Санкт-Петербургский государственный университет

Тадевосян Арман Арменович

Выпускная квалификационная работа

Гауссовский процесс назначений

Уровень образования: бакалавриат
Направление: 01.03.01 «Математика»
Основная образовательная программа: СВ.5000.2017 «Математика»

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Лифшиц Михаил Анатольевич

Рецензент:
д.ф.-м.н., профессор
Белопольская Яна Исаевна

Санкт-Петербург
2021

Содержание

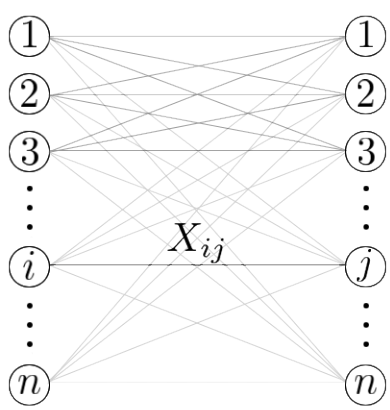
1 Введение

В данной работе рассматривается задача *о случайном назначении*. Задача формулируется следующим образом. Рассмотрим квадратную $n \times n$ матрицу (X_{ij}), состоящую из независимых, одинаково распределенных случайных величин, имеющих распределение $\mathcal{P}$, то есть $X_{ij} \sim \mathcal{P}$. Каждой перестановке $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ ставится в соответствие сумма

$$S(\pi) = \sum_{i=1}^{n} X_{i\pi(i)}.$$

В общей постановке задачи требуется изучить свойства случайной величины $\min_{\pi} S(\pi)$ или $\max_{\pi} S(\pi)$ и найти оптимальную перестановку π^* такую, что $\pi^* = \arg\min_{\pi} \mathbb{E}\left[S(\pi)\right]$ или $\pi^* = \arg\max_{\pi} \mathbb{E}\left[S(\pi)\right]$.

Задача о назначениях возникает естественным образом из следующей оптимизационной задачи. Допустим, имеется n заказов и n станков, на которых можно выполнить эти заказы. Предположим, что величина X_{ij} отражает стоимость изготовления заказа i на станке j. На каждом станке можно выполнять лишь один заказ. Естественно желание минимизировать суммарную стоимость, потраченную на выполнение всех n заказов. Решением задачи будет являться оптимальное паросочетание на двудольном графе (см. рис. 1). В случае с максимумом можно думать о X_{ij} как, например, о количестве информации, передаваемой из источника i в приемник j.



Разновидности данной задачи встречаются во многих разделах математики, чем и обусловлен повышенный интерес к ней. Более подробно о возможных применениях можно прочитать в [1, 2].

Вариант задачи, когда случайные величины (X_{ij}) независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, был изучен в работе Steele [1], а также в работе Mézard и Parisi [3], в которой авторы доказали, что

$$\mathbb{E}\left[\min_{\pi\in\mathcal{S}_n} S(\pi)\right] = \zeta(2) - \frac{\zeta(2)+2\zeta(3)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \text{ при } n\to\infty.$$

Mézard и Parisi [4] были первыми, кто выдвинул гипотезу, что в экспоненциальном случае ($\mathcal{P} = \mathrm{Exp}(1)$) имеет место предельное соотношение:

$$\mathbb{E}\left[\min_{\pi\in\mathcal{S}_n} S(\pi)\right] \to \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Используя метод реплик из статистической физики [5], авторы привели нестрогую аргументацию в подтверждение своей гипотезы.

Позднее в [6] Parisi выдвинул гипотезу об аналитическом выражении для математического ожидания минимума процесса назначений в экспоненциальном случае при фиксированном n:

$$\mathbb{E}\left[\min_{\pi\in\mathcal{S}_n} S(\pi)\right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Данная гипотеза была подтверждена автором при $n = 1, 2$ и при $n \to \infty$. Кроме того, он не смог найти противоречий в численных экспериментах при малых n, что мотивировало в поиске доказательства гипотезы. Доценко в своей работе [7] исследовал точное решение задачи в экспоненциальном случае.

Coppersmith - Sorkin [2] и другие [8, 9] исследовали точные формулы для связанных задач, например, для случая построения паросочетаний на графе из двух неравных долей размеров m и n. Так, например, Sorkin [8] рассмотрел матрицу A размера $m \times n$, состоящую из независимых стандартных экспоненциальных случайных величин и определил функцию $A^*(k, m, n)$, которая равна наименьшей сумме k элементов матрицы A, таких, что никакие два не находятся в одной строке или столбце. Подчеркивается, что случай $k = m = n$ совпадает со стандартной постановкой задачи. Гипотеза утверждает, что

$$\mathbb{E}\left[A^*(k, m, n)\right] = \sum_{2\le i+j<k} \frac{1}{m-i}\frac{1}{n-j},$$

и в частности,

$$\mathbb{E}\left[A^*(n,n,n)\right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2},$$

что совпадает со стандартной гипотезой, выдвинутой Parisi. Данная гипотеза была доказана в работе Sorkin [8] при малых значениях k, m, n.

В своей работе [10] Aldous дал строгое доказательство предельного соотношения в экспоненциальном случае

$$\mathbb{E}\left[\min_{\pi \in \mathcal{S}_n} S(\pi)\right] \to \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6},$$

тем самым доказав гипотезу, выдвинутую Mézard и Parisi [4]. Также был доказан ряд других гипотез относительно распределения весов ребер в построенном оптимальном паросочетании. В своей работе Aldous продолжил подход, разработанный в одной из своих предыдущих статей [11]. Подход основан на анализе задачи назначения на бесконечном дереве, ребра которого имеют неотрицательные веса, распределенные как Exp(1).

В данной работе рассматривается частный случай задачи о случайном назначении, когда распределение величин $\mathcal{P}$ является стандартным нормальным, то есть $\mathcal{P} = \mathcal{N}(0,1)$, и исследуется *максимум* случайного назначения. Далее мы будем называть такой процесс *гауссовским процессом назначений*. Подчеркнем, что гауссовское распределение имеет неограниченный носитель, что принципиально меняет результаты: математическое ожидание максимума не стремится к конечному пределу, а неограниченно возрастает с ростом n. Из свойства максимума процесса можно получить свойства *минимума*, поскольку стандартное нормальное распределение симметрично относительно нуля.

Основным результатом данной работы является теорема о поведении математического ожидания максимума гауссовского процесса назначений при $n \to \infty$:

Теорема 1.1. *Пусть $S(\cdot)$ — гауссовский процесс, заданный на симметрической группе $\mathcal{S}_n$ как*

$$S(\pi) = \sum_{i=1}^{n} X_{i\pi(i)},$$

где X_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$ — независимые стандартные нормальные случайные величины.

Тогда имеет место предельное соотношение:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\left[\max_{\pi\in\mathcal{S}_n} S(\pi)\right]}{n\sqrt{2\log n}} = 1.$$

В работе также построена *жадная* случайная перестановка π^*, которая является асимптотически оптимальной в смысле математического ожидания, то есть
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\left[S(\pi^*)\right]}{n\sqrt{2\log n}} = 1.$$
Конструкция π^* приведена в разделе 4.3. В дополнение к исследованию математического ожидания доказана центральная предельная теорема для нормированной величины $\left(S(\pi^*) - \mathbb{E}\left[S(\pi^*)\right]\right)/\sqrt{\mathbb{D}\left[S(\pi^*)\right]}$.

Теорема 1.2. *Справедлива центральная предельная теорема*
$$\frac{S(\pi^*) - A_n}{B_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}\left(0, 1\right),$$
где
$$\begin{aligned} A_n &= n\sqrt{2\log n} + O\left(\frac{n\log\log n}{\sqrt{\log n}}\right), \\ B_n^2 &= \frac{\pi^2}{12}\frac{n}{\log n} + o\left(\frac{n}{\log n}\right), \end{aligned}$$
причём имеет место скорость сходимости
$$\sup_{r\in\mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\left[\frac{S(\pi^*) - A_n}{B_n} \le r\right] - \Phi(r) \right| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$
где $\Phi(\cdot)$ — функция распределения стандартного нормального закона.

Кроме того получены двусторонние оценки модуля непрерывности гауссовского процесса назначений. Пусть $(\mathcal{S}_n, d_H)$ —метрическое пространство перестановок множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, снабженное расстоянием Хемминга d_H. Расстояние Хемминга d_H равно количеству позиций, в которых различаются перестановки. Формально d_H можно записать как $d_H(\pi, \sigma) = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{\pi(i) \ne \sigma(i)\}$. Обозначим $B_H(\pi, R; n)$ шар радиуса R в пространстве $(\mathcal{S}_n, d_H)$ с центром в $\pi \in \mathcal{S}_n$.

Теорема 1.3. *Для любых $\pi \in \mathcal{S}_n$ и $3 \le R \le n$ имеют место асимптотические оценки*
$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\max_{\sigma\in B_H(\pi,R;\,n)} \left|S(\pi) - S(\sigma)\right|\right] &\ge \frac{\sqrt{2}}{8}R\sqrt{\log n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{\log n}}\right),\ n\to\infty, \\ \mathbb{E}\left[\max_{\sigma\in B_H(\pi,R;\,n)} \left|S(\pi) - S(\sigma)\right|\right] &\le 4R\sqrt{\log n} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log n}}\right),\ n\to\infty. \end{aligned}$$

Структура работы такова. В разделе 2 формально определена задача, которая была поставлена в рамках данного исследования. После этого в разделе 3 перечислены вспомогательные утверждения, на которые упираются доказательства основных результатов. В части 4 доказаны основные результаты, полученные в ходе работы. В разделе 4.1 доказаны верхние и нижние оценки математического ожидания максимума гауссовского процесса назначений. Показано, что математическое ожидание максимума гауссовского процесса назначений асимптотически ведет себя как $n\sqrt{2\log n}$. Также в разделе 4.2 получены асимптотические оценки математического ожидания модуля непрерывности. В конце работы доказана оптимальность *жадной стратегии* перестановки с точки зрения математического ожидания и дополнительно доказана центральная предельная теорема.

2 Постановка задачи

Рассмотрим квадратную матрицу $\mathbf{X} = (X_{ij})_{1 \le i,j \le n}$, состоящую из независимых стандартных гауссовских величин $X_{ij} \sim \mathcal{N}(0,1)$. Пусть $\mathcal{S}_n$ - группа перестановок на n элементах.

Каждой перестановке $\pi : \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ поставим в соответствие сумму

$$S(\pi) = \sum_{i=1}^{n} X_{i\pi(i)}.$$

Процесс $(S(\pi))_{\pi \in \mathcal{S}_n}$ называется *гауссовским процессом назначений*. Требуется исследовать свойства его максимума, а также описать свойства оптимальной перестановки, на которой достигается максимум. Кроме того, требуется построить двустороннюю оценку модуля непрерывности гауссовского процесса назначений.

3 Предварительные сведения

3.1 Обозначения и определения

Обозначение 3.1. Пусть A —произвольное множество. Будем обозначать $|A|$ мощность множества A.

Определение 3.2. Пусть (T,ρ) — метрическое пространство. Определим *энтропийное число* $N(\varepsilon) = N(\varepsilon \mid T,\rho)$ как минимальное количество множеств диаметра не более ε, достаточное, чтобы покрыть T.

Из данного определения следуют простые свойства. Очевидно, что $N(\cdot)$ — невозрастающая функция. Также известно (см. [12]), что $N(0+) < \infty \Leftrightarrow T$ относительно компактно.

Определение 3.3. Величина $\mathcal{H}(\varepsilon) = \mathcal{H}(\varepsilon \mid T,\rho) := \log N(\varepsilon)$ называется *метрической энтропией* пространства T.

Определение 3.4. Пусть (T,ρ) — метрическое пространство. Определим *емкостное число* $M(\varepsilon) = M(\varepsilon \mid T,\rho)$ как максимально возможное количество точек, которые можно так разместить в T, чтобы все попарные расстояния между ними были больше ε.

Также очевидно, что $M(\cdot)$ — невозрастающая функция. Кроме того,

$$M(0+) < \infty \Leftrightarrow T - \text{конечное множество}$$

и

$$M(\varepsilon) < \infty \text{ при всех } \varepsilon > 0 \Leftrightarrow T \text{ относительно компактно.}$$

Определение 3.5. Величина $\mathcal{C}(\varepsilon) = \mathcal{C}(\varepsilon \mid T, \rho) := \log M(\varepsilon \mid T, \rho)$ называется *метрической емкостью* пространства T.

Определение 3.6. Расстоянием Хемминга называется функция d_H, определенная на пространстве перестановок $\mathcal{S}_n$ порядка n как

$$d_H(\pi, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{\pi(i) \neq \sigma(i)\}.$$

Множество перестановок $\mathcal{S}_n$, снабженное расстоянием Хемминга, образует метрическое пространство.

Определение 3.7. Пусть d_H — расстояние Хемминга на $\mathcal{S}_n$. Множество $P \subset \mathcal{S}_n$ называется *ℓ-упаковочным* для $(\mathcal{S}_n, d_H)$, если для всех $\pi, \sigma \in P$ верно $d_H(\pi, \sigma) \geq \ell$.

Между величинами $N(\cdot)$ и $M(\cdot)$ существует естественная связь (см. [12]): для любого метрического пространства (T, ρ) и любого $\varepsilon > 0$ справедливы неравенства:

$$\begin{array}{rcccl} N(\varepsilon \mid T, \rho) & \leq & M(\varepsilon \mid T, \rho) & \leq & N(\varepsilon/2 \mid T, \rho), \\ \mathcal{H}(\varepsilon \mid T, \rho) & \leq & \mathcal{C}(\varepsilon \mid T, \rho) & \leq & \mathcal{H}(\varepsilon/2 \mid T, \rho). \end{array}$$

3.2 Базовые свойства

Утверждение 3.8. *Гауссовский процесс назначений стационарен относительно действия группы $\mathcal{S}_n$ и для любого $\pi \in \mathcal{S}_n$*

$$S(\pi) \sim \mathcal{N}(0, n).$$

Доказательство. Вторая часть утверждения следует из того факта, что $S(\pi)$ является суммой n независимых стандартных нормальных случайных величин.

Для стационарности требуется показать, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и любых $\pi_1, \dots, \pi_n, \pi \in \mathcal{S}_n$ распределения векторов

$$\begin{bmatrix} S(\pi_1) \\ \vdots \\ S(\pi_n) \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} S(\pi_1 \circ \pi) \\ \vdots \\ S(\pi_n \circ \pi) \end{bmatrix}$$

совпадают. Утверждается, что каждый из этих векторов имеет нормальное распределение и их параметры совпадают. Первый вектор является нормальным, так как для любых $\alpha_1, \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$ линейная комбинация компонент вектора является нормальной случайной величиной, поскольку сумма

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i S(\pi_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} X_{j\pi_i(j)}$$

является линейной комбинацией независимых нормальных случайных величин. Проведя аналогичные рассуждения для второго вектора можно убедиться, что второй вектор также нормален.

Следовательно, достаточно проверить, что совпадают попарные коварици, поскольку оба вектора имеют нулевое математическое ожидание.

Из утверждения 3.9 следует, что

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(S(\pi_i \circ \pi), S(\pi_j \circ \pi)) &= \mathbb{E}\left[S(\pi_i \circ \pi) S(\pi_j \circ \pi)\right] \\ &= \operatorname{tr}\left[A_{\pi_i \circ \pi \circ (\pi_j \circ \pi)^{-1}}\right] \\ &= \operatorname{tr}\left[A_{\pi_i \circ \pi \circ \pi^{-1} \circ \pi_j^{-1}}\right] = \operatorname{tr}\left[A_{\pi_i \circ \pi_j^{-1}}\right] = \operatorname{cov}(S(\pi_i), S(\pi_j)). \end{aligned}$$

□

Утверждение 3.9. *Пусть $A : \mathcal{S}_n \longrightarrow SL(n, \mathbb{Z})$ – представление группы $\mathcal{S}_n$ в $SL(n, \mathbb{Z})$ такое, что $\pi \mapsto A_\pi$ и $(A_\pi)_{ij} = \mathbb{1}\left[\pi(i) = j\right]$. Тогда $\mathbb{E}\left[S(\pi)S(\sigma)\right] = \operatorname{tr}\left[A_{\pi \circ \sigma^{-1}}\right]$.*

Доказательство. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[S(\pi)S(\sigma)\right] &= \mathbb{E}\left[\operatorname{tr}\left[\mathbf{X}A_\pi^\top\right] \operatorname{tr}\left[\mathbf{X}A_\sigma^\top\right]\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{X}A_\pi^\top)_{ii} \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{X}A_\sigma^\top)_{jj}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (\mathbf{X}A_\pi^\top)_{ii} (\mathbf{X}A_\sigma^\top)_{jj}\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} X_{ik}(A_\pi^\top)_{ki} \sum_{m=1}^{n} X_{jm}(A_\sigma^\top)_{mj}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} X_{ik}(A_\pi)_{ik}X_{jm}(A_\sigma)_{jm}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} (A_\pi)_{ik}(A_\sigma)_{jm}X_{ik}X_{jm}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} (A_\pi)_{ik}(A_\sigma)_{jm}\ \underbrace{\mathbb{E}\left[X_{ik}X_{jm}\right]}_{=\,\mathbb{1}[(i,k)=(j,m)]} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} (A_\pi)_{ik}(A_\sigma)_{ik} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} (A_\pi)_{ik}(A_\sigma^\top)_{ki} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (A_\pi A_\sigma^\top)_{ii} = \mathrm{tr}\left[A_\pi A_\sigma^\top\right] = \mathrm{tr}\left[A_\pi A_{\sigma^{-1}}\right] = \mathrm{tr}\left[A_{\pi\,\circ\,\sigma^{-1}}\right].
\end{aligned}
$$

□

Следствие 3.10. *Определим естественное расстояние ρ, порожденное случайным процессом $S(\cdot)$, как*

$$\rho^2(\pi,\sigma) = \mathbb{E}\left[(S(\pi) - S(\sigma))^2\right].$$

Тогда $\rho^2(\pi,\sigma) = 2d_H(\pi,\sigma)$, где d_H – расстояние Хемминга в $\mathcal{S}_n$.

Доказательство. Заметим, что $\mathbb{E}\left[S(\pi)S(\sigma)\right] = \mathrm{tr}\left[A_{\pi\,\circ\,\sigma^{-1}}\right] = n - d_H(\pi,\sigma)$. Отсюда следует цепочка равенств:

$$
\begin{aligned}
\rho^2(\pi,\sigma) &= \mathbb{E}\left[(S(\pi) - S(\sigma))^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[S(\pi)\right] + \mathbb{E}\left[S(\sigma)\right] - 2\mathbb{E}\left[S(\pi)S(\sigma)\right] \\
&= n + n - 2(n - d_H(\pi,\sigma)) \\
&= 2d_H(\pi,\sigma).
\end{aligned}
$$

□

3.3 Вспомогательные утверждения

Теорема 3.11. (*Нижняя оценка по Судакову*)

Пусть (T, ρ) - метрическое пространство, $(X_t,\, t \in T)$ – центрированный гауссовский процесс и $\varepsilon > 0$. Пусть $M(\varepsilon) := M\left(\varepsilon \,\middle|\, T, \rho\right)$ — емкостное число пространства T и $\mathcal{C}(\varepsilon) := \log M\left(\varepsilon \,\middle|\, T, \rho\right)$ — метрическая емкость пространства T. Тогда

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \in T} X_t\right] \geq 2^{-1/2} \nu(M(\varepsilon)) \sqrt{\mathcal{C}(\varepsilon)}\varepsilon.$$

где

$$\nu(n) \equiv \begin{cases} 0.648, & \text{при } 1 \leq n \leq 23, \\ \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{\log n}}, & \text{при } n \geq 24, \end{cases}$$

Доказательство. Доказательство см. [12, стр. 152, Теорема 5]. □

Теорема 3.12. (*Теорема сравнения Судакова–Ферника*)

Пусть $X(t), Y(t)$ – два центрированных гауссовских процесса, заданных на T. Пусть

$$\mathbb{E}\left[(X(t) - X(s))^2\right] \geq \mathbb{E}\left[(Y(t) - Y(s))^2\right], \quad \forall s, t \in T.$$

Тогда

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \in T} X(t)\right] \geq \mathbb{E}\left[\sup_{t \in T} Y(t)\right].$$

Доказательство. Доказательство см. [12, стр. 150, Теорема 4]. □

Лемма 3.13. (*О верхней оценке максимума,* [12]) *Пусть величины $\{X_j\}_{j=1}^N$ – центрированные нормальные случайные величины и $\max_{1 \leq j \leq N} \mathbb{E}\left[X_j^2\right] \leq \sigma^2$. Тогда*

$$\mathbb{E}\left[\max_{1 \leq j \leq N} X_j\right] \leq \sqrt{2 \log N} \sigma.$$

Доказательство. Оценим преобразование Лапласа: для любого λ верно

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda \max_{1 \leq j \leq N}\right)\right] &\leq \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^N \exp\left(\lambda X_j\right)\right] \\ &\leq \sum_{j=1}^N \exp\left(\lambda^2 \mathbb{E}\left[X_j^2\right]/2\right) \\ &\leq N \exp\left(\lambda^2 \sigma^2 / 2\right). \end{aligned}$$

По неравенству Йенсена

$$\lambda\mathbb{E}\left[\max_{1\le j\le N} X_j\right] \le \log\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda \max_{1\le j\le N} X_j\right)\right] \le \log N + \lambda^2\sigma^2/2.$$

Полагая здесь $\lambda = \sqrt{2\log N}\sigma^{-1}$, получаем требуемое. □

Лемма 3.14. (*О верхней оценке максимума модуля*)

Для любого центрированного гауссовского процесса $X(t), t \in T$, верна оценка

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in T}|X(t)|\right] \le 2\left(\mathbb{E}\left[\sup_{t\in T} X(t)\right] + \inf_{t\in T}\sqrt{\mathbb{D}\left[X(t)\right]}\right).$$

Доказательство. Доказательство см. [13, стр. 120, Предложение 10.2]. □

Лемма 3.15. (*О нижней оценке максимума,* [12])

Пусть $\{X_j\}_{j=1}^N$ – независимые центрированные нормальные случайные величины и $\min\limits_{1\le j\le N}\mathbb{E}\left[X_j^2\right] \ge \sigma^2$. Тогда при $c_* = 0.648$ и всех N верно

$$\mathbb{E}\left[\max_{1\le j\le N} X_j\right] \ge c_*\sqrt{\log N}\sigma.$$

Если $N > 23$, то

$$\mathbb{E}\left[\max_{1\le j\le N} X_j\right] \ge (\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{\log N}})\sqrt{\log N}\sigma.$$

Доказательство. Является частным случаем теоремы 3.11 для независимого процесса $X_t,\ t \in \{1, 2, \dots, N\}$ с ограниченным вторым моментом. □

Теорема 3.16. (Wang *et al.*, [14, предложение 3]) *Пусть n, $R \in \mathbb{N}$ и $A_H(n, R)$ — мощность наибольшего R-упаковочного множества в $\mathcal{S}_n$ относительно расстояния Хемминга d_H. Пусть $B_H(\mathbf{id}, R;\, n)$ и $|B_H(\mathbf{id}, R;\, n)|$ — шар с центром в тождественной перестановке* **id** *радиуса R в $(\mathcal{S}_n, d_H)$ и его мощность соответственно. Тогда справедлива двусторонняя оценка на $A_H(n, R)$:*

$$\frac{n!}{|B_H(\mathbf{id}, R-1;\, n)|} \le A_H(n, R) \le \frac{n!}{\left|B_H(\mathbf{id}, \left\lfloor\frac{R-1}{2}\right\rfloor;\, n)\right|}.$$

4 Основные результаты

4.1 Оценки максимума процесса назначений

Теорема 4.1. *Имеют место оценки*

$$\mathbb{E}\left[\max_{\pi\in\mathcal{S}_n} S(\pi)\right] \leq \sqrt{2n\log n!} = n\sqrt{2\log n} + O\left(\frac{n}{\sqrt{\log n}}\right), \text{ при } n\to\infty.$$

Доказательство. Поскольку $S(\pi)\sim\mathcal{N}(0,n)$ для всех $\pi\in\mathcal{S}_n$, то $\max\limits_{\pi\in\mathcal{S}_n}\mathbb{E}\left[S(\pi)^2\right] = n$. Воспользовавшись леммой 3.13, мгновенно получаем:

$$\mathbb{E}\left[\max_{\pi\in\mathcal{S}_n} S(\pi)\right] \leq \sqrt{2n\log n!}.$$

При достаточно больших n справедливо $\log n! = n\log n + O(n)$, откуда следует искомая асимптотика. □

Теорема 4.2. *Имеет место асимптотическая оценка*

$$\mathbb{E}\left[\max_{\pi\in\mathcal{S}_n} S(\pi)\right] \geq \frac{\sqrt{2}}{2}n\sqrt{\log n} + O\left(\frac{n}{\sqrt{\log n}}\right), n\to\infty.$$

Доказательство. Возьмем наибольшее ℓ-упаковочное множество $P_{n,\ell}$ в $(\mathcal{S}_n, d_H)$ и рассмотрим $\{X(\pi)\}_{\pi\in P_{n,\ell}}$ — семейство независимых случайных величин, таких, что $X(\pi)\sim\mathcal{N}(0,\ell)$. В упаковочном множестве $P_{n,\ell}$ справделивы неравенства:

$$\begin{aligned} d_H(\pi,\sigma) &\geq \ell, \quad \forall\pi,\sigma\in P_{n,\ell}, \\ \mathbb{E}\left[(S(\pi)-S(\sigma))^2\right] &= 2d_H(\pi,\sigma) \geq \mathbb{E}\left[(X(\pi)-X(\sigma))^2\right], \quad \forall\pi,\sigma\in P_{n,\ell}. \end{aligned}$$

Тогда для процессов $S(\cdot)$ и $X(\cdot)$ на множестве $P_{n,\ell}$ применима теорема 3.12:

$$\mathbb{E}\left[\max_{\pi\in P_{n,\ell}} S(\pi)\right] \geq \mathbb{E}\left[\max_{\pi\in P_{n,\ell}} X(\pi)\right].$$

Поскольку $\mathbb{E}\left[\max\limits_{\pi\in\mathcal{S}_n} S(\pi)\right] \geq \mathbb{E}\left[\max\limits_{\pi\in P_{n,\ell}} S(\pi)\right]$, достаточно найти нижнюю оценку $\mathbb{E}\left[\max\limits_{\pi\in P_{n,\ell}} X(\pi)\right]$.

Лемма 3.15 дает следующий результат:

$$\mathbb{E}\left[\max_{\pi\in P_{n,\ell}} X(\pi)\right] \geq \sqrt{2\ell\log|P_{n,\ell}|}, \ n\to\infty.$$

Наша ближайшая задача — решить оптимизационную задачу и оценить величину

$$\max_{\ell}\left[\sqrt{2\ell\log|P_{n,\ell}|}\right].$$

Найдем нижнюю оценку выражения $\ell\log|P_{n,\ell}|$. Задача нахождения оценок мощности упаковочных множеств в $\mathcal{S}_n$ относительно расстояния Хемминга хорошо изучена. Воспользуемся результатом теоремы 3.16 для $A_H(n,\ell) := |P_{n,\ell}|$:

$$|P_{n,\ell}| \geq \frac{n!}{|B_H(\mathbf{id},\ell-1;\,n)|}.$$

Мощность шара $|B_H(\mathbf{id},\ell;\,n)|$ можно вычислить как сумму мощностей сфер $S_H(\mathbf{id},r;\,n)$:

$$|B_H(\mathbf{id},\ell;\,n)| = \sum_{r=0}^{\ell}|S_H(\mathbf{id},r;\,n)| = \sum_{r=0}^{\ell}D_{n,n-r} = \sum_{r=0}^{\ell}\binom{n}{n-r}D_{r,0},$$

где $D_{n,k}$ – количество перестановок в $\mathcal{S}_n$ с k неподвижными точками. Числа $D_{r,0}$ можно вычислить (см. [15, теорема 1.1]) по формуле $D_{r,0} = \left\lfloor\frac{r!}{e}+\frac{1}{2}\right\rfloor$. Следовательно, можно записать асимптотику:

$$|B_H(\mathbf{id},\ell-1;\,n)| = \frac{n!}{(n-\ell+1)!}e^{-1} + O\left(n^{\ell-2}\right), \quad n\to\infty, \tag{4.1}$$

откуда получается нижняя оценка:

$$|P_{n,\ell}| \geq e\,(n-\ell+1)! + O\left(\frac{n!}{n^{\ell}}\right),\ n\to\infty.$$

Таким образом, при всех $\ell=\ell(n)$ получаем:

$$\begin{aligned}
\ell\log|P_{n,\ell}| &\geq \ell\log\left(e\,(n-\ell+1)! + O\left(\frac{n!}{n^{\ell}}\right)\right)\\
&= \ell + \ell\log\left((n-\ell+1)! + O\left(\frac{n!}{n^{\ell}}\right)\right)\\
&= \ell + \ell\log\Big((n-\ell+1)!\Big) + O\left(\frac{\ell}{n}\right),\ n\to\infty.
\end{aligned}$$

Пусть $\ell = bn$, $b\in(0,1)$. Тогда при достаточно больших n верно

$$\begin{aligned}
\log\Big((n-bn+1)!\Big) &= (n-bn+1)\log\Big(n-bn+1\Big) + O(n)\\
&= (1-b)n\log n + O(n),\ n\to\infty.
\end{aligned}$$

Поэтому выражение $\ell \log |P_{n,\ell}|$ при больших n оценивается снизу величиной

$$f(b,n) := b(1-b)n^2 \log n + O(n^2).$$

Главный член асимптотики функции f при $n \to \infty$ достигает своего максимума при $b = 1/2$. Поэтому имеет место нижняя оценка величины $\ell \log |P_{n,\ell}|$:

$$\ell \log |P_{n,\ell}| \geq f(1/2, n) = \frac{n^2}{4} \log n + O(n^2),\ n \to \infty,$$

откуда получаем оценку:

$$\sqrt{2\ell \log |P_{n,\ell}|} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} n \sqrt{\log n} + O\left(\frac{n}{\sqrt{\log n}}\right),\ n \to \infty.$$

$\square$

4.2 Оценки модуля непрерывности

Теорема 4.3. *Для любого* $\pi \in \mathcal{S}_n$ *и любого* $1 \le R \le n$ *имеет место асимптотическая оценка*

$$\mathbb{E}\left[\max_{\sigma \in B_H(\pi,R;\,n)} \left|S(\pi) - S(\sigma)\right|\right] \le 4R\sqrt{\log n} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log n}}\right),\ n \to \infty.$$

Доказательство. Для каждого $\sigma \in B_H(\pi, R;\, n)$ случайная величина $S(\pi) - S(\sigma)$ имеет нормальное распределение со средним

$$\mathbb{E}\left[S(\pi) - S(\sigma)\right] = 0$$

и дисперсией

$$\mathbb{D}\left[S(\pi) - S(\sigma)\right] = \mathbb{E}\left[(S(\pi) - S(\sigma))^2\right] = 2d_H(\pi, \sigma).$$

Следовательно, по лемме 3.14 можно оценить исходное математическое ожидание сверху величиной

$$2\left(\mathbb{E}\left[\max_{\sigma \in B_H(\pi,R;\,n)} (S(\pi) - S(\sigma))\right] + \min_{\sigma \in B_H(\pi,R;\,n)} \sqrt{\mathbb{D}\left[S(\pi) - S(\sigma)\right]}\right).$$

Поскольку

$$\min_{\sigma \in B_H(\pi,R;\,n)} \sqrt{\mathbb{D}\left[S(\pi) - S(\sigma)\right]} = \min_{\sigma \in B_H(\pi,R;\,n)} \sqrt{2d_H(\pi, \sigma)},$$

то

$$\mathbb{E}\left[\max_{\sigma \in B_H(\pi,R;\,n)} \left|S(\pi) - S(\sigma)\right|\right] \le 2\mathbb{E}\left[\max_{\sigma \in B_H(\pi,R;\,n)} (S(\pi) - S(\sigma))\right].$$

По лемме 3.13 получаем, что

$$\mathbb{E}\left[\max_{\sigma \in B_H(\pi,R;\,n)} (S(\pi) - S(\sigma))\right] \le \sqrt{2\log|B_H(\pi, R;\, n)|}\sqrt{\max_{\sigma \in B_H(\pi,R;\,n)} \mathbb{E}\left[(S(\pi) - S(\sigma))^2\right]}.$$

Поскольку $\mathbb{E}\left[(S(\pi) - S(\sigma))^2\right] = 2d_H(\pi, \sigma)$, то оценку можно переписать как

$$\mathbb{E}\left[\max_{\sigma \in B_H(\pi,R;\,n)} (S(\pi) - S(\sigma))\right] \le 2\sqrt{R\log|B_H(\pi, R;\, n)|}.$$

Утверждение теоремы следует из формулы 4.1, поскольку мощность шара B_H в пространстве $\mathcal{S}_n$ не меняется при сдвиге центра в тождественную перестановку. $\square$

Теорема 4.4. *Для любого $\pi \in \mathcal{S}_n$ и любого $3 \le R \le n$ имеет место асимптотическая оценка*

$$\mathbb{E}\left[\max_{\sigma \in B_H(\pi,R;\,n)} \left|S(\pi) - S(\sigma)\right|\right] \ge \frac{\sqrt{2}}{8} R\sqrt{\log n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{\log n}}\right),\ n \to \infty.$$

Доказательство. Заметим, что справедлива следующая оценка снизу:

$$\mathbb{E}\left[\max_{\sigma \in B_H(\pi,R;\,n)} \left|S(\pi) - S(\sigma)\right|\right] \ge \mathbb{E}\left[\max_{\sigma \in B_H(\pi,R;\,n)} \Big(S(\pi) - S(\sigma)\Big)\right].$$

Для каждого $\sigma \in B_H(\pi, R;\, n)$ случайная величина $S(\pi) - S(\sigma)$ имеет нормальное распределение со средним

$$\mathbb{E}\left[S(\pi) - S(\sigma)\right] = 0$$

и дисперсией

$$\mathbb{D}\left[S(\pi) - S(\sigma)\right] = \mathbb{E}\left[\left(S(\pi) - S(\sigma)\right)^2\right] = 2d_H(\pi, \sigma).$$

Для случайной величины $\max\limits_{\sigma \in B_H(\pi,R;\,n)} \Big(S(\pi) - S(\sigma)\Big)$ и фиксированного $\varepsilon > 0$ применима теорема Судакова:

$$\mathbb{E}\left[\max_{\sigma \in B_H(\pi,R;\,n)} \Big(S(\pi) - S(\sigma)\Big)\right] \ge\ \varepsilon\ \sqrt{\mathcal{C}\left(\varepsilon\ \Big|\ B_H(\pi, R;\, n),\ \sqrt{2d_H}\right)}.$$

Оценим метрическую емкость

$$\mathcal{C}\left(\varepsilon\ \Big|\ B_H(\pi, R;\, n),\ \sqrt{2d_H}\right).$$

Для этого необходимо оценить емкостное число

$$M\left(\varepsilon\ \Big|\ B_H(\pi, R;\, n),\ \sqrt{2d_H}\right).$$

Далее считаем, что у всех шаров центр в тождественной перестановке — от этого энтропийные характеристики не изменятся ввиду однородности пространства $\mathcal{S}_n$. Обозначим $B_H(n, R) := B_H(\mathbf{id}, R;\, n)$. Оценим емкостное число:

$$
\begin{aligned}
M\left(\varepsilon \;\middle|\; B_H(n,R),\ \sqrt{2d_H}\right) &= M\left(\frac{\varepsilon^2}{2} \;\middle|\; B_H(n,R),\ d_H\right) \geq M\left(\left\lceil\frac{\varepsilon^2}{2}\right\rceil \;\middle|\; B_H(n,R),\ d_H\right) \\
&\geq \frac{M\left(\left\lceil\frac{\varepsilon^2}{2}\right\rceil \;\middle|\; \mathcal{S}_n,\ d_H\right)}{N\left(R \;\middle|\; \mathcal{S}_n,\ d_H\right)} \geq \frac{M\left(\left\lceil\frac{\varepsilon^2}{2}\right\rceil \;\middle|\; \mathcal{S}_n,\ d_H\right)}{M\left(R \;\middle|\; \mathcal{S}_n,\ d_H\right)} \\
&= \frac{A_H\left(n, \left\lceil\frac{\varepsilon^2}{2}\right\rceil\right)}{A_H(n,R)} = \frac{\left|B_H\left(n, \lfloor (R-1)/2 \rfloor\right)\right|}{\left|B_H\left(n, \left\lceil\frac{\varepsilon^2}{2}\right\rceil - 1\right)\right|} \\
&= \frac{e^{-1}n^a + O\left(n^{a-1}\right)}{e^{-1}n^b + O\left(n^{b-1}\right)} \quad \text{при } n \to \infty,
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
a &:= \lfloor (R-1)/2 \rfloor, \\
b &:= \left\lceil\frac{\varepsilon^2}{2}\right\rceil - 1.
\end{aligned}
$$

Заметим, что для любого $R \geq 3$ верно неравенство

$$
\left\lfloor\frac{R-1}{2}\right\rfloor \geq \frac{R}{4},
$$

и для любого $\varepsilon > 0$ верно

$$
\left\lceil\frac{\varepsilon^2}{2}\right\rceil - 1 \leq \frac{\varepsilon^2}{2}.
$$

Следовательно, можно переписать нижнюю оценку как

$$
\frac{e^{-1}n^a + O\left(n^{a-1}\right)}{e^{-1}n^b + O\left(n^{b-1}\right)} \geq f(\alpha,\beta,n) := \frac{e^{-1}n^\alpha + O\left(n^{\alpha-1}\right)}{e^{-1}n^\beta + O\left(n^{\beta-1}\right)},
$$

где

$$
\begin{aligned}
\alpha &:= \frac{R}{4}, \\
\beta &:= \frac{\varepsilon^2}{2}.
\end{aligned}
$$

Сформулируем и докажем вспомогательную лемму.

Лемма 4.5. *Пусть $C, \alpha, \beta > 0$, тогда при $n \to \infty$ справедлива асимптотика*

$$\sqrt{\log \frac{Cn^\alpha + O\left(n^{\alpha-1}\right)}{Cn^\beta + O\left(n^{\beta-1}\right)}} = \sqrt{(\alpha-\beta)\log n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{\log n}}\right).$$

Доказательство. Для начала определим асимптотику функции внутри логарифма:

$$\begin{aligned}
\frac{Cn^\alpha + O\left(n^{\alpha-1}\right)}{Cn^\beta + O\left(n^{\beta-1}\right)} &= \left(Cn^\alpha + O\left(n^{\alpha-1}\right)\right)\left(Cn^\beta + O\left(n^{\beta-1}\right)\right)^{-1} \\
&= \left(Cn^\alpha + O\left(n^{\alpha-1}\right)\right)\left(C^{-1}n^{-\beta} + O\left(n^{-\beta-1}\right)\right) \\
&= n^{\alpha-\beta} + O\left(n^{\alpha-\beta-1}\right).
\end{aligned}$$

Теперь посмотрим на логарифм:

$$\begin{aligned}
\log\left(n^{\alpha-\beta} + O\left(n^{\alpha-\beta-1}\right)\right) &= \log\left(n^{\alpha-\beta}\left(1 + O\left(n^{-1}\right)\right)\right) \\
&= \log n^{\alpha-\beta} + \log\left(1 + O\left(n^{-1}\right)\right) \\
&= (\alpha-\beta)\log n + O\left(n^{-1}\right).
\end{aligned}$$

И, наконец, рассмотрим корень:

$$\sqrt{(\alpha-\beta)\log n + O\left(n^{-1}\right)} = \sqrt{(\alpha-\beta)\log n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{\log n}}\right).$$

□

По лемме 4.5 получаем, что

$$\sqrt{\log f(\alpha,\beta,n)} = \sqrt{(\alpha-\beta)\log n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{\log n}}\right) = \sqrt{\left(\frac{R}{4} - \frac{\varepsilon^2}{2}\right)\log n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{\log n}}\right).$$

Таким образом, получаем нижнюю оценку корня из метрической емкости при $n \to \infty$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\mathcal{C}\left(\varepsilon \;\middle|\; B_H(n,R),\ \sqrt{2d_H}\right)} &= \sqrt{\log M\left(\varepsilon \;\middle|\; B_H(n,R),\ \sqrt{2d_H}\right)} \\
&\geq \sqrt{\left(\frac{R}{4} - \frac{\varepsilon^2}{2}\right)\log n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{\log n}}\right).
\end{aligned}$$

Положим $\varepsilon := C\sqrt{R}$ для некоторой консанты $C > 0$ и оптимизируем главный член асимптотики

$$C\sqrt{R}\sqrt{\left(\frac{R}{4} - \frac{C^2 R}{2}\right)\log n} = \frac{C\sqrt{1-2C^2}}{2} R\sqrt{\log n}$$

по константе C.

Максимальное значение данного выражения достигается при $C = \frac{1}{2}$, откуда находим константу в главном члене асимптотики:

$$\frac{C\sqrt{1-2C^2}}{2} = \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

Таким образом, мы получили нижнюю оценку математического ожидания модуля непрерывности при $3 \leq R \leq n$ и $n \to \infty$:

$$\mathbb{E}\left[\max_{\sigma \in B_H(\pi, R; n)} \Big| S(\pi) - S(\sigma) \Big|\right] \geq \frac{\sqrt{2}}{8}\, R\sqrt{\log n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{\log n}}\right).$$

$\square$

4.3 Анализ *жадной* стратегии

Рассмотрим следующую *жадную* стратегию построения случайной перестановки π^*, обеспечивающей большое значение процесса назначений. Обозначим $[i] := \{1, 2, \ldots, i\}$. Положим

$$\pi^*(1) := \arg\max_j X_{1j},$$

и для всех $i = 2, \ldots, n$

$$\pi^*(i) := \arg \max_{j \notin \pi^*([i-1])} X_{ij}.$$

Стратегия называется жадной, потому что мы начинаем с первой строки матрицы $\mathbf{X}$ и каждый раз берем наибольший элемент в строке и затем забываем столбец, из которого был взят элемент. В последующие разы в качестве максимума выбирается элемент из пересечения текущей строки и допустимых столбцов матрицы.

Теорема 4.6. *Имеет место следующая асимптотическая оценка:*

$$\mathbb{E}\left[\max_{\pi \in \mathcal{S}_n} S(\pi)\right] \geq \mathbb{E}\left[S(\pi^*)\right] \geq n\sqrt{2\log n} + O\left(n\right), \; n \to \infty.$$

Доказательство. Из неравенства

$$\max_{\pi \in \mathcal{S}_n} S(\pi) \geq S(\pi^*) = \sum_{i=1}^n X_{i\pi^*(i)}$$

сразу следует, что

$$\mathbb{E}\left[\max_{\pi \in \mathcal{S}_n} S(\pi)\right] \geq \mathbb{E}\left[S(\pi^*)\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[X_{i\pi^*(i)}\right].$$

Зафиксируем i и обозначим $m = m(n,i) := n - i + 1$. Заметим, что m случайных величин

$$\{X_{ij} \mid j \notin \pi^*([i-1])\}$$

независимы и распределены по стандартному нормальному закону.

Обозначим $\mathcal{A} := \{\omega \mid \max_{j \notin \pi^*([i-1])} X_{ij} \geq 0\}$. Рассмотрим математическое ожидание $\mathbb{E}\left[X_{i\pi^*(i)}\right]$ и перепишем его следующим образом:

$$\mathbb{E}\left[X_{i\pi^*(i)}\right] = \mathbb{E}\left[\max_{j \notin \pi^*([i-1])} X_{ij}\right] = \mathbb{E}\left[\max_{j \notin \pi^*([i-1])} X_{ij} \mathbb{1}_{\mathcal{A}}\right] + \mathbb{E}\left[\max_{j \notin \pi^*([i-1])} X_{ij} \mathbb{1}_{\mathcal{A}^C}\right].$$

Второе слагаемое является маленьким, поскольку

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\left[\max_{j\notin\pi^*([i-1])} X_{ij}\mathbb{1}_{\mathcal{A}^C}\right]\right| &= \left|\mathbb{P}\left[\mathcal{A}^C\right]\cdot\mathbb{E}\left[\max_{j\notin\pi^*([i-1])} X_{ij} \;\middle|\; X_{ij}<0\ \forall j\ \notin \pi^*([i-1])\right]\right| \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^m \cdot \mathbb{E}\left[|X_1|\right] = o(1).\end{aligned}$$

Рассмотрим первое слагаемое:

$$\mathbb{E}\left[\max_{j\notin\pi^*([i-1])} X_{ij}\mathbb{1}_{\mathcal{A}}\right] = \int\limits_0^\infty \mathbb{P}\left[\max_{j\notin\pi^*([i-1])} X_{ij}\mathbb{1}_{\mathcal{A}} > t\right] dt.$$

Очевидно, что

$$\mathbb{P}\left[\max_{j\notin\pi^*([i-1])} X_{ij}\mathbb{1}_{\mathcal{A}} \leq t\right] \leq \Phi^m(t).$$

Поэтому для любого $0 < r < \infty$ справделивы неравенства:

$$\mathbb{E}\left[\max_{j\notin\pi^*([i-1])} X_{ij}\mathbb{1}_{\mathcal{A}}\right] = \int\limits_0^\infty \left(1-\Phi^m(t)\right) dt \geq \int\limits_0^r \left(1-\Phi^m(t)\right) dt \geq r\left(1-\Phi^m(r)\right).$$

Оценим сверху величину $\Phi^m(r)$:

$$\Phi^m(r) = (1-\hat{\Phi}(r))^m \leq \exp\left(-m\hat{\Phi}(r)\right),$$

где $\hat{\Phi}$ – хвост стандартного нормального закона. Воспользуемся неравенством

$$\hat{\Phi}(r) \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r^3}\right)e^{-r^2/2}.$$

При больших $r := r(m) = \sqrt{2\log m} - 1$ получаем

$$\exp\left(-m\hat{\Phi}(r)\right) = o(1),$$

откуда получаем, что

$$\mathbb{E}\left[\max_{j\notin\pi^*([i-1])} X_{ij}\mathbb{1}_{\mathcal{A}}\right] \geq \sqrt{2\log m}\ (1+o(1))$$

и, следовательно,

$$\mathbb{E}\left[X_{i\pi^*(i)}\right] \geq \sqrt{2\log m}\ \left(1 + o\left(1\right)\right) + o(1).$$

Таким образом, получаем оценку снизу:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\max_{\pi\in\mathcal{S}_n} S(\pi)\right] \geq \mathbb{E}\left[S(\pi^*)\right] &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_{i\pi^*(i)}\right] \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2\log m(n,i)}\ \left(1 + o\left(1\right)\right) \\ &= \sum_{m=1}^{n} \sqrt{2\log m}\ \left(1 + o\left(1\right)\right).\end{aligned}$$

Поскольку

$$\sum_{m=1}^{n} \sqrt{2\log m} = n\sqrt{2\log n} + O\left(n\right),$$

то получаем

$$\mathbb{E}\left[\max_{\pi\in\mathcal{S}_n} S(\pi)\right] \geq \mathbb{E}\left[S(\pi^*)\right] \geq n\sqrt{2\log n} + O\left(n\right).$$

$\square$

Заметим, что данная теорема усиливает результат теоремы 4.2. Таким образом, из теорем 4.1 и 4.6 следует двусторонняя асимптотическая оценка для жадной перестановки π^*:

$$n\sqrt{2\log n} + O\left(n\right) \leq \mathbb{E}\left[S(\pi^*)\right] \leq n\sqrt{2\log n} + O\left(\frac{n}{\sqrt{\log n}}\right),\ \text{при}\ n \to \infty,$$

откуда получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\left[S(\pi^*)\right]}{n\sqrt{2\log n}} = 1.$$

Следовательно, жадная стратегия построения назначений является асимптотически оптимальной с точки зрения математического ожидания.

4.4 Центральная предельная теорема

Пусть π^* – перестановка, полученная жадной стратегией, которая была описана в разделе 4.3. Как было показано, из теорем 4.1 и 4.6 следует, что перестановка π^* асимптотически оптимальна с точки зрения математического ожидания. Величина $S(\pi^*)$ представляет собой сумму независимых величин, поэтому имеет смысл доказать для нее центральную предельную теорему, а также узнать скорость ее сходимости.

Пусть

$$\begin{aligned} A_n &:= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_{i\pi^*(i)}\right] = \mathbb{E}\left[S(\pi^*)\right], \\ B_n^2 &:= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{D}\left[X_{i\pi^*(i)}\right] = \mathbb{D}\left[S(\pi^*)\right]. \end{aligned}$$

Теорема 4.7. *Справедлива центральная предельная теорема:*

$$\frac{S(\pi^*) - A_n}{B_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0,1),$$

где

$$\begin{aligned} A_n &= n\sqrt{2\log n} + O\left(\frac{n\log\log n}{\sqrt{\log n}}\right), \\ B_n^2 &= \frac{\pi^2}{12}\frac{n}{\log n} + o\left(\frac{n}{\log n}\right), \end{aligned}$$

причём имеет место скорость сходимости:

$$\sup_{r\in\mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\left[\frac{S(\pi^*) - A_n}{B_n} \le r\right] - \Phi(r) \right| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Доказательство. Для доказательства центральной предельной теоремы достаточно проверить, что *дробь Ляпунова* с $\delta = 1$ стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^3} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left|X_{i\pi^*(i)} - \mathbb{E}\left[X_{i\pi^*(i)}\right]\right|^3\right] = 0.$$

Напомним, что $X_{i\pi^*(i)}$ представляет собой максимум из $m = m(n,i) := n - i + 1$ независимых случайных величин, каждая из которых распределена как стандартная нормальная случайная величина. Согласно утверждению [16, стр. 60] имеет место сходимость по распределению:

$$\frac{X_{i\pi^*(i)} - a_m}{b_m} \xrightarrow[m\to\infty]{d} G,$$

где G – случайная величина, распределенная по стандартному закону Гумбеля с функцией распределения $F_G(x) = \exp(-e^{-x})$,

$$\begin{aligned} a_m &:= \sqrt{2\log m} - \frac{\log\log m + \log 4\pi}{2\sqrt{2\log m}}, \\ b_m &:= (2\log m)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Известно (см. [17]), что у величины G существуют все моменты, в частности $\mathbb{E}[G] = \gamma, \mathbb{D}[G] = \zeta(2)$, где γ – постоянная Эйлера — Маскерони, $\zeta(\cdot)$ – дзета-функция Римана.

Сходимость по распределению сохраняется при непрерывных отображениях, следовательно,

$$\left|\frac{X_{i\pi^*(i)} - a_m}{b_m}\right|^3 \xrightarrow[n\to\infty]{d} |G|^3.$$

Сформулируем две вспомогательные леммы. Их доказательства можно посмотреть в разделе 5.

Лемма 4.8. *Для любых случайных величин Y_n и любых $0 < a < b$ из равномерной интегрируемости $|Y_n|^b$ следует равномерная интегрируемость $|Y_n|^a$.*

Лемма 4.9. *Пусть $M_n = \max\limits_{1\le i\le n} Z_i$, где $\{Z_i\}_{i=1}^n$ – независимые стандартные нормальные случайные величины. Определим последовательности вещественных чисел $(a_n)_n$ и $(b_n)_n$ следующим образом:*

$$\begin{aligned} a_n &:= \sqrt{2\log n} - \frac{\log\log n + \log 4\pi}{2\sqrt{2\log n}}, \\ b_n &:= (2\log n)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Тогда семейство случайных величин $\left\{\left|\frac{M_n - a_n}{b_n}\right|^3\right\}_n$ равномерно интегрируемо.

Из леммы 4.9 и сходимости по распределению следует ([18, стр. 31]), что

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{X_{i\pi^*(i)} - a_m}{b_m}\right|^3\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}\left[|G|^3\right].$$

Зафиксируем $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Из леммы 4.8 следует, что равномерно интегрируемы и меньшие степени, откуда можно найти асимптотическое выражение для математического ожидания и дисперсии величины $X_{i\pi^*(i)}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_{i\pi^*(i)}\right] &= a_m + b_m \mathbb{E}\left[G\right](1 + o(1)) = a_m + b_m \gamma (1 + o(1)), \\
\mathbb{D}\left[X_{i\pi^*(i)}\right] &= b_m^2\,\mathbb{D}\left[G\right](1 + o(1)) = b_m^2\,\zeta(2)(1 + o(1)) = \zeta(2)\left(2\log m\right)^{-1}(1 + o(1)), \\
\mathbb{E}\left[\left|X_{i\pi^*(i)} - a_m\right|^3\right] &= b_m^3 \mathbb{E}\left[|G|^3\right](1 + o(1)).
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Воспользовавшись выражением 4.2 для математического ожидания, получаем:

$$\left|a_m - \mathbb{E}\left[X_{i\pi^*(i)}\right]\right| = O\left(b_m\right).$$

Теперь оценим третий абсолютный центральный момент случайной величины $X_{i\pi^*(i)}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|X_{i\pi^*(i)} - \mathbb{E}\left[X_{i\pi^*(i)}\right]\right|^3\right] &= \mathbb{E}\left[\left|X_{i\pi^*(i)} - a_m + a_m - \mathbb{E}\left[X_{i\pi^*(i)}\right]\right|^3\right] \\
&\leq 4\,\mathbb{E}\left[\left|X_{i\pi^*(i)} - a_m\right|^3\right] + 4\left|a_m - \mathbb{E}\left[X_{i\pi^*(i)}\right]\right|^3 \\
&= O(b_m^3) = O\left((\log m)^{-3/2}\right).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left|X_{i\pi^*(i)} - \mathbb{E}\left[X_{i\pi^*(i)}\right]\right|^3\right] &\leq \sum_{i=1}^{n} O\left((\log m(i))^{-3/2}\right) \\
&= \sum_{m=1}^{n} O\left((\log m)^{-3/2}\right) \\
&= O\left(n\left(\log n\right)^{-3/2}\right).
\end{aligned}$$

В то же время, из выражения для дисперсии $X_{i\pi^*(i)}$ следует, что

$$\begin{aligned}
B_n^3 = (B_n^2)^{\frac{3}{2}} &= \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{D}\left[X_{i\pi^*(i)}\right]\right)^{\frac{3}{2}} \\
&= \left(\sum_{m=1}^{n} \zeta(2)\left(2\log m\right)^{-1}(1 + o(1))\right)^{\frac{3}{2}} \\
&= \left(\frac{\zeta(2)}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\sum_{m=1}^{n} \frac{1 + o(1)}{\log m}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{\zeta(2)}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{n(1 + o(1))}{\log n}\right)^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что дробь Ляпунова ограничена сверху величиной порядка $O(n^{-1/2})$, стремящейся к нулю при $n \to \infty$.

Следовательно, по теореме Ляпунова

$$\frac{S(\pi^*) - A_n}{B_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0,1).$$

Более того, по теореме Берри — Эссеена мы можем оценить скорость сходимости к нормальному закону: существует абсолютная константа $C > 0$, такая, что для любого n верно неравенство

$$\begin{aligned}\sup_{r\in\mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\left[\frac{S(\pi^*) - A_n}{B_n} \le r\right] - \Phi(r) \right| &\le C \cdot \left(B_n^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left|X_{i\pi^*(i)} - \mathbb{E}\left[X_{i\pi^*(i)}\right]\right|^3\right] \\ &= O(n^{-1/2}).\end{aligned}$$

Наконец, получим асимптотические выражения для A_n и B_n^2. Для начала оценим A_n:

$$\begin{aligned}A_n &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_{i\pi^*(i)}\right] = \sum_{m=1}^{n} (a_m + b_m \gamma(1 + o(1))) \\ &= \sum_{m=1}^{n} \left[\sqrt{2\log m} + O\left(\frac{\log\log m}{\sqrt{\log m}}\right) + \frac{\gamma(1+o(1))}{(2\log m)^{1/2}}\right] \\ &= n\sqrt{2\log n} + O\left(\frac{n\log\log n}{\sqrt{\log n}}\right).\end{aligned}$$

Теперь оценим B_n^2:

$$\begin{aligned}B_n^2 &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{D}\left[X_{i\pi^*(i)}\right] = \zeta(2) \sum_{m=1}^{n} (2\log m)^{-1}(1 + o(1)) \\ &= \frac{\pi^2}{12} \frac{n(1+o(1))}{\log n}.\end{aligned}$$

□

5 Доказательства лемм

Доказательство. (Доказательство леммы 4.8)

Равномерная интегрируемость $|Y_n|^b$ означает, что

$$\lim_{K\to\infty}\sup_n \mathbb{E}\left[\left|Y_n^b\right| \mathbb{1}_{\left|Y_n^b\right|\geq K}\right] = 0.$$

Перепишем индикатор для величин $|Y_n|^a$ в терминах индикатора $|Y_n|^b$:

$$\mathbb{1}_{|Y_n^a|\geq K} = \mathbb{1}_{|Y_n|^a\geq K} = \mathbb{1}_{|Y_n|^b\geq K^{b/a}} = \mathbb{1}_{\left|Y_n^b\right|\geq K^{b/a}}.$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}
\lim_{K\to\infty}\sup_n \mathbb{E}\left[\left|Y_n^a\right| \mathbb{1}_{|Y_n^a|\geq K}\right] &= \lim_{K\to\infty}\sup_n \mathbb{E}\left[\left|Y_n^a\right| \mathbb{1}_{\left|Y_n^b\right|\geq K^{b/a}}\right] \\
&\leq \lim_{K\to\infty}\sup_n \left(\mathbb{E}\left[\left|Y_n^a\right|^p \mathbb{1}^p_{\left|Y_n^b\right|\geq K^{b/a}}\right]\right)^{1/p} \\
&\overset{p:=b/a}{=} \lim_{K\to\infty}\sup_n \left(\mathbb{E}\left[\left|Y_n^b\right| \mathbb{1}_{\left|Y_n^b\right|\geq K^{b/a}}\right]\right)^{a/b} \\
&\overset{C:=K^{b/a}}{=} \left(\lim_{C\to\infty}\sup_n \mathbb{E}\left[\left|Y_n^b\right| \mathbb{1}_{\left|Y_n^b\right|\geq C}\right]\right)^{a/b} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Доказательство. (Доказательство леммы 4.9)

Докажем, что для некоторого $\delta > 0$ верно

$$\sup_n \mathbb{E}\left[\left|\frac{M_n - a_n}{b_n}\right|^{3+\delta}\right] < \infty.$$

Из утверждения [18, стр. 31] будет следовать равномерная интегрируемость семейства $\left\{\left|\frac{M_n-a_n}{b_n}\right|^3\right\}_n$. Покажем, что

$$\begin{aligned}
\sup_n \mathbb{E}\left[\left|\frac{M_n - a_n}{b_n}\right|^{3+\delta}\right] &= \sup_n \int\limits_0^\infty C_0(\delta) t^{2+\delta} \mathbb{P}\left[\left|\frac{M_n - a_n}{b_n}\right| \geq t\right] dt \\
&\leq C_0(\delta) \int\limits_0^\infty t^{2+\delta} \sup_n \mathbb{P}\left[\left|\frac{M_n - a_n}{b_n}\right| \geq t\right] dt < \infty.
\end{aligned}$$

Распишем подробнее хвостовую вероятность:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\left|\frac{M_n - a_n}{b_n}\right| \geq t\right] &= \mathbb{P}\left[\left|M_n - a_n\right| \geq b_n t\right] \\
&= \mathbb{P}\left[|M_n - a_n| \geq b_n t \;\middle|\; M_n \geq a_n\right] \mathbb{P}\left[M_n \geq a_n\right] \\
&+ \mathbb{P}\left[|M_n - a_n| \geq b_n t \;\middle|\; M_n \leq a_n\right] \mathbb{P}\left[M_n \leq a_n\right] \\
&= \mathbb{P}\left[M_n - a_n \geq b_n t\right] \mathbb{P}\left[M_n \geq a_n\right] \\
&+ \mathbb{P}\left[a_n - M_n \geq b_n t\right] \mathbb{P}\left[M_n \leq a_n\right] \\
&= \left(1 - \mathbb{P}\left[M_n \leq a_n + b_n t\right]\right)\left(1 - \mathbb{P}\left[M_n \leq a_n\right]\right) \\
&+ \mathbb{P}\left[M_n \leq a_n - b_n t\right] \mathbb{P}\left[M_n \leq a_n\right]
\end{aligned}$$

Поскольку для любого $a \in \mathbb{R}$ верна цепочка равенств

$$\mathbb{P}\left[M_n \leq a\right] = \mathbb{P}\left[\max_{i=1,\dots,n} Z_i \leq a\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left[Z_i \leq a\right] = \prod_{i=1}^{n} \Phi\left(a\right) = \Phi^n\left(a\right),$$

то имеем

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\left|\frac{M_n - a_n}{b_n}\right| \geq t\right] &= \left(1 - \Phi^n\left(a_n + b_n t\right)\right)\left(1 - \Phi^n\left(a_n\right)\right) + \Phi^n\left(a_n - b_n t\right)\Phi^n\left(a_n\right) \\
&\leq 1 - \Phi^n\left(a_n + b_n t\right) + \Phi^n\left(a_n - b_n t\right).
\end{aligned}$$

Заметим, что для всех n и для любого $t \geq 0$ верно

$$\Phi^n\left(a_n + b_n t\right) + \Phi^n\left(a_n - b_n t\right) \leq 1.$$

Отсюда получаем, что

$$\sup_n \mathbb{P}\left[\left|\frac{M_n - a_n}{b_n}\right| \geq t\right] \leq 2 \sup_n \left(1 - \Phi^n\left(a_n + b_n t\right)\right)$$

Оценим величину внутри супремума, воспользовавшись неравенством Бернулли и классической оценкой на хвост распределения стандартной нормальной случайной величины:

$$\begin{aligned}
1 - \Phi^n\left(a_n + b_n t\right) &= 1 - \left(1 - \hat{\Phi}\left(a_n + b_n t\right)\right)^n \\
&\leq 1 - \left(1 - n\hat{\Phi}\left(a_n + b_n t\right)\right) = n\hat{\Phi}\left(a_n + b_n t\right) \\
&\leq n\phi(a_n + b_n t),
\end{aligned}$$

где $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-1} \exp\left(-x^2/2\right)$.

Оценим сверху $n\phi(a_n + b_n t)$, для этого сначала раскроем скобки:

$$\begin{aligned} n\phi(a_n + b_n t) &= \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{(a_n+b_n t)^2}{2}}}{a_n + b_n t} \\ &= \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-t}\, n^{-1} \sqrt{2\pi} \sqrt{2\log n}\; e^{f_2(n,t)}\, e^{t f_1(n)}\, e^{f_0(n)}}{a_n + b_n t}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f_2(n,t) &= -\frac{t^2}{4\log n} \le 0 \text{ для всех } t \ge 0 \text{ и любых } n, \\ f_1(n) &= \frac{\log\log n + \log 4\pi}{4\log n} > 0 \text{ для всех } n, \text{ монотонно убывает}, \\ f_0(n) &= -\left(\frac{\log\log n + \log 4\pi}{4\sqrt{\log n}}\right)^2 < 0 \text{ для всех } n, \text{ монотонно возрастает}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} n\phi(a_n + b_n t) &\le \frac{e^{-t} \sqrt{2\log n}\, e^{t f_1(n)}}{a_n + b_n t} \\ &= \frac{e^{t(f_1(n)-1)} \sqrt{2\log n}}{a_n + b_n t}. \end{aligned}$$

Поскольку f_1 убывает по n, то

$$e^{t(f_1(n)-1)} \le e^{t \sup_n (f_1(n)-1)} = e^{t(f_1(2)-1)}$$

и $f_1(2) - 1 = \theta < 0$.

Оценив множитель, получаем

$$\frac{\sqrt{2\log n}}{a_n + b_n t} \le \frac{\sqrt{2\log n}}{a_n} \le K,$$

для некоторой абсолютной константы $K > 1$, поскольку $\frac{\sqrt{2\log n}}{a_n}$ убывает по n.

Таким образом, для всех n и всех $t \ge 0$ справедливо

$$n\phi(a_n + b_n t) \le K e^{\theta t}, \quad \theta < 0,$$

откуда

$$
\begin{aligned}
\sup_n \mathbb{E}\left[\left|\frac{M_n - a_n}{b_n}\right|^{3+\delta}\right] &\leq C_0(\delta)\int\limits_0^\infty t^{2+\delta}\sup_n \mathbb{P}\left[\left|\frac{M_n - a_n}{b_n}\right| \geq t\right] dt \\
&\leq C_1(\delta)\int\limits_0^\infty t^{2+\delta} e^{\theta t} dt \\
&= C_2(\delta, \theta)\Gamma(3+\delta) < \infty.
\end{aligned}
$$

$\square$

6 Заключение

В работе исследовано асимптотическое поведение максимума гауссовского процесса назначений. Сформулированы и доказаны некоторые вспомогательные утверждения, изучена литература по задаче о случайном назначении. Показано, что математическое ожидание максимума гауссовского процесса назначений достигается на жадной стратегии построения перестановки и этот результат асимптотически оптимален.

Благодарность

Автор выражает глубокую признательность доктору физико-математических наук, профессору Михаилу Анатольевичу Лифшицу за ценные замечания и помощь при написании данной работы.

Список литературы

[1] J. M. Steele. Probability theory and combinatorial optimization, volume 69 of *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*. 1997.

[2] D. Coppersmith and G. B. Sorkin. Constructive bounds and exact expectations for the random assignment problem. *Random Structures & Algorithms*, 15(2):113–144, 1999.

[3] M. Mézard and G. Parisi. On the solution of the random link matching problem. *Journal de Physique*, 48 (9):1451–1459, 1987.

[4] M. Mézard, G. Parisi, and M. A. Virasoro. Spin glass theory and beyond, volume 9 of *World Scientific Lecture Notes in Physics*. World Scientific, 1987.

[5] В. С. Доценко. Физика спин-стекольного состояния. *Успехи физических наук*, 163(6):1–37, 1993.

[6] G. Parisi. A conjecture on random bipartite matching, 1998. Preprint, `https://arxiv.org/abs/cond-mat/9801176`.

[7] V. S. Dotsenko. Exact solution of the random bipartite matching model. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 33(10):2015–2030, 2000.

[8] S. E. Alm and G. B. Sorkin. Exact expectations and distributions for the random assignment problem. *Combinatorics, Probability and Computing*, 11(3):217–248, 2002.

[9] M. W. Buck, C. S. Chan, and D. P. Robbins. On the expected value of the minimum assignment. *Random Structures & Algorithms*, 21(1):33–58, 2002.

[10] D. J. Aldous. The $\zeta(2)$ limit in the random assignment problem. *Random Structures & Algorithms*, 18(4):381–418, 2001.

[11] D. J. Aldous. Asymptotics in the random assignment problem. *Probability Theory and Related Fields*, 93(4):507–534, 1992.

[12] M. A. Lifshits. Gaussian random functions, volume 322 of *Mathematics and its Applications*. 1995.

[13] М. А. Лифшиц. Лекции по гауссовским процессам: Учебное пособие. *«Лань»*, Санкт-Петербург, 2016.

[14] X. Wang, Y. Zhang, Y. Yang, and G. Ge. New bounds of permutation codes under Hamming metric and Kendall's τ-metric. *Designs, Codes and Cryptography*, 85(3):533–545, 2017.

[15] M. Hassani. Derangements and applications. *Journal of Integer Sequences (JIS)*, 6:1–8, 2003.

[16] Я. Галамбош. Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. *Наука*, Москва, 1984.

[17] E.J. Gumbel. Les valeurs extrêmes des distributions statistiques. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 5(2):115–158, 1935.

[18] P. Billingsley. Weak convergence of measures: Applications in probability. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, Philadelphia, Pa., 1971.

[19] J. Quistorff. A survey on packing and covering problems in the Hamming permutation space. *Electronic Journal of Combinatorics*, 13(1):1, 13, 2006.