Санкт-Петербургский государственный университет

***КУШНЕРЧУК Наталия Александровна***

## Выпускная квалификационная работа

# Обобщение теоремы Н. Алона о честном делении отрезка

Уровень образования: бакалавриат
Направление: 01.03.01 «Математика»
Основная образовательная программа: СВ.5000.2017 «Математика»

Научный руководитель:
Профессор факультета МКН,
Доктор физико-математических наук,
Панина Гаянэ Юрьевна

Рецензент:
Пофессор,
Математический институт Сербской
академии наук и искусств, PhD,
Раде Живалевич

Санкт-Петербург
2021 год

# 1 Введение

Некоторые важные результаты в комбинаторике, дискретной геометрии и теоретической информатике были доказаны с помощью различных методов алгебраической топологии. В течение последних десятилетий топологические методы в комбинаторике стали использоваться чаще и более продуманно.

Например, для некоторых задач результат может быть выведен из несуществования определенного отображения между двумя топологическими пространствами. Существует несколько стандартных подходов к доказательству несуществования такого отображения, которые опираются на топологические свойства пространств.

В данной работе применяются подобные методы для доказательства следствий из одной из базовых теорем топологической комбинаторики.

## 1.1 Теоремы Тверберга

Рассмотрим несколько теорем типа Тверберга. Это целое семейство результатов про разделение конечного множества точек с некоторыми свойствами в $\mathbb{R}^d$. Первая теорема – теорема Радона [1].

**Теорема 1.1.** *Для всякого множества $X \subset \mathbb{R}^d$, $|X| = d + 2$. Тогда существует разделение $X$ на два множества $X = X_1 \sqcup X_2$, такие что $conv(X_1) \cap conv(X_2) \neq \varnothing$.*

Заметим, что уже при $|X| = d+1$ утверждение теоремы не будет выполняться, так как в качетсве $X$ можно рассмотреть вершины стандартного симплекса размерности $d$.

Одна важнейших теорем – *классическая теорема Тверберга* [2]. Теорема Радона является предшественником этого результата и частным случаем при $r = 2$. Теперь в множестве больше элементов и, соотвественно, количество классов увеличивается.

**Теорема 1.2.** *Для всякого множества $S \subset R^d$, $|S| = (r-1)(d+1)+1$, где $r \geq 1$. Существует разбиение множества $S$ на $r$ попарно непересекающихся множеств $S = S_1 \sqcup \ldots \sqcup S_r$, т.ч.*

$$conv(S_1) \cap \ldots \cap conv(S_r) \neq \varnothing.$$

Этот результат может быть легко переформулирован в терминах аффинных отображений. Множество точек $X$ можно воспринимать как образ вершин стандартного симплекса соответствующей размерности $N = (r-1)(d+1)$ при некотором аффинном отображении. Тогда теорему 1.2 можно записать следующим образом.

**Теорема 1.3.** *Для любого аффинного $f : \Delta^N \longrightarrow \mathbb{R}^d$, где $N = (r-1)(d+1)$ найдутся $r$ непересекающихся граней $\Delta^N$: $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$, таких что*

$$f(\Delta_1) \cap \ldots \cap f(\Delta_r) \neq \varnothing.$$

В такой формулировке теорема более полезна. Из нее легче получать некоторые следствия и обобщения. Например, можно рассматривать не только аффинные отображения. Следующий результат известен как *топологическая теорема Тверберга* [3]. Теперь рассматривается любое непрерывное отображение, но так же теперь $r$ должно быть степенью простого числа. Это условие существенно, так как иначе утверждение неверно при достаточно больших $d$ [4].

**Теорема 1.4.** *Пусть $r = p^\nu$ – степень простого числа, $d \geq 1$. Для любого непрерывного отображения*
$$f : \Delta^{(r-1)(d+1)} \longrightarrow \mathbb{R}^d$$
*найдутся непересекающиеся грани $\Delta^{(r-1)(d+1)} : \Delta_1, \ldots \Delta_r$, такие что*
$$f(\Delta_1) \cap \ldots \cap f(\Delta_r) \neq \varnothing.$$

Следующая серия теорем типа Тверберга получена с помощью добавления раскраски симплекса. Предположим, все вершины покрашены в несколько цветов, у каждой – свой цвет. Назовем грань симплекса *радужной*, если все ее вершины имеют разные цвета. К предыдущим утверждениям добавляется условие на непересекающиеся грани: теперь каждая из них должна быть радужной. Размерность симплекса, количество и размеры цветовых классов могут меняться, давая разные обобщения и следствия.

*Цветная теорема Тверберга* [5] описывает случай, когда размерность симплекса такая же, как в топологической теореме, а вершины раскрашены в $d+2$ цвета.

**Теорема 1.5.** *Пусть $r \geq 2$ – простое число, $d \geq 1$, $N = (r-1)(d+1)$. $\Delta^N$ – $N-$мерный стандартный симплекс с раскраской его вершин (множество $V$) в $d+2$ цвета: $V = C_0 \sqcup \ldots C_d \sqcup C_{d+1}$, такие что $|C_i| = r-1$ для $0 \leq i \leq d$, $|C_{d+1}| = 1$. Тогда для любого непрерывного отображения*
$$f : \Delta^N \longrightarrow \mathbb{R}^d$$
*найдутся $r$ непересекающихся радужных граней $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$ симплекса $\Delta^N$, удовлетворяющих*
$$f(\Delta_1) \cap \ldots \cap f(\Delta_r) \neq \varnothing.$$

Заметим, что топологическая теорема Тверберга не следует из цветной. Действительно, в теореме 1.5 условие на $r$ сильнее, оно обязано быть простым числом.

Следующая теорема – *сбалансированная цветная теорема Тверберга* [6]. Можно уменьшить количество цветов и добавить условие сбалансированности, которое ограничивает размерности радужных симплексов. Но тогда количество вершин придется увеличить.

**Теорема 1.6.** *Пусть $r = p^\nu$ – степень некоторого простого числа, $d \geq 1$. Пусть $k \geq 0$ и $0 \leq s \leq r$ удовлетворяют условию*
$$r(k-1) + s = (r-1)d, \ \text{, или, более точно,}$$
$$k = \lceil (r-1)d/r \rceil, \quad s = (r-1)d - r(k-1).$$
*Пусть $m = (2r-1)(k+1)$, $\Delta_{[m]}$ – стандартный симплекс размерности $m-1$ с $m$ вершинами, которые раскрашены в $k+1$ цветов: $[m] = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_{k+1}$ и $|C_i| = 2r-1$ для любого $i$, $1 \leq i \leq k+1$. Тогда для любого непрерывного отображения*
$$f : \Delta_{[m]} \longrightarrow \mathbb{R}^d$$
*найдутся $r$ радужных граней $\Delta_{[m]} : \Delta_1, \ldots, \Delta_r$, удовлетворяющих*
$$f(\Delta_1) \cap \ldots \cap f(\Delta_r) \neq \varnothing \text{ и для которых верно}$$
$$dim(\Delta_i) = |\Delta_i| - 1 \leq k \text{ для } 1 \leq i \leq s \text{ и } dim(\Delta_i) \leq k-1 \text{ для } s < i \leq r.$$

Несмотря на то, что последние две теоремы – родственные, ни одна из них не следует из другой, так как размерности симплексов различаются.

В следующей версии цветной теоремы [6] размерность снова $(r-1)(d+1)$. В теореме 1.5 количество вершин одного цвета было не более $r-1$ для всех цветов кроме одного. Теперь классы уменьшаются: максимальное количество вершин одного цвета $\frac{r+1}{2}$. Следовательно, и количество цветов увеличится, что делает формулировку чуть слабее. Но этот результат доказан для большего класса возможных $r$ – для степеней простых чисел.

**Теорема 1.7.** *Пусть $r = p^\nu$ – степень простого числа, $d \geq 1$, $N = (r-1)(d+1)$. Пусть $\Delta^N$ – симплекс размерности $N$ с заданной раскраской множества вершин $V$ в $t$ цветов:*

$$V = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_t,$$

*где $|C_i| \leq q = \frac{r+1}{2}$ для любого $i$, $1 \leq i \leq t$. Тогда для любого непрерывного отображения $f : \Delta^N \longrightarrow \mathbb{R}^d$ найдутся $r$ непересекающихся граней $\Delta_1, \ldots \Delta_r$ симплекса $\Delta^N$, таких что*

$$f(\Delta_1) \cap \ldots \cap f(\Delta_r) \neq \varnothing.$$

Все эти теоремы связаны и похожими подходами к доказательству. Можно рассматривать конфигурационное пространство наборов из $r$ непересекающихся радужных граней исходного симплекса. На эти симплексы можно так же добавлять условия на размерность, чтобы доказывать теорему 1.6. По данному отображению $f$ строится соответствующее отображение из конфигурационного пространства. Далее доказательство опирается на топологические свойства конфигурационных пространств. Подобные рассуждения и приемы можно применить и при доказательстве других фактов.

## 1.2 Теорема Алона и ее обобщения

Посмотрим теперь на теорему Алона о честном делении – один из самых известных ранних результатов топологической комбинаторики [7]. Будем интерпретировать единичный отрезок $[0,1]$ и $n$ вероятностных мер на нем как ожерелье с $n$ драгоценными камнями. Пусть ожерелье было украдено $r$ ворами. Теперь их цель – разрезать его на несколько кусочков и распределить между собой, так чтобы каждому досталась равная доля от всех драгоценных камней. Теорема Алона оценивает количество разрезов, которое необходимо при этом сделать.

**Теорема 1.8.** *Пусть $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ – набор из $n$ (абсолютно) непрерывных вероятностных мер на отрезке $[0,1]$. Пусть $r \geq 2$ и $N = (r-1)n$. Тогда существует разбиение отрезка $[0,1]$ на $N+1$ интервал $I_1, I_2, \ldots, I_{N+1}$ и функция*

$$f : \{1, 2, \ldots, N+1\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, r\},$$

*такие что для каждой меры $\mu_i$, $1 \leq i \leq n$, и для любого $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$*

$$\sum_{p \in f^{-1}(j)} \mu_i(I_p) = \frac{1}{r}.$$

Теорема Алона дает лучшую оценку. Действительно, если носители мер – попарно непересекающиеся отрезки, то менее $d(r-1)$ разрезов сделать не получится.

Этот результат имеет различные вариации, которые получаются с помощью добавления дополнительных условий и ограничений на то, как кусочки ожерелья распределяются между ворами. Например, можно рассмотреть разделение без зависти, где каждый вор имеет личные предпочтения, которые должны учитываться. После того, как все интервалы распределены, ни один из воров не должен завидовать своим товарищам. В статье Йойич-Панина-Живалевич ([10]) показано, что добавление индивидуальных предпочтений схоже с добавлением еще одной меры.

В этой работе изучается другой вариант дополнительных условий. На интервалах можно определить раскраску и добавить требование о том, что каждый вор должен получать радужный набор кусочков.

Целью этой работы является изучить цветные версии теоремы Алона, получить аналоги цветных теорем Тверберга и сравнить полученные утверждения.

## 2 Основные результаты

### 2.1 Цветная теорема о честном делении

Первый результат – аналог теоремы 1.5.

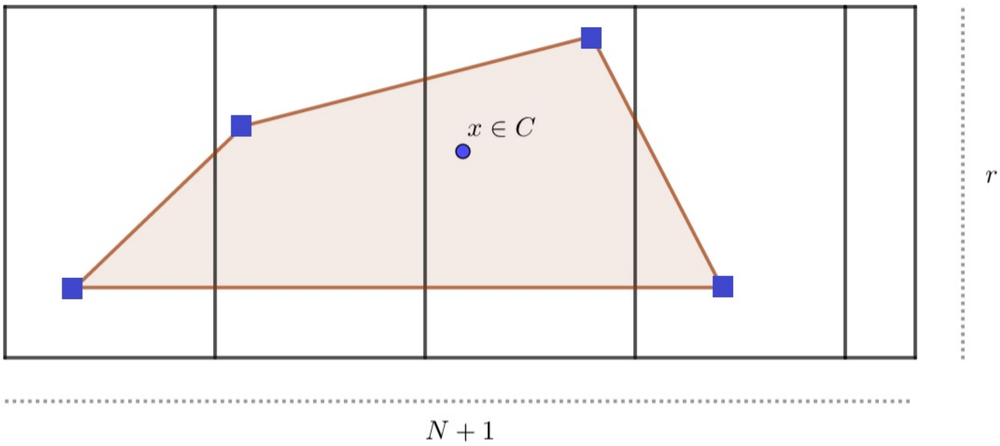
**Теорема 2.1.** *Пусть $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_d$ – непрерывные вероятностные меры на отрезке $[0,1]$. Пусть $r \geq 2$ – простое число, $d \geq 1$, $N = d(r-1)$. Для каждого деления отрезка на $N+1$ интервал $I_1, I_2, \ldots, I_{N+1}$ определим раскраску в $d+1$ цвет $c_0, \ldots, c_d$, устроенную следующим образом: интервалы $I_{i(r-1)+1}, I_{i(r-1)+2}, \ldots, I_{(i+1)(r-1)}$ раскрашены в цвет $c_i$ при $0 \leq i \leq d-1$, а последний интервал раскрашен в цвет $c_d$. Тогда существует разделение единичного отрезка на $N+1$ интервалов с раскраской и разбиение множества индексов $[N+1]$ на множества $T_1, \ldots, T_r$, т.ч.*

$$\sum_{j \in T_k} \mu_i(I_j) = \frac{1}{r}, \quad \text{для } 1 \leq i \leq d \text{ и } 1 \leq k \leq r,$$

*и для каждого множества $T_k$ все цвета интервалов $I_j, j \in T_k$ различны.*

*Доказательство.* Рассмотрим конфигурационное пространство всевозможных разделений отрезка на интервалы и разбиений множества индексов $[N+1] = T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_r$. Покажем, что это пространство гомеоморфно следующему шахматному комплексу $\mathcal{C}$. Вершины $\mathcal{C}$ – клетки доски $r \times (N+1)$, обозначим их $a_{i,j},\ 1 \leq i \leq j;\ 1 \leq j \leq N+1$. На столбцах задана раскарска: клетка, у которой вторая координата $j$ – из промежутка $i(r-1)+1 \leq j \leq (i+1)(r-1)$, покрашена в цвет $c_i$ при $0 \leq i \leq d-1$, последний столбец покрашен в цвет $c_d$.

Набор клеток образует вершины симплекса, если все клетки лежат в разных столбцах, а клетки из одной строки – разных цветов.




Разбиение отрезка на интервалы и разделение между ворами можно соотнести с точкой из этого комплекса и наоборот.

Строчки шахматного комплекса соотвествуют множествам $T_i$, а столбцы – интервалам $I_j$. Пусть $x \in \mathcal{C}$. Рассмотрим симплекс минимальной размерности, которому она принадлежит. Его вершины – клетки шахматного комплекса, они находятся в различных столбцах, а вершины из одной строчки разного цвета. Если клетка $a_{i,j}$ является вершиной симплекса, значит $i \in T_j$. Другими словами, интервал $I_i$ достанется вору $j$. Длины интервалов определяются следующим образом. $x \in C$ – некоторая линейная комбинация вершин симплекса, в котором она лежит, $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i,\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geq 0,\ v_1, \ldots, v_k$ – вершины (клетки комплекса). Коэффициент перед вершиной определяет длину соответсвующего интервала (номер интервала – номер столбца вершины). Все остальные интервалы имеют длину 0.

И наоборот, разбиению отрезка на интервалы и распределению между ворами можно соотнести точку из $C$.

Построим отображение $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}^{dr}$ покоординатно следующим образом:

$$f_{i,k}(x) = \sum_{j \in T_k} \mu_i(I_j).$$

Заметим, что на пространстве $\mathcal{C}$ и на $\mathbb{R}^{dr}$ задано действие группы $\mathbb{Z}^r$:

- В $\mathcal{C}$ по циклу переставляются строки таблицы. Другими словами, меняются номера воров. Пусть $x \in \mathcal{C}$, $x$ является линейной комбинацией $r$ клеток $x = \alpha_1 a_{1,i_1} + \ldots + \alpha_r a_{r,i_r}$, где вторая координата – номер столбца клетки доски $r \times N + 1$. Пусть $g \in \mathbb{Z}^r$ – порождающий элемент. Тогда

$$y = gx = \alpha_1 a_{r,i_1} + \alpha_2 a_{1,i_2} + \ldots + \alpha_r a_{r-1,i_r}.$$

- В $\mathbb{R}^{dr}$ переставляются $r$ копий пространства $\mathbb{R}^d$.
Пусть $x = (x_1^1, \ldots x_d^1, x_1^2, \ldots x_d^2, \ldots x_1^r, \ldots x_d^r) \in \mathbb{R}^{dr}, g \in \mathbb{Z}^r$ – порождающий элемент. Тогда $y = gx = (y_1^1, \ldots, y_d^r)$ удовлетворяет:

$$y_i^j = x_i^{j-1} \quad \text{для } 2 \leq j \leq r, 1 \leq i \leq d$$
$$y_i^1 = x_i^r \quad \text{для } 1 \leq i \leq d.$$

Отображение $f$ эквивариантно относительно действия этой группы.

Рассмотрим образ этого отображения. Если зафиксировать $i$, то $f_i$ действует в $\mathbb{R}^r$, определяя, какая доля меры $\mu_i$ досталась каждому вору. Так как меры вероятностные, для точки $x \in \mathcal{C}$

$$\sum_{k=1}^{r} f_{i,k}(x) = 1; \quad f_{i,k}(x) \geq 0$$

Значит $f_i(x)$ – точка из $(r-1)$-мерного стандартного симплекса. Такой симплекс гомеоморфен $(r-1)$-мерному диску. Таким образом, можно считать, что образ $f$ содержится в $(D^{r-1})^d$. А произведение таких дисков гомеоморфно диску $D^{(r-1)d}$.

Предположим, что теорема не верна. В терминах функции $f$ это значит, что для любого $x \in \mathcal{C}$ $f(x) \neq \left(\frac{1}{r}, \frac{1}{r}, \ldots, \frac{1}{r}\right)$. Таким образом, это значит, что $f$ это эквивариантное относительно действия группы $\mathbb{Z}^r$ отображение в $D^{(r-1)d}$ без внутренней точки. Отсюда можно получить отображение в $S^{(r-1)d-1}$ с помощью эквивариантной гомотопии.

Но не существует непрерывного эквивариантного относительно действия группы $\mathbb{Z}^r$ отображения $f : \mathcal{C} \longrightarrow S^{(r-1)d-1}$ [8]. $\square$

## 2.2 Сбалансированная цветная теорема о честном делении (s=r)

Следующая теорема – аналог сбалансированной цветной теоремы в случае $s = r$.

**Теорема 2.2.** *Пусть $r = p^\nu$ – степень простого числа, $d \geq 1$, $N = (r-1)d$. Пусть $(d-1)$ делится на $r$ и, соответственно, $k = \frac{(r-1)(d-1)}{r}$.*

*Пусть $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_d$ – непрерывные вероятностные меры на отрезке. Для каждого деления отрезка на $N+1 = r(k+1)$ интервалов $I_1, I_2, \ldots, I_{N+1}$ определим раскраску в $k+1$ цвет $c_0, \ldots, c_k$, устроенную следующим образом: интервалы $I_{ir+1}, \ldots, I_{(i+1)r}$ раскрашены в цвет $c_i$. Тогда существует разделение единичного отрезка на $N+1$ интервал с такой раскраской и деление множества индексов $[r(k+1)]$ на множества $T_1, ..., T_r$, для которых верно*

$$\sum_{j \in T_k} \mu_i(I_j) = \frac{1}{r}, \quad \text{для } 1 \leq i \leq d \text{ и } 1 \leq k \leq r,$$

*и для каждого множества $T_k$ все цвета интервалов $I_j, j \in T_k$ различны.*

<u>Замечание:</u> То есть каждый вор получает не более $k+1 < d+1$ кусочков. Количество разрезов совпадает с числом из теоремы Алона.

*Доказательство.* Рассмотрим сначала разбиения интервала на большее число отрезков. Для каждого разбиения на $(2r-1)(k+1)$ интервалов аналогично определим раскраску в $k+1$ цвет: интервалы $I_{i(2r-1)+1}, I_{i(2r-1)+2}, \ldots, I_{(i+1)(2r-1)}$ раскрашены в цвет $c_i$. Рассмотрим теперь конфигурационное пространство всевозможных разделений отрезка на $(2r-1)(k+1)$ интервалов с данной раскраской и разбиений множества индексов $[(2r-1)(k+1)] = T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_r$ с тем же условием, что для каждого множества $T_k$ все цвета интервалов $I_j, j \in T_k$ различны. Покажем, что это пространство гомеоморфно следующему шахматному комплексу $\mathcal{C}$ размера $(2r-1)(k+1) \times r$. Вершины $C$ - клетки $a_{i,j}, \ 1 \leq i \leq (2r-1)(k+1); \ 1 \leq j \leq r$. На столбцах $\mathcal{C}$ задана раскраска в

$k$ цветов: клетка, у которой вторая координата $j: \ i(2r-1)+1 \leq j \leq (i+1)(2r-1)$ покрашена в цвет $c_i$.

Набор клеток образует вершины симплекса, если

- Клетки в разных столбцах
- Клетки из одной строки - разных цветов

Заметим, что в этом комплексе не может быть симплекса размерности большей $r(k+1)-1$, так как количество вершин каждого цвета не может быть больше $r$. Это конфигурационное пространство $(rk+r-2)$-связно [9].

Разделение отрезка на $N+1$ интервал и распределение между $r$ ворами можно соотнести с точкой из этого конфигурационного пространства, и наоборот.

Опишем соответствующее разбиение отрезка и распределение между ворами по точке из комплекса. Пусть $x \in \mathcal{C}$, $A$ – симплекс наименьшей размерности, которому принадлежит $x$. Вершины $A$ – клетки шахматного комплекса, они из разных столбцов и в каждой строке все клетки разных цветов. Строчки шахматного комплекса соотвествуют множествам $T_i$, а столбцы – интервалам $I_j$. То есть, если клетка $a_{i,j}$ является вершиной $A$, значит $i \in T_j$. Столбцы $\mathcal{C}$, в которых нет вершин $A$ отвечают за интервалы нулевой длины. Таким образом по точке $x$ определяется распределение не более $N+1$ интервалов между ворами.

Длины интервалов определяются следующим образом. Точка $x$ является линейной комбинацией вершин $A$. Коэффициент перед вершиной в этом разложении определяется длину соответствующего интервала.

Построим отображение $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}^{dr}$:

$$f_{i,k}(x) = \sum_{j \in T_k} \mu_i(I_j).$$

Заметим, что на пространстве $\mathcal{C}$ и на $\mathbb{R}^{dr}$ задано действие группы $\mathbb{Z}^r$ аналогично доказательству предыдущей теоремы:

- В $\mathcal{C}$ по циклу переставляются строки таблицы. Другими словами, меняются номера воров.
- В $\mathbb{R}^{dr}$ переставляются $r$ копий пространства $\mathbb{R}^d$.

Отображение $f$ эквивариантно относительно действия этой группы.

Предположим, что $f \in \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}^{dr} \backslash D$, где $D = \{(y, y, \ldots, y) : y \in \mathbb{R}^d\}$. Получаем противоречие, т.к. $\mathcal{C}$ – $(rk+r-2)$-связное пространство, а $\mathbb{R}^{dr} \backslash D$ гомотопно сфере размерности $(r-1)d-1 = rk+r-2$ [8].

Значит, существует $x \in \mathcal{C}$, т.ч. $f(x) = (y, y, \ldots, y), y \in \mathbb{R}^d$. Тогда $y \in \mathbb{R}^d$ – вектор со значениями доль мер у некоторого вора. Если у каждого вора эти доли одинаковые, то они все равны $\frac{1}{r}$, т.к. меры вероятностные. То есть, $f(x) = (\frac{1}{r}, \ldots, \frac{1}{r})$.

Рассмотрим разделение отрезка на интервалы и распределение между ворами, соответствующее этой точке $x$. В этом случае деление честное и каждый вор получает радужный набор из не более чем $k+1$ кусочка. $\square$

## 2.3 Сбалансированная цветная теорема о честном делении (общий случай)

Этот результат – общий случай предыдущей теоремы.

**Теорема 2.3.** *Пусть $r = p^\nu$ – степень простого числа, $d \geq 1$. Пусть $k \geq 0$ и $0 \leq s \leq r$ удовлетворяют условию*

$$r(k-1) + s = (r-1)(d-1), \text{ , или, более точно,}$$

$$k = \lceil (r-1)(d-1)/r \rceil, \quad s = (r-1)(d-1) - r(k-1),$$

*и $M = r(k+1)$. Пусть $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_d$ – непрерывные вероятностные меры на отрезке $[0,1]$. Рассмотрим деление отрезка на $M$ интервалов $I_1, I_2, ..., I_M$. Для любого такого деления определим раскраску в $k+1$ цветов $c_0, ..., c_k$ следующим образом: $I_{ir+1}, I_{ir+2}, ..., I_{(i+1)r}$ раскрашены в цвет $c_i$. Тогда существует разделение единичного отрезка на $M$ интервалов с такой раскраской и деление множества индексов $[r(k+1)]$ на множества $T_1, ..., T_r$, для которых верно*

$$\sum_{j \in T_k} \mu_i(I_j) = \frac{1}{r}, \quad \text{для } i = 1, 2, \ldots, d \text{ и } k = 1, 2, \ldots, r,$$

*для каждого множества $T_k$ все цвета интервалов $I_j, j \in T_k$ различны. Для всех множеств $T_i$ верно, что $|T_i| \leq k+1$. Более того, количество множеств $T_i$, для которых $|T_i| = k+1$, не более $s$.*

<u>Замечание:</u> На самом деле количество ненулевых интервалов после разделения отрезка не превосходит $s(k+1)+(r-s)k = (r-1)(d-1)-r = (r-1)d+1$, что совпадает с числом из теоремы Алона. Это отличает общий случай теоремы от предыдущего, так как в этом случае точно будут вырожденные интервалы.

*Доказательство.* Как и в предыдущей теореме, рассмотрим сначала разбиения интервала на большее число интервалов. Для каждого разбиения на $(2r-1)(k+1)$ интервалов так же определена раскраска в $k+1$ цвет. Рассмотрим конфигурационное пространство всевозможных разделений отрезка на $(2r-1)(k+1)$ интервалов и разбиений множества индексов $[(2r-1)(k+1)] = T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_r$. Это пространство гомеоморфно шахматному комплексу $\mathcal{C}$ размера $(2r-1)(k+1) \times r$, у которого вершины $C$ – клетки $a_{i,j}$, $1 \leq i \leq (2r-1)(k+1)$; $1 \leq j \leq r$. На столбцах $\mathcal{C}$ задана раскраска: клетка, у которой вторая координата $j: \ i(2r-1)+1 \leq j \leq (i+1)(2r-1)$ покрашена в цвет $c_i$.

Набор клеток образует вершины симплекса, если

- Клетки в разных столбцах
- Клетки из одной строки - разных цветов
- Количество строк, в которых $k+1$ клетка является вершиной не превосходит $s$.

Это пространство является $rk+s-2$-связным [9].

Опишем соответствующее разбиение отрезка и распределение между ворами по точке из комплекса. Пусть $x \in \mathcal{C}$, $A$ – симплекс наименьшей размерности, которому принадлежит $x$. Вершины $A$ – клетки шахматного комплекса, они из разных столбцов и в каждой строке все клетки разных цветов. Строчки шахматного комплекса соотвествуют множествам $T_i$, а столбцы – интервалам $I_j$. То есть, если клетка $a_{i,j}$ является вершиной $A$, значит $i \in T_j$. Столбцы $\mathcal{C}$, в которых нет вершин $A$ отвечают за интервалы нулевой длины. Таким образом по точке $x$ определяется распределение не более $N+1$ интервалов между ворами.

Длины интервалов определяются следующим образом. Точка $x$ является линейной комбинацией вершин $A$. Коэффициент перед вершиной в этом разложении определяется длину соответствующего интервала.
Построим отображение $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}^{dr}$:

$$f_{i,k}(x) = \sum_{j \in T_k} \mu_i(I_j).$$

Заметим, что на пространстве $\mathcal{C}$ и на $\mathbb{R}^{dr}$ снова задано действие группы $\mathbb{Z}^r$ аналогично предыдущей теореме. Отображение $f$ эквивариантно относительно действия этой группы.

Предположим, что $f \in \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}^{dr} \backslash D$, где $D = \{(y, y, ..., y) : y \in \mathbb{R}^d\}$. Получаем противоречие, т.к. $C$ – $(rk+s-2)$-связное пространство, а $\mathbb{R}^{dr} \backslash D$ гомотопно сфере размерности $(r-1)d - 1 = rk + s - 2$ [8].

Значит, существует $x \in \mathcal{C}$, т.ч. $f(x) = (y, y, \ldots, y), y \in \mathbb{R}^d$. В этом случае $y \in \mathbb{R}^d$ – вектор с значениями доль мер у некоторого вора. Если у каждого вора эти доли одинаковые, то они все равны $\frac{1}{r}$, т.к. меры вероятностные. То есть, $f(x) = (\frac{1}{r}, \ldots, \frac{1}{r})$.

Если рассмотреть разделение отрезка, соответствующее этой точке $x$, то получим искомое честное деление, при котором в каждом множестве $T_i$ попадают интервалы разных цветов. □

<u>Замечание:</u> Случай из теоремы 2.1 рассматривался отдельно, так как в формулировке общего случая изначально количество интервалов, на которых определена раскраска равно $r(k+1)$, но при разбиении индексов на множества $T_1, \ldots, T_r$ интервалов всего $s(k+1)+(r-s)k$. То есть, как минимум $r-s$ интервалов из разбиения точно окажутся вырожденными. В теореме 2.1 вырожденных интервалов нет.

### 2.4 Вторая цветная теорема о честном делении (с маленькими цветными классами)

Последний результат – аналог второй цветной теоремы Тверберга с маленькими классами.

**Теорема 2.4.** *Пусть $r = p^\nu$ – степень простого числа, $d \geq 1$, $N = d(r-1)$. Пусть $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_d$ – непрерывные вероятностные меры на отрезке $[0,1]$. Для каждого деления отрезка на $N+1$ интервалов $I_1, I_2, \ldots, I_{N+1}$ определим раскраску в $t$ цветов, $I_k \in C_i$, если $I_k$ покрашен в цвет $i$, где $1 \leq k \leq N+1$, $1 \leq i \leq t$. Пусть $|C_i| = m_i \leq q = \frac{r+1}{2}$ для всех $i$. Тогда существует разделение единичного отрезка на $N+1$ интервалов с раскраской и разбиение множества индексов $[N+1]$ на множества $T_1, \ldots, T_r$, т.ч.*

$$\sum_{j \in T_k} \mu_i(I_j) = \frac{1}{r}, \quad \text{для } i = 1, 2, \ldots, d \text{ и } k = 1, 2, \ldots, r,$$

*и для каждого множества $T_k$ все цвета интервалов $I_j, j \in T_k$ различны.*

*Доказательство.* Рассмотрим конфигурационное пространство разделений отрезка на интервалы и разбиений индексов $[N+1] = T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_r$. Это пространство гомеоморфно следующему комплексу $\mathcal{C}$. Пусть $\Delta_{r,m_i}$ – шахматный комплекс, вершины которого являются клетками доски $r \times m_i$, соответствующий цвету $i$. Набор клеток образует вершины симплекса, если они лежат в разных строках и столбцах. Тогда пусть $\mathcal{C} = \Delta_{r,m_1} * \ldots * \Delta_{r,m_t}$ – шахматный комплекс $r \times N+1$. Клетки образуют вершины симплекса, если они лежат в разных столбцах, а клетки из одной строки разных цветов.

Разбиение отрезка на интервалы и разделение их между ворами можно соотнести с точкой из комплекса $\mathcal{C}$ и наоборот.

Построим отображение $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}^{rd}$ следующим образом:

$$f_{i,k}(x) = \sum_{j \in T_k} \mu_i(I_j).$$

На пространстве $\mathcal{C}$ и на $\mathbb{R}^{dr}$ задано действие группы $\mathbb{Z}^r$:

- В $\mathcal{C}$ по циклу переставляются строки таблицы, то есть меняются номера воров.
- В $\mathbb{R}^{dr}$ переставляются $r$ копий пространства $\mathbb{R}^d$.

Отображение $f$ эквивариантно относительно действия этой группы.

Так как $m_i \leq \frac{r+1}{2}$, комплекс $\Delta_{r,m_i}$ является $m_i - 2$-связным для всех $i$ (ссылка на статью). Значит, $\mathcal{C}$ является $(r-1)d - 1$-связным пространством

$$\sum_{i=1}^{t}(m_i - 2) + 2(t-1) = \sum_{i=1}^{t} m_i - 2 = (r-1)d - 1.$$

Предположим, что теорема не верна. В терминах функции $f$ это значит, что для любого $x \in \mathcal{C}$ $f(x) \neq \left(\frac{1}{r}, \frac{1}{r}, \ldots, \frac{1}{r}\right)$. Образ отображения $f$ содержится в $D^{(r-1)d}$. Таким образом, это значит, что $f$ – это эквивариантноt относительно действия группы $\mathbb{Z}^r$ отображение в $D^{(r-1)d}$ без внутренней точки. Отсюда можно получить отображение из $\mathcal{C}$ в $S^{(r-1)d-1}$, что приводит к противоречию [8]. $\square$

В формулировках основных результатов всегда задана конкретная раскраска: интервалы одинакового цвета находятся рядом. Но если порядок раскраски другой, а количество и размеры цветовых классов не меняются, утверждения все равно останутся верными. Это так, потому что конфигурационное пространство не поменяется от перестановки столбцов шахматного комплекса местами. Следовательно, в формулировках теорем 2.1-2.4 можно написать, что результат верен для любой раскраски с сохранением количества и размеров цветовых классов.

## 3 Сравнения результатов

Рассмотрим разделение отрезка на $(r-1)d+1$ интервал и следующую раскраску на нем: у каждого кусочка свой собственный цвет. Понятно, что тогда теорема просто совпадает с исходной теоремой Алона, так как любой набор интервалов будет радужным. Если же, наоборот, цветовых классов слишком мало, то распределение будет невозможно.

Поэтому, интуитивно понятно, что чем больше классы, тем сильнее становится утверждение. То есть, теорема 2.3 – самая сильная, теоремы 2.1 и 2.4 следуют из нее. Количество разрезов в обоих утверждениях одинаковое (и совпадает с числом из теоремы Алона). Но во второй теореме размеры цветовых классов могут быть больше, а их количество – меньше.

### 3.1 Из сбалансированной теоремы следует цветная теорема (s=r)

**Предложение 3.1.** *Пусть $\mu_1, \dots, \mu_d$ – непрерывные вероятностные меры на отрезке $[0,1]$. Пусть $r = p^\nu$, $d \geq 1$ и $d-1$ делится на $r$. Из теоремы 2.2 следует, что существует разделение отрезка на $(r-1)d+1$ интервалов с раскраской в $d+1$ цвет и деление множества индексов $[(r-1)d+1]$ на множества $T_1, \dots, T_r$, для которых верно*

$$\sum_{j \in T_k} \mu_i(I_j) = \frac{1}{r}, \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, d \text{ и } k = 1, 2, \dots, r,$$

*и для каждого множества $T_k$ все цвета интервалов $I_j, j \in T_k$ различны.*

*Раскраска устроена таким образом, что в каждый цвет кроме одного покрашен $r-1$ интервал, а в подследний цвет покрашен только один интервал.*

*Доказательство.* Рассмотрим разделение отрезка и множества $T_1, \dots, T_r$ из теоремы 2.2. Обозначим цветовые классы как множества $A_1, \dots, A_{k+1}$. Чтобы получить требуемую раскраску, будем действовать по следующему алгоритму. Рассмотрим цвет $A_i$ и перекрасим интервал из $A_i \cap T_i$ в новый цвет $A_{k+2}$, где $1 \leq i \leq r-1$. Такой интервал точно найдется, так как $|A_i| = r$, то есть каждый вор получает кусочек этого цвета. Таким образом, образуется новый цветовой класс $A_{k+2}$, и его мощность будет тоже равна $r-1$. Но отрезки покрашенные в новый цвет могут не находиться рядом. Далее обрабатываются остальные цвета аналогичным образом, так что в старых классах количество интервалов уменьшается на 1, а в новых классах мощность не более $r-1$. В итоге мы получим раскраску из $d+1$ цвета, где в каждом классе $r-1$ интервал, кроме одного, в котором всего один, так как $r(k+1) = (r-1)d+1$. Эта раскраска будет отличаться от той, что в формулировке 1-й теоремы лишь тем, что порядок раскраски другой.

Так как в этом алгоритме добавляются новый цвета таким образом, что наборы $T_1, \dots, T_r$ остаются радужными. Длины интервалов не меняются, поэтому деление остается честным. $\square$

### 3.2 Из сбалансированной теоремы следует цветная теорема (общий случай)

**Предложение 3.2.** *Пусть $r = p^\nu$, $d \geq 1$. Пусть $k \geq 0$ и $0 \leq s \leq r$ удовлетворяют условию*

$$r(k-1) + s = (r-1)(d-1), \ \text{, или, более точно,}$$

$$k = \lceil (r-1)(d-1)/r \rceil, \quad s = (r-1)(d-1) - r(k-1).$$

*Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_d$ – непрерывные вероятностные меры на отрезке $[0,1]$. Из теоремы 2.3 следует, что существует разделение отрезка на $(r-1)d+1$ интервалов с раскраской в $d+1$ цвет и деление множества индексов $[(r-1)d+1]$ на множества $T_1, \ldots, T_r$, для которых верно*

$$\sum_{j \in T_k} \mu_i(I_j) = \frac{1}{r}, \quad \text{для } i = 1, 2, \ldots, d \text{ и } k = 1, 2, \ldots, r,$$

*и для каждого множества $T_k$ все цвета интервалов $I_j, j \in T_k$ различны.*

*Раскраска устроена таким образом, что в каждый цвет кроме одного покрашен $r-1$ интервал, а в подследний цвет покрашен только один интервал.*

*Доказательство.* Рассмотрим разделение отрезка и множества $T_1, \ldots, T_r$ из теоремы 2.2. Обозначим цветовые классы как множества $A_1, \ldots, A_{k+1}$.

Заметим, что в общем случае $r(k+1) - ((r-1)d+1) = r-s$,
так как $s(k+1)+(r-s)k = (r-1)d+1$. Таким образом, изначально в условии теоремы 2.3 есть раскраска на некотором множестве интервалов, $r-s$ из которых после распределения между ворами точно окажутся вырожденными. Если рассмотреть разделение отрезков без этих вырожденных интервалов, как минимум $(k+1)-(r-s)$ цветовых классов будут содержать $r$ интервалов, так как изначально все классы содержали $r$ интервалов, а всего их $k+1$. Поступим с этими цветовыми классами по такому же алгоритму, как в предыдущем предложении.

После этого остается $(r-s)$ классов, в которых суммарно $(r-s)(r-1)$ интервал. В каких-то из них по $r$ кусочков, в каких-то может быть меньше. Можно перекрасить некоторые интервалы, не добавляя новых цветов.

Пусть среди них есть класс $A_i$, т.ч. $|A_i| = r$. Тогда найдется класс $A_j$, т.ч. $|A_j| \leq r-2$. Получается, что каждый вор получил интервал из $A_i$, но не более $r-2$ воров получили интервал из $A_j$. Найдем вора, который получил интервал из $A_i$, но не получил из $A_j$. Поменяем цвет этого интервала из $A_i$ на второй. Будем продолжать так, пока размеры всех классов не будут равны $r-1$.

Снова, наборы $T_1, \ldots, T_r$ остаются радужными. Длины интервалов не меняются, поэтому деление остается честным. □

Заметим теперь, что если изначальную раскраску в теореме 2.3 выбрать другую, то после перекраски некоторых интервалов по алгориму, описанному в предложении 3.2, можно получить раскраску из теоремы 2.1.

## 4 Заключение

В работе представлены цветные версии теоремы Алона о честном делении и показаны их сравнения. Благодаря особенностям задачи о делении, цветные теоремы о делении отрезка оказываются сильнее, чем аналогичные цветные теоремы Тверберга. Это так, потому что в доказательстве можно использовать большее число интервалов, но после этого вырожденные кусочки можно игнорировать. Это обстоятельство было открыто в Йойич-Панина-Живалевич [10].

## Список литературы


[1] Jiri Matousek. Using the Borsuk-Ulam Theorem, 2nd printing 2008, 90.

[2] H. Tverberg. A generalization of Radon's theorem. J. London Math. Soc., 41:123–128, 1966.

[3] I. Barany, S. B. Shlosman, and A. Szucs. On a topological generalization of a theorem of Tverberg. J. London Math. Soc., II. Ser., 23:158–164, 1981

[4] P.V.M. Blagojević, F. Frick, and G. M. Ziegler, Barycenters of polytope skeleta and counterexamples to the topological Tverberg conjecture, via constraints, J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 21 (7), 2107–2116 (2019).

[5] P.V.M. Blagojević, B. Matschke, G. M. Ziegler, Optimal bounds for the colored Tverberg problem, J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 2015, 17:4, 739–754, arXiv: 0910.4987.

[6] Duško Jojić, Gaiane Panina, Rade T. Živaljević, Optimal colored Tverberg theorems for prime powers, arXiv: 2005.11913

[7] N. Alon. Splitting necklaces. Advances in Math., 63:247–253, 1987.

[8] A.Yu. Volovikov, On a topological generalizationof the Tverberg theorem, Math. Notes 59 (3) (1996) 324–326, 477–481.

[9] Duško Jojić, Gaiane Panina, Rade T. Živaljević, Colored Tverberg problem, extensions and new results, arXiv: 2002.09186.

[10] Duško Jojić, Gaiane Panina, Rade Živaljević, Splitting necklaces, with constraints, arXiv:1907.09740