

Санкт-Петербургский государственный университет

**Иванов Михаил Павлович**  
**Выпускная квалификационная работа**  
**О правильных раскрасках графов**

Уровень образования: бакалавриат  
Направление 01.03.01 «Математика»  
Основная образовательная программа СВ.5000.2017 «Математика»

Научный руководитель: профессор кафедры высшей алгебры и теории чисел СПбГУ, д.ф.-м.н. Карпов Дмитрий Валерьевич

Рецензент: научный сотрудник ПОМИ РАН, к.ф.-м.н. Пастор Алексей Владимирович

Санкт-Петербург  
2021 г.

# Содержание

1. Введение	3
2. Лента, цилиндр, лента Мёбиуса	3
3. Точная оценка	8
3.1. Вспомогательные утверждения . . . . .	8
3.2. Основной результат . . . . .	9
Приложение А. База индукции	17
Приложение В. Точность основной теоремы	20
Список литературы	21

## 1. Введение

В своей статье [1] Карпов исследует правильные рёберные 3-раскраски кубических графов (все рёбра покрашены в три цвета, из каждой вершины выходит три ребра, эти три ребра попарно разноцветные). Последняя теорема в ней посвящена оценке количества правильных рёберных 3-раскрасок мультиграфа  $G$ , обозначаемого как  $\chi'_3(G)$ : утверждается, что для любого связного кубического мультиграфа  $G$  с  $2n$  вершинами (нечётным число вершин быть не может, так как иначе сумма степеней окажется нечётной) выполнено  $\chi'_3(G) \leq 3 \cdot 2^n$ , а если в  $G$  не более одной пары кратных рёбер, то  $\chi'_3(G) \leq 9 \cdot 2^{n-2}$ . Отмечается, что первая оценка точна, однако пример содержит  $n$  пар кратных рёбер; вторая же оценка, вероятно, не точна.

В этой работе мы дополним результаты статьи [1]: а именно, докажем, что для выполнения равенства в первой оценке достаточно всего лишь двух пар кратных рёбер; улучшим вторую оценку и докажем, что в связном кубическом графе  $G$  на  $2n$  вершинах  $\chi'_3(G) \leq 2^n + 8$  при чётном  $n$  и  $\chi'_3(G) \leq 2^n + 4$  при нечётном  $n$ , причём при  $n \geq 3$  эти оценки достигаются ровно на одном графе.

Отметим, что мы будем использовать термин «граф» лишь в случае, если отсутствуют кратные рёбра и петли. Если они разрешены, вместо этого мы будем говорить «мультиграф». Для удобства мы будем правильные рёберные 3-раскраски называть просто раскрасками.

## 2. Лента, цилиндр, лента Мёбиуса

**Определение 2.1.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ .

*n-лента* — граф на множестве вершин  $\{A_i\}_{i \in \{1,2,\dots,n\}} \cup \{B_i\}_{i \in \{1,2,\dots,n\}}$  с  $3n - 2$  рёбрами: путями  $A_1A_2 \dots A_n$  и  $B_1B_2 \dots B_n$ , а также паросочетанием  $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$ .

*n-цилиндр* — это *n-лента*, к которой добавили рёбра  $A_nA_1, B_nB_1$ . Другими словами, это два цикла  $A_1A_2 \dots A_n$  и  $B_1B_2, \dots, B_n$ , в котором соответствующие вершины соединены паросочетанием.

*n-лента Мёбиуса* — это *n-лента*, к которой добавили рёбра  $A_nB_1$  и  $B_nA_1$ . Другими словами, это гамильтонов цикл  $A_1A_2 \dots A_nB_1B_2 \dots B_n$ , в котором провели все  $n$  главных диагоналей  $A_iB_i$ .

*n-эспандер* — это *n-лента*, к которой добавили ещё по одному ребру  $A_1B_1$  и  $A_nB_n$ .

Следующее утверждение очевидно и даже не нуждается в доказательстве.

**Предложение 2.1.** *n-лента, n-цилиндр, n-лента Мёбиуса и n-эспандер — мультиграфы на  $2n$  вершинах. n-лента, n-цилиндр и n-лента Мёбиуса не содержат кратных рёбер при  $n \geq 1$ ,  $n \geq 3$ ,  $n \geq 2$ , соответственно. 1-эспандер состоит из двух вершин с тройкой кратных рёбер между ними, при  $n \geq 2$  в n-эспандере ровно две пары кратных рёбер. Все вершины n-ленты, кроме  $A_1, B_1, A_n, B_n$ , имеют степень 3; при  $n = 1$  вершины  $A_1, B_1$ , имеют степень 1, а при  $n \geq 2$  вершины  $A_1, B_1, A_n, B_n$  имеют степень 2. n-цилиндр, n-лента Мёбиуса и n-эспандер — кубические мультиграфы.*

При  $n \geq 2$  рёбра n-ленты лежат в цепочке из  $n - 1$  4-циклов (которые мы будем называть клетками)  $A_iB_iB_{i+1}A_{i+1}$ , в которой каждый цикл имеет общее ребро с предыдущим циклом и противоположное общее ребро — со следующим. В

$n$ -цилиндре и  $n$ -ленте Мёбиуса рёбра лежат в  $n$  4-циклах  $A_i B_i B_{i+1} A_{i+1}$ , а также  $A_n B_n B_1 A_1$  в случае цилиндра и  $A_n B_n A_1 B_1$  в случае ленты Мёбиуса, таким же образом зацепленных между собой в  $n$ -цикл. В  $n$ -эспандере рёбра лежат в цепочке из  $n - 1$  4-циклов  $A_i B_i B_{i+1} A_{i+1}$ , но на краях этой цепочки находится по два 4-цикла, поскольку рёбер  $A_1 B_1$  и  $A_n B_n$  по две штуки.

*Замечание.* Когда мы говорим об этих типах мультиграфов, мы, кроме собственно мультиграфа, также имеем в виду и фиксируем его структуру в терминах двух путей и паросочетания ленты, а также, возможно, двух дополнительных рёбер. В частности, между рёбрами в пути/цикле  $A_1 \dots A_n$  и  $B_1 \dots B_n$  есть взаимно однозначное соответствие (в ленте Мёбиуса ребру  $A_i A_{i+1}$  соответствует  $B_i B_{i+1}$ , а ребру  $A_n B_1$  — ребро  $B_n A_1$ , и наоборот), и при  $n = 2$  одному из рёбер  $A_1 A_2$  соответствует одно ребро  $B_1 B_2$ , а другому — другое. В 2-ленте есть восемь способов обозначить вершины  $A_1, B_1, A_2, B_2$ , чтобы это была 2-лента, но мы помним один фиксированный способ и его придерживаемся, говоря о 4-цикле как о 2-ленте. 2-цилиндр изоморфен 2-эспандеру, но с разным сопоставлением вершинам обозначений  $A_1, B_1, A_2, B_2$ , и, говоря о мультиграфе как о 2-цилиндре, мы имеем в виду именно то обозначение вершин, которое присуще цилиндру, а не эспандеру.

Оказывается, что именно эти мультиграфы являются экстремальными в смысле количества правильных рёберных 3-раскрасок, поэтому оставшуюся часть этого раздела мы посвятим подсчёту этого количества. Далее мы считаем, что  $n \geq 2$ .

**Определение 2.2.** В любом из перечисленных мультиграфов, раскрашенных в три цвета, пара соответствующих рёбер ( $A_i A_{i+1}$  и  $B_i B_{i+1}$ , а также  $A_n A_1$  и  $B_n B_1$  — в случае цилиндра,  $A_n B_1$  и  $B_n A_1$  — в случае ленты Мёбиуса) называется *гирляндной*, если эти два ребра покрашены в разные цвета.

Клетка называется *гирляндной*, если пара противоположных соответствующих рёбер в ней гирляндная.

Правильную раскраску любого из перечисленных мультиграфов мы назовём *гирляндной*, если в ней есть гирляндная пара рёбер. Очевидно, это равносильно наличию гирляндной клетки, поскольку каждая клетка содержит ровно одну пару соответствующих рёбер, эти два ребра в ней противоположны, и есть биекция между клетками и содержащимися в них парами соответствующих рёбер.

Одноцветную пару соответствующих рёбер, клетку с одноцветной парой соответствующих рёбер, правильную раскраску мультиграфа без гирляндных пар будем называть *нормальной*.

Начиная с этого места, цвета, в которые мы красим рёбра, будем называть красным, зелёным и синим.

**Предложение 2.2.** *Раскраска гирляндной пары рёбер однозначно задаёт правильную раскраску содержащей её клетки. Правильная раскраска клетки однозначно задаёт правильную раскраску противоположных соответствующих рёбер в соседней клетке. Правильная раскраска гирляндной клетки однозначно задаёт правильную раскраску соседней с ней клетки, причём она тоже будет гирляндной.*

*Доказательство.* Пусть, не умаляя общности, гирляндная пара рёбер  $A_i A_{i+1}$  и  $B_i B_{i+1}$  покрашена в красный и зелёный цвета. Тогда у рёбер  $A_i B_i$  и  $A_{i+1} B_{i+1}$ , смежных с ними обоими внутри клетки, остаётся только один вариант — быть синими.

Пусть у нас правильным образом покрашена клетка  $A_i B_i B_{i+1} A_{i+1}$ . Посмотрим на ребро  $A_{i+1} A_{i+2}$ ; оно и рёбра  $A_{i+1} B_{i+1}$ ,  $A_{i+1} A_i$  попарно смежны, поэтому должны быть покрашены в три разных цвета; однако цвета рёбер  $A_{i+1} B_{i+1}$  и  $A_{i+1} A_i$  уже фиксированны, поэтому у ребра  $A_{i+1} A_{i+2}$  остаётся один вариант. С ребром  $B_{i+1} B_{i+2}$  аналогично.

Пусть покраска клетки  $A_i B_i B_{i+1} A_{i+1}$  гирляндная, не умаляя общности,  $A_i A_{i+1}$  красного цвета,  $B_i B_{i+1}$  зелёного цвета,  $A_i B_i$  и  $A_{i+1} B_{i+1}$  синего цвета. Тогда  $A_{i+1} A_{i+2}$  зелёного цвета,  $B_{i+1} B_{i+2}$  красного цвета, то есть клетка  $A_{i+1} B_{i+1} B_{i+2} A_{i+2}$  содержит гирляндную пару рёбер. Как мы только что доказали, этим однозначно задаётся её правильная гирляндная раскраска. □

**Следствие 2.1.** *У всех эспандеров,  $n$ -цилиндров при нечётных  $n$ ,  $n$ -лент Мёбиуса при чётных  $n$  не существует гирляндной раскраски. При  $n \geq 2$  у  $n$ -лент,  $n$ -цилиндров при чётных  $n$ ,  $n$ -лент Мёбиуса при нечётных  $n$  существует ровно шесть гирляндных раскрасок, по одной на каждую из шести гирляндных раскрасок любой фиксированной пары соответствующих рёбер.*

*Доказательство.* Выберем гирляндную пару рёбер, ясно, что у неё ровно шесть возможных раскрасок. Теперь восстановим по ней раскраску всего мультиграфа, начиная с клетки, содержащей эту пару, и последовательно крася предыдущие и следующие клетки. Понятно, что, так как между парами различных цветов нет никакой разницы, в некоторых типах мультиграфов у нас не получится правильная раскраска ни для какой начальной пары, а в остальных типах мультиграфов все шесть раскрасок окажутся правильными.

В ленте мы дойдём без каких-либо противоречий до краёв и получим правильную раскраску. В остальных типах мультиграфов надо добавить лишние рёбра, заметить, что они красятся однозначно (так как они торчат из вершин степени два, им автоматически достаётся третий цвет) и посмотреть, получится ли правильная раскраска.

В эспандере в любой крайней клетке пара кратных рёбер смежна с гирляндной парой рёбер, из-за чего оба этих кратных ребра обязаны быть одноцветными, что невозможно.

В цилиндре добавляются рёбра  $A_n A_1$  и  $B_n B_1$ , при этом циклы  $A_1 \dots A_n$  и  $B_1 \dots B_n$  должны быть с чередующимися цветами, чтобы они правильно красились, это будет выполнено ровно для чётных  $n$ .

В ленте Мёбиуса, наоборот, добавляются рёбра  $A_n B_1$  и  $B_n A_1$ , и, чтобы добавляемые рёбра не противоречили соседним с ним рёбрам,  $A_{n-1} A_n$  должно быть одного цвета с  $B_1 B_2$ , а  $B_{n-1} B_n$  — с  $A_1 A_2$ . Понятное дело, это равносильно нечётности  $n$ . □

Как мы только что поняли, есть два типа правильных раскрасок: гирляндные, в которых все клетки гирляндные, и нормальные, в которых все клетки нормальные. Гирляндные раскраски у всех интересующих нас мультиграфов мы только что посчитали — пришло время заняться подсчётом нормальных раскрасок.

**Теорема 2.1.** *У 1-ленты три нормальных раскраски, у 1-эспандера шесть нормальных раскрасок. При  $n \geq 2$  у  $n$ -ленты и  $n$ -эспандера  $3 \cdot 2^n$  нормальных раскрасок.*

*Доказательство.* Зафиксируем нормальную раскраску самой первой клетки. Докажем, что любой нормальной раскраске первых  $i$  клеток соответствует ровно две

не противоречащих ей нормальных раскраски первых  $i + 1$  клеток. Это очевидно: соответствующие рёбра  $A_{i+1}A_{i+2}$  и  $B_{i+1}B_{i+2}$  красятся однозначно из-за соседства с парами рёбер  $A_{i+1}B_{i+1}$ ,  $A_{i+1}A_i$  и  $B_{i+1}A_{i+1}$ ,  $B_{i+1}B_i$ , при этом они красятся одинаково, поскольку  $A_{i+1}A_i$  и  $B_{i+1}B_i$  одного цвета, а  $A_{i+1}B_{i+1}$  и  $B_{i+1}A_{i+1}$  — одно и то же ребро. Ну, а ребро  $A_{i+2}B_{i+2}$  красится в любой из двух цветов, отличных от того, в который мы только что покрасили  $A_{i+1}A_{i+2}$  и  $B_{i+1}B_{i+2}$ .

Так как у первой клетки, нетрудно понять, ровно двенадцать нормальных раскрасок (надо выбрать тремя способами цвет  $A_1B_1$ , двумя способами отличный от него цвет  $A_1A_2$  и  $B_1B_2$ , ещё двумя способами отличный от последнего цвет  $A_2B_2$ ), каждая следующая клетка удваивает число способов, а всего клеток  $n - 1$ , способов получается  $12 \cdot 2^{(n-1)-1} = 3 \cdot 2^n$ .

Чтобы посчитать число нормальных покрасок  $n$ -эспандера, выделим в нём  $n$ -ленту, заметим, что она должна быть нормально покрашена. Заметим, что каждому из двух кратных рёбер остаётся только один способ правильно покраситься, поскольку оно торчит из двух вершин степени два (в которых запрещена одна и та же пара цветов), поэтому нормальных покрасок  $n$ -эспандера столько же, сколько  $n$ -ленты.

Особняком стоит случай  $n = 1$ , когда нет ни одной клетки. Количество раскрасок эспандера всё ещё соответствует формуле  $3 \cdot 2^1 = 6$ , а вот у ленты, состоящей из одного-единственного ребра, количество равно трём.  $\square$

**Следствие 2.2.** *Оценка, что в связном кубическом мультиграфе на  $2n$  вершинах не более  $3 \cdot 2^n$  правильных рёберных 3-раскрасок, достигается на мультиграфе, в котором при  $n = 1$  одна тройка кратных рёбер, при  $n \geq 2$  ровно две пары кратных рёбер.*

*Доказательство.* Для любого  $n$  этими свойствами обладает  $n$ -эспандер.  $\square$

К сожалению, из этого рассуждения так просто не получить число раскрасок у цилиндра и у ленты Мёбиуса, так как, чтобы свести этот подсчёт к ленте, надо следить за цветами крайних рёбер ленты.

**Теорема 2.2.** *Назовём **крайними** рёбра ленты, инцидентные  $A_1, B_1, A_n, B_n$ , а именно  $A_1B_1, A_1A_2, B_1B_2, A_{n-1}A_n, B_{n-1}B_n, A_nB_n$ . Будем говорить, что 3-раскраска ленты — с **хорошими краями**, если множество цветов крайних рёбер — мощности два. Тогда при  $n \geq 2$   $n$ -лента имеет ровно  $2^n + 2 \cdot (-1)^n$  нормальных раскрасок ленты с хорошими краями (то есть  $2^n + 2$  при чётных  $n$  и  $2^n - 2$  при нечётных  $n$ ).*

*Доказательство.* Мы будем доказывать утверждение для ленты по индукции, база для  $n = 2$  очевидна: у 2-ленты надо покрасить рёбра  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  в один цвет,  $A_1A_2$  и  $B_1B_2$  — в другой цвет, на это есть шесть способов.

В переходе мы будем смотреть, как можно получить нормальную раскраску  $n$ -ленты с хорошими краями из нормальной раскраски  $(n - 1)$ -ленты как с хорошими краями, так и не с хорошими краями. Пусть, не умаляя общности,  $A_1B_1, A_1A_2, B_1B_2$  все красные и зелёные,  $A_{n-2}A_{n-1}$  и  $B_{n-2}B_{n-1}$  зелёные,  $A_{n-1}B_{n-1}$  красное, то есть мы имеем дело с раскраской с хорошими краями. Заметим, что рёбра  $A_{n-1}A_n$  и  $B_{n-1}B_n$  непременно синие и крайние. Это значит, что получилась уже точно раскраска не с хорошими краями.

Теперь допустим, что мы начинаем с нормальной раскраски  $(n - 1)$ -ленты не с хорошими краями; опять же,  $A_1B_1, A_1A_2, B_1B_2$  все красные и зелёные,  $A_{n-2}A_{n-1}$  и

$B_{n-2}B_{n-1}$  синие,  $A_{n-1}B_{n-1}$  красное (если, наоборот, красными или зелёными являются  $A_{n-2}A_{n-1}$  и  $B_{n-2}B_{n-1}$ , а  $A_{n-1}B_{n-1}$  — синее, на запреты для оставшихся трёх рёбер  $A_{n-1}A_n$ ,  $B_{n-1}B_n$ ,  $A_nB_n$  это никак не повлияет). Тогда, чтобы выполнялось условие хороших краёв, мы обязаны покрасить  $A_{n-1}A_n$  и  $B_{n-1}B_n$  в зелёный цвет, а  $A_nB_n$  — в красный. Поэтому в этом случае получается ровно одна нормальная раскраска  $n$ -ленты с хорошими краями.

Теперь понятно, что мы можем доказать индукционный переход. Всего у  $(n-1)$ -ленты  $3 \cdot 2^{n-1}$  нормальных раскрасок (по теореме 2.1), из них мы не учитываем те, что с хорошими краями, то есть  $2^{n-1} + 2 \cdot (-1)^{n-1}$ , итого осталось

$$3 \cdot 2^{n-1} - 2^{n-1} - 2 \cdot (-1)^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot (-1)^n = 2^n + 2 \cdot (-1)^n,$$

и именно столько получается нормальных раскрасок  $n$ -ленты с хорошими краями.  $\square$

**Следствие 2.3.** У 1-цилиндра и 1-ленты Мёбиуса ноль и шесть нормальных раскрасок, соответственно. При  $n \geq 2$  есть ровно  $2^n + 2 \cdot (-1)^n$  нормальных раскрасок  $n$ -цилиндра и  $n$ -ленты Мёбиуса.

*Доказательство.* 1-цилиндр содержит петли, поэтому у его рёбер правильных раскрасок нет. 1-лента Мёбиуса — это две вершины, соединённые тройкой кратных рёбер, у неё шесть правильных раскрасок, и все они нормальные.

При  $n \geq 2$  заметим, что добавочные (по сравнению с  $n$ -лентой) рёбра и в  $n$ -цилиндре, и в  $n$ -ленте Мёбиуса контактируют с цветами всех крайних рёбер в  $n$ -ленте, поэтому эта  $n$ -лента должна быть с хорошими краями. А если  $n$ -лента имеет хорошие края, то есть ровно один способ покрасить добавочные рёбра — в тот цвет, которого нет среди цветов крайних рёбер (при  $n \geq 2$  эти добавочные рёбра несмежны, поэтому ничто не мешает их одинаково покрасить). Таким образом, нормальных раскрасок  $n$ -цилиндра и  $n$ -ленты Мёбиуса столько же, сколько нормальных раскрасок с хорошими краями у  $n$ -ленты, то есть (по теореме 2.2)  $2^n + 2 \cdot (-1)^n$ .  $\square$

Понятно, как из цилиндров и лент Мёбиуса выбирать граф с наибольшим числом правильных рёберных 3-раскрасок: так как нормальных раскрасок у них поровну, надо в зависимости от чётности  $n$  взять тот из них, у которого есть гирляндные раскраски (в другом графе их не будет).

**Следствие 2.4.** При  $n = 2$  есть ровно один кубический граф — это  $K_4$ , и он имеет шесть раскрасок. При  $n \geq 3$  существует кубический граф с  $2^n + 2 \cdot (-1)^n + 6$  раскрасками, то есть  $2^n + 8$  при чётных  $n$  и  $2^n + 4$  при нечётных  $n$ .

*Доказательство.* Легко заметить, что если у всех вершин в графе на четырёх вершинах степень равна трём, то это может быть только  $K_4$ , он же 2-лента Мёбиуса. У этого графа шесть нормальных раскрасок и нет гирляндных.

При  $n \geq 3$  как  $n$ -цилиндр, так и  $n$ -лента Мёбиуса имеют  $2^n + 2 \cdot (-1)^n$  нормальных раскрасок по следствию 2.3. Вспомним, что по следствию 2.1 ровно у одного из этих графов есть шесть гирляндных раскрасок, поэтому, в зависимости от чётности, надо взять один из них, и число правильных раскрасок получится  $2^n + 2 \cdot (-1)^n + 6$ : а именно, при чётном  $n$  надо взять  $n$ -цилиндр с  $2^n + 8$  раскрасками, а при нечётном  $n$  —  $n$ -ленту Мёбиуса с  $2^n + 4$  раскрасками.  $\square$

Как мы позже увидим, для связных кубических графов (и даже для мультиграфов, содержащих не более одной пары кратных рёбер) эти графы являются экстремальными, то есть можно доказать оценку, которая окажется точной именно благодаря ленте Мёбиуса и цилиндру. Что ж, давайте докажем!

## 3. Точная оценка

### 3.1. Вспомогательные утверждения

**Лемма 3.1.** Пусть  $G$  — кубический мультиграф,  $e$  — его ребро, не являющееся петлёй. Рассмотрим все правильные рёберные 3-раскраски мультиграфов  $G$  и  $H = G - e$ . Тогда удаление ребра  $e$  реализует взаимно однозначное соответствие между раскрасками  $G$  и раскрасками  $H$ ; в частности,  $\chi'_3(G) = \chi'_3(H)$ .

*Доказательство.* Построим обратное соответствие. Обозначим число вершин в  $G$  и  $H$  за  $2n$ , обозначим концы ребра  $e$  как  $a$  и  $b$ . Выберем любой цвет и посчитаем сумму степеней в подграфе на рёбрах этого цвета. Каждая вершина, кроме  $a$  и  $b$ , даст единичный вклад (так как из каждой вершины степени три торчат все цвета), поэтому все вершины, кроме  $a$  и  $b$ , дадут вклад  $2n - 2$ . Вся сумма степеней чётна, поэтому либо из обеих вершин  $a$  и  $b$  торчит ребро этого цвета, либо из обеих не торчит. Таким образом, в вершинах  $a$  и  $b$  степени два недостаёт одного и того же цвета, и, если добавить ребро  $ab$  и покрасить его в этот цвет, получится правильная раскраска  $G$ . Очевидно, что это построенное соответствие — биекция, так как удаление только что добавленного ребра вернёт исходную раскраску  $H$ .  $\square$

**Следствие 3.1.** Пусть в мультиграфе  $G$  есть мост  $e$ . Тогда  $G$  не имеет правильной рёберной 3-раскраски.

*Доказательство.* По лемме 3.1 раскраски  $G$  получаются из любой раскраски мультиграфа  $G - e$ . Однако, поскольку в  $G - e$  концы  $e$  лежат в разных компонентах, если есть какая-то раскраска, то есть и такая, в которой концах  $e$  недостаёт разного третьего цвета. — очевидно, такую раскраску не дополнить до раскраски  $H$ . Значит, у  $G - e$  нет правильной раскраски, а тогда её нет и у  $G$ .  $\square$

**Следствие 3.2.** Пусть в мультиграфе  $G$  есть вершина  $a$  степени два, а остальные вершины имеют степень три. Тогда  $G$  не имеет правильной рёберной 3-раскраски.

*Доказательство.* Рассмотрим мультиграф  $H$  из двух изоморфных копий  $G$ , в которых  $a'$  и  $a''$  — копии вершины  $a$  — соединены ребром. В полученном кубическом мультиграфе есть мост, поэтому по следствию 3.1 у  $H$  нет раскрасок. Поэтому и у  $G$  их нет, иначе  $H$  можно было бы покрасить так: взять две одинаковые раскраски двух копий  $G$  в нём, а  $a'a''$  покрасить в одинаковый недостающий в  $a'$  и в  $a''$  цвет.  $\square$

Следующее утверждение совсем простое и требуется для упрощения разбора случаев.

**Лемма 3.2.** В кубическом графе не менее четырёх вершин. В кубическом мультиграфе, имеющем ровно одну пару кратных рёбер, не менее шести вершин.

*Доказательство.* Первое утверждение очевидно. Для второго удалим концы кратных рёбер и заметим, что остался граф, в котором  $2n - 2$  вершины, а сумма степеней равна  $3(2n - 2) - 2 = 6n - 8$ . Если  $n = 1$ , то она отрицательна, а если  $n = 2$ , то она равна четырём, а может быть равна нулю или двум.  $\square$

И ещё одно простое утверждение поможет нам усиливать некоторые оценки.

**Предложение 3.1.**  *$n$ -лента Мёбиуса рёберно трёхсвязна (то есть содержит не менее двух рёбер, при удалении любых двух рёбер остаётся связной) при  $n \geq 1$ .  $n$ -цилиндр рёберно трёхсвязен при  $n \geq 3$ .*

*Доказательство.* Если из каждой клетки взято не более одного ребра, то из любой клетки можно переместиться в каждую из двух соседних, и каждая клетка по отдельности остаётся связной. Если оба ребра взяты из одной клетки, то связность можно установить разбором случаев.  $\square$

## 3.2. Основной результат

Мы единой индукцией докажем сразу несколько утверждений (первое из которых дублирует [1], но зато доказано без использования леммы Татта).

**Теорема 3.1.** *Пусть  $G$  — связный кубический мультиграф на  $2n$  вершинах.*

1. *Если в  $G$  разрешены кратные рёбра, то  $\chi'_3(G) \leq 3 \cdot 2^n$ .*
2. *Если в  $G$  не более одной пары кратных рёбер, то  $\chi'_3(G) \leq 3 \cdot 2^{n-1}$ .*
3. *Если в  $G$  нет кратных рёбер, и он не изоморфен ни цилиндру, ни ленте Мёбиуса, то  $\chi'_3(G) \leq 3 \cdot 2^{n-2}$ .*
4. *Если в  $G$  нет кратных рёбер, то при  $n = 2$  выполнено  $\chi'_3(G) \leq 6$ , при  $n \geq 3$  выполнено  $\chi'_3(G) \leq 2^n + 2 \cdot (-1)^n + 6$  (то есть  $\chi'_3(G) \leq 2^n + 8$  при чётных  $n$ ,  $\chi'_3(G) \leq 2^n + 4$  при нечётных  $n$ ).*

*Доказательство.* Если  $G$  содержит петли, то все утверждения очевидны, поскольку у мультиграфа с петлями нет правильных рёберных раскрасок. Поэтому мы, считая, что в  $G$  нет петель, докажем все четыре утверждения по индукции по  $n$ .

База для  $n = 1$  очевидна, поскольку единственный кубический мультиграф без петель на двух вершинах — это 1-эспандер, у которого ровно  $6 = 3 \cdot 2^1$  раскрасок.<sup>1</sup>

В переходе заметим, что достаточно доказать пункт 3, так как остальные из него следуют. Действительно, предположим, что мы считаем пункт 3 известным. Тогда, чтобы доказать пункт 4, нам остаётся рассмотреть случай цилиндра и ленты Мёбиуса, поскольку в противном случае  $3 \cdot 2^{n-2} < 4 \cdot 2^{n-2} = 2^n < 2^n + 4$ . А цилиндр и лента Мёбиуса дают ровно то, что надо, по следствию 2.4.

Пункты 1 и 2 доказываются по индукции одинаково: если в  $G$  нет кратных рёбер, то они следуют из пункта 4 (поскольку при  $n = 2$  выполнено  $\chi'_3(G) = 6 = 3 \cdot 2^{2-1}$ , при  $n = 3$  выполнено  $\chi'_3(G) \leq 12 = 3 \cdot 2^{3-1}$ , а при  $n \geq 4$  выполнено  $\chi'_3(G) \leq 2^n + 8 \leq 2^n + 2^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1}$ ). Если в  $G$  есть пара кратных рёбер между вершинами  $a$  и  $b$ , то

<sup>1</sup>Пусть вас не смущает кажущееся отсутствие базы в пунктах 2, 3, 4 — на самом деле все эти индукционные цепочки проистекают из исключённого в пункте 3 случая цилиндра и ленты Мёбиуса, про которые мы уже доказали утверждение пункта 4.

рассмотрим третьи рёбра  $aa'$  и  $bb'$ , ведущие из этих вершин. Граф  $H = G - a - b + a'b'$ , полученный из  $G$  удалением  $a$  и  $b$  и добавлением ребра  $a'b'$ , очевидно, связный и кубический, содержит не более чем столько же пар кратных рёбер, чем  $G$ , поэтому для него выполнено  $\chi'_3(H) \leq 3 \cdot 2^{n-1}$  или  $\chi'_3(H) \leq 3 \cdot 2^{n-2}$  (в зависимости от того, мы доказываем пункт 1 или 2). При этом у  $H$  ровно вдвое меньше раскрасок, чем у  $G$ : если взять раскраску  $H$  и все её рёбра, кроме  $a'b'$ , так же покрасить в  $G - a - b$ , рёбра  $aa'$  и  $bb'$  покрасить так же, как  $aa'$  в  $H$ , то как раз останется два способа правильно раскрасить два ребра  $ab$  в два разных цвета, отличных от цветов  $aa'$  и  $bb'$ , и понятно, что это соответствие взаимно однозначное, так что у  $G$  раскрасок не более  $3 \cdot 2^n$  или  $3 \cdot 2^{n-1}$  (в зависимости от того, мы доказываем пункт 1 или 2).

Так что самым содержательным утверждением тут является пункт 3, и его надо доказать, пользуясь лишь индукционным предположением для всех мультиграфов с меньшим  $n$ . Мы будем считать, что база для случая  $n \leq 5$  доказана (об этом см. приложение А), и в переходе мы имеем  $n \geq 6$ . Мы будем разбирать различные случаи. В каждом случае мы будем подразумевать, что не выполнено условие ни одного из предыдущих.

1.  $G$  не является рёберно двусвязным.

Тогда есть мост. Такой граф нельзя правильно раскрасить по следствию 3.1.

2.  $G$  не является рёберно трёхсвязным.

Пусть удаление рёбер  $e_1$  и  $e_2$  делает граф несвязным. По отдельности  $e_1$  и  $e_2$  не лишают граф связности — иначе это предыдущий случай. Тогда в  $G - e_1 - e_2$  ровно две компоненты  $A$  и  $B$ , и каждое из двух рёбер имеет один конец в одной компоненте, а другой конец — в другой компоненте. Обозначим  $e_1 = a_1b_1$ ,  $e_2 = a_2b_2$ , где  $a_1, a_2 \in A$ ,  $b_1, b_2 \in B$ . Пусть, не умаляя общности,  $a_1 \neq a_2$ : если  $a_1 = a_2$  и  $b_1 = b_2$ , то в  $G$  есть кратные рёбра. Заметим, что по лемме 3.1 все раскраски  $G(A)$  получаются из раскрасок  $G(A) + a_1a_2$  удалением ребра; в частности, у  $a_1$  и  $a_2$  один и тот же отсутствующий цвет. Значит,  $e_1$  и  $e_2$  обязаны быть одного цвета, так что, если  $b_1 = b_2$ , у  $G$  вообще нет правильных раскрасок, и утверждение очевидно.

Получается, что  $a_1 \neq a_2$  и  $b_1 \neq b_2$ , так что к обоим мультиграфам  $G(A)$  и  $G(B)$  применима лемма 3.1 —  $\chi'_3(G(A)) = \chi'_3(G(A) + a_1a_2)$ ,  $\chi'_3(G(B)) = \chi'_3(G(B) + b_1b_2)$ . Теперь раскрашивать  $G$  можно по такой процедуре: выбрать одним из трёх способов цвет для рёбер  $a_1b_1$  и  $a_2b_2$ , а затем раскрасить  $A + a_1a_2$  и  $B + b_1b_2$  с фиксированным цветом рёбер  $a_1a_2$  и  $b_1b_2$ . Так как в каждом из этих мультиграфов не более одной пары кратных рёбер (как раз  $a_1a_2$  и  $b_1b_2$ ), получаем оценку

$$\begin{aligned} \chi'_3(G) &= 3 \cdot \frac{\chi'_3(G(A) + a_1a_2)}{3} \cdot \frac{\chi'_3(G(B) + b_1b_2)}{3} \leq \\ &\leq 3 \cdot \frac{3 \cdot 2^{\frac{|A|}{2}-1}}{3} \cdot \frac{3 \cdot 2^{\frac{|B|}{2}-1}}{3} = 3 \cdot 2^{\frac{|A|+|B|}{2}-2} = 3 \cdot 2^{n-2}. \end{aligned}$$

3. В  $G$  есть неостовный подграф, в котором все вершины, кроме двух, степени три, а две вершины степени два; либо все вершины, кроме одной, степени три, а одна вершина степени один.

Те два ребра, которых недостаёт особенным вершинам, чтобы те были степени три, при удалении из графа делают его несвязным. Значит, граф не является рёберно трёхсвязным, то есть это случай 2.

4. В  $G$  есть треугольник.

Обозначим его вершины  $a, b$  и  $c$ . Кроме собственно соседей в треугольнике, у каждой из этих вершин есть по третьему соседу  $a', b', c'$ , они дают три ребра  $aa', bb', cc'$ . Если какие-то из вершин  $a', b', c'$  совпадают, то в  $G$  есть подграф — два треугольника с общим ребром. При  $n \geq 3$  этот подграф не является остовным и подходит под случай **3**, который мы уже разобрали. Теперь нетрудно понять, что все три ребра  $ab, bc, ac$  должны быть разноцветные, а ребро  $aa'$  по цвету отличается от  $ab$  и  $ac$ ; поэтому цвета рёбер  $aa'$  и  $bc, bb'$  и  $ac, cc'$  и  $ab$  совпадают. В частности, три ребра  $aa', bb', cc'$  разноцветные. Удалим тогда все три вершины  $a, b, c$ , вместо них поместим в граф вершину  $x$ , которую соединим с вершинами  $a', b', c'$  — получится связный кубический мультиграф  $H$  на  $2(n-1)$  вершинах. У него не более  $3 \cdot 2^{n-2}$  раскрасок по пункту **2**. При этом между раскрасками  $G$  и  $H$  есть естественная биекция, ведь три разных цвета рёбер  $aa', bb', cc'$  в  $G$  однозначно задают раскраску рёбер треугольника  $abc$ .

**5.** В  $G$  есть 4-цикл.

Если в  $G$  есть 4-цикл, то в  $G$  есть подграф —  $k$ -лента для  $k = 2$ . Рассмотрим тогда подграф  $G$ , являющийся  $k$ -лентой, для наибольшего возможного  $k \geq 2$ . Обозначим вершины ленты канонически как  $A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_k$ . Обозначим для удобства  $a = A_1, b = B_1, c = B_k, d = A_k$ . В  $G$  из вершин  $a, b, c, d$  торчат рёбра  $aa', bb', cc', dd'$ , не относящиеся к ленте. Докажем про них несколько свойств.

**Свойство 1.**  $a', b', c', d'$  не встречаются среди вершин ленты.

*Доказательство.* Поскольку ситуация симметрична, достаточно доказать это про  $a'$ .

- Если  $a' = a$ , то в  $G$  есть петля  $aa$ .
- Если  $a' = b$ , то в  $G$  есть пара кратных рёбер  $ab$ .
- Если  $a' = c$  или  $a' = d$ , то граф  $G(\{A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_k\})$  — либо цилиндр или лента Мёбиуса (а тогда это и есть наш граф  $G$ , и тогда пункт **3** автоматически доказан), либо получается из цилиндра или ленты Мёбиуса удалением одного ребра, тогда он не остовный, и тогда этот случай был разобран в **3**.
- Если  $a'$  — это какая-то другая вершина ленты, то она имеет степень более трёх.

□

**Свойство 2.**  $a' \neq b', c' \neq d'$ .

*Доказательство.* Иначе  $aba'$  или  $cdc'$  — это треугольник, а этот случай рассмотрен в случае **4**. □

**Свойство 3.**  $a'$  несмежна с  $b', c'$  несмежна с  $d'$ .

*Доказательство.* Если какая-то из этих пар вершин смежная, то давайте её добавим к нашим  $A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_k$  — получится  $(k+1)$ -лента. □

**Свойство 4.** Не более одной пары вершин  $(a', c'), (b', d')$  совпадают; не более одной пары вершин  $(a', d'), (b', c')$  совпадают.

*Доказательство.* Действительно, если обе первые пары совпали, то добавим к нашей ленте вершины  $a' = c'$  и  $b' = d'$ , получится  $(k + 1)$ -лента Мёбиуса без ребра  $a'b'$ , наличие такого подграфа разобрано в случае **3**. Аналогично, если  $a' = d'$  и  $b' = c'$ , то в  $G$  есть подграф в виде  $(k + 1)$ -цилиндра без одного ребра, что тоже разобрано в случае **3**.  $\square$

План такой: мы рассмотрим граф  $H = G - \{A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_k\}$ , то есть  $G$  с удалёнными вершинами ленты. Он перестанет быть кубическим, поэтому мы в него добавим какие-то вершины и/или рёбра. В этом меньшем мультиграфе (или нескольких таких мультиграфах) мы оценим число раскрасок. Наконец, через него (или них) мы оценим раскраски  $G$ .

Чтобы понять дальнейший ход решения, вам придётся постичь новые обозначения. Во-первых, я буду через  $\mathcal{NC}_k$ ,  $\mathcal{NM}_k$ ,  $\mathcal{GC}_k$ ,  $\mathcal{GM}_k$  обозначать количества правильных 3-раскрасок: нормальных у  $k$ -цилиндра, нормальных у  $k$ -ленты Мёбиуса, гирляндных у  $k$ -цилиндра, гирляндных у  $k$ -ленты Мёбиуса. Из следствий **2.1** и **2.3** мы знаем, что при  $k \geq 2$  верно  $\mathcal{NC}_k = \mathcal{NM}_k = 2^k + 2$ ,  $\mathcal{GC}_k = 6$ ,  $\mathcal{GM}_k = 0$  при  $k \equiv 2$ ; верно  $\mathcal{NC}_k = \mathcal{NM}_k = 2^k - 2$ ,  $\mathcal{GC}_k = 0$ ,  $\mathcal{GM}_k = 6$  при  $k \not\equiv 2$ ; вообще  $\mathcal{NC}_k = \mathcal{NM}_k = 2^k + 2 \cdot (-1)^k$ ,  $\mathcal{GC}_k = 3 + 3 \cdot (-1)^k$ ,  $\mathcal{GM}_k = 3 - 3 \cdot (-1)^k$ .

Во-вторых (что страшнее), мы будем иногда писать  $\chi'_3(\dots)$ , где на месте многоточия находится картинка. Это будет означать количество правильных рёберных 3-раскрасок графа  $H$ , в который что-то вставили. Если внутри картинка есть многоточия, это означает, что это исходный граф  $G$  — ленту не вырезали. Серые вершины —  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ ,  $d'$  по часовой стрелке, начиная с левой верхней. Остальные вершины — вспомогательные: их нет в  $H$ .

Если некоторые рёбра не чёрные, то это значит, что в нашей сумме учитываются лишь те раскраски, в которых все рёбра, которые покрашены в одинаковый (не чёрный) цвет в схематическом изображении, имеют одинаковый цвет и в раскраске, а рёбра, разноцветные в схеме (и оба не чёрные), имеют разные цвета и в раскраске. При этом необязательно, если ребро в схеме красное, то и в раскраске оно красное. На чёрные рёбра не налагается никаких ограничений никогда.

Красные рёбра всегда проводятся точечным пунктиром, зелёные — мелким зигзагом, синие — широкой волной.

Что ж, лучший способ понять эти обозначения — это начать их использовать!

Давайте подумаем, как могут быть раскрашены крайние рёбра  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$ ,  $dd'$ . Если лента раскрашена нормально, то  $aa'$  и  $bb'$  одинаково раскрашены,  $cc'$  и  $dd'$  тоже, но эти два цвета могут быть как одинаковыми, так и разными. Если же лента раскрашена гирляндно, то  $aa'$  и  $bb'$  разноцветные,  $cc'$  и  $dd'$  разноцветные, но эти две пары цветов совпадают в каком-то порядке. Итак, мы можем записать:

$$\begin{aligned} \chi'_3(G) &= \chi'_3 \left( \begin{array}{c} \text{---} \square \text{---} \dots \square \text{---} \\ \text{---} \square \text{---} \dots \square \text{---} \end{array} \right) = \\ &= \chi'_3 \left( \begin{array}{c} \text{---} \square \text{---} \dots \square \text{---} \\ \text{---} \square \text{---} \dots \square \text{---} \end{array} \right) + \chi'_3 \left( \begin{array}{c} \text{---} \square \text{---} \dots \square \text{---} \\ \text{---} \square \text{---} \dots \square \text{---} \end{array} \right) + \chi'_3 \left( \begin{array}{c} \text{---} \square \text{---} \dots \square \text{---} \\ \text{---} \square \text{---} \dots \square \text{---} \end{array} \right) + \chi'_3 \left( \begin{array}{c} \text{---} \square \text{---} \dots \square \text{---} \\ \text{---} \square \text{---} \dots \square \text{---} \end{array} \right) = \\ &= \chi'_3 \left( \begin{array}{c} \text{---} \square \text{---} \\ \text{---} \square \text{---} \end{array} \right) \cdot \frac{\mathcal{NC}_k}{3} + \chi'_3 \left( \begin{array}{c} \text{---} \square \text{---} \\ \text{---} \square \text{---} \end{array} \right) \cdot \frac{\mathcal{NC}_{k+1}}{6} + \chi'_3 \left( \begin{array}{c} \text{---} \square \text{---} \\ \text{---} \square \text{---} \end{array} \right) \cdot \frac{\mathcal{GC}_k}{6} + \chi'_3 \left( \begin{array}{c} \text{---} \square \text{---} \\ \text{---} \square \text{---} \end{array} \right) \cdot \frac{\mathcal{GM}_k}{6}. \end{aligned}$$

Последнее равенство нуждается в пояснении. На самом деле, всё просто:  $k$ -лента и весь остальной граф разделены только цветными рёбрами, поэтому их можно раскрасить отдельно с некоторыми ограничениями, а затем склеить. Возьмём, напри-

мер, первое слагаемое. Раскрасим  $H$  с тем ограничением, чтобы в нём в вершинах  $a', b', c', d'$  недостающие цвета совпадали, и раскрасим ленту, чтобы в вершинах  $a, b, c, d$  недостающие цвета совпадали. Теперь, когда мы перенесём на  $G$  раскраски  $H$  и ленты, часть раскрасок не подойдёт, так как недостающие цвета в  $a', b', c', d$  и в  $a, b, c, d$  могли оказаться разными. Поскольку эти две раскраски независимы, ровно в трети склеек раскраска получится правильной. При этом заметим, что раскраску ленты, в которой у  $a, b, c, d$  совпадают недостающие цвета, легко переделать в нормальную раскраску  $k$ -цилиндра добавлением рёбер  $ad$  и  $bc$ , причём это биекция между такими раскрасками ленты и нормальными раскрасками  $k$ -цилиндра. Так что получается, что

$$\chi'_3 \left( \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right) = \chi'_3 \left( \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right) \cdot \frac{\mathcal{NC}_k}{3}.$$

Аналогично и с остальными слагаемыми, только там при склеивании подходит только шестая часть раскрасок, так как должна совпасть пара различных цветов в  $H$  и в ленте. Во втором слагаемом у ленты с одной стороны должна быть одна пара цветов, а с другой стороны — другая. Чтобы получить все такие раскраски, в графе, образованном лентой и вершинами  $a', b', c', d'$ , склеим  $a'$  с вершиной  $d'$ , а  $b'$  — с вершиной  $c'$ , тогда получится  $(k+1)$ -цилиндр без одного поперечного ребра, и нас интересуют его нормальные раскраски. По лемме 3.1 он красится так же, как полный  $(k+1)$ -цилиндр, так что нужное нам число —  $\mathcal{NC}_{k+1}$ . В последних двух слагаемых  $aa'$  и  $bb'$  покрашены по-разному,  $cc'$  и  $dd'$  покрашены по-разному, но эти две пары цветов совпадают, тогда склеим каждую пару рёбер одинакового цвета в одно ребро, и получится гирляндная раскраска либо цилиндра, либо ленты Мёбиуса.

Далее, чтобы не мучиться, мы рассмотрим случаи.

### 5.1. $k : 2$ .

Наше равенство принимает вид

$$\begin{aligned} \chi'_3(G) &= \chi'_3 \left( \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right) \cdot \frac{2^k + 2}{3} + \chi'_3 \left( \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right) \cdot \frac{2^{k+1} - 2}{6} + \chi'_3 \left( \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right) \cdot \frac{6}{6} + \chi'_3 \left( \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right) \cdot \frac{0}{6} = \\ &= \chi'_3 \left( \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right) \cdot \frac{2^k - 1}{3} + \chi'_3 \left( \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right) \cdot \frac{2^k - 1}{3} + \chi'_3 \left( \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right) + \chi'_3 \left( \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right) = \\ &= \chi'_3 \left( \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right) \cdot \frac{2^k - 1}{3} + \chi'_3 \left( \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right) = \chi'_3(H + a'b' + c'd') \cdot \frac{2^k - 1}{3} + \chi'_3(H + a'd' + b'c'). \end{aligned}$$

Мы тут воспользовались тем, что  $\chi'_3 \left( \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right) = \chi'_3 \left( \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right)$  — это верно, потому что в обоих случаях на раскраску  $H$  налагаются одинаковые ограничения — чтобы в вершинах  $a', b', c', d'$  не хватало одного и того же цвета.

Перешли к двум меньшим мультиграфам, и что дальше? Они же даже могут оказаться несвязными! Могут, поэтому придётся разбирать ещё случаи.

#### 5.1.а) Оба мультиграфа $H + a'b' + c'd'$ и $H + a'd' + b'c'$ несвязны.

Нетрудно понять, что тогда в  $H$  вершины  $a', b', c', d'$  находятся в четырёх разных компонентах связности. Тогда в  $H + a'b' + c'd'$  и  $H + a'd' + b'c'$  рёбра  $a'b', c'd', a'd', b'c'$  являются мостами, и по следствию 3.1 правильных раскрасок нет.

#### 5.1.б) Ровно один из мультиграфов $H + a'b' + c'd'$ и $H + a'd' + b'c'$ связен.

Мы оценим количество раскрасок связного мультиграфа сильно, а несвязного — слабо (то есть оценка у несвязного будет не меньше, чем у связного). Ситуация

симметрична с графской точки зрения, а вот с оценочной точки зрения — не совсем: раскраски  $H + a'b' + c'd'$  умножаются на коэффициент  $\frac{2^k-1}{3}$ , а раскраски  $H + a'd' + b'c'$  — на единицу. Поскольку  $\frac{2^k-1}{3} \geq 1$ , мы будем считать, что при коэффициенте  $\frac{2^k-1}{3}$  мы берём оценку несвязного мультиграфа, а при коэффициенте 1 — связного. Из транснеравенства следует, что оценка, где множители переставлены наоборот, сильнее, так что мы докажем только слабую.

Итак, мультиграф  $H + a'b' + c'd'$  несвязен. Он состоит из двух кубических компонент связности, в которых  $2x$  и  $2(n-k-x)$  вершин и в каждой из которых не более одной пары кратных рёбер. По пункту 2 индукционного предположения<sup>2</sup> получаем, что у двух компонент связности не более  $3 \cdot 2^{x-1}$  и  $3 \cdot 2^{n-k-x-1}$  раскрасок. По правилу произведения имеем  $\chi'_3(H + a'b' + c'd') \leq 9 \cdot 2^{n-k-2}$ .

Что касается  $H + a'd' + b'c'$ , заметим, что удаление  $a'd'$  и  $b'c'$  делает его несвязным мультиграфом  $H$ . Во-первых, это значит, что рёбра  $a'd'$  и  $b'c'$  не кратные — поэтому у нас нет кратных рёбер, и можно применить пункт 4. Но вместо этого заметим, что наш мультиграф не является рёберно трёхсвязным (как раз потому, что можно удалить  $a'd'$  и  $b'c'$ ), поэтому по предложению 3.1 он не является ни цилиндром, ни лентой Мёбиуса, тогда по пункту 3 у него не более  $3 \cdot 2^{n-k-2}$  раскрасок. Сложим:

$$\chi'_3(G) \leq 9 \cdot 2^{n-k-2} \cdot \frac{2^k-1}{3} + 3 \cdot 2^{n-k-2} = 3 \cdot 2^{n-2} - 3 \cdot 2^{n-k-2} + 3 \cdot 2^{n-k-2} = 3 \cdot 2^{n-2},$$

а это и есть ровно то, что нам надо.

**5.1.в)** *Оба мультиграфа  $H + a'b' + c'd'$  и  $H + a'd' + b'c'$  связны.*

В первом из этих двух мультиграфов нет кратных рёбер, поэтому по пункту 2 у него не более  $3 \cdot 2^{n-k-1}$  раскрасок. У второго мультиграфа могут быть кратные рёбра, так что его раскраски можно оценить из пункта 1 как  $3 \cdot 2^{n-k}$ . Но заметим, что при  $k = 2$  наличие кратного ребра, скажем,  $a'd'$  означает, что в графе  $G$  вершины  $abcd$  и  $aa'd'd$  образуют два 4-цикла с общим ребром, у которых остальные вершины не пересекаются. Это 3-лента, а мы предполагали, что мы рассмотрели  $k$ -ленту с наибольшим  $k$  — получилось бы противоречие с  $k = 2$ . Значит, при  $k = 2$  можно по пункту 2 сделать оценку  $3 \cdot 2^{n-k}$ . В общем случае получается  $3 \cdot 2^{n-k-[k=2]}$ , где  $[k=2]$  равно единице, если  $k = 2$ , а иначе равно нулю.

Теперь всё просто:

$$\begin{aligned} \chi'_3(G) &\leq 3 \cdot 2^{n-k-1} \cdot \frac{2^k-1}{3} + 3 \cdot 2^{n-k-[k=2]} = 2^{n-1} - 2^{n-k-1} + 3 \cdot 2^{n-k-[k=2]} = \\ &= 2^{n-1} + 2^{n-k-1} (3 \cdot 2^{1-[k=2]} - 1). \end{aligned}$$

Мы хотим доказать, что

$$2^{n-1} + 2^{n-k-1} (3 \cdot 2^{1-[k=2]} - 1) \leq 3 \cdot 2^{n-2}.$$

Преобразуем:

$$2^{n-k-1} (3 \cdot 2^{1-[k=2]} - 1) \leq 2^{n-2}.$$

$$3 \cdot 2^{1-[k=2]} - 1 \leq 2^{k-1}.$$

<sup>2</sup>Казалось бы, можно применить пункт 4, ведь он сильнее и, кроме того, точен для графов без кратных рёбер. Но так получается, что он очень неудобен в применении, и обычно вместо него удобнее применить более слабую оценку, которая, тем не менее, точна при  $n \leq 4$ .



Заметим, что оба мультиграфа  $H + a'b' + c'd'$  и  $H + a'c' + b'd'$  связные — иначе понятно, что удалением двух из четырёх рёбер  $aa'$ ,  $ad'$ ,  $bb'$ ,  $bc'$  можно сделать  $G$  несвязным, тогда  $G$  не рёберно трёхсвязный, а это разобрано в случае **2**.

Итак,  $H + a'b' + c'd'$  и  $H + a'c' + b'd'$  уже подходят под пункт **4**, но мы хотим подвести их под пункт **3**, а для этого надо бы доказать, что они неизоморфны ленте Мёбиуса и цилиндру. Для этого заметим, что каждое ребро в них лежит в одной или в двух клетках. Поэтому оба ребра  $a'b'$  и  $c'd'$  (или  $a'c'$  и  $b'd'$ ) лежат максимум в четырёх клетках. Вот тут-то и сыграет то, что  $n \geq 6$ . Тогда  $n - 1 \geq 5$ . Если  $H + a'b' + c'd'$  или  $H + a'c' + b'd'$  — лента Мёбиуса или цилиндр, то она содержит пять клеток, и не более четырёх из них содержат добавленные рёбра, поэтому  $H$  содержит одну полноценную клетку — 4-цикл. Тогда её содержит и  $G$ , а тогда надо вернуться в случай **5**.

Вот и всё.

$$\chi'_3(G) \leq \chi'_3(H + a'b' + c'd') + \chi'_3(H + a'c' + b'd') \leq 3 \cdot 2^{n-3} + 3 \cdot 2^{n-3} = 3 \cdot 2^{n-2}.$$

□

## Приложение А. База индукции

Итак, наша теорема 3.1 доказана по модулю базы индукции — утверждения, что при  $n \leq 5$  в связных кубических графах на  $2n$  вершинах, не являющихся цилиндром и лентой Мёбиуса, не более  $3 \cdot 2^{n-2}$  правильных рёберных 3-раскрасок.

В этом деле нашим помощником выступает компьютерный перебор. Именно он, вообще говоря, натолкнул именно на такую формулировку теоремы 3.1: полный перебор всех графов, в которых не более 18 вершин, позволил определить ответ, единственные два экстремальных графа, которые к нему близки, а также «третье место» — количество раскрасок у графов, не занимающих два высших места.

Количество связных кубических графов на  $2n$  вершинах задаётся последовательностью A002851 в OEIS [2]. Ниже приведена таблица с некоторыми количествами.

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A002851( $n$ )	1	0	1	2	5	19	85	509	4060	41301	510489	7319447

Таблица 1: количество связных кубических графов на  $2n$  вершинах

Таким образом, для базы надо перебрать все правильные рёберные 3-раскраски  $1 + 0 + 1 + 2 + 5 + 19 = 28$  графов.

Вашему вниманию предлагаются раскраски всех графов на четырёх, шести, восьми и десяти вершинах. Раскраска рёбер, выходящих из выделенной вершины, зафиксирована, благодаря чему раскрасок в шесть раз меньше. Можно убедиться, что на четырёх вершинах есть только один граф с шестью раскрасками; на шести вершинах есть два графа с  $2^3 - 2 = 6$  и  $2^3 + 4 = 12$  раскрасками; на восьми вершинах есть по одному графу с  $2^4 + 2 = 18$  и  $2^4 + 8 = 24$  раскрасками, а у остальных графов не более  $3 \cdot 2^{4-2} = 12$  раскрасок; наконец, на десяти вершинах есть по одному графу с  $2^5 - 2 = 30$  и  $2^5 + 4 = 36$  раскрасками, а у остальных графов не более  $3 \cdot 2^{5-2} = 24$  раскрасок.

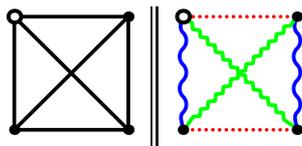


Таблица 2: графы на 4 вершинах

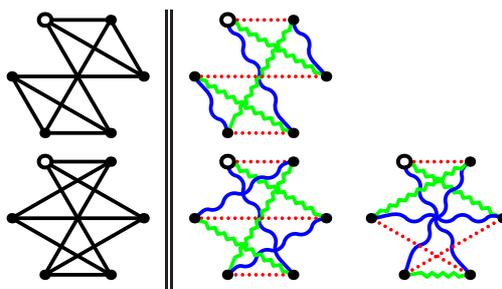


Таблица 3: графы на 6 вершинах

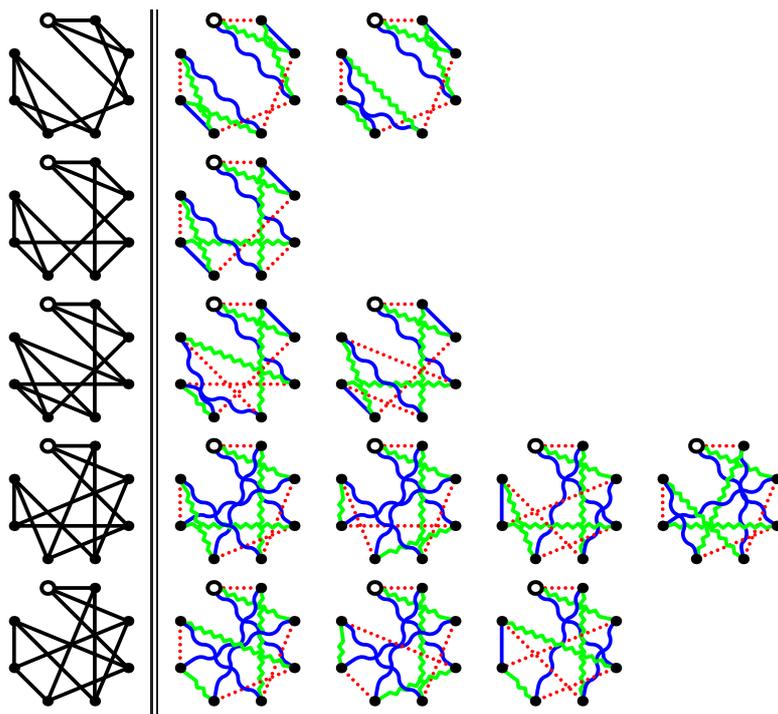
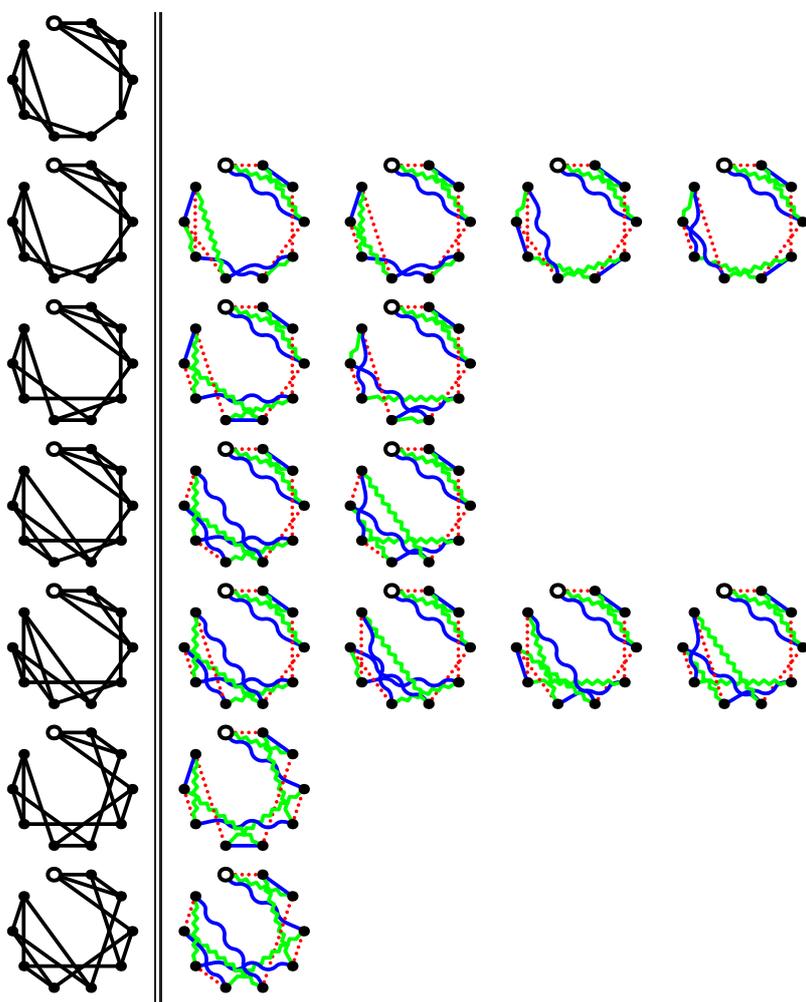


Таблица 4: графы на 8 вершинах



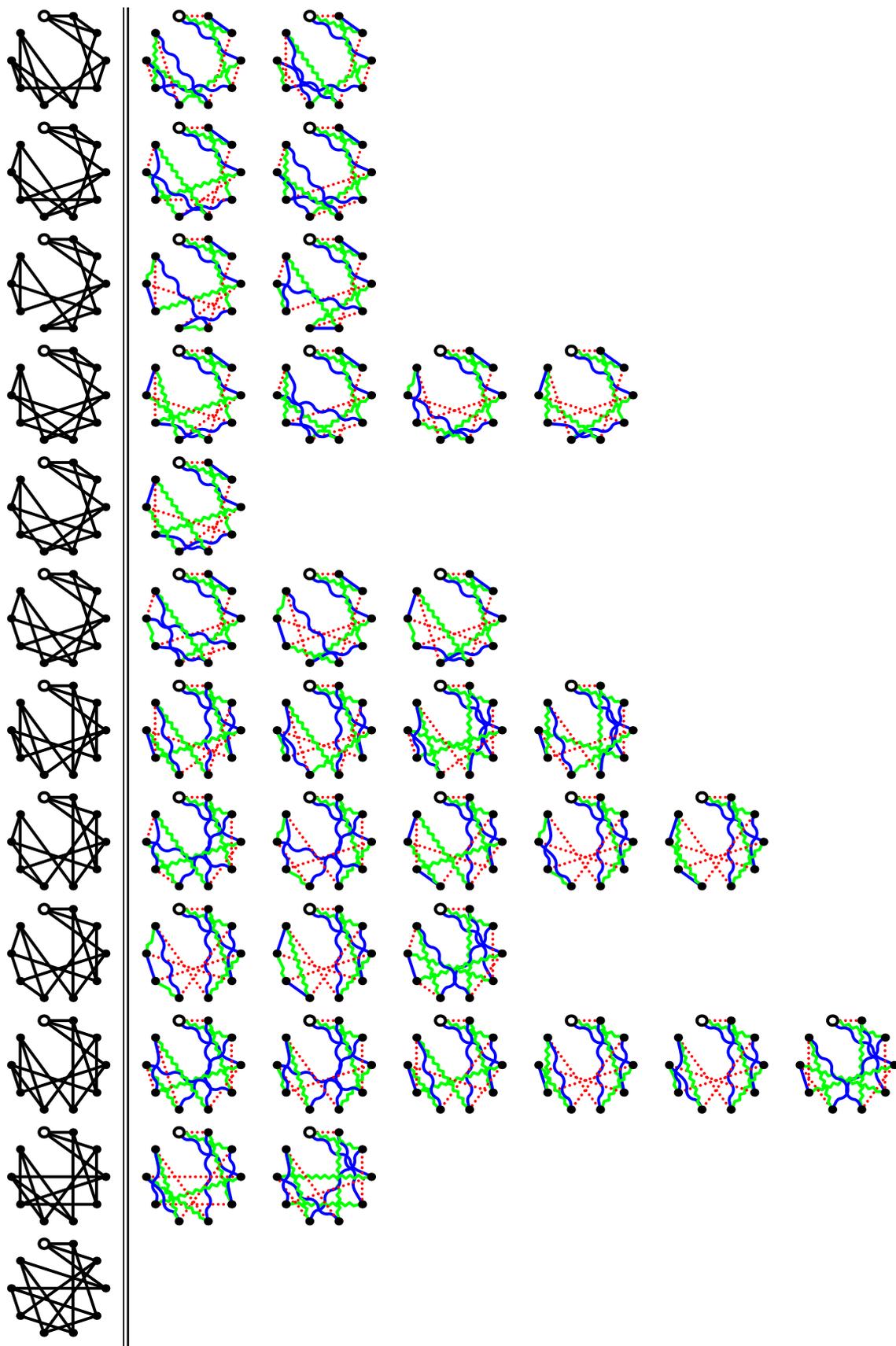


Таблица 5: графы на 10 вершинах

## Приложение В. Точность основной теоремы

Точны ли оценки, доказанные нами в 3.1?

Про пункт 1 мы уже знаем, что он точный при  $n \geq 1$ : об этом говорит следствие 2.2.

Можно понять точность пункта 2, если вспомнить, как он доказывался: в нём бралась пара кратных рёбер, удалялись их концы, а в полученном мультиграфе проводилось ребро между вершинами степени два. От этого количество раскрасок уменьшалось ровно вдвое. Запустим этот процесс в обратную сторону: начиная с  $K_4$ , будем брать ребро  $ab$ , удалять его, из его концов проводить два ребра  $aa'$  и  $bb'$  в две новые вершины  $a'$  и  $b'$  и эти две новые вершины соединять парой кратных рёбер. Если всегда брать в качестве  $ab$  концы кратных рёбер (кроме начальной ситуации: в  $K_4$  нет кратных рёбер, поэтому там берём любое ребро  $ab$ ), то в наших мультиграфах будет ровно одна пара кратных рёбер. Число раскрасок удваивается, а начинаем мы с  $K_4$ , у которого  $n = 2$  и  $\chi'_3(K_4) = 6$ , поэтому при  $n \geq 3$  мы построили мультиграф ровно с одной парой кратных рёбер и  $6 \cdot 2^{n-2} = 3 \cdot 2^{n-1}$  раскрасками. Так что при  $n \geq 3$  оценка точна; если же  $n \leq 2$ , то мультиграфов на  $2n$  вершинах ровно с одной парой кратных рёбер попросту не существует (лемма 3.2); впрочем, при  $n = 2$  всё ещё есть  $K_4$  с шестью раскрасками, в котором хоть и нет кратных рёбер, но оценка  $3 \cdot 2^{n-1}$  всё равно для него точна.

Кстати, описанный нами мультиграф — это лента, которую с одной стороны замкнули парой кратных рёбер (как эспандер), а с другой стороны залепили с помощью  $K_4$  без ребра.

Интересно обстоит дело с пунктом 3. Он точен при  $n \geq 4$  (при меньших  $n$  существует только  $n$ -цилиндр и  $n$ -лента Мёбиуса; при этом у 3-цилиндра как раз  $3 \cdot 2^{3-2}$  раскрасок). Чтобы это понять, надо рассмотреть ленту, которую с обеих сторон залепили с помощью  $K_4$  без ребра — другими словами, в только что описанном примере на  $3 \cdot 2^{n-1}$  надо удалить пару кратных рёбер  $ab$ , добавить две вершины  $a'$  и  $b'$  и между вершинами  $a, b, a', b'$  провести все рёбра, кроме  $ab$  — пять штук. От этого число раскрасок не меняется, а  $n$  увеличивается на единицу — как раз получается оценка пункта 3. Однако компьютерный перебор говорит, что графов с  $3 \cdot 2^{n-2}$  раскрасками существует несколько. Мы приводим их количество.

$n$	2	3	4	5	6	7	8	9
$3 \cdot 2^{n-2}$	3	6	12	24	48	96	192	384
Количество графов	0	1	2	4	7	6	6	6

Таблица 6: Количество связных кубических графов на  $2n$  вершинах с  $3 \cdot 2^{n-2}$  раскрасками

Странно, но это количество не особо сильно растёт. Может, оно ограниченное? Нам пока что это неизвестно.

Наконец, пункт 4 точен при  $n \geq 2$  согласно следствию 2.4.

## Список литературы

- [1] Д. В. Карпов, *О правильных 3-раскрасках рёбер кубического графа.* — Записки научных семинаров ПОМИ. Том 488, 2019 г., с. 31–48.
- [2] N. J. A. Sloane (редактор), *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, <https://oeis.org>