volovikov. "On a topological generalization of the Tverberg theorem." In: *Math Notes* 59 (Dec. 1996), pp. 324–326. DOI: 10.1007/BF02308547.

[16] Rade Živaljević. "Topological methods in discrete geometry". In: *Handbook of Discrete and Computational Geometry (Third Edition)*. Ed. by J. O'Rourke J.E. Goodman and C.D. Tóth. Boca Raton, FL: CRC Press LLC, 2017. Chap. 21, pp. 551–580.

[17] Rade T Živaljević and Siniša T Vrećica. "The colored Tverberg's problem and complexes of injective functions". In: *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 61.2 (1992), pp. 309–318. ISSN: 0097-3165. DOI: https://doi.org/10.1016/0097-3165(92)90028-S. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/009731659290028S.